Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Е. Рябов, М. П. Харламов, Классификация особенностей в задаче о движении волчка Ковалевской в двойном поле сил, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 2, 111–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7758>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:27:27

УДК 517.938.5+531.38

П. Е. Рябов, М. П. Харламов

Классификация особенностей в задаче о движении волчка Ковалевской в двойном поле сил

Рассматривается задача о движении волчка Ковалевской в двойном поле сил (случай интегрируемости А. Г. Реймана–М. А. Семенова–Тян-Шанского без гиростатического момента). Это вполне интегрируемая гамильтонова система с тремя степенями свободы, не сводимая к семейству систем с двумя степенями свободы. Изучается критическое множество интегрального отображения. Приводится описание критических подсистем и бифуркационных диаграмм. Дана классификация всех невырожденных критических точек – положений равновесия (невырожденных особенностей ранга 0), особых периодических движений (невырожденных особенностей ранга 1), а также критических двухчастотных движений (невырожденных особенностей ранга 2).

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: особенности интегрируемых гамильтоновых систем, отображение момента, бифуркационная диаграмма.

§ 1. Введение

Задача о движении волчка Ковалевской в двойном поле сил описывается системой уравнений (см. [1])

$$\begin{aligned} 2\dot{\omega}_1 &= \omega_2\omega_3 + \beta_3, & \dot{\alpha}_1 &= \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, & \dot{\beta}_1 &= \beta_2\omega_3 - \omega_2\beta_3, \\ 2\dot{\omega}_2 &= -\omega_1\omega_3 - \alpha_3, & \dot{\alpha}_2 &= \omega_1\alpha_3 - \omega_3\alpha_1, & \dot{\beta}_2 &= \omega_1\beta_3 - \omega_3\beta_1, \\ \dot{\omega}_3 &= \alpha_2 - \beta_1, & \dot{\alpha}_3 &= \alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1, & \dot{\beta}_3 &= \beta_1\omega_2 - \beta_2\omega_1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ω – вектор мгновенной угловой скорости. Постоянные в инерциальном пространстве векторы α , β характеризуют действие силовых полей. Обозначения выберем так, чтобы выполнялось неравенство $|\alpha| \geq |\beta|$. Как показано в [2], без ограничения общности силовые поля можно считать взаимно ортогональными. Тогда геометрические интегралы системы (1.1) запишутся в виде ($a \geq b \geq 0$)

$$|\alpha|^2 = a^2, \quad |\beta|^2 = b^2, \quad \alpha \cdot \beta = 0. \quad (1.2)$$

Используя компоненты кинетического момента

$$M_1 = 2\omega_1, \quad M_2 = 2\omega_2, \quad M_3 = \omega_3,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00043).

перенесем на пространство $\mathbb{R}^9(\omega, \alpha, \beta)$ введенные в работе [1] скобки Пуассона

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \varepsilon_{ijk} M_k, & \{M_i, \alpha_j\} &= \varepsilon_{ijk} \alpha_k, & \{M_i, \beta_j\} &= \varepsilon_{ijk} \beta_k, \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0, & \{\alpha_i, \beta_j\} &= 0, & \{\beta_i, \beta_j\} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Система (1.1) примет вид $\dot{x} = \{x, H\}$, где x – любая из координат, а

$$H = \frac{1}{2}(2\omega_1^2 + 2\omega_2^2 + \omega_3^2) - \alpha_1 - \beta_2.$$

Функциями Казимира для скобок (1.3) являются левые части уравнений (1.2). Поэтому векторное поле (1.1), ограниченное на заданное этими уравнениями шестимерное подмногообразие $\mathcal{P}^6$ в $\mathbb{R}^9(\omega, \alpha, \beta)$, является гамильтоновой системой с тремя степенями свободы.

При $b = 0$ система (1.1) описывает случай С. В. Ковалевской движения твердого тела в поле силы тяжести, а при $a = b$ – случай Х. М. Яхьи (см. [3]). Для этих предельных случаев задачи обладают группой симметрий и редуцируются к семействам интегрируемых систем с двумя степенями свободы (конфигурационное пространство – сфера). Классический случай Ковалевской изучен в [4]–[6]. Случай Яхьи и его обобщения рассматривались в [7]. Глобальный подход к классификации интегрируемых систем на двумерной сфере, порожденных задачами динамики твердого тела с осесимметричным потенциалом, реализован в работах [8]–[10].

Далее предполагается, что

$$a > b > 0. \quad (1.4)$$

Функции

$$\begin{aligned} K &= (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2, \\ G &= \left[\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3\omega_3 \right]^2 + \left[\omega_1\beta_1 + \omega_2\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_3\omega_3 \right]^2 \\ &\quad + \omega_3 \left[(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\omega_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\omega_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\omega_3 \right] \\ &\quad - \alpha_1 b^2 - \beta_2 a^2 \end{aligned}$$

вместе с H образуют на $\mathcal{P}^6$ полный инволютивный набор интегралов системы (1.1). Интегралы K и G указаны в [1] и [11].

Определим интегральное отображение

$$\mathcal{F}: \mathcal{P}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (1.5)$$

полагая $\mathcal{F}(x) = (g = G(x), k = K(x), h = H(x))$. Отображение $\mathcal{F}$ принято называть *отображением момента*.

Обозначим через $\mathcal{C}$ совокупность всех критических точек отображения момента, т.е. точек, в которых $\text{rank } d\mathcal{F}(x) < 3$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}^3$ называется *бифуркационной диаграммой*. Множество $\mathcal{C}$ можно стратифицировать рангом отображения момента, представив в виде объединения

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^0 \cup \mathcal{C}^1 \cup \mathcal{C}^2.$$

Здесь

$$\mathcal{C}^r = \{x \in \mathcal{P}^6 \mid \text{rank } d\mathcal{F}(x) = r\}.$$

В соответствии с этим и диаграмма Σ становится клеточным комплексом $\Sigma = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2$. С другой стороны, на практике бифуркационные диаграммы описываются в терминах некоторых поверхностей в пространстве констант первых интегралов. Уравнения этих поверхностей (неявные или параметрические) зачастую можно получить, даже не вычисляя самих критических точек, как дискриминантные множества некоторых многочленов (например, исходя из особенностей алгебраических кривых, ассоциированных с представлениями Лакса). Такие поверхности будем обозначать через Γ_i и записывать представление

$$\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i, \quad \Sigma_i = \Sigma \cap \Gamma_i.$$

При этом, в свою очередь, каждое множество Σ_i стратифицировано

$$\Sigma_i = \Sigma_i^0 \cup \Sigma_i^1 \cup \Sigma_i^2$$

и различные множества Σ_i могут пересекаться между собой по стратам размерности меньше 2. Смысл такого представления в том, что критическое множество $\mathcal{C}$ оказывается объединением естественным образом возникающих инвариантных множеств $\mathcal{M}_i = \mathcal{C} \cap \mathcal{F}^{-1}(\Gamma_i)$. Если поверхность Γ_i записана регулярным уравнением

$$\phi_i(g, k, h) = 0, \tag{1.6}$$

то $\mathcal{M}_i$ определится как множество критических точек интеграла $\phi_i(G, K, H)$, лежащих на его нулевом уровне, а вычисленные в точке $\mathcal{M}_i$ компоненты градиента функции ϕ_i в подстановке значений интегралов G, K, H дадут коэффициенты равной нулю линейной комбинации дифференциалов dG, dK, dH . В точке трансверсального пересечения двух поверхностей Γ_i и Γ_j получим две независимые равные нулю комбинации, поэтому в точках соответствующего пересечения $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j$ ранг $\mathcal{F}$ равен 1. Очевидно, что точки трансверсального пересечения трех поверхностей (углы бифуркационной диаграммы) оказываются порожденными точками с условием $\text{rank } \mathcal{F} = 0$. Множества $\mathcal{M}_i$ с индуцированной на них динамикой далее называем критическими подсистемами.

Критические подсистемы и уравнения поверхностей Γ_i в рассматриваемой задаче найдены в работе [12]. Подробное описание стратификации критического множества по рангу отображения момента изложено в [13]. Там же в виде явных неравенств указаны области существования движений на поверхностях Γ_i – множества Σ_i , составляющие бифуркационную диаграмму. Как следствие построен атлас всех сечений диаграммы Σ плоскостями постоянной энергии, т.е. найдены все бифуркационные диаграммы $\Sigma(h)$ отображения $G \times K$, ограниченного на изоэнергетические поверхности $\{H = h\} \subset \mathcal{P}^6$. Краткая сводка этих результатов в необходимом объеме приведена ниже.

Критические подсистемы оказываются интегрируемыми почти всюду гамильтоновыми системами с числом степеней свободы меньшим трех. Для них, в свою очередь, определено индуцированное отображение момента. Бифуркационная диаграмма Σ_i^* для отображения $\mathcal{F}|_{\mathcal{M}_i}$ естественным образом

отождествляется с объединением $\Sigma_i^0 \cup \Sigma_i^1$. Описание критических множеств, диаграмм Σ_i^* и бифуркаций *внутри* критических подсистем получено в работах [14]–[16]. Однако классификация точек множества $\mathcal{C}$ по отношению ко всей системе с тремя степенями свободы на $\mathcal{P}^6$ не проводилась. В настоящей работе исследуется тип невырожденных особенностей полного отображения момента.

§ 2. Понятие невырожденной особенности

Напомним некоторые определения и факты, связанные с особенностями отображения момента и бифуркациями в случае многих степеней свободы [17]–[20]. Пусть

$$(\mathcal{P}^{2k}, \Omega, H, \mathcal{F}) \quad (2.1)$$

– интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система. Здесь $(\mathcal{P}^{2k}, \Omega)$ – симплектическое многообразие, динамика задана полем $v = \text{sgrad } H$ и $f_1, \dots, f_k$ – независимые (почти всюду) интегралы в инволюции, составляющие отображение момента

$$\mathcal{F}: \mathcal{P}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \mathcal{F}(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$$

с множеством критических точек $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0 \cup \mathcal{C}^1 \cup \dots \cup \mathcal{C}^{k-1}$, где

$$\mathcal{C}^r = \{x \in \mathcal{P}^{2k} \mid \text{rank } d\mathcal{F}(x) = r\}.$$

Для любой точки $x \in \mathcal{C}^r$ можно подобрать невырожденную линейную замену функций $(f_1, \dots, f_k) \mapsto (g_1, \dots, g_k)$ такую, что:

- 1) $dg_1(x) = \dots = dg_{k-r}(x) = 0$;
- 2) дифференциалы $dg_{k-r+1}(x), \dots, dg_k(x)$ линейно независимы.

Пусть φ – гладкая функция на $\mathcal{P}^{2k}$, для которой точка x критическая. Линеаризация $A_\varphi(x)$ векторного поля $\text{sgrad } \varphi$ в точке x является симплектическим оператором в касательном пространстве $T_x \mathcal{P}^{2k}$. Алгебру таких операторов отождествим с $\text{sp}(2k, \mathbb{R})$. Там, где это не приведет к недоразумению, обозначение точки в операторе вида A_φ опускаем.

Пусть $x \in \mathcal{C}^r$, $j \in \{1, \dots, k-r\}$. Обозначим $v_j = \text{sgrad } g_j$. Рассмотрим в $T_x \mathcal{P}^{2k}$ подпространство W , натянутое на $v_{k-r+1}, \dots, v_k$, и его косоортogonalное дополнение W' . Тогда $W \subset \text{Ker } A_{g_j}$ и $\text{Im } A_{g_j} \subset W'$. На факторпространстве W'/W имеется симплектическая структура $\tilde{\Omega}$, а операторы $\tilde{A}_{g_j} = A_{g_j}|_{W'/W}$ являются элементами алгебры Ли $\text{sp}(2(k-r), \mathbb{R})$. Таким образом, в вещественной симплектической алгебре Ли $\text{sp}(2(k-r), \mathbb{R})$ можно рассмотреть коммутативную подалгебру $\mathcal{A}(x, \mathcal{F})$, порожденную операторами $\tilde{A}_{g_1}, \dots, \tilde{A}_{g_{k-r}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Критическая точка $x \in \mathcal{C}^r$ отображения момента $\mathcal{F}$ называется *невырожденной ранга r (коранга $k-r$)*, если $\mathcal{A}(x, \mathcal{F})$ – подалгебра Картана в $\text{sp}(2(k-r), \mathbb{R})$.

Коммутативная подалгебра в $\text{sp}(2(k-r), \mathbb{R})$ является картановской тогда и только тогда, когда ее размерность равна $k-r$ и среди ее элементов найдется линейный оператор с различными собственными значениями (он называется регулярным оператором). Заметим, что касательное пространство $T_x \mathcal{P}^{2k}$

разлагается на два подпространства: $T_x \mathcal{P}^{2k} = V_1 \oplus V_2$, где V_1 – корневое подпространство, которое соответствует собственному значению 0 алгебраической кратности $2r$, а V_2 изоморфно W'/W . Характеристическое уравнение регулярного оператора A_{g_j} (если такой найдется), ограниченного на подпространство $V_2 \cong W'/W$, имеет такой же набор $2(k-r)$ различных собственных значений, что и регулярный элемент из картановской подалгебры $\mathcal{A}(x, \mathcal{F})$ в $\mathfrak{sp}(2(k-r), \mathbb{R})$.

Для невырожденных критических точек определяется модельное слоение Лиувилля: в пространстве $\mathbb{R}^{2k}$ с координатами $q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k$ и стандартной симплектической структурой задается набор функций

$$\begin{aligned} P_i^{\text{ell}} &= p_i^2 + q_i^2, & i &= 1, \dots, m_1; \\ P_j^{\text{hyp}} &= p_j q_j, & j &= m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2; \\ P_l^{\text{foc}} &= p_l q_l + p_{l+1} q_{l+1}, & P_{l+1}^{\text{foc}} &= p_l q_{l+1} - p_{l+1} q_l, \\ l &= m_1 + m_2 + 1, m_1 + m_2 + 3, \dots, m_1 + m_2 + 2m_3 - 1; \\ P_s &= q_s, & s &= m_1 + m_2 + 2m_3 + 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Их совместные уровни определяют каноническое лиувиллево слоение $\mathcal{S}_{\text{can}}$ в $\mathbb{R}^{2k}$ в окрестности точки 0, которая является невырожденной особой точкой отображения момента $\mathcal{F}_{\text{can}}: \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^k$, порожденного функциями (2.2). Ранг этой невырожденной особенности равен r , а тройка целых чисел (m_1, m_2, m_3) называется ее типом [19]. Таким образом, любая невырожденная особенность отображения момента $\mathcal{F}_{\text{can}}$ кратко характеризуется четверкой целых чисел (r, m_1, m_2, m_3) , где r – ранг отображения в особой точке, (m_1, m_2, m_3) – тип точки. При этом $m_1 + m_2 + 2m_3 + r = k$, где k – число степеней свободы рассматриваемой системы.

Следующая теорема [19] позволяет понять, как выглядит бифуркационная диаграмма в окрестности невырожденной особой точки. Она будет диффеоморфна бифуркационной диаграмме Σ_{can} модельного отображения момента $\mathcal{F}_{\text{can}}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть дана вещественно-аналитическая интегрируемая система с k степенями свободы на вещественно-аналитическом многообразии $\mathcal{P}^{2k}$. Тогда слоение Лиувилля в окрестности невырожденной особой точки ранга r типа (m_1, m_2, m_3) всегда локально симплектоморфно модельному слоению Лиувилля $\mathcal{S}_{\text{can}}$ с теми же параметрами. В частности, два слоения Лиувилля с совпадающими параметрами (r, m_1, m_2, m_3) локально симплектоморфны.

Как показано в работах [21], [22], утверждение теоремы остается верным, если невырожденную особую точку в формулировке теоремы заменить на компактную невырожденную особую орбиту пуассоновского действия, ассоциированного с системой (2.1). Такие орбиты могут быть организованы в критические подмногообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}^{2k}$ называется критическим подмногообразием ранга $m < k$ (коранга $k - m$), если:

- 1) $\mathcal{M}$ – гладкое подмногообразие в $\mathcal{P}^{2k}$ размерности $2m$;

- 2) $\Omega|_{\mathcal{M}} = \Omega|_{\mathcal{M}}$ есть симплектическая структура на $\mathcal{M}$;
- 3) $\mathcal{M}$ инвариантно относительно векторного поля $v = \text{sgrad } H$;
- 4) $\text{rank } \mathcal{F} = m$ почти всюду на $\mathcal{M}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\mathcal{M}$ – критическое подмногообразие ранга m , то $(\mathcal{M}, \Omega|_{\mathcal{M}}, H|_{\mathcal{M}})$ – вполне интегрируемая гамильтонова система с m степенями свободы.

Описанные в предыдущем параграфе критические подсистемы оказываются критическим многообразиями или их замыканиями. В последнем случае они являются критическими многообразиями почти всюду. Кроме нарушений гладкости фазовых пространств критических подсистем могут возникать особенности, связанные с вырождением индуцированной симплектической структуры. Это явление было впервые обнаружено Д. Б. Зотьевым [14].

Следующее утверждение позволяет установить глобальный тип критической точки, принадлежащей двум критическим подсистемам, зная ее типы относительно каждой. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – критические подмногообразия в $\mathcal{P}^{2k}$ ранга $m = k - 1$, а $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \mathcal{L}$ – критическое подмногообразие ранга $r = k - 2$, и пусть пересечение $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ трансверсально.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $x_0 \in \mathcal{L}$ – невырожденная критическая точка системы (2.1) ранга $k - 2$, имеющая тип $(\tau_1, \tau_2, 0)$, где $\tau_1 + \tau_2 = 2$. Тогда

- 1) для подсистемы на $\mathcal{L}$ эта точка регулярна;
- 2) для подсистем на $\mathcal{M}$ и на $\mathcal{N}$ эта точка критическая коранга 1, причем в подсистемах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ ее тип имеет вид $(m_1, m_2, 0)$ и $(n_1, n_2, 0)$ соответственно, а числа m_i, n_i связаны соотношениями $\tau_1 = m_1 + n_1, \tau_2 = m_2 + n_2, m_1 + m_2 = 1, n_1 + n_2 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению имеем

$$\begin{aligned} T_{x_0} \mathcal{P}^{2k} &= T_{x_0} \mathcal{M} + T_{x_0} \mathcal{N}, & T_{x_0} \mathcal{M} \cap T_{x_0} \mathcal{N} &= T_{x_0} \mathcal{L}, \\ \dim T_{x_0} \mathcal{M} &= \dim T_{x_0} \mathcal{N} = 2(k - 1), & \dim T_{x_0} \mathcal{L} &= 2(k - 2), \end{aligned}$$

и все указанные пространства инвариантны для операторов из $\text{sp}(2(k - 2), \mathbb{R})$, порождающих соответствующую подалгебру Картана.

Перейдем к описанию критических точек обобщенного волчка Ковалевской.

§ 3. Критические подсистемы и бифуркационные диаграммы

В этом параграфе излагается сводка результатов [12], [13], [23], [24], относящихся к нахождению критического множества отображения момента (1.5) и бифуркационных диаграмм. Приводится система единых обозначений, необходимая для трехмерной классификации.

Для описания критических подсистем удобно воспользоваться заменой переменных, введенной в работе [25], обобщающей замену С. В. Ковалевской и

подказанной представлением Лакса [11]:

$$\begin{aligned}x_1 &= (\alpha_1 - \beta_2) + i(\alpha_2 + \beta_1), & x_2 &= (\alpha_1 - \beta_2) - i(\alpha_2 + \beta_1), \\y_1 &= (\alpha_1 + \beta_2) + i(\alpha_2 - \beta_1), & y_2 &= (\alpha_1 + \beta_2) - i(\alpha_2 - \beta_1), \\z_1 &= \alpha_3 + i\beta_3, & z_2 &= \alpha_3 - i\beta_3, \\w_1 &= \omega_1 + i\omega_2, & w_2 &= \omega_1 - i\omega_2, & w_3 &= \omega_3.\end{aligned}$$

Она приводит интегралы к виду

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}w_3^2 + w_1w_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2), & K &= (w_1^2 + x_1)(w_2^2 + x_2), \\G &= \frac{1}{4}(p^2 - x_1x_2)w_3^2 + \frac{1}{2}(x_2z_1w_1 + x_1z_2w_2)w_3 \\&\quad + \frac{1}{4}(x_2w_1 + y_1w_2)(y_2w_1 + x_1w_2) - \frac{1}{4}p^2(y_1 + y_2) + \frac{1}{4}r^2(x_1 + x_2).\end{aligned}$$

Здесь введены параметры $p > r > 0$

$$p^2 = a^2 + b^2, \quad r^2 = a^2 - b^2,$$

с использованием которых уравнения геометрических интегралов (1.2) запишутся так:

$$z_1^2 + x_1y_2 = r^2, \quad z_2^2 + x_2y_1 = r^2, \quad x_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2 = 2p^2.$$

Критическое множество отображения (1.5) состоит из четырех критических подсистем. За вычетом множества особенностей нулевой меры три из них являются критическими многообразиями ранга 2 и одно – критическим многообразием ранга 1. Отклоняясь от формальной строгости, будем говорить, что первые три – это подсистемы с двумя степенями свободы, а последняя – подсистема с одной степенью свободы.

Первая критическая подсистема $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{P}^6$ была найдена в работе [1] еще до открытия факта интегрируемости системы (1.1) в целом. Она задана соотношениями

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0, \tag{3.1}$$

где

$$Z_1 = w_1^2 + x_1, \quad Z_2 = w_2^2 + x_2.$$

Соответствующая часть Σ_1 бифуркационной диаграммы лежит в плоскости $k = 0$, а независимыми интегралами на $\mathcal{M}_1$ можно выбрать H и частный интеграл Богоявленского

$$F = w_1w_2w_3 + z_2w_1 + z_1w_2.$$

На $\mathcal{M}_1$ постоянные g, k интегралов G, K выражаются через постоянные h, f принятых за независимые интегралов H, F соотношениями, найденными в [14]. Их можно принять за параметрические уравнения несущей поверхности

$$\Gamma_1 : \quad \begin{cases} k = 0, \\ g = \frac{1}{2}p^2h - \frac{1}{4}f^2. \end{cases} \tag{3.2}$$

Условимся о некоторых упрощениях обозначений. Рассмотрим на $\mathcal{M}_1$ “индуцированное” отображение момента

$$\mathcal{F}_1 = H \times F^2: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Здесь взят квадрат интеграла F , чтобы получить однозначное (хотя бы почти всюду) соответствие точек допустимых областей поверхности и плоскости в силу уравнений (3.2). Пользуясь этими уравнениями, не будем различать $\mathcal{F}|_{\mathcal{M}_1}$ и $\mathcal{F}_1$. Множество Σ_1 отобразится на плоскости (h, f^2) как $\text{Im } \mathcal{F}_1$, а бифуркационная диаграмма отображения $\mathcal{F}_1$ отобразится на поверхности Γ_1 как определенный выше остов Σ_1^* клеточного комплекса Σ_1 . В связи с этим для этой и последующих подсистем обозначаем одинаково множества Σ_i , Σ_i^* и их образы на плоскостях констант интегралов, выбранных на $\mathcal{M}_i$ в качестве независимых.

Вторая критическая подсистема $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{P}^6$ найдена в [25] и может быть определена как замыкание множества решений системы уравнений

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad (3.3)$$

где

$$F_1 = \sqrt{x_1 x_2} w_3 - \frac{(x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2)}{\sqrt{x_1 x_2}}, \quad F_2 = \frac{x_2}{x_1} Z_1 - \frac{x_1}{x_2} Z_2.$$

Соответствующая часть Σ_2 бифуркационной диаграммы лежит на поверхности

$$(p^2 h - 2g)^2 - r^4 k = 0. \quad (3.4)$$

В качестве независимых интегралов можно взять H и частный интеграл

$$M = \frac{1}{2r^2} \left(\frac{x_2}{x_1} Z_1 + \frac{x_1}{x_2} Z_2 \right),$$

так что отображение момента для этой системы

$$\mathcal{F}_2 = M \times H: \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

При этом получаем уравнения несущей поверхности

$$\Gamma_2: \begin{cases} k = r^4 m^2, \\ g = \frac{1}{2}(p^2 h - r^4 m). \end{cases}$$

Третья критическая подсистема $\mathcal{M}_3 \subset \mathcal{P}^6$ найдена в [2] и может быть определена как замыкание множества решений системы уравнений

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{w_2 x_1 + w_1 y_2 + w_3 z_1}{w_1} - \frac{w_1 x_2 + w_2 y_1 + w_3 z_2}{w_2}, \\ R_2 &= (w_2 z_1 + w_1 z_2) w_3^2 + \left[\frac{w_2 z_1^2}{w_1} + \frac{w_1 z_2^2}{w_2} + w_1 w_2 (y_1 + y_2) + x_1 w_2^2 + x_2 w_1^2 \right] w_3 \\ &\quad + \frac{w_2^2 x_1 z_1}{w_1} + \frac{w_1^2 x_2 z_2}{w_2} + x_1 z_2 w_2 + x_2 z_1 w_1 + (w_1 z_2 - w_2 z_1)(y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Соответствующая часть Σ_3 бифуркационной диаграммы лежит на дискриминантной поверхности многочлена, обобщающего второй многочлен Ковалевской:

$$\varphi(s) = s^4 - 2hs^3 + (h^2 + p^2 - k)s^2 - 2gs + a^2b^2.$$

При этом s есть константа частного интеграла

$$S = -\frac{1}{4} \left(\frac{y_2w_1 + x_1w_2 + z_1w_3}{w_1} + \frac{x_2w_1 + y_1w_2 + z_2w_3}{w_2} \right), \quad (3.6)$$

который в дополнение к H может быть взят в качестве независимого для определения отображения момента

$$\mathcal{F}_3 = S \times H: \mathcal{M}_3 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Тогда

$$\Gamma_3: \begin{cases} k = 3s^2 - 4hs + p^2 + h^2 - \frac{a^2b^2}{s^2}, \\ g = -s^3 + hs^2 + \frac{a^2b^2}{s}. \end{cases} \quad (3.7)$$

При построении явных решений системы $\mathcal{M}_3$ оказалось удобным рассмотреть вместо пары интегралов (S, H) пару (S, T) , где T , также как и S , есть частный интеграл на $\mathcal{M}_3$:

$$T = \frac{1}{2} [w_1(x_2w_1 + y_1w_2 + z_2w_3) + w_2(y_2w_1 + x_1w_2 + z_1w_3)] + x_1x_2 + z_1z_2. \quad (3.8)$$

Обозначая его постоянной через τ , представим параметрические уравнения (3.7) поверхности Γ_3 в виде

$$\Gamma_3: \begin{cases} h = \frac{p^2 - \tau}{2s} + s, \\ k = \frac{\tau^2 - 2p^2\tau + r^4}{4s^2} + \tau, \\ g = \frac{p^4 - r^4}{4s} + \frac{1}{2}(p^2 - \tau)s. \end{cases} \quad (3.9)$$

Несмотря на то что уравнения (3.5) имеют очевидную особенность, замыкание множества их решений, будучи инвариантным относительно фазового потока (1.1), содержит в себе и часть траекторий, на которых

$$w_1 \equiv 0, \quad w_2 \equiv 0.$$

В целом семейство траекторий, удовлетворяющих этому условию, образует четвертую критическую подсистему $\mathcal{M}_4$, фазовое пространство которой задано в $\mathcal{P}^6$ системой уравнений

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 0.$$

Очевидно, $\mathcal{M}_4$ – двумерное гладкое инвариантное многообразие, H выступает как единственный независимый интеграл и, соответственно, его константа есть

единственный параметр на поверхности, несущей соответствующую часть Σ_4 бифуркационной диаграммы. Это пара прямых

$$\Gamma_4 : \begin{cases} k = (a \mp b)^2, \\ g = \pm abh. \end{cases}$$

Ввиду того что множества $\mathcal{M}_3, \mathcal{M}_4$ имеют непустое пересечение, фактически Γ_4 добавляет в бифуркационную диаграмму Σ лишь сегмент

$$g = abh, \quad k = (a - b)^2, \quad h^2 < 4ab.$$

В остальном, как легко видеть, точки Γ_4 являются точками самопересечения поверхности Γ_3 .

В работе [12] доказано, что

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^4 \mathcal{M}_i,$$

и приведены бифуркационные диаграммы некоторых частных интегральных отображений. Полное описание множеств Σ_i , основанное на стратификации критического множества рангом отображения момента, дано в [13]. Коротко перечислим основные факты.

Обозначим через $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, канонический базис в $\mathbb{R}^3$. Множество $\mathcal{C}^0$ состоит из неподвижных точек системы (1.1):

$$\begin{aligned} c_0 : \quad \omega &= \mathbf{0}, & \alpha &= a \mathbf{e}_1, & \beta &= b \mathbf{e}_2, \\ c_1 : \quad \omega &= \mathbf{0}, & \alpha &= a \mathbf{e}_1, & \beta &= -b \mathbf{e}_2, \\ c_2 : \quad \omega &= \mathbf{0}, & \alpha &= -a \mathbf{e}_1, & \beta &= b \mathbf{e}_2, \\ c_3 : \quad \omega &= \mathbf{0}, & \alpha &= -a \mathbf{e}_1, & \beta &= -b \mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Соответствующие значения первых интегралов при фиксированных постоянных a, b дают четыре точки в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} P_0 : \quad g &= -ab(a + b), & k &= (a - b)^2, & h &= -(a + b); \\ P_1 : \quad g &= ab(a - b), & k &= (a + b)^2, & h &= -(a - b); \\ P_2 : \quad g &= -ab(a - b), & k &= (a + b)^2, & h &= a - b; \\ P_3 : \quad g &= ab(a + b), & k &= (a - b)^2, & h &= a + b. \end{aligned}$$

В таблице 3.1 приводится соответствие между P_k и точками множеств Σ_2 и Σ_3 – узловыми точками бифуркационных диаграмм Σ_2^* и Σ_3^* в терминах выбранных там констант интегралов. На множество Σ_1 , как отмечено в [14], эти точки в неприводимом случае (1.4) не попадают. На множестве Σ_4 их расположение очевидно.

В составе множества $\mathcal{C}^1$ имеются следующие шесть семейств маятниковых движений [2] (первый индекс соответствует верхнему знаку):

$$\mathcal{L}_{1,2} = \{ \alpha \equiv \pm a \mathbf{e}_1, \beta = b(\mathbf{e}_2 \cos \theta - \mathbf{e}_3 \sin \theta), \omega = \theta' \mathbf{e}_1, 2\theta'' = -b \sin \theta \},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{3,4} &= \{\alpha = a(\mathbf{e}_1 \cos \theta + \mathbf{e}_3 \sin \theta), \beta \equiv \pm b\mathbf{e}_2, \omega = \theta' \mathbf{e}_2, 2\theta'' = -a \sin \theta\}, \\ \mathcal{L}_{5,6} &= \{\alpha = a(\mathbf{e}_1 \cos \theta - \mathbf{e}_2 \sin \theta), \beta = \pm b(\mathbf{e}_1 \sin \theta + \mathbf{e}_2 \cos \theta), \omega = \theta' \mathbf{e}_3, \\ &\quad \theta'' = -(a \pm b) \sin \theta\}.\end{aligned}$$

Семействам $\mathcal{L}_j$ отвечают значения первых интегралов, заполняющие кривые λ_j в составе одномерного остова бифуркационной диаграммы:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \{g = a^2 h \pm ar^2, k = (h \pm 2a)^2, h \geq \mp(a \pm b)\}, \\ \lambda_{3,4} &= \{g = b^2 h \mp br^2, k = (h \pm 2b)^2, h \geq -(a \pm b)\}, \\ \lambda_{5,6} &= \{g = \pm abh, k = (a \mp b)^2, h \geq -(a \pm b)\}.\end{aligned}$$

В таблице 3.2 приводится соответствие между кривыми λ_j и одномерными остовами диаграмм Σ_2^* и Σ_3^* , при этом сами кривые разбиты на участки λ_{ji} значениями интегралов на уровнях, содержащих неподвижные точки системы. На этих же уровнях могут находиться и движения в составе семейств $\mathcal{L}_j$, асимптотические к неподвижным точкам.

ТАБЛИЦА 3.1

$\mathcal{C}^0$	Образ в $\mathbb{R}^3(h, k, g)$	Образ в $\mathbb{R}^2(m, h)$	Образ в $\mathbb{R}^2(s, h)$
c_0	P_0	$P_{01}\left(\frac{1}{a+b}, -(a+b)\right)$	$Q_{01}(-a, -(a+b))$ $Q_{02}(-b, -(a+b))$
c_1	P_1	$P_{11}\left(\frac{1}{a-b}, -(a-b)\right)$	$Q_{11}(-a, -(a-b))$ $Q_{12}(b, -(a-b))$
c_2	P_2	$P_{21}\left(-\frac{1}{a-b}, a-b\right)$	$Q_{21}(-b, a-b)$ $Q_{22}(a, a-b)$
c_3	P_3	$P_{31}\left(-\frac{1}{a+b}, a+b\right)$	$Q_{31}(b, a+b)$ $Q_{32}(a, a+b)$

Оставшуюся часть множества $\mathcal{C}^1$ составляют критические движения случая Богдавленского. Они аналитически организованы в три семейства периодических решений, ниже обозначаемых через $\mathcal{L}_7$ – $\mathcal{L}_9$ (топологически последнее семейство заполняет в $\mathcal{P}^6$ два связных двумерных многообразия) и принадлежат $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_3$. Первое описание этих траекторий дано в [14]. Здесь удобно воспользоваться параметризацией этих семейств, указанной в [26]. Она представляет собой алгебраические выражения исходных фазовых переменных через одну вспомогательную переменную, зависимость которой от времени выражается стандартными эллиптическими функциями, при том, что и постоянные всех интегралов также явно выражены через одну постоянную, а именно, через постоянную s соответствующего интеграла (3.6). Имеем следующие выражения

ТАБЛИЦА 3.2

$\mathcal{C}^1$	Образ в $\mathbb{R}^3(h, k, g)$	Образ в $\mathbb{R}^2(m, h)$	Образ в $\mathbb{R}^2(s, h)$
$\mathcal{L}_1$	$\lambda_1 = \lambda_{11} \cup \lambda_{12},$ $\lambda_{11}: -(a+b) < h < -(a-b),$ $\lambda_{12}: h > -(a-b),$	$h = r^2 m - 2a$	$s = -a$
$\mathcal{L}_2$	$\lambda_2 = \lambda_{21} \cup \lambda_{22} \cup \lambda_{23},$ $\lambda_{21}: a-b < h < a+b,$ $\lambda_{22}: a+b < h < 2a,$ $\lambda_{23}: h > 2a$	$h = r^2 m + 2a$	$s = a$
$\mathcal{L}_3$	$\lambda_3 = \lambda_{31} \cup \lambda_{32} \cup \lambda_{33},$ $\lambda_{31}: -(a+b) < h < -2b,$ $\lambda_{32}: -2b < h < a-b,$ $\lambda_{33}: h > a-b$	$h = -r^2 m - 2b$	$s = -b$
$\mathcal{L}_4$	$\lambda_4 = \lambda_{41} \cup \lambda_{42} \cup \lambda_{43},$ $\lambda_{41}: -(a-b) < h < 2b,$ $\lambda_{42}: 2b < h < a+b,$ $\lambda_{43}: h > a+b$	$h = -r^2 m + 2b$	$s = b$
$\mathcal{L}_5$	$\lambda_5 = \bigcup_{j=1}^4 \lambda_{5j},$ $h > -(a+b), h^2 > 4ab$	—	$\lambda_{51}: s \in (-a, -b),$ $\lambda_{52}: s \in (0, b),$ $\lambda_{53}: s \in (b, a),$ $\lambda_{54}: s \in (a, +\infty),$ $h = s + \frac{ab}{s}$
$\mathcal{L}_5$	$\lambda_{50}: -2\sqrt{ab} < h < 2\sqrt{ab}$	—	—
$\mathcal{L}_6$	$\lambda_6 = \bigcup_{j=1}^4 \lambda_{6j},$ $h > -(a-b)$	—	$\lambda_{61}: s \in (-a, -b),$ $\lambda_{62}: s \in (-b, 0),$ $\lambda_{63}: s \in (b, a),$ $\lambda_{64}: s \in (a, +\infty),$ $h = s - \frac{ab}{s}$

для фазовых переменных:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= -\frac{1}{r} \sqrt{\frac{r_1 r_2 \psi_1}{2s}}, & \omega_2 &= -\frac{1}{r} \sqrt{-\frac{r_1 r_2 \psi_2}{2s}}, & \omega_3 &= \frac{\theta}{r_1 + r_2} \sqrt{\frac{2r_1 r_2}{s}}, \\
\alpha_1 &= -s - \frac{r_1 r_2 [r^2 + (r_1 + r_2)^2] (\psi_1 + \psi_2)}{4r^2 (r_1 + r_2)^2 s}, \\
\alpha_2 &= -\frac{r_1 r_2 [r^2 + (r_1 + r_2)^2] \sqrt{-\psi_1 \psi_2}}{2r^2 (r_1 + r_2)^2 s}, & \alpha_3 &= \frac{r_1 \sqrt{-\psi_1}}{r},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\beta_1 = \frac{r_1 r_2 [r^2 - (r_1 + r_2)^2] \sqrt{-\psi_1 \psi_2}}{2r^2 (r_1 + r_2)^2 s},$$

$$\beta_2 = -s - \frac{r_1 r_2 [r^2 - (r_1 + r_2)^2] (\psi_1 + \psi_2)}{4r^2 (r_1 + r_2)^2 s}, \quad \beta_3 = \frac{r_2 \sqrt{-\psi_2}}{r},$$

где

$$\psi_1 = (\theta - e'_+)(\theta - e'_-), \quad e'_\pm = \frac{r_1 + r_2}{r_1} (s \pm a),$$

$$\psi_2 = (\theta - e''_+)(\theta - e''_-), \quad e''_\pm = \frac{r_1 + r_2}{r_2} (s \pm b),$$

и для различных семейств следует положить

$$\mathcal{L}_7: \quad s \in [-b, 0), \quad r_1 = \sqrt{a^2 - s^2} > 0, \quad r_2 = \sqrt{b^2 - s^2} \geq 0,$$

$$\mathcal{L}_8: \quad s \in (0, b], \quad r_1 = \sqrt{a^2 - s^2} > 0, \quad r_2 = -\sqrt{b^2 - s^2} \leq 0,$$

$$\mathcal{L}_9: \quad s \in [a, +\infty), \quad \begin{cases} r_1 = ir_1^*, \quad r_2 = ir_2^*, \\ 0 \leq r_1^* = \sqrt{s^2 - a^2} < r_2^* = \sqrt{s^2 - b^2}. \end{cases}$$

Значения первых интегралов на этих движениях определяют еще одну часть одномерного остова бифуркационной диаграммы Σ в виде трех кривых $\delta_i \subset \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, параметрические уравнения которых получены в [26]:

$$\delta_1: \begin{cases} h = 2s - \frac{1}{s} \sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)}, \\ f = \pm \sqrt{-\frac{2}{s} \sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)} (\sqrt{a^2 - s^2} + \sqrt{b^2 - s^2})}, \\ \tau = (\sqrt{a^2 - s^2} + \sqrt{b^2 - s^2})^2, \quad s \in [-b, 0); \end{cases}$$

$$\delta_2: \begin{cases} h = 2s + \frac{1}{s} \sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)}, \\ f = \pm \sqrt{\frac{2}{s} \sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)} (\sqrt{a^2 - s^2} - \sqrt{b^2 - s^2})}, \\ \tau = (\sqrt{a^2 - s^2} - \sqrt{b^2 - s^2})^2, \quad s \in (0, b]; \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\delta_3: \begin{cases} h = 2s - \frac{1}{s} \sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}, \\ f = \pm \sqrt{\frac{2}{s} \sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)} (\sqrt{s^2 - b^2} - \sqrt{s^2 - a^2})}, \\ \tau = -(\sqrt{s^2 - b^2} - \sqrt{s^2 - a^2})^2, \quad s \in [a, +\infty). \end{cases}$$

Здесь s, τ – значения функций (3.6), (3.8) на соответствующих множествах. Как отмечено выше, s выбирается в качестве независимого параметра. Значение $k \equiv 0$, зависимость $g(s)$ находится из (3.2).

Семейства $\mathcal{L}_1$ – $\mathcal{L}_4$ составляют трансверсальное пересечение критических многообразий $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3$, а $\mathcal{L}_7$ – $\mathcal{L}_9$ – трансверсальное пересечение $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_3$. По отношению к критическим подсистемам с двумя степенями свободы они

могут иметь лишь эллиптический или гиперболический тип. Из топологических результатов работ [14]–[16], [26], [27] можно получить утверждения о типе этих траекторий *внутри* $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$. Отсюда тип этих критических точек в трехмерной классификации можно было бы определить по предложению 2. Однако эти утверждения не подтверждены вычислениями. Поэтому мы явно выпишем необходимые характеристические многочлены, получим тип точек этих семейств в $\mathcal{P}^6$, откуда будет следовать и доказательство утверждений по отношению к критическим подсистемам с двумя степенями свободы.

Одномерный остов Σ^1 бифуркационной диаграммы, кроме значений $\mathcal{F}$ в точках множества $\mathcal{C}^1$, может порождаться касанием листов Σ_i . Соответствующие критические точки, хоть и имеют ранг 2, но являются вырожденными. Доказательство этого факта требует обоснования *несуществования* регулярного элемента в соответствующей подалгебре, что всегда сложнее, чем его явное нахождение. Здесь мы не будем приводить строгих обоснований и вычислять тип этих точек. Ограничимся указанием уравнений соответствующих участков на Σ и неравенств, определяющих область существования движений на этих участках. Имеют место следующие случаи. Касание листов Σ_1 , Σ_2 происходит в точках множества

$$\Delta_1 : \quad \begin{cases} k = 0, \\ 2g = p^2 h, \end{cases} \quad h \geq -2b.$$

Касание листов Σ_2 , Σ_3 происходит в точках множества

$$\Delta_2 : \quad \begin{cases} k = \frac{1}{r^4}(2g - p^2 h)^2, \\ g = g_{\pm}(h) = \frac{1}{4p^2}[(2p^4 - r^4)h \pm r^4 \sqrt{h^2 - 2p^2}], \end{cases} \quad h \geq \sqrt{2p}.$$

Кроме того, на листе Σ_3 имеется ребро возврата (“самокасание”), которое описывается параметрическими уравнениями

$$\Delta_3 : \quad \begin{cases} h = \frac{p^4 - r^4 + 12s^4}{8s^3}, \\ k = -\frac{3s^2}{4} + p^2 - \frac{3(p^4 - r^4)}{8s^2} + \frac{(p^4 - r^4)^2}{64s^6}, \\ g = \frac{3(p^4 - r^4) + 4s^4}{8s}, \end{cases} \quad 0 < s \leq s_0. \quad (3.13)$$

Здесь s_0 – единственный корень уравнения

$$3s^8 - 4p^2 s^6 + \frac{3}{2}(p^4 - r^4)s^4 - \frac{(p^4 - r^4)^2}{16} = 0 \quad (3.14)$$

на полупрямой $s > a$. Ниже мы явно увидим, что в характеристических многочленах операторов, выбранных в качестве регулярных, при этих условиях возникает кратный корень. Эти множества обладают еще одним важным свойством, которое оказывается связанным с вырожденностью критических точек в $\mathcal{P}^6$, а именно, как показано в работах [14], [15], [28], на множествах

$\mathcal{M}_i \cap \mathcal{F}^{-1}(\Delta_i)$, $i = 1, 2, 3$, вырождается 2-форма, индуцированная на $\mathcal{M}_i$ симплектической структурой многообразия $\mathcal{P}^6$. Заметим, что внутри $\mathcal{M}_1$ соответствующие точки регулярны, внутри $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ регулярны почти все из них (за исключением точек пересечения с $\mathcal{C}^1$). Образы множеств Δ_i на поверхностях Γ_i в выбранных там параметрах представлены в таблице 3.3.

Таблица 3.3

	Образ в $\mathbb{R}^2(h, f^2)$	Образ в $\mathbb{R}^2(m, h)$	Образ в $\mathbb{R}^2(s, h)$
Δ_1	$f = 0,$ $h \geq -2b$	$m = 0,$ $h \geq -2b$	—
Δ_2	—	$h = -(a^2 + b^2)m - \frac{1}{2m},$ $m < 0$	$h = \frac{a^2 + b^2}{2s} + s,$ $s > 0$
Δ_3	—	—	$h = \frac{3s^4 + a^2b^2}{2s^3},$ $0 < s \leq s_0$

Собирая образы точек P_i , одномерных множеств $\lambda_i, \delta_i, \Delta_i$ на плоскостях значений индуцированных отображений момента $\mathcal{F}_i$, получим бифуркационные диаграммы Σ_i^* этих отображений (рис. 1–3). Части Σ_i бифуркационной диаграммы полного отображения момента отобразятся на выбранных плоскостях как оболочка каркасов Σ_i^* . При этом не включаются те связные компоненты $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_i^*$, которые помечены на рисунках символом $\emptyset$.

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма Σ_1^* на плоскости (h, f^2)

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма Σ_2^* на плоскости (m, h)

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма Σ_3^* на плоскости (s, h)

Таким образом, Σ_1^* состоит из кривых $\delta_1 - \delta_3$ и луча Δ_1 (рис. 1). На рисунке также введены обозначения некоторых особых точек q_k, e_k , которые фигурируют и на последующих рисунках. Отмечены три значения энергии h_1-h_3 , для которых ниже показаны диаграммы $\Sigma(h)$.

Диаграмма Σ_2^* (рис. 2) состоит из кривых $\lambda_1 - \lambda_4$ (напомним, что мы не различаем объекты в $\mathbb{R}^3(h, k, g)$ и их образы на плоскостях значений индуцированных отображений момента), множеств Δ_1 и Δ_2 . Ниже нам будет удобно ввести на $\mathcal{M}_2$ вместо H другой почти всюду независимый с M интеграл [15]

$$L = \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} [w_1 w_2 + x_1 x_2 + z_1 z_2 M].$$

Его постоянная связана с h, m соотношением

$$\ell^2 = 2p^2 m^2 + 2hm + 1, \quad (3.15)$$

а множество Δ_2 задано уравнением $\ell = 0$.

Наконец, диаграмма Σ_3^* (рис. 3) порождает наиболее сложную часть бифуркационной диаграммы Σ . Необходимые комментарии будут даны ниже. Пока отметим лишь, что на ней нашли отражение практически все уже упоминавшиеся обозначения. Например, точки $q_1 - q_3$ являются граничными точками кривых $\delta_1 - \delta_3$ как на этом рисунке, так и на рис. 1. Точка e_1 , которая на плоскости (h, f^2) является точкой возврата кривой δ_3 , на последнем рисунке соответствует значению s_0 интеграла (3.6), при котором достигается минимальное значение $h(s)$ в соответствующем выражении (3.12). Оно же фигурирует в (3.13) как корень уравнения (3.14).

Для полного описания $\Sigma \subset \mathcal{P}^6$ введем некоторые обозначения.

Обозначим обращения зависимостей $h(s)$ на кривых (3.12):

$$\begin{aligned} \delta_1 : \quad s &= s_1(h), \quad h \in [-2b, +\infty), \quad s_1(h) \in [-b, 0), \\ \delta_2 : \quad s &= s_2(h), \quad h \geq 2b, \quad s_2(h) \in (0, b], \\ \delta_{31} : \quad s &= s_{31}(h), \quad h \in [h_0, 2a], \quad s \in [a, s_0], \\ \delta_{32} : \quad s &= s_{32}(h), \quad h \in [h_0, +\infty), \quad s \in [s_0, +\infty). \end{aligned}$$

Здесь h_0 – значение $h(s_0)$ на кривой δ_3 . Уравнение (3.14) для вычисления значения s_0 теперь получим, записывая условие минимума h на кривой δ_3 в виде

$$2s^2 \sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)} = s^4 - a^2 b^2. \quad (3.16)$$

Единственность его решения при $s > a$ очевидна.

Из соотношений (3.2) найдем зависимость на δ_1 :

$$g = g_1(h) = s^3 + \frac{ab}{s} - s^2 \phi(s)|_{s=s_1(h)}, \quad h \geq -2b.$$

Рассматривая интервалы монотонности $h(s)$ на кривых $\lambda_5 - \lambda_6$ обозначим:

$$\begin{aligned} s_{5-}(h) &= \frac{h - \sqrt{h^2 - 4ab}}{2}, \quad s_{5+}(h) = \frac{h + \sqrt{h^2 - 4ab}}{2}, \\ s_6(h) &= \frac{h + \sqrt{h^2 + 4ab}}{2}. \end{aligned}$$

Теперь бифуркационная диаграмма полностью описывается следующей теоремой [13], которая сформулирована так, чтобы все условия давали явные неравенства при фиксированном значении энергии h .

ТЕОРЕМА 2. 1. Множество $\Sigma_1 = \Gamma_1 \cap \Sigma$ имеет вид

$$k = 0, \quad g_1(h) \leq g \leq \frac{1}{2}p^2h, \quad h \geq -2b.$$

2. Множество $\Sigma_2 = \Gamma_2 \cap \Sigma$ лежит в полупространстве $h \geq -(a+b)$ и описывается следующей совокупностью систем неравенств:

$$\begin{cases} b^2h - br^2 \leq g \leq a^2h + ar^2, \\ -(a+b) \leq h \leq \sqrt{2}p; \end{cases} \quad \begin{cases} b^2h - br^2 \leq g \leq g_-(h), \\ h \geq \sqrt{2}p; \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_+(h) \leq g \leq a^2h + ar^2, \\ h \geq \sqrt{2}p. \end{cases}$$

3. Множество $\Sigma_3 = \Gamma_3 \cap \Sigma$ полностью описывается следующей совокупностью условий на плоскости (s, h) . Для отрицательных значений s :

$$\begin{cases} -(a+b) \leq h \leq -2\sqrt{ab}, \\ s \in [-a, s_{5-}(h)] \cup [s_{5+}(h), -b]; \end{cases} \quad \begin{cases} -2\sqrt{ab} \leq h \leq -2b, \\ s \in [-a, -b]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} h > -2b, \\ s \in [-a, s_1(h)]. \end{cases}$$

Для положительных значений s :

$$\begin{cases} -a+b \leq h \leq 2b, \\ s \in [b, s_6(h)]; \end{cases} \quad \begin{cases} 2b \leq h \leq h_0, \\ s \in [s_2(h), s_6(h)]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_0 \leq h \leq 2a, \\ s \in [s_2(h), s_{31}(h)] \cup [s_{32}(h), s_6(h)]; \end{cases} \quad \begin{cases} h > 2a, \\ s \in [s_2(h), a] \cup [s_{32}(h), s_6(h)]. \end{cases}$$

4. Множество $\Sigma_4 = \Gamma_4 \cap \Sigma$ состоит из двух лучей

$$\begin{aligned} g &= abh, & k &= (a-b)^2, & h &\geq -(a+b), \\ g &= -abh, & k &= (a+b)^2, & h &\geq -(a-b). \end{aligned}$$

Эта теорема дает возможность изобразить во всех деталях любую диаграмму $\Sigma(h)$ на изоэнергетическом уровне и отследить с помощью компьютерной графики эволюцию этих диаграмм с изменением энергии. Разделяющими служат значения h , фигурирующие как границы для неравенств в утверждении теоремы. Диаграммы для отмеченных ранее трех значений h_1, h_2, h_3 с увеличенными для наглядности участками приведены на рис. 4–6.

§ 4. Классификация неподвижных точек

В работе [29] найден индекс Морса гамильтониана H в неподвижных точках (3.10), что в значительной мере определяет характер поведения системы в их

Рис. 4. Бифуркационная диаграмма $\Sigma(h_1)$ и ее фрагмент Рис. 5. Бифуркационная диаграмма $\Sigma(h_2)$ и ее фрагмент Рис. 6. Бифуркационная диаграмма $\Sigma(h_3)$ и ее фрагмент

окрестности. Однако строгая классификация требует указания типа этих точек как критических точек отображения момента.

ТЕОРЕМА 3. *Особым точкам P_k , $k = 0, \dots, 3$, бифуркационной диаграммы Σ соответствуют невырожденные особенности s_k ранга 0 отображения момента $\mathcal{F}$. Более точно, точке P_0 соответствует особенность s_0 типа “центр-центр-центр”, P_1 – особенность s_1 типа “центр-центр-седло”, P_2 – особенность s_2 типа “центр-седло-седло”, P_3 – особенность s_3 типа “седло-седло-седло”.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точки P_k порождены неподвижными точками s_k . Касательные пространства в точках s_k можно описать в виде уравнений

$$\begin{aligned} T_{c_0} \mathcal{P}^6 &= T_{c_3} \mathcal{P}^6 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^9 : x_4 = x_8 = 0, bx_5 + ax_7 = 0\}, \\ T_{c_1} \mathcal{P}^6 &= T_{c_2} \mathcal{P}^6 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^9 : x_4 = x_8 = 0, bx_5 - ax_7 = 0\}. \end{aligned}$$

Пусть e^j , $j = 1, \dots, 6$, – базис соответствующего пространства $T_{c_k} \mathcal{P}^6$:

$$\begin{aligned} e^1 &= \{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^t, & e^2 &= \{0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^t, \\ e^3 &= \{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^t, & e^4 &= \{0, 0, 0, 0, a, 0, \mp b, 0, 0\}^t, \\ e^5 &= \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0\}^t, & e^6 &= \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1\}^t. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Линеаризации векторных полей $\text{sgrad } H$, $\text{sgrad } K$ и $\text{sgrad } G$ порождают симплектические линейные операторы

$$A_H, A_K, A_G : T_{c_k} \mathcal{P}^6 \rightarrow T_{c_k} \mathcal{P}^6.$$

Пусть $\text{Adiag } x, y, z$ означает матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & y & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицы операторов A_H , A_K , A_G в выбранном базисе имеют блочный вид

$$A_H = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A_1^{c_k} \\ A_2^{c_k} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad A_G = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A_3^{c_k} \\ A_4^{c_k} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad A_K = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A_5^{c_k} \\ A_6^{c_k} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

где введены обозначения следующих матриц:

$$\begin{aligned} A_1^{c_0} &= A_1^{c_3} = \text{Adiag} \left\{ a + b, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, & A_2^{c_0} &= -A_2^{c_3} = \text{Adiag} \{-b, a, 1\}, \\ A_3^{c_0} &= A_3^{c_3} = \text{Adiag} \left\{ ab(a + b), -\frac{b^2}{2}, \frac{a^2}{2} \right\}, & A_4^{c_0} &= -A_4^{c_3} = ab \text{Adiag} \{-a, b, 1\}, \\ A_5^{c_0} &= -A_5^{c_3} = (a - b) \text{Adiag} \{0, 1, 1\}, & A_6^{c_0} &= A_6^{c_3} = -2(a - b) \text{Adiag} \{b, a, 0\}, \\ A_1^{c_1} &= A_1^{c_2} = \text{Adiag} \left\{ a - b, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, & A_2^{c_1} &= -A_2^{c_2} = \text{Adiag} \{b, a, -1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3^{c_1} = A_3^{c_2} &= \text{Adiag}\left\{-ab(a-b), -\frac{b^2}{2}, \frac{a^2}{2}\right\}, & A_4^{c_1} &= -A_4^{c_2} = ab \text{Adiag}\{a, b, 1\}, \\
A_5^{c_1} &= -A_5^{c_2} = (a+b) \text{Adiag}\{0, 1, 1\}, & A_6^{c_1} &= A_6^{c_2} = -2(a+b) \text{Adiag}\{-b, a, 0\}.
\end{aligned}$$

В силу (1.4) подалгебра $\mathcal{A}(c_k, \mathcal{F})$, порожденная операторами A_H, A_G, A_K , является картановской для всех $k = 0, \dots, 3$ и ее размерность равна 3. В качестве регулярного элемента можно взять A_H . Характеристические уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}
c_0 : & (\mu^2 + a + b)(2\mu^2 + a)(2\mu^2 + b) = 0, \\
c_1 : & (\mu^2 + a - b)(2\mu^2 + a)(2\mu^2 - b) = 0, \\
c_2 : & (\mu^2 - a + b)(2\mu^2 - a)(2\mu^2 + b) = 0, \\
c_3 : & (\mu^2 - a - b)(2\mu^2 - a)(2\mu^2 - b) = 0.
\end{aligned}$$

Соответствующие собственные значения различны и в каждой точке разбиваются на три пары:

$$\begin{aligned}
c_0 : & \quad \pm i\sqrt{a+b}; \pm i\sqrt{\frac{a}{2}}; \pm i\sqrt{\frac{b}{2}}, & c_1 : & \quad \pm i\sqrt{a+b}; \pm i\sqrt{\frac{a}{2}}; \pm \sqrt{\frac{b}{2}}, \\
c_2 : & \quad \pm \sqrt{a-b}; \pm \sqrt{\frac{a}{2}}; \pm i\sqrt{\frac{b}{2}}, & c_3 : & \quad \pm \sqrt{a+b}; \pm \sqrt{\frac{a}{2}}; \pm \sqrt{\frac{b}{2}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, точки c_k – невырожденные особенности ранга 0 и их тип определяется тройкой целых чисел: $(3, 0, 0)$ для c_0 ; $(2, 1, 0)$ для c_1 ; $(1, 2, 0)$ для c_2 и $(0, 3, 0)$ для c_3 .

Заметим, что в точках c_k встречаются три локальных критических подсистемы – подсистема $\mathcal{M}_2$ и две части подсистемы $\mathcal{M}_3$, которая имеет в этих точках особенность типа самопересечения. В частности, на плоскости (s, τ) каждая такая точка изображается двумя. В этом смысле каждая особая точка Q_{kj} диаграммы Σ_3^* имеет свой тип (тип точки c_k по отношению к некоторому выбранному гладкому участку $\mathcal{M}_3$ в ее окрестности). Соответствующее описание критических точек ранга 0 в $\mathcal{P}^6$, а также в критических подсистемах $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_3$ сведено в таблице 4.1.

§ 5. Невырожденные особенности ранга 1

Как было показано выше, невырожденные особенности ранга 1 состоят из периодических решений семейств $\mathcal{L}_k$, $k = 1, \dots, 9$, образ которых составляет одномерный комплекс $\Sigma^1 = \{\lambda_k, \delta_k\}$, в котором кривые разбиты на участки точками комплекса Σ^0 (трансверсальное пересечение одномерных кривых, бифуркации периодических решений при прохождении через неподвижную точку), точками касания кривых между собой или с кривыми Δ_i (вырожденные особенности).

Таблица 4.1

$\mathcal{C}^0$	Тип в $\mathcal{P}^6$	Образ в $\mathbb{R}^3(h, k, g)$	Образ в $\mathbb{R}^2(m, h)$	Тип в $\mathcal{M}_2$	Образ в $\mathbb{R}^2(s, h)$	Тип в $\mathcal{M}_3$
c_0	$(3, 0, 0)$	P_0	P_{01}	центр-центр	Q_{01} Q_{02}	центр-центр центр-центр
c_1	$(2, 1, 0)$	P_1	P_{11}	центр-седло	Q_{11} Q_{12}	центр-седло центр-центр
c_2	$(1, 2, 0)$	P_2	P_{21}	центр-седло	Q_{21} Q_{22}	седло-седло центр-седло
c_3	$(0, 3, 0)$	P_3	P_{31}	седло-седло	Q_{31} Q_{32}	седло-седло седло-седло

ТЕОРЕМА 4. Точкам одномерного комплекса бифуркационной диаграммы Σ соответствуют невырожденные особенности $\{\mathcal{L}_k\}$ ранга 1 отображения момента $\mathcal{F} = (H, K, G): \mathcal{P}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$, за исключением следующих значений энергии, при которых происходит вырождение:

$$\begin{aligned}
 \text{на } \mathcal{L}_2 \quad h &= 2a, \quad \frac{3a^2 + b^2}{2a}; \\
 \text{на } \mathcal{L}_3 \quad h &= -2b; \\
 \text{на } \mathcal{L}_4 \quad h &= 2b, \quad \frac{a^2 + 3b^2}{2b}; \\
 \text{на } \mathcal{L}_5 \quad h &= \pm 2\sqrt{ab}.
 \end{aligned}$$

Вырожденным особенностям на бифуркационных диаграммах отвечают точки $q_1 - q_3, e_1 - e_5$. В зависимости от значений параметров тип невырожденных особенностей в $\mathcal{P}^6$ определяется таблицей 5.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \mathcal{L}_k$. Определим следующие функции:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_{1,2}) \quad g_1 &= K - 2(h \pm 2a)H, \quad g_2 = G - a^2H, \\
 (\mathcal{L}_{3,4}) \quad g_1 &= K - 2(h \pm 2b)H, \quad g_2 = G - b^2H, \\
 (\mathcal{L}_{5,6}) \quad g_1 &= \pm abH - G, \quad g_2 = K, \\
 (\mathcal{L}_{7,8,9}) \quad g_1 &= 2G - (p^2 - \tau)H, \quad g_2 = K.
 \end{aligned}$$

Положим также $g_3 = H$. Поскольку все неподвижные точки имеют ранг 0 и уже исключены, то $dg_3(x_0) \neq 0$. Выбранные функции g_1, g_2 в точке x_0 имеют особенность:

$$dg_1(x_0) = dg_2(x_0) = 0.$$

Линеаризации векторных полей $\text{sgrad } g_k, k = 1, 2$, в точке x_0 дают линейные симплектические операторы

$$A_{g_k}: T_{x_0} \mathcal{P}^6 \rightarrow T_{x_0} \mathcal{P}^6, \quad k = 1, 2.$$

Таблица 5.1

$\mathcal{C}^1$	Образ в $\mathbb{R}^3(h, k, g)$	Тип в $\mathcal{P}^6$
$\mathcal{L}_1$	$\lambda_1 = \lambda_{11} \cup \lambda_{12},$ $\lambda_{11}: -(a+b) < h < -(a-b),$ $\lambda_{12}: h > -(a-b),$	$(2, 0, 0)$ (центр-центр ранга 1)
$\mathcal{L}_2$	$\lambda_2 = \lambda_{21} \cup \lambda_{22} \cup \lambda_{23},$ $\lambda_{21}: a-b < h < a+b,$ $\lambda_{22}: a+b < h < 2a, \ h \neq \frac{3a^2+b^2}{2a},$ $\lambda_{23}: h > 2a$	$\lambda_{21}, \lambda_{22}: (0, 2, 0)$ (седло-седло ранга 1) $\lambda_{23}: (1, 1, 0)$ (центр-седло ранга 1)
$\mathcal{L}_3$	$\lambda_3 = \lambda_{31} \cup \lambda_{32} \cup \lambda_{33},$ $\lambda_{31}: -(a+b) < h < -2b,$ $\lambda_{32}: -2b < h < a-b,$ $\lambda_{33}: h > a-b$	$\lambda_{31}: (2, 0, 0)$ (центр-центр ранга 1) $\lambda_{32}, \lambda_{33}: (1, 1, 0)$ (центр-седло ранга 1)
$\mathcal{L}_4$	$\lambda_4 = \lambda_{41} \cup \lambda_{42} \cup \lambda_{43},$ $\lambda_{41}: -(a-b) < h < 2b,$ $\lambda_{42}: 2b < h < a+b,$ $\lambda_{43}: h > a+b, \ h \neq \frac{a^2+3b^2}{2b}$	$\lambda_{41}: (1, 1, 0)$ (центр-седло ранга 1) $\lambda_{42}, \lambda_{43}: (0, 2, 0)$ (седло-седло ранга 1)
$\mathcal{L}_5$	$\lambda_5 = \lambda_{50} \cup (\bigcup_{k=1}^4 \lambda_{5k}),$ $\lambda_{51}: -(a+b) < h < -2\sqrt{ab}$ $\lambda_{50}: -2\sqrt{ab} < h < 2\sqrt{ab}$ $\lambda_{52}, \lambda_{53}, \lambda_{54}: h > 2\sqrt{ab}$	$\lambda_{51}: (2, 0, 0)$ (центр-центр ранга 1) $\lambda_{50}: (0, 0, 1)$ (фокусная особенность ранга 1) $\lambda_{52}, \lambda_{53}, \lambda_{54}: (0, 2, 0)$ (седло-седло ранга 1)
$\mathcal{L}_6$	$\lambda_6: h > -(a-b)$	$(1, 1, 0)$ (центр-седло ранга 1)
$\mathcal{L}_7$	$\delta_1: s \in (-b, 0)$	$(2, 0, 0)$ (центр-центр ранга 1)
$\mathcal{L}_8$	$\delta_2: s \in (0, b)$	$(1, 1, 0)$ (центр-седло ранга 1)
$\mathcal{L}_9$	$\delta_3 = \delta_{31} \cup \delta_{32}$ $\delta_{31}: s \in (a, s_0)$ $\delta_{32}: s \in (s_0, +\infty)$	$\delta_{31}: (1, 1, 0)$ (центр-седло ранга 1) $\delta_{32}: (2, 0, 0)$ (центр-центр ранга 1)

Непосредственно проверяется, что они линейно независимы, то есть порождают подалгебру в $\text{sp}(6, \mathbb{R})$ размерности 2. Характеристическое уравнение для оператора A_{g_1} имеет два нулевых корня: $\ker A_{g_1} = T_{x_0} \mathcal{L}_k$. Остальная часть характеристического многочлена имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1,2}: \quad & [\mu^2 + 4(a^2 - b^2)(h \pm 2a)] \cdot [\mu^2 \pm 8a(h \pm 2a)^2] = 0, \\
\mathcal{L}_{3,4}: \quad & [\mu^2 - 4(a^2 - b^2)(h \pm 2b)] \cdot [\mu^2 \pm 8b(h \pm 2b)^2] = 0, \\
\mathcal{L}_{5,6}: \quad & 4\mu^4 \mp 2abh(a \mp b)^2 \mu^2 \pm b^3 a^3 (a \mp b)^4 = 0, \\
\mathcal{L}_{7,8,9}: \quad & \mu^4 + u_k \mu^2 + v_k = 0, \quad k = 1, 2, 3,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

где коэффициенты u_k, v_k определяются по формулам:

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= -\frac{2}{s} \left(\sqrt{a^2 - s^2} \pm \sqrt{b^2 - s^2} \right)^2 \left[a^2 b^2 - s^4 \pm 6s^2 \sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)} \right], \\ v_{1,2} &= \pm 16 \sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)} \left(\sqrt{a^2 - s^2} \pm \sqrt{b^2 - s^2} \right)^4 \cdot V_{\pm}, \\ u_3 &= \frac{2}{s} \left(\sqrt{s^2 - a^2} - \sqrt{s^2 - b^2} \right)^2 \left[a^2 b^2 - s^4 + 6s^2 \sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)} \right], \\ v_3 &= 16 \sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)} \left(\sqrt{s^2 - a^2} - \sqrt{s^2 - b^2} \right)^4 \cdot V_+, \end{aligned}$$

где

$$V_{\pm} = a^2 b^2 - s^4 \pm 2s^2 \sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)}.$$

Нахождение многочленов в точках $\mathcal{L}_1$ – $\mathcal{L}_6$ труда не составляет. Для множеств $\mathcal{L}_7$ – $\mathcal{L}_9$ при вычислении коэффициентов u_k, v_k характеристических многочленов использовалась запись матрицы линеаризации соответствующего поля в базисе касательного пространства к $\mathcal{P}^6$, который получим из (4.1) заменой последней тройки на векторы

$$\begin{aligned} \{0, 0, 0, 0, -\alpha_3, \alpha_2, 0, -\beta_3, \beta_2\}^t, \quad \{0, 0, 0, \alpha_3, 0, -\alpha_1, \beta_3, 0, -\beta_1\}^t, \\ \{0, 0, 0, -\alpha_2, \alpha_1, 0, -\beta_2, \beta_1, 0\}^t \end{aligned}$$

в подстановке выражений (3.11).

При значениях параметров, указанных в таблице 5.1, все корни соответствующего характеристического уравнения различны и разбиваются на пары, определяющие тип невырожденной особенности.

Для примера рассмотрим кривую δ_3 , $s > a$. Характеристическое уравнение в точках $\mathcal{L}_9$ относительно μ^2 имеет корни

$$\begin{aligned} \mu_{(1)}^2 &= -8s \sqrt{s^2 - a^2} \sqrt{s^2 - b^2} \left(\sqrt{s^2 - a^2} - \sqrt{s^2 - b^2} \right)^2 < 0, \\ \mu_{(2)}^2 &= \frac{2}{s} \left(\sqrt{s^2 - a^2} - \sqrt{s^2 - b^2} \right)^2 \left(s^4 - a^2 b^2 - 2s^2 \sqrt{s^2 - a^2} \sqrt{s^2 - b^2} \right). \end{aligned}$$

Последнее выражение меняет знак при переходе через значение s_0 согласно уравнению (3.16):

$$\mu_{(2)}^2 > 0 \quad \text{при } s \in (a, s_0), \quad \mu_{(2)}^2 < 0 \quad \text{при } s > s_0.$$

В первом случае получаем особенность “центр-седло”, во втором – “центр-центр”. По отношению к критической подсистеме $\mathcal{M}_3$ все точки периодических решений $\mathcal{L}_7$ – $\mathcal{L}_9$ имеют эллиптический тип, так как соответствующие кривые являются внешней границей области существования движений. Поэтому в критической подсистеме $\mathcal{M}_1$ тип рассматриваемых точек гиперболический при $s \in (a, s_0)$ и эллиптический при $s > s_0$. Теперь эти утверждения относительно обеих подсистем доказаны аналитически.

Отметим также, что согласно таблице 5.1 получено аналитическое доказательство существования невырожденной фокусной особенности ранга 1 на части множества $\mathcal{L}_5$, которая отображается в λ_{50} , то есть при значениях энергии

$-2\sqrt{ab} < h < 2\sqrt{ab}$. В изоэнергетических сечениях $\Sigma(h)$ имеем изолированную точку на бифуркационной диаграмме.

Все остальные случаи, отраженные в таблице, также вытекают из анализа корней характеристических многочленов (5.1). Вырождения особенностей соответствуют наличию кратного корня.

Теперь можно однозначно установить топологию слоения Лиувилля в окрестности невырожденных положений равновесия внутри критических подсистем $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_3$ (напомним, что в $\mathcal{M}_1$ они не попадают) в виде прямого или почти прямого произведения 2-атомов, если воспользоваться, например, методом круговых молекул [19], [6]. Однако для его применения необходима информация о количестве двумерных торов в каждой области, регулярной для подсистемы, и знание типа невырожденных особенностей ранга 0 и 1. Количество торов, равно как и количество периодических решений на каждом совместном уровне выбранной пары частных интегралов, установлено в [15], [16]. Тип особенностей установлен выше. Для примера, окрестность особого слоя невырожденной особенности s_3 внутри $\mathcal{M}_2$ можно представить в виде прямого произведения $B \times B$ двух атомов типа B , внутри $\mathcal{M}_3$ на одном гладком четырехмерном листе критического многообразия – $B \times B$, а на другом – почти прямое произведение $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$, где группа $\mathbb{Z}_2$ действует на каждом из сомножителей как центральная симметрия. Этого достаточно для того, чтобы понять, как устроена окрестность $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ особого слоя $\mathcal{S}$ в $\mathcal{P}^6$, содержащего особую точку s_3 типа “седло-седло-седло” ранга 0. Нужно взять модельную особенность типа прямого произведения трех 2-атомов $B \times B \times C_2$ и рассмотреть на нем покомпонентное действие образующей e группы $\mathbb{Z}_2$ по правилу

$$e(B \times B \times C_2) = (\beta(B) \times \text{id}(B) \times \alpha(C_2)),$$

где α и β – центральные симметрии симметричных атомов B и C_2 . После факторизации окрестность $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ получается в виде почти прямого произведения $(B \times B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$. Таким образом, из 32 разных особенностей типа “седло-седло-седло” ранга 0, описанных в [30]–[32], для волчка Ковалевской в двойном поле сил реализуется только одна, указанная выше. В таблице 5.2 содержится информация об окрестностях особых слоев в $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$ и $\mathcal{P}^6$, содержащих неподвижные точки системы.

§ 6. Невырожденные особенности ранга 2

Множество $\mathcal{C}^2$ всех критических точек ранга 2 есть объединение трех систем $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_3$ за вычетом уже исследованных точек множества $\mathcal{C}^0 \cup \mathcal{C}^1$.

Отметим сразу, что для системы $\mathcal{M}_1$, заданной уравнениями (1.2), (3.1), каждый регулярный тор

$$\mathbb{T}^2 \in \{x \in \mathcal{M}_1 : H = h, F = f\}$$

является эллиптическим. Это вытекает из того, что интеграл $K = Z_1^2 + Z_2^2$ есть положительная всюду функция и обращается в нуль на $\mathcal{M}_1$.

Таблица 5.2

$\mathcal{C}^0$	Образ в $\mathbb{R}^2(m, h)$	$\mathcal{U}(\mathcal{S})$ в $\mathcal{M}_2$	Образ в $\mathbb{R}^2(s, h)$	$\mathcal{U}(\mathcal{S})$ в $\mathcal{M}_3$	Образ в $\mathbb{R}^3(h, k, g)$	$\mathcal{U}(\mathcal{S})$ в $\mathcal{P}^6$
c_0	P_{01}	$A \times A$	Q_{01} Q_{02}	$A \times A$ $A \times A$	P_0	$A \times A \times A$
c_1	P_{11}	$A \times B$	Q_{11} Q_{12}	$A \times B$ $A \times A$	P_1	$A \times A \times B$
c_2	P_{21}	$A \times B$	Q_{21} Q_{22}	$(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$ $A \times B$	P_2	$(A \times B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$
c_3	P_{31}	$B \times B$	Q_{31} Q_{32}	$(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$ $B \times B$	P_3	$(B \times B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$

ТЕОРЕМА 5. Все критические точки ранга 2 на многообразии $\mathcal{M}_1$ являются невырожденными типа $(1, 0, 0)$, за исключением точек нулевого уровня интеграла F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что на $\mathcal{M}_1$ нет критических точек интеграла H , и отметим, что кроме множеств $\mathcal{L}_7 - \mathcal{L}_9$ на $\mathcal{M}_1$ нет точек зависимости интегралов H и G . Последнее доказано в [12]. Таким образом, эти два интеграла регулярны и независимы на $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{C}^2$. В то же время, всюду на $\mathcal{M}_1$ имеем $dK = 0$. Характеристическое уравнение оператора A_K в $\mathbb{R}^9$ при условии (3.1) легко выписывается, имеет семь нулевых корней, а оставшийся сомножитель $\mu^2 + 4f^2$ имеет два различных мнимых корня при $f \neq 0$, что и доказывает теорему.

В образе получаем множество $\Delta_1 \subset \mathbb{R}^2(h, k, g)$, для которого тем самым получено обоснование вырожденности соответствующих критических точек.

На многообразии $\mathcal{M}_2$, заданном уравнениями (1.2), (3.3), система (1.1) имеет явное алгебраическое решение [15]:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{1}{2(s_1 - s_2)^2} [(s_1 s_2 - a^2)\psi + S_1 S_2 \varphi_1 \varphi_2], \\
 \alpha_2 &= \frac{1}{2(s_1 - s_2)^2} [(s_1 s_2 - a^2)\varphi_1 \varphi_2 - S_1 S_2 \psi], \\
 \beta_1 &= -\frac{1}{2(s_1 - s_2)^2} [(s_1 s_2 - b^2)\varphi_1 \varphi_2 - S_1 S_2 \psi], \\
 \beta_2 &= \frac{1}{2(s_1 - s_2)^2} [(s_1 s_2 - b^2)\psi + S_1 S_2 \varphi_1 \varphi_2], \\
 \alpha_3 &= \frac{r}{s_1 - s_2} S_1, \quad \beta_3 = \frac{r}{s_1 - s_2} S_2, \\
 \omega_1 &= \frac{r}{2(s_1 - s_2)} (\ell - 2ms_1) \varphi_2, \quad \omega_2 = \frac{r}{2(s_1 - s_2)} (\ell - 2ms_2) \varphi_1, \\
 \omega_3 &= \frac{1}{s_1 - s_2} (S_2 \varphi_1 - S_1 \varphi_2).
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned}\psi &= 4ms_1s_2 - 2\ell(s_1 + s_2) + \frac{1}{m}(\ell^2 - 1), \\ S_1 &= \sqrt{s_1^2 - a^2}, \quad \varphi_1 = \sqrt{-\varphi(s_1)}, \quad S_2 = \sqrt{b^2 - s_2^2}, \quad \varphi_2 = \sqrt{\varphi(s_2)}, \\ \varphi(s) &= 4ms^2 - 4\ell s + \frac{1}{m}(\ell^2 - 1)\end{aligned}\quad (6.2)$$

и постоянная ℓ связана с h, m уравнением (3.15). Зависимость s_1, s_2 от времени задана уравнениями

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - s_1^2)\varphi(s_1)}, \quad \frac{ds_2}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 - s_2^2)\varphi(s_2)}. \quad (6.3)$$

ТЕОРЕМА 6. *Все критические точки ранга 2 на многообразии $\mathcal{M}_2$ невырождены, за исключением точек, лежащих в прообразе кривых Δ_1, Δ_2 . При этом они имеют тип $(1, 0, 0)$ для $m > 0$ и $(0, 1, 0)$ для $m < 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве единственного интеграла, имеющего особенность в каждой точке $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{C}^2$, благодаря наличию достаточно простого уравнения (3.4) листа Γ_2 , удобно взять соответствующую функцию (1.6):

$$\Phi = \phi_2(H, K, G) = (2G - p^2H)^2 - r^4K. \quad (6.4)$$

Для нее характеристическое уравнение оператора A_Φ после необходимой факторизации по нулевому корневому подпространству в подстановке явных выражений (6.1) принимает вид

$$\mu^2 + 4r^{12}\ell^2m = 0$$

и, за исключением случаев $m = 0(\Delta_1)$ и $\ell = 0(\Delta_2)$, имеет два различных корня, чисто мнимых при $m > 0$ и вещественных при $m < 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как показано в [15], $\mathcal{M}_2$ состоит из критических точек нулевого уровня функций

$$2G - p^2H \pm r^2\sqrt{K},$$

одна из которых является суммой квадратов двух гладких регулярных функций ($m > 0$), а другая – разностью квадратов ($m < 0, \ell \neq 0$). Отсюда следует эллиптичность двумерных торов в первом случае, и гиперболичность во втором. Здесь мы вдобавок строго доказали невырожденность таких точек. Интересно отметить связь вырожденности критических точек с аналитическим решением. При $m \rightarrow 0$ многочлен φ в (6.2) имеет предел $\varphi(s) \rightarrow 2h - 4s$, поэтому при $m = 0$ падает степень подкоренного выражения в дифференциальных уравнениях (6.3). При $\ell = 0$ переменные s_1, s_2 входят в правые части этих уравнений только в четных степенях, в связи с чем возникает дополнительная симметрия.

На многообразии $\mathcal{M}_3$, заданном уравнениями (1.2), (3.5), явное алгебраическое решение системы (1.1) указано в [16], [28]. Пусть s, τ , как и выше, –

постоянные интегралов (3.6), (3.8), последняя связана с h линейной зависимостью (3.9). Введем также обозначения:

$$\sigma = \tau^2 - 2p^2\tau + r^4, \quad \chi = \sqrt{\frac{4s^2\tau + \sigma}{4s^2}}, \quad \varkappa = \sqrt{\sigma}.$$

Тогда на любом совместном уровне интегралов внутри $\mathcal{M}_3$ имеем

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{(\mathcal{A} - r^2 U_1 U_2)(4s^2\tau + U_1 U_2) - (\tau + r^2)M_1 N_1 M_2 N_2 V_1 V_2}{4r^2 s\tau (U_1 + U_2)^2}, \\ \alpha_2 &= i \frac{(\mathcal{A} - r^2 U_1 U_2)V_1 V_2 - (4s^2\tau + U_1 U_2)(\tau + r^2)M_1 N_1 M_2 N_2}{4r^2 s\tau (U_1 + U_2)^2}, \\ \beta_1 &= i \frac{(\mathcal{B} + r^2 U_1 U_2)V_1 V_2 - (4s^2\tau + U_1 U_2)(\tau - r^2)M_1 N_1 M_2 N_2}{4r^2 s\tau (U_1 + U_2)^2}, \\ \beta_2 &= - \frac{(\mathcal{B} + r^2 U_1 U_2)(4s^2\tau + U_1 U_2) - (\tau - r^2)M_1 N_1 M_2 N_2 V_1 V_2}{4r^2 s\tau (U_1 + U_2)^2}, \\ \alpha_3 &= \frac{R}{r\sqrt{2}} \frac{M_1 M_2}{t_1 + t_2}, \quad \beta_3 = -i \frac{R}{r\sqrt{2}} \frac{N_1 N_2}{t_1 + t_2}, \\ \omega_1 &= \frac{R}{4rs\sqrt{s\tau}} \frac{M_2 N_1 U_1 V_2 + M_1 N_2 U_2 V_1}{t_1^2 - t_2^2}, \\ \omega_2 &= - \frac{iR}{4rs\sqrt{s\tau}} \frac{M_2 N_1 U_2 V_1 + M_1 N_2 U_1 V_2}{t_1^2 - t_2^2}, \\ \omega_3 &= \frac{U_1 - U_2}{\sqrt{2s\tau}} \frac{M_2 N_2 V_1 - M_1 N_1 V_2}{t_1^2 - t_2^2}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_1 &= \sqrt{t_1 + \varkappa}, \quad K_2 = \sqrt{t_2 + \varkappa}, \quad L_1 = \sqrt{t_1 - \varkappa}, \quad L_2 = \sqrt{t_2 - \varkappa}, \\ M_1 &= \sqrt{t_1 + \tau + r^2}, \quad M_2 = \sqrt{t_2 + \tau + r^2}, \\ N_1 &= \sqrt{t_1 + \tau - r^2}, \quad N_2 = \sqrt{t_2 + \tau - r^2}, \\ V_1 &= \sqrt{4s^2\chi^2 - t_1^2}, \quad V_2 = \sqrt{4s^2\chi^2 - t_2^2}, \\ U_1 &= \sqrt{t_1^2 - \sigma} = K_1 L_1, \quad U_2 = \sqrt{t_2^2 - \sigma} = K_2 L_2, \\ R &= \frac{1}{\sqrt{2}}(K_1 K_2 + L_1 L_2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= [(t_1 + \tau + r^2)(t_2 + \tau + r^2) - 2(p^2 + r^2)r^2]\tau, \\ \mathcal{B} &= [(t_1 + \tau - r^2)(t_2 + \tau - r^2) + 2(p^2 - r^2)r^2]\tau. \end{aligned}$$

Зависимость вещественных переменных t_1, t_2 от времени описывается уравнениями

$$(t_1 - t_2) \frac{dt_1}{dt} = \sqrt{\frac{1}{2s\tau} (4s^2\chi^2 - t_1^2)(t_1^2 - \sigma)[r^4 - (t_1 + \tau)^2]},$$

$$(t_1 - t_2) \frac{dt_2}{dt} = \sqrt{\frac{1}{2s\tau}(4s^2\chi^2 - t_2^2)(t_2^2 - \sigma)[r^4 - (t_2 + \tau)^2]}.$$

ТЕОРЕМА 7. *Все регулярные двумерные торы, заданные формулами (6.5), состоят из невырожденных критических точек ранга 2 отображения момента $\mathcal{F}$, за исключением значений параметров, отвечающих множествам Δ_2, Δ_3 . Тор является эллиптическим, если значение*

$$\tau s[s^4 - (a^2 + b^2 - \tau)s^2 + a^2b^2]$$

отрицательно, и гиперболическим, если оно положительно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данном случае в качестве интеграла, имеющего особенность на $\mathcal{M}_3$, также можно взять функцию, аналогичную (6.4), полученную, например, исключением s из уравнений (3.7) поверхности Γ_3 . Однако результат получается слишком громоздким, и такой подход нерационален. Здесь удобно рассмотреть функцию с неопределенными множителями Лагранжа, которая введена в [12] для вывода уравнений критических подсистем,

$$\Psi = 2G - (p^2 - \tau)H + sK.$$

Как показано в [12], после записи условия наличия критической точки у функции Ψ константы s, τ на $\mathcal{M}_3$ оказываются значениями частных интегралов S, T . Поэтому и при вычислении характеристического многочлена оператора A_Ψ считаем s, τ константами, а затем подставляем в найденное выражение значения (6.5). Получим характеристическое уравнение в виде

$$\mu^2 - \frac{2\tau}{s} \left[s^4 - (p^2 - \tau)s^2 + \frac{p^4 - r^4}{4} \right] = 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

§ 7. Заключение

В работе выполнена полная классификация особых точек отображения момента неприводимой интегрируемой гамильтоновой системы с тремя степенями свободы – задачи о движении волчка типа Ковалевской в двойном силовом поле, интегрируемость которой установлена А. Г. Рейманом и М. А. Семеновым-Тянь-Шанским. Предъявлены явные формулы характеристических уравнений для собственных чисел соответствующих симплектических операторов, которые и определяют тип невырожденной особенности. Для вывода характеристических уравнений используется параметризация периодических решений и двумерных торов в критических подсистемах, полученная в [15], [16] как составная часть разделения переменных и построения алгебраического решения. Полученные результаты составляют аналитическую основу для описания топологии особых слоев слоения Лиувилля рассматриваемой системы.

Список литературы

- [1] О. И. Богоявленский, “Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:5 (1984), 883–938; англ. пер.: O. I. Bogoyavlenskij, “Integrable Euler equations on Lie algebras arising in problems of mathematical physics”, *Math. USSR-Izv.*, **25**:2 (1985), 207–257.
- [2] М. П. Харламов, “Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле”, *Механика твердого тела*, 2004, № 34, 47–58.
- [3] H. Yehia, “New integrable cases in the dynamics of rigid bodies”, *Mech. Res. Comm.*, **13**:3 (1986), 169–172.
- [4] М. П. Харламов, “Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской”, *ПММ*, **47**:6 (1983), 922–930; англ. пер.: M. P. Kharlamov, “Bifurcation of common levels of first integrals of the Kovalevskaya problem”, *J. Appl. Math. Mech.*, **47**:6 (1983), 737–743.
- [5] М. П. Харламов, “Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела”, *Докл. АН СССР*, **273**:6 (1983), 1322–1325; англ. пер.: M. P. Kharlamov, “Topological analysis of classical integrable systems in the dynamics of the rigid body”, *Soviet Math. Dokl.*, **28**:3 (1983), 802–805.
- [6] А. В. Болсинов, П. Рихтер, А. Т. Фоменко, “Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской”, *Матем. сб.*, **191**:2 (2000), 3–42; англ. пер.: A. V. Bolsinov, P. H. Richter, A. T. Fomenko, “The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top”, *Sb. Math.*, **191**:2 (2000), 151–188.
- [7] I. I. Kharlamova, A. Y. Savushkin, “Bifurcation diagrams involving the linear integral of Yehia”, *J. Phys. A*, **43**:10 (2010), Id 105203.
- [8] А. Т. Фоменко, “Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях”, *Функц. анализ и его прил.*, **25**:4 (1991), 23–35; англ. пер.: A. T. Fomenko, “A topological invariant which roughly classifies integrable strictly nondegenerate Hamiltonians on four-dimensional symplectic manifolds”, *Funct. Anal. Appl.*, **25**:4 (1991), 262–272.
- [9] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Интегрируемые геодезические потоки на сфере, порожденные системами Горячева–Чаплыгина и Ковалевской в динамике твердого тела”, *Матем. заметки*, **56**:2 (1994), 139–142; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, “Integrable geodesic flows on the sphere, generated by Goryachev–Chaplygin and Kowalewski systems in the dynamics of a rigid body”, *Math. Notes*, **56**:2 (1994), 859–861.
- [10] А. В. Болсинов, В. В. Козлов, А. Т. Фоменко, “Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела”, *УМН*, **50**:3 (1995), 3–32; англ. пер.: A. V. Bolsinov, V. V. Kozlov, A. T. Fomenko, “The Maupertuis principle and geodesic flows on the sphere arising from integrable cases in the dynamics of a rigid body”, *Russian Math. Surveys*, **50**:3 (1995), 473–501.
- [11] A. I. Bobenko, A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky, “The Kowalewski top 99 years later: A Lax pair, generalizations and explicit solutions”, *Comm. Math. Phys.*, **122**:2 (1989), 321–354.
- [12] M. P. Kharlamov, “Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **10**:4 (2005), 381–398.
- [13] М. П. Харламов, “Области существования критических движений обобщенного волчка Ковалевской и бифуркационные диаграммы”, *Механика твердого тела*, 2006, № 36, 13–22.

- [14] D. B. Zotev, “Fomenko–Zieschang invariant in the Bogoyavlenskyi integrable case”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **5**:4 (2000), 437–457.
- [15] М. П. Харламов, А. Ю. Савушкин, “Разделение переменных и интегральные многообразия в одной частной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской”, *Укр. матем. вестн.*, **1**:4 (2004), 564–581; англ. пер.: М. Р. Kharlamov, A. Yu. Savushkin, “Separation of variables and integral manifolds in one problem of motion of generalized Kowalevski top”, *Ukr. Math. Bull.*, **1**:4 (2004), 569–586.
- [16] М. Р. Kharlamov, “Separation of variables in the generalized 4th Appelrot class. II. Real solutions”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **14**:6 (2009), 621–634.
- [17] А. Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:6 (1986), 1276–1307; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:3 (1987), 629–658.
- [18] А. Т. Фоменко, “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *УМН*, **44**:1 (1989), 145–173; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems”, *Russian Math. Surveys*, **44**:1 (1989), 181–219.
- [19] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, Изд-во УдГУ, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, v. 1, 2, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2004.
- [20] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, “Singularities of integrable Hamiltonian systems”, *Topological methods in the theory of integrable systems*, Cambridge Scientific Publ., Cambridge, 2006, 1–67.
- [21] E. Miranda, N. T. Zung, “Equivariant normal form for nondegenerate singular orbits of integrable Hamiltonian systems”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **37**:6 (2004), 819–839.
- [22] N. T. Zung, “Torus actions and integrable systems”, *Topological methods in the theory of integrable systems*, Cambridge Scientific Publ., Cambridge, 2006, 289–328.
- [23] М. П. Харламов, Е. Г. Шведов, “Бифуркационные диаграммы на изоэнергетических уровнях волчка Ковалевской в двойном поле”, *Механика твердого тела*, 2004, № 34, 59–65.
- [24] М. Р. Kharlamov, E. G. Shvedov, “On the existence of motions in the generalized 4th Appelrot class”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **11**:3 (2006), 337–342.
- [25] М. П. Харламов, “Один класс решений с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении волчка Ковалевской в двойном постоянном поле”, *Механика твердого тела*, 2002, № 32, 32–38.
- [26] М. П. Харламов, “Особые периодические решения обобщенного случая Делоне”, *Механика твердого тела*, 2006, № 36, 23–33.
- [27] Д. Б. Зотьев, “Фазовая топология первого класса Аппельрота волчка Ковалевской в магнитном поле”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:1 (2006), 95–128; англ. пер.: D. B. Zotev, “Phase topology of Appelrot class I of a Kowalewski top in a magnetic field”, *J. Math. Sci.*, **149**:1 (2008), 922–946.
- [28] М. Р. Kharlamov, “Separation of variables in the generalized 4th Appelrot class”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **12**:3 (2007), 267–280.
- [29] М. Р. Kharlamov, D. B. Zotev, “Non-degenerate energy surfaces of rigid body in two constant fields”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **10**:1 (2005), 15–19.
- [30] В. В. Калашников, “Простые гиперболические особенности пуассоновых действий”, *Топологические методы в теории гамильтоновых систем*, Факториал, М., 1998, 115–126.

- [31] А. А. Ошемков, “Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **201**:8 (2010), 63–102; англ. пер.: A. A. Oshemkov, “Classification of hyperbolic singularities of rank zero of integrable Hamiltonian systems”, *Sb. Math.*, **201**:8 (2010), 1153–1191.
- [32] А. А. Ошемков, “Седловые особенности сложности 1 интегрируемых гамильтоновых систем”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2011, № 2, 3–12; англ. пер.: A. A. Oshemkov, “Saddle singularities of complexity 1 of integrable Hamiltonian systems”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **66**:2 (2011), 60–69.

П. Е. Рябов (P. E. Ryabov)

Финансовый университет при Правительстве РФ,
г. Москва

E-mail: orelryabov@mail.ru

Поступила в редакцию

22.06.2010 и 07.04.2011

М. П. Харламов (M. P. Kharlamov)

Волгоградская академия государственной службы

E-mail: mharlamov@vags.ru