Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Игнатьев, Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 10, 117–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm776>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 10:43:49

УДК 517.925.3

А. О. Игнатьев

Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

Рассмотрена система обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Предполагается, что система допускает нулевое решение. Показано, что необходимым и достаточным условием его равномерной асимптотической устойчивости является существование соответствующей функции Ляпунова. Получены ограничения на возмущения правых частей дифференциальных уравнений и импульсных воздействий, при выполнении которых из равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения “невозмущенной” системы следует равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения “возмущенной” системы.

Библиография: 21 название.

Во многих случаях при математическом описании эволюции реальных процессов с кратковременными возмущениями удобно пренебречь длительностью возмущения и считать, что эти возмущения носят “мгновенный” характер [1]. Такая идеализация приводит к необходимости исследовать динамические системы с разрывными траекториями или, иначе, дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Итогом первых работ по дифференциальным уравнениям с импульсным воздействием (см. [2]–[11]) явилась монография [1], в которой изложены основы этой теории. В последние годы заметно увеличилось число математических работ по исследованиям различных аспектов теории импульсных систем [12]–[16], что вызвано запросами новейшей техники. Настоящая статья посвящена изучению устойчивости решений систем с импульсным воздействием. Она является продолжением и развитием работ [1], [17].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(t, x), & t \neq \tau_i, & t \in \mathbb{R}_+, \\ \Delta x &= J_i(x), & t = \tau_i, & i \in \mathbb{N},\end{aligned}\tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $x = (x^1, \dots, x^n) \in B_H \subset \mathbb{R}^n$, $B_H = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq H\}$, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\|x\| = \max_{1 \leq s \leq n} |x^s|$. Предположим, что выполняются следующие гипотезы в отношении системы (1):

(Г1) в области $\mathbb{R}_+ \times B_H$ функция $f(t, x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|, \quad f(t, 0) \equiv 0;$$

(Г2) функции $J_i(x)$ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица:

$$\|J_i(x_1) - J_i(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|, \quad x_1 \in B_H, \quad x_2 \in B_H, \quad i \in \mathbb{N},$$

кроме того, $J_i(0) = 0$, $i \in \mathbb{N}$;

(Г3) существует постоянная $h \in (0, H)$ такая, что если $x \in B_h$, то $x + J_i(x) \in B_H$ при $i \in \mathbb{N}$;

(Г4) $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = +\infty$.

Будем в дальнейшем обозначать $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\tau_{i-1}, \tau_i)$ и $x(t) = F(t, t_0, x_0)$ — решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $F(t_0, t_0, x_0) = x_0$, $x_0 \in B_H$, если $t_0 \in E$. В случае же, если $t_0 = \tau_i$, $i \in \mathbb{N}$, под выражением $F(t, t_0, x_0)$ при $t > t_0$ будем понимать решение системы (1) с начальным условием $F(t_0 + 0, t_0 + 0, x_0 + J_i(x_0)) = x_0 + J_i(x_0)$. Согласно существующей традиции [1], [12], [13] решение $x(t)$ предполагается непрерывным слева в точках τ_i : $x(\tau_i) = x(\tau_i - 0)$, $i \in \mathbb{N}$. Введем следующие определения [18], [19].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Нулевое решение системы (1) называется *устойчивым*, если для заданных $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что $\|F(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ для любых $x_0 \in B_\delta$ и $t \geq t_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Нулевое решение системы (1) называется *равномерно устойчивым*, если в определении 1 число δ может быть выбрано не зависящим от t_0 , т.е. $\delta = \delta(\varepsilon)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Решение $x = 0$ системы (1) называется *притягивающим*, если для любого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $\eta > 0$ такое, что для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in B_\eta$ найдется $\sigma = \sigma(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$ такое, что $\|F(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0 + \sigma$. При этом будем говорить, что область B_η содержится в области притяжения нулевого решения в момент t_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Решение $x = 0$ системы (1) называется *равномерно притягивающим*, если для некоторого $\eta > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что $\|F(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ для всех $\|x_0\| < \eta$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $t \geq t_0 + \sigma$. При этом будем говорить, что область B_η содержится в области притяжения нулевого решения системы (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Нулевое решение системы (1) называется *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно равномерно устойчивое и равномерно притягивающее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что функция $v: \mathbb{R}_+ \times B_H \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $\mathcal{V}_0$, если функция v непрерывна на множестве $G = E \times B_H$, удовлетворяет условию Липшица по x на G , $v(t, 0) \equiv 0$ при $t \in \mathbb{R}_+$ и если для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют конечные пределы

$$\lim_{t \rightarrow \tau_k - 0} v(t, x) = v(\tau_k, x), \quad \lim_{t \rightarrow \tau_k + 0} v(t, x) = v(\tau_k + 0, x).$$

Обозначим через $\mathcal{K}$ класс функций Хана [18], т.е. класс функций $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, непрерывных, строго возрастающих и удовлетворяющих условию $g(0) = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия (Г1), (Г2), (Г3) и существуют функции $v \in \mathcal{V}_0$, $g \in \mathcal{K}$, $b \in \mathcal{K}$, $c \in \mathcal{K}$ такие, что

$$v(t, x) \geq g(\|x\|), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in B_H, \quad (2)$$

$$v(t, x) \leq b(\|x\|), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in B_H, \quad (3)$$

$$D^+v(t, x) \leq -c(\|x\|), \quad (t, x) \in G, \quad (4)$$

где $D^+v(t, x)$ обозначает правую верхнюю производную Дини функции v вдоль решения $x(t)$,

$$v(\tau_k + 0, x + J_k(x)) \leq v(\tau_k, x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in B_H. \quad (5)$$

Тогда решение

$$x = 0 \quad (6)$$

системы (1) равномерно асимптотически устойчиво и существует $\eta > 0$ ($\eta < H$) такое, что B_η содержится в области его притяжения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении условий теоремы равномерная устойчивость нулевого решения доказана в работе [12; с. 187]. Покажем, что решение (6) равномерно притягивающее. Пусть $0 < h < H$. Так как решение (6) равномерно устойчиво, то существует такое $\eta > 0$, что $\|x(t)\| < h$ при любых $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in B_\eta$, $t > t_0$. Покажем, что $\|x(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x_0 \in B_\eta$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Пусть ε – произвольное положительное число ($\varepsilon < h$). Так как решение $x = 0$ системы (1) равномерно устойчиво, то найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если $t_1 \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in B_\delta$, то $\|F(t, t_1, x_1)\| < \varepsilon$ при $t > t_1$. Рассмотрим траекторию $x(t) = F(t, t_0, x_0)$, где $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in B_\eta$. Покажем, что при $t > t_0 + \sigma$, где $\sigma = b(h)/c(\delta(\varepsilon))$, справедливо неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon$. Выясним, в течение какого времени траектория $x(t)$ может находиться в множестве $B_h \setminus B_\delta$. Пусть $x(t) \in B_h \setminus B_\delta$. Тогда в силу (4) $D^+v(t, x(t)) \leq -c(\delta)$, откуда, используя (5), получаем

$$v(t, x(t)) \leq v(t_0, x_0) - c(\delta)(t - t_0),$$

или

$$t - t_0 \leq \frac{1}{c(\delta)}(v(t_0, x_0) - v(t, x(t))) < \frac{b(h)}{c(\delta)}.$$

Таким образом, для траектории $x(t)$ с начальными данными $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in B_\eta$ существует такой момент времени $t_1 \in (t_0, t_0 + \sigma]$, что $\|x(t_1)\| < \delta$. Следовательно, при $t > t_0 + \sigma \geq t_1$ будет справедливо неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Покажем, что теорема 1 обратима. Для этого докажем вначале следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $\psi(\tau): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — неотрицательная ограниченная кусочно непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, с точками разрыва первого рода $\tau_1, \dots, \tau_n, \dots$, непрерывная слева в точках разрыва $\psi(\tau_i) = \psi(\tau_i - 0)$, $i \in \mathbb{N}$, причем $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = +\infty$ и на множестве $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\tau_{i-1}, \tau_i)$ функция $\psi(\tau)$ имеет производную $\psi'(\tau)$, удовлетворяющую условию $|\psi'(\tau)| \leq P$. Тогда функция $f(t) = \sup_{t \leq \tau < \infty} \psi(\tau)$ при любом значении $t \in \mathbb{R}_+$ имеет односторонние производные, удовлетворяющие условиям

$$-P \leq f'(t-0) \leq 0, \quad -P \leq f'(t+0) \leq 0. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что кривая $y = f(t)$ при $t \in \mathbb{R}_+$ представляет собой чередующиеся участки кривой $y = \psi(t)$, на которых $\psi(t)$ не убывает, и участки, на которых функция $f(t)$ постоянна, т.е. $f(t)$ — кусочно непрерывная монотонно неубывающая функция, стремящаяся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Точками разрыва могут быть лишь точки $t = \tau_i$ ($i \in \mathbb{N}$). Эта функция при $t \in \mathbb{R}_+$ имеет односторонние производные $f'(t \pm 0)$, удовлетворяющие условиям (7), что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. Пусть $f_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f_2: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — две ограниченные неотрицательные кусочно непрерывные функции, имеющие односторонние пределы в точках разрыва, такие, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f_2(t) = 0.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left| \sup_{t \in \mathbb{R}_+} f_1(t) - \sup_{t \in \mathbb{R}_+} f_2(t) \right| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f_1(t) - f_2(t)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} f_1(t) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} f_2(t)$ справедливость леммы 2 очевидна. Предположим, что $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} f_1(t) \neq \sup_{t \in \mathbb{R}_+} f_2(t)$. Не нарушая общности, будем считать $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} f_1(t) > \sup_{t \in \mathbb{R}_+} f_2(t)$. В силу того что функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, оставаясь неотрицательными и ограниченными, стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, существуют конечные значения t_1, t_2, t_3 такие, что $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} f_1(t) = f_1(t_1 \pm 0)$, $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} f_2(t) = f_2(t_2 \pm 0)$, $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f_1(t) - f_2(t)| = |f_1(t_3 \pm 0) - f_2(t_3 \pm 0)|$. Здесь $f_k(t_i \pm 0)$ ($k = 1, 2; i = 1, 2, 3$) обозначает либо значение, либо односторонний предел функции f_k в точке t_i . Следовательно, $f_1(t_1 \pm 0) - f_2(t_2 \pm 0) \leq f_1(t_1 \pm 0) - f_2(t_1 \pm 0) \leq |f_1(t_3 \pm 0) - f_2(t_3 \pm 0)|$, что и доказывает справедливость леммы 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть справедливы гипотезы (Г1)–(Г4), решение $x = 0$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво и множество B_h ($0 < h < H$) содержится в области его притяжения. Тогда существуют константы $P > 0$, $L_1 > 0$ и функции $g \in \mathcal{X}$, $b \in \mathcal{X}$, $c \in \mathcal{X}$, $v: \mathbb{R}_+ \times B_h \rightarrow \mathbb{R}_+$ такие, что $v \in \mathcal{V}_0$, $|v(t, x_1) - v(t, x_2)| \leq L_1 \|x_1 - x_2\|$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $x_1 \in B_h$, $x_2 \in B_h$, $|v(t_1, x) - v(t_2, x)| \leq L_1 |t_1 - t_2|$ при $x \in B_h$, $t_1 \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$, $t_2 \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i \in \mathbb{N}$, и выполняются условия (2)–(5) и $D^+v(t, x) \geq -P$.

Если система (1) периодична с периодом ω , то функция v также может быть выбрана периодической по t с периодом ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(t)$ – скалярная монотонно убывающая непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$\|F(t, t_0, x_0)\| \leq \varphi(t - t_0) \quad \text{при } t \geq t_0 \quad (8)$$

для любого $x_0 \in B_h$, такая, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$. Существование такой функции $\varphi(t)$ следует из свойства равномерности асимптотической устойчивости в смысле определения 5. (Достаточно в качестве $\varphi(t)$ выбрать любую непрерывную положительную монотонно убывающую к нулю функцию, удовлетворяющую неравенству $\varphi(t) > \varepsilon$ при $t \in [\sigma(\varepsilon), \sigma(\varepsilon/2)]$.)

Обозначим через $M(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ монотонно возрастающую непрерывную функцию такую, что $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = +\infty$. В монографии [20; с. 452–458] показано существование функции $g = g(\varphi): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такой, что g – непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$g \in \mathcal{K}, \quad g' \in \mathcal{K}, \quad (9)$$

$$\int_0^\infty g(\varphi(\tau)) d\tau = N_1 < +\infty, \quad (10)$$

$$\int_0^\infty g'(\varphi(\tau)) M(\tau) d\tau = N_2 < +\infty, \quad (11)$$

$$g'(\varphi(\tau)) M(\tau) < N_3 \quad \text{при всех } \tau \geq 0, \quad (12)$$

где N_1, N_2, N_3 – положительные константы.

Покажем, что функция

$$v(t, x) = \int_t^\infty g(\|F(\tau, t, x)\|) d\tau + \sup_{t \leq \tau < \infty} g(\|F(\tau, t, x)\|) \quad (13)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы.

Интеграл (10) сходится, поэтому на основании оценки (8) сходится интеграл в правой части (13), следовательно, функция v определена в области

$$\mathbb{R}_+ \times B_h. \quad (14)$$

Заметим, что $\sup_{t \leq \tau < \infty} \|F(\tau, t, x)\| \geq \|x\|$. В силу (9) получаем

$$\int_t^\infty g(\|F(\tau, t, x)\|) d\tau \geq 0, \quad \sup_{t \leq \tau < \infty} g(\|F(\tau, t, x)\|) \geq g(\|x\|),$$

т.е. функция v удовлетворяет неравенству (2).

Из оценки (8) получаем $\|F(t, t_0, x_0)\| \leq \varphi(0)$ для всех t_0, x_0 , принадлежащих области (14), поэтому

$$v(t, x) \leq \int_0^\infty g(\varphi(\tau)) d\tau + g(\varphi(0)) = N_4 = \text{const.}$$

Следовательно, в области (14) функция v равномерно ограничена. Покажем, что функция v удовлетворяет условию Липшица по x . Воспользовавшись леммой 2, получаем:

$$\begin{aligned}
|v(t, x_1) - v(t, x_2)| &= \left| \int_t^\infty [g(\|F(\tau, t, x_1)\|) - g(\|F(\tau, t, x_2)\|)] d\tau \right. \\
&\quad \left. + \left[\sup_{t \leq \tau < \infty} g(\|F(\tau, t, x_1)\|) - \sup_{t \leq \tau < \infty} g(\|F(\tau, t, x_2)\|) \right] \right| \\
&\leq \int_t^\infty g'_\varphi(\sup(\|F(\tau, t, x_1)\|, \|F(\tau, t, x_2)\|)) \|F(\tau, t, x_1) - F(\tau, t, x_2)\| d\tau \\
&\quad + \sup_{t \leq \tau < \infty} |g(\|F(\tau, t, x_1)\|) - g(\|F(\tau, t, x_2)\|)|. \tag{15}
\end{aligned}$$

Согласно [1; (2.24)] имеем

$$\|F(\tau, t, x_1) - F(\tau, t, x_2)\| < M(\tau - t)\|x_1 - x_2\|, \tag{16}$$

где $M: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — монотонно возрастающая положительная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$M(\tau - t) > (1 + L)^p e^{L(\tau - t)},$$

p — количество точек τ_i на промежутке $[t, \tau]$. В силу свойства (Г4) такая функция действительно существует. Учитывая неравенство (15) и применяя ко второму слагаемому правой части соотношения (15) теорему о среднем, с помощью оценок (11), (12) получаем

$$\begin{aligned}
|v(t, x_1) - v(t, x_2)| &\leq \|x_1 - x_2\| \left[\int_t^\infty g'_\varphi(\sup(\|F(\tau, t, x_1)\|, \|F(\tau, t, x_2)\|)) M(\tau - t) d\tau \right. \\
&\quad \left. + \sup_{t \leq \tau < \infty} (g'_\varphi(\varphi(\tau - t))) M(\tau - t) \right] \leq (N_2 + N_3)\|x_1 - x_2\|, \tag{17}
\end{aligned}$$

что и доказывает тот факт, что v удовлетворяет условию Липшица по x равномерно по t . Из условия Липшица следует существование функции $b \in \mathcal{K}$ такой, что выполняется неравенство (3). В качестве $b(\|x\|)$ может быть выбрана функция $(N_2 + N_3)(\|x\|)$.

Проверим теперь, что $|v(t_1, x) - v(t_2, x)| \leq L_1|t_1 - t_2|$ при $x \in B_h$, $t_1 \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$, $t_2 \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i \in \mathbb{N}$, где L_1 — константа, не зависящая от i . Действительно, это следует из того, что первое слагаемое в правой части (13) является функцией, непрерывной по t при $t \in \mathbb{R}_+$ и дифференцируемой по t при $t \neq \tau_i$, причем абсолютная величина производной равномерно ограничена, а второе слагаемое непрерывно по t при $t \neq \tau_i$, имеет ограниченные неположительные левостороннюю и правостороннюю производные по t при $t \in \mathbb{R}_+$ в силу леммы 1 и абсолютные величины этих производных также равномерно ограничены.

Рассмотрим $D^+v(t, x)$ вдоль решений $F(t, t_0, x_0)$ системы (1). Имеем $D^+v = D^+\bar{v}$, где $\bar{v}$ – результат подстановки в функцию v произвольного решения $F(t, t_0, x_0)$ уравнений (1). Но

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \int_t^\infty g(\|F(\tau, t, F(t, t_0, x_0))\|) d\tau + \sup_{t \leq \tau < \infty} g(\|F(\tau, t, F(t, t_0, x_0))\|) \\ &= \int_t^\infty g(\|F(\tau, t_0, x_0)\|) d\tau + \sup_{t \leq \tau < \infty} g(\|F(\tau, t, F(t, t_0, x_0))\|),\end{aligned}$$

так как $F(\tau, t, F(t, t_0, x_0)) \equiv F(\tau, t_0, x_0)$. Отсюда при $t = t_0$ получаем

$$\begin{aligned}D^+v(t, F(t, t_0, x_0))\big|_{t=t_0} &= \frac{d}{dt} \int_t^\infty g(\|F(\tau, t_0, x_0)\|) d\tau \bigg|_{t=t_0} \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} \sup \left(\sup_{t_0+\Delta t \leq \tau < \infty} g(\|F(\tau, t_0, x_0)\|) - \sup_{t_0 \leq \tau < \infty} g(\|F(\tau, t_0, x_0)\|) \right).\end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части последнего равенства неположительно, поэтому

$$D^+v(t, F(t, t_0, x_0))\big|_{t=t_0} \leq -g(\|F(t_0, t_0, x_0)\|) = -g(\|x_0\|),$$

т.е. D^+v удовлетворяет соотношению (4).

При $x = F(\tau_k, t_0, x_0)$ имеем $x + J_k(x) = F(\tau_k + 0, t_0, x_0)$, откуда, учитывая, что второе слагаемое в равенстве (13) есть функция невозрастающая, получаем, что неравенство (5) справедливо вдоль траектории $x = F(t, t_0, x_0)$ системы (1).

Предположим теперь, что система (1) периодична с периодом ω . Это означает, что $f(t + \omega, x) \equiv f(t, x)$ и существует такое $q \in \mathbb{N}$, что $J_k(x) \equiv J_{k+q}(x)$ и $\tau_{k+q} = \tau_k + \omega$ для любого целого положительного k . Покажем, что в этом случае функция $v(t, x)$, определяемая равенством (13), обладает свойством $v(t + \omega, x) \equiv v(t, x)$. Действительно,

$$v(t + \omega, x) = \int_{t+\omega}^\infty g(\|F(\tau, t + \omega, x)\|) d\tau + \sup_{t+\omega \leq \tau < \infty} g(\|F(\tau, t + \omega, x)\|).$$

Вводя новую переменную s по формуле $\tau = s + \omega$, получаем

$$v(t + \omega, x) = \int_t^\infty g(\|F(s + \omega, t + \omega, x)\|) ds + \sup_{t \leq s < \infty} g(\|F(s + \omega, t + \omega, x)\|). \quad (18)$$

Воспользовавшись очевидным свойством решений периодических систем

$$F(t + \omega, t_0 + \omega, x_0) = F(t, t_0, x_0), \quad (19)$$

на основании равенств (18), (19) получаем $v(t + \omega, x) \equiv v(t, x)$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Покажем одно из возможных применений доказанной теоремы. Пусть система (1) имеет равномерно асимптотически устойчивое решение

$$x = 0. \quad (20)$$

Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x) + f_*(t, x), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= J_i(x) + J_i^*(x) = I_i(x), \quad i \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $f_*(t, x)$, $J_i^*(x)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие условию Липшица по x равномерно по $i \in \mathbb{N}$, такие, что $f_*(t, 0) \equiv 0$, $J_i^*(x) = 0$ при $i \in \mathbb{N}$. При сформулированных предположениях о правых частях систем (1) и (21) справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Если нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво, выполняются предельные соотношения*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_*(t, x) = 0 \quad (22)$$

равномерно по $x \in B_H$ ($0 < H < \infty$) и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \|J_i^(x)\|$ сходится равномерно по $x \in B_H$, то решение (20) системы (21) также равномерно асимптотически устойчиво.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво, то существуют функция $v(t, x)$ и функции Хана g, b, c , удовлетворяющие условиям предыдущей теоремы. Используя теорему Йошизава [21], оценим вначале $D^+v(t, x)|_{(20)}$ вдоль решения $x(t)$ системы (21) при $x \in B_h$:

$$\begin{aligned} D^+v(t, x)|_{(21)} &= \lim_{\xi \rightarrow 0+0} \sup \frac{v(t + \xi, x + \xi f(t, x) + \xi f_*(t, x)) - v(t, x)}{\xi} \\ &\leq \lim_{\xi \rightarrow 0+0} \sup \frac{v(t + \xi, x + \xi f(t, x) + \xi f_*(t, x)) - v(t + \xi, x + \xi f(t, x))}{\xi} \\ &\quad + \lim_{\xi \rightarrow 0+0} \sup \frac{v(t + \xi, x + \xi f(t, x)) - v(t, x)}{\xi} \\ &\leq L_1 \|f_*(t, x)\| + D^+v(t, x)|_{(1)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогично оценим величину v_i скачка функции v вдоль траектории $x(t)$ системы (21) в момент τ_i :

$$\begin{aligned} \Delta v_i &= v(\tau_i + 0, x + J_i(x) + J_i^*(x)) - v(\tau_i, x) \\ &= [v(\tau_i + 0, x + J_i(x) + J_i^*(x)) - v(\tau_i + 0, x + J_i(x))] \\ &\quad + [v(\tau_i + 0, x + J_i(x)) - v(\tau_i, x)] \\ &\leq v(\tau_i + 0, x + J_i(x) + J_i^*(x)) - v(\tau_i + 0, x + J_i(x)) \leq L_1 \|J_i^*(x)\|. \end{aligned} \quad (24)$$

Напомним, что в неравенствах (23), (24) L_1 обозначает константу Липшица для функции v .

Покажем, что решение (20) системы (21) равномерно устойчиво. Выберем произвольное $\varepsilon_1 > 0$ ($\varepsilon_1 < h < H$). Пусть $t_1 \in \mathbb{R}_+$ – достаточно большой начальный момент времени. Покажем, что существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что решение

$x(t) = x(t, t_1, x_1)$ системы (21) удовлетворяет условию $\|x(t)\| < \varepsilon_1$ при $t > t_1$, если только $x_1 \in B_{\delta_1}$. Обозначим $\delta_1 = b^{-1}(\frac{1}{2}g(\varepsilon_1))$, где b^{-1} обозначает функцию, обратную к функции b . Значение t_1 считаем удовлетворяющим неравенству $t_1 \geq T_1$, где T_1 столь велико, что $L_1\|f_*(t, x)\| < \gamma_1 = \frac{1}{2}c(\delta_1)$ при $t \geq T_1$, $x \in B_{\varepsilon_1}$ и $L_1 \sum_i \|J_i^*(x)\| < \frac{1}{2}g(\varepsilon)$ при $x \in B_{\varepsilon_1}$ (здесь суммирование распространяется на те значения i , при которых $\tau_i \geq T_1$). Так как предельное соотношение (22) выполняется равномерно по $x \in B_H$, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \|J_i(x)\|$ сходится равномерно по x , а δ_1 зависит только от ε_1 , то T_1 можно выбрать зависящим только от ε_1 . Воспользовавшись оценкой (2), на основании вышеизложенного получаем

$$g(\|x(t)\|) \leq v(t, x(t)) \leq v(t_1, x_1) + \int_{t_1}^t D^+v(s, x(s))|_{(21)} ds + \sum_i \Delta v_i, \quad (25)$$

где суммирование в правой части (25) распространяется на те значения i , при которых $\tau_i \geq t_1$. Учитывая, что $v(t_1, x_1) < \frac{1}{2}g(\varepsilon_1)$, $\sum_i \Delta v_i < \frac{1}{2}g(\varepsilon_1)$ и $D^+v(t, x)|_{(21)} < -\frac{1}{2}c(\delta_1)$ при $\|x\| > \delta_1$, получаем, что в произвольный момент $t > t_1$ либо выполняется неравенство $\|x(t)\| \leq \delta_1 < \varepsilon_1$, либо

$$g(\|x(t)\|) \leq v(t, x(t)) \leq g(\varepsilon_1) - \frac{1}{2}c(\delta_1)(t - t_1) < g(\varepsilon_1),$$

откуда получаем $\|x(t)\| \leq \varepsilon_1$. Таким образом, доказано, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое значение $T_1 = T_1(\varepsilon_1) > 0$, что при любом $t_1 \geq T_1$ имеется $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что из неравенства $\|x_1\| < \delta_1$ следует $\|x(t)\| = \|x(t, t_1, x_1)\| < \varepsilon_1$ при $t > t_1$. Из [1; (2.24)] и гипотезы (Г4) заключаем, что имеется такое $\delta > 0$, что при любых $t_0 \in [0, T_1]$ и $x_0 \in B_\delta$ решение $x(t, t_0, x_0)$ будет удовлетворять неравенству $\|x(T_1, t_0, x_0)\| < \delta_1$ и, следовательно, неравенству $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon_1$ при $t > t_0$. Так как δ_1 и T_1 зависят только от ε_1 , то δ также зависит только от ε_1 , что доказывает равномерную устойчивость решения (20) системы (21).

Покажем теперь, что решение (20) системы (21) равномерно притягивающее. Для этого выберем произвольное $\varepsilon_1 > 0$ ($\varepsilon_1 < h$) и соответствующее ему значение $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$ из определения равномерной устойчивости. Покажем, что для любого $\varepsilon_2 > 0$ ($\varepsilon_2 < \varepsilon_1$) найдется такое $\sigma = \sigma(\varepsilon_2) > 0$, что $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon_2$ для всех $\|x_0\| < \delta$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $t \geq t_0 + \sigma$. Для этого выберем $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2) > 0$ такое, что решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (21), оказавшись в какой-то момент времени в B_{δ_2} , в последующие моменты времени не покинет области B_{ε_2} . Выбор такого δ_2 возможен в силу доказанного свойства равномерной устойчивости решения (20) системы (21). По доказанному при $t > t_0$ справедливо неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon_1$. Оценим период времени, в течение которого решение $x(t, t_0, x_0)$ может принадлежать множеству

$$\delta_2 \leq \|x\| \leq \varepsilon_1. \quad (26)$$

Обозначим через t_2 такой момент времени, что $L_1\|f_*(t, x)\| < \gamma_2 = \frac{1}{2}c(\delta_2)$ при $t \geq t_2$, $x \in B_{\varepsilon_1}$ и $L_1\|J_i^*(x)\| < \frac{1}{2}g(\varepsilon_1)$ при $\tau_i \geq t_2$, $x \in B_{\varepsilon_1}$. Так как предельное соотношение (22) выполняется равномерно по $x \in B_H$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|J_i^*(x)\|$ сходится равномерно по $x \in B_H$, а γ_2 зависит только от ε_2 , то t_2 можно выбрать зависящим

только от ε_2 . Покажем, что решение (20) системы (21) может находиться в множестве (26) в течение периода времени, не большего чем $t_3 = (b(\varepsilon_1) + \frac{1}{2}g(\varepsilon_1))/\gamma_2$. Для этого оценим величину $v(t, x(t))$ при $t > t_2$:

$$0 < g(\delta_2) \leq v(t, x(t)) \leq v(t_2, x(t_2)) - \gamma_2(t - t_2) + \sum_i \Delta v_i \leq b(\varepsilon_1) + \frac{1}{2}g(\varepsilon_1) - \gamma_2(t - t_2). \quad (27)$$

Из неравенств (27) получаем требуемую оценку. Таким образом, величина σ может быть выбрана в виде $\sigma = t_2 + t_3$, где t_2 и t_3 зависят только от ε_2 . Этим доказано, что нулевое решение системы (21) равномерно притягивающее и множество B_δ принадлежит области его притяжения. Теорема доказана.

Рассмотрим две системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1) и (21). Функции $f(t, x) = (f^1, f^2, \dots, f^n)$, $f_*(t, x) = (f_*^1, f_*^2, \dots, f_*^n)$, $f(t, x) + f_*(t, x)$ будем считать непрерывными и удовлетворяющими условию Липшица по x с константой Липшица L при $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in B_H$. Функции $J_i(x)$, $J_i^*(x)$, $I_i(x)$ будем считать удовлетворяющими условию Липшица с константой L при $x \in B_H$, $i \in \mathbb{N}$. Кроме того,

$$f(t, 0) \equiv 0, \quad f_*(t, 0) \equiv 0, \quad J_i(0) = 0, \quad J_i^*(0) = 0 \quad \text{при } i \in \mathbb{N}.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть системы (1), (21) таковы, что справедливы гипотезы (Г1)–(Г4) и $\tau_{i+1} - \tau_i \geq 8\theta > 0$ при $i \in \mathbb{N}$. Если нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво, функция $f_*(t, x)$ удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\Omega} f_*(s, x) ds = 0 \quad (28)$$

равномерно по $\Omega > 0$, $x \in B_H$, а последовательность $\{J_i^*(x)\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|J_i^*(x)\| = 0 \quad (29)$$

равномерно по $x \in B_H$, то решение (20) системы (21) также равномерно асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $F(t) = F(t, t_0, x_0) = (F^1, \dots, F^n)$, $x(t) = x(t, t_0, x_0) = (x^1, \dots, x^n)$ соответственно решения систем (1) и (21), удовлетворяющие начальным условиям $F(t_0, t_0, x_0) = x_0$ и $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Так как нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво, существует функция $v(t, x)$, обладающая свойствами, перечисленными в теореме 2.

Покажем вначале, что решение (20) системы (21) равномерно устойчиво. Пусть ε – произвольное достаточно малое положительное число ($\varepsilon < h$). Пусть

$$\xi = \min \left\{ b^{-1} \left(\frac{1}{2}g(\varepsilon) \right), \frac{\varepsilon}{(1+L)^3 e^{16L\theta}} \right\}.$$

Покажем, что любое решение, начинающееся в достаточно большой момент времени в точке x_1 , удовлетворяющей условию $\|x_1\| < \xi$, не выйдет за пределы B_ε

при неограниченном возрастании t . Предположим противное: пусть существуют решение $x(t)$ системы (21) и моменты времени t_1, t_2 ($0 < t_* \leq t_1 < t_2$) такие, что $\|x(t_1)\| \leq \xi$, $\|x(t_2 + 0)\| \geq \varepsilon$ и

$$\xi < \|x(t)\| \leq \varepsilon \quad (30)$$

при $t_1 < t \leq t_2$. Здесь t_* — некоторый фиксированный достаточно большой момент времени. В отношении взаимного расположения точек t_1, t_2 и моментов импульсного воздействия возможны следующие случаи:

- 1) на интервале (t_1, t_2) моментов импульсного воздействия нет;
- 2) на (t_1, t_2) имеется одна точка τ_k ;
- 3) на (t_1, t_2) имеется не меньше двух точек импульсного воздействия.

Рассмотрим вначале первый случай, когда на (t_1, t_2) отсутствуют моменты импульсного воздействия. Из [1; (2.25)] за счет выбора ξ получаем, что $t_2 - t_1 > 16\theta$. Разобьем отрезок $[t_1, t_2]$ на p равных отрезков точками $\theta_k = t_1 + k\tau$ ($k = 1, 2, \dots, p-1$), $\theta_0 = t_1, \theta_p = t_2$. На $(\theta_{j-1}, \theta_j]$ введем обозначения $F_{\theta_{j-1}} = x_{\theta_{j-1}} = x(\theta_{j-1} + 0, t_0, x_0)$. В то же время, через F_{θ_j} обозначим $F_{\theta_j} = F(\theta_j, \theta_{j-1}, F_{\theta_{j-1}})$, т.е. значение решения системы (1) с начальными данными $(\theta_{j-1}, F_{\theta_{j-1}})$ в момент θ_j ; $x_{\theta_j} = x(\theta_j, t_0, x_0)$.

Найдем

$$\begin{aligned} v(t_2, x(t_2)) - v(t_1 + 0, x(t_1 + 0)) &= \sum_{j=1}^p [v(\theta_j, x(\theta_j)) - v(\theta_{j-1} + 0, x(\theta_{j-1}))] \\ &= R_1 + R_2 + \sum_{j=1}^p [v(\theta_{j-1} + 0, F(\theta_{j-1})) - v(\theta_{j-1} + 0, x(\theta_{j-1}))], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{j=1}^p [v(\theta_j, F(\theta_j)) - v(\theta_{j-1} + 0, F(\theta_{j-1}))], \\ R_2 &= \sum_{j=1}^p [v(\theta_j, x(\theta_j)) - v(\theta_j, F(\theta_j))]. \end{aligned}$$

Оценим величины R_1 и R_2 :

$$R_1 \leq \sum_{j=1}^p \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} D^+ v|_{(1)} dt \leq -p\tau c(\xi) = -(t_2 - t_1)c(\xi), \quad (31)$$

$$|R_2| \leq \sum_{j=1}^p |v(\theta_j, x(\theta_j)) - v(\theta_j, F(\theta_j))|, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} |v(\theta_j, x(\theta_j)) - v(\theta_j, F(\theta_j))| &\leq L_1 \|x(\theta_j) - F(\theta_j)\| \\ &= L_1 \max_{1 \leq k \leq n} (|x^k(\theta_j) - F^k(\theta_j)|), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
x^k(\theta_j) - F^k(\theta_j) &= \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} [f^k(t, x(t)) - f^k(t, F(t))] dt + \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} f_*^k(t, x(t)) dt, \\
|x^k(\theta_j) - F^k(\theta_j)| &\leq \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} |f^k(t, x(t)) - f^k(t, F(t))| dt \\
&\quad + \left| \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} f_*^k(t, x(\theta_{j-1})) dt \right| + \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} |f_*^k(t, x(t)) - f_*^k(t, x(\theta_{j-1}))| dt, \quad (34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|f^k(t, x(t)) - f^k(t, F(t))| &\leq L\|x(t) - F(t)\| \leq L \cdot 2L \cdot \tau = 2L^2\tau \text{ при } t \in (\theta_{j-1}, \theta_j], \\
\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} |f^k(t, x(t)) - f^k(t, F(t))| dt &\leq 2L^2\tau^2, \quad (35)
\end{aligned}$$

$$\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} |f_*^k(t, x(t)) - f_*^k(t, x(\theta_{j-1}))| dt \leq L \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \|x(t) - x(\theta_{j-1})\| dt \leq L^2\tau^2. \quad (36)$$

Так как предельное соотношение (28) выполнено равномерно по $\Omega > 0$, $x \in B_H$, то существует положительная непрерывная монотонно убывающая к нулю при $t \rightarrow +\infty$ функция $\beta(t)$ такая, что

$$\left| \int_t^{t+\Omega} f_*^k(s, x) ds \right| \leq \beta(t), \quad x \in B_H, \quad \Omega > 0, \quad 1 \leq k \leq n,$$

откуда получаем оценку

$$\left| \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} f_*^k(s, x(\theta_{j-1})) ds \right| \leq \beta(\theta_{j-1}) \leq \beta(t_*).$$

Используя оценки (31)–(36), получаем

$$\begin{aligned}
v(t_2, x(t_2)) - v(t_1 + 0, x(t_1 + 0)) &\leq -p\tau c(\xi) + pL_1(2L^2\tau^2 + L^2\tau^2 + \beta(t_*)) \\
&= -\frac{15}{16}(t_2 - t_1)c(\xi) + 3L_1L^2p(\tau^2 - 2u\tau + \gamma), \quad (37)
\end{aligned}$$

где

$$u = \frac{c(\xi)}{96L_1L^2}, \quad \gamma = \frac{\beta(t_*)}{3L^2}.$$

Используя (24), (37), можно оценить значение $\Delta v = v(t_2 + 0, x(t_2 + 0)) - v(t_1, x(t_1))$ независимо от того, являются ли моменты t_1 и t_2 точками импульсного воздействия или нет:

$$\Delta v \leq -\frac{15}{16}(t_2 - t_1)c(\xi) + 3L_1L^2p(\tau^2 - 2u\tau + \gamma) + L_1\|J_i^*(x(t_1))\| + \|J_i(x(t_2))\|.$$

Будем считать t_* настолько большим, что

$$L_1\|J_i^*(x)\| < \theta c(\xi) < \frac{1}{16}(t_2 - t_1)c(\xi) \text{ при } \tau_i \geq t_*, \quad x \in B_\varepsilon. \quad (38)$$

Выберем τ удовлетворяющим квадратному неравенству

$$\tau^2 - 2u\tau + \gamma < 0. \quad (39)$$

Это неравенство справедливо, если $\tau \in (\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$, $\tau^{(1)} = u - \sqrt{u^2 - \gamma}$, $\tau^{(2)} = u + \sqrt{u^2 - \gamma}$. Величину t_* считаем настолько большой, что выполняется неравенство

$$\beta(t_*) < \frac{c^2(\xi)}{3072L_1^2L^2}. \quad (40)$$

Это обеспечивает выполнимость соотношений $u^2 - \gamma > 0$, $\tau^{(2)} > \tau^{(1)} > 0$. Покажем, что существуют такое натуральное число p и $\tau \in (\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$, что выполняется равенство

$$p\tau = t_2 - t_1. \quad (41)$$

Неравенства $\tau^{(1)} < \tau < \tau^{(2)}$ при условии (41) можно записать в виде

$$\tau^{(1)} < \frac{t_2 - t_1}{p} < \tau^{(2)},$$

или

$$\frac{t_2 - t_1}{\tau^{(1)}} > p > \frac{t_2 - t_1}{\tau^{(2)}}. \quad (42)$$

Для существования натурального числа p , удовлетворяющего неравенствам (42), достаточно выполнения условий

$$\frac{t_2 - t_1}{\tau^{(1)}} - \frac{t_2 - t_1}{\tau^{(2)}} > 1,$$

которые будут иметь место, если

$$\theta \left(\frac{1}{\tau^{(1)}} - \frac{1}{\tau^{(2)}} \right) > 1. \quad (43)$$

Нетрудно убедиться в том, что неравенство (43) имеет место при $0 < \gamma < -2\theta^2 + 2\sqrt{\theta^4 + u^2\theta^2}$ или, что то же самое, при

$$t_* > \beta^{-1}(3L^2(-2\theta^2 + 2\theta\sqrt{\theta^2 + u^2})). \quad (44)$$

Таким образом, при t_* , удовлетворяющем условиям (38), (44), имеем

$$v(t_2 + 0, x(t_2 + 0)) - v(t_1, x(t_1)) \leq -\frac{13}{16}(t_2 - t_1)c(\xi). \quad (45)$$

Теперь рассмотрим второй случай, когда на интервале (t_1, t_2) имеется одна точка импульсного воздействия $\tau_k: t_1 < \tau_k < t_2$. Будем считать t_* удовлетворяющим соотношению (38). В этом случае аналогично предыдущему получаем

$$\begin{aligned} v(t_2 + 0, x(t_2 + 0)) - v(t_1, x(t_1)) &\leq [v(t_2, x(t_2)) - v(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0))] \\ &\quad + [v(\tau_k, x(\tau_k)) - v(t_1 + 0, x(t_1 + 0))] + 3\theta c(\xi) \end{aligned}$$

независимо от того, являются ли t_1 и t_2 точками импульсного воздействия или нет. В этом случае также выполняется неравенство $t_2 - t_1 > 16\theta$, следовательно, длина по крайней мере одного из интервалов (t_1, τ_k) , (τ_k, t_2) будет больше чем 8θ . Не нарушая общности, положим $t_2 - \tau_k \geq \tau_k - t_1$, т.е. $t_2 - \tau_k \geq \frac{1}{2}(t_2 - t_1) > 8\theta$. Аналогично предыдущему можно показать, что

$$v(t_2 + 0, x(t_2 + 0)) - v(\tau_k, x(\tau_k)) \leq -\frac{15}{16}(t_2 - \tau_k)c(\xi) + 2\theta c(\xi) < -\frac{5}{16}(t_2 - t_1)c(\xi) \quad (46)$$

при t_* , удовлетворяющем условиям (38), (44).

Правая часть системы (21) удовлетворяет условию Липшица по x , следовательно, согласно теореме 2 существует такое $L_2 > 0$, что

$$|v(\tau_k, x(\tau_k)) - v(t_1 + 0, x(t_1 + 0))| \leq L_2(\tau_k - t_1), \quad (47)$$

причем константа L_2 не зависит от решения, а зависит лишь от постоянных L , L_1 . В случае $\tau_k - t_1 < \theta_* = \theta c(\xi)/L_2$ в силу (38), (44), (46), (47) имеем

$$\begin{aligned} v(t_2 + 0, x(t_2 + 0)) - v(t_1, x(t_1)) &\leq [v(t_2 + 0, x(t_2 + 0)) - v(\tau_k, x(\tau_k))] \\ &\quad + [v(\tau_k, x(\tau_k)) - v(t_1 + 0, x(t_1 + 0))] + \theta c(\xi) \\ &\leq -\frac{5}{16}(t_2 - t_1)c(\xi) + 2\theta c(\xi) < -\frac{1}{8}(t_2 - t_1)c(\xi). \end{aligned} \quad (48)$$

Если же $\tau_k - t_1 \geq \theta_*$, то, разбивая промежуток $(t_1, \tau_k]$ на p_* равных отрезков длины τ_* , аналогично предыдущему можно показать, что при

$$t_* > \beta^{-1}(3L^2(-2\theta_*^2 + 2\theta_*\sqrt{\theta_*^2 + u^2})) \quad (49)$$

справедливо неравенство $v(\tau_k, x(\tau_k)) - v(t_1 + 0, x(t_1 + 0)) < 0$, следовательно, в этом случае оценка (48) также справедлива.

Рассмотрим теперь третий случай, когда на (t_1, t_2) имеется m точек импульсного воздействия $\tau_k, \tau_{k+1}, \dots, \tau_{k+m-1}$. В случае $\tau_k - t_1 \geq \theta$, $t_2 - \tau_{k+m-1} \geq \theta$, разбивая каждый из промежутков $(t_1, \tau_k]$, $(\tau_k, \tau_{k+1}]$, $\dots$, $(\tau_{k+m-1}, t_2]$ точками θ_k на p отрезков длины τ (при этом величины p и τ будут, вообще говоря, различными для каждого из отрезков), можно аналогично первому случаю показать, что при t_* , удовлетворяющем условиям (38), (44), справедлива оценка (45). Если же одна из величин $(\tau_k - t_1)$, $(t_2 - \tau_{k+m-1})$ или обе эти величины меньше чем θ , можно показать, применяя рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы при исследовании первого и второго случаев, что при значении $t_* = t_*(\varepsilon)$, удовлетворяющем условиям (38), (44), (49), оценка (48) также справедлива.

Из неравенств (2), (3) имеем

$$\inf_{\|x\| \geq \varepsilon} v(t, x) \geq g(\varepsilon), \quad \sup_{\|x\| \leq \xi} v(t, x) \leq b(\xi) \leq \frac{1}{2}g(\varepsilon). \quad (50)$$

С другой стороны, при t_* , удовлетворяющем соотношениям (38), (44), (49), предположив, что существуют моменты времени $t_2 > t_1 \geq t_*$ такие, что $x(t_1) \leq \xi$, $x(t_2 + 0) \geq \varepsilon$, мы получили, что

$$v(t_2 + 0, x(t_2 + 0)) - v(t_1, x(t_1)) \leq -\frac{1}{8}(t_2 - t_1)c(\xi). \quad (51)$$

Неравенства (51) противоречат соотношениям (50). Полученное противоречие показывает, что для любой системы вида (21) не существует моментов времени t_1, t_2 ($t_2 > t_1 \geq t_*(\varepsilon)$) таких, что $\|x(t_1)\| \leq \xi, \|x(t_2)\| \geq \varepsilon$.

Любое решение $x(t, t_0, x_0)$ дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (21) непрерывно зависит от начальных условий, поэтому существует $\delta > 0$ такое, что для любых $t_0 \in [0, t_*], x_0 \in B_\delta$ выполняется условие $\|x(t_*, t_0, x_0)\| < \xi$. Поскольку ξ и t_* зависят лишь от ε , то $\delta > 0$ также будет зависеть только от ε . Этим доказана равномерная устойчивость решения (20) системы (21).

Покажем теперь, что решение (20) системы (21) равномерно асимптотически устойчиво. Пусть λ – какое-либо фиксированное число ($0 < \lambda < h$). По доказанному существует $\eta = \eta(\lambda) > 0$ такое, что любое решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (21), удовлетворяющее условию $x_0 \in B_\eta$, удовлетворяет при любом $t > t_0 \geq 0$ условию $x(t) \in B_\lambda$. Покажем, что для любого $\rho > 0$ ($\rho < \lambda$) можно указать $\sigma = \sigma(\rho) > 0$ такое, что при произвольных $x_0 \in B_\eta, t_0 \in \mathbb{R}_+, t \geq t_0 + \sigma$ справедливо неравенство $\|x(t)\| < \rho$.

Пусть $0 < \rho < \lambda$. Согласно доказанному существует $\delta = \delta(\rho) > 0$ такое, что из условия $x(T_0) \in B_\delta$ следует, что $x(t) \in B_\rho$ для любого $t \geq T_0 \geq 0$. Оценим время, в течение которого траектория может располагаться в области $B_\lambda \setminus B_\delta$. Аналогично предыдущему можно показать, что

$$\Delta v = v(t, x(t)) - v(T_1, x(T_1)) < -\frac{1}{8}(t - T_1)c(\delta) \quad (52)$$

при $t \geq T_1$, где T_1 зависит лишь от $\delta(\rho)$, т.е. $T_1 = T_1(\rho)$. Тогда из неравенства (52)

$$t - T_1 < \frac{8[v(T_1, x(T_1)) - v(t, x(t))]}{c(\delta)} \leq \frac{8[b(\lambda) - g(\delta)]}{c(\delta)} = T_2(\rho).$$

Полагая $\sigma(\rho) = T_1(\rho) + T_2(\rho)$, получаем, что при любых $t_0 \in \mathbb{R}_+, x_0 \in B_\eta, t \geq t_0 + \sigma$ справедливо неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| < \rho$. Это и означает, что решение (20) системы (21) равномерно асимптотически устойчиво и множество B_η содержится в его области притяжения.

Список литературы

1. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. Singapore: World Scientific, 1995.
2. *Мильтман В. Д., Мышкис А. Д.* Об устойчивости движения при наличии толчков // Сиб. матем. журн. 1960. Т. 1. №2. С. 233–237.
3. *Мышкис А. Д., Самойленко А. М.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Матем. сб. 1967. Т. 74. №2. С. 202–208.
4. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.
5. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. №11. С. 1981–1992.
6. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. №11. С. 1995–2001.
7. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. №11. С. 1981–1992.

8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 6. С. 1034–1045.
9. *Перестюк Н. А., Шовкопляс В. Н.* Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. матем. журн. 1979. Т. 31. № 5. С. 517–524.
10. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 11. С. 1995–2001.
11. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Периодические и почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. матем. журн. 1982. Т. 34. № 1. С. 66–73.
12. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications. New York: Halsted Press, 1989.
13. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. Singapore: World Scientific, 1989.
14. *Hu S., Lakshmikantham V.* Periodic boundary value problems for second order impulsive differential systems // Nonlinear Anal. 1989. V. 13. № 1. P. 75–87.
15. *Lakshmikantham V., Liu X.* On quasi stability for impulsive differential systems // Nonlinear Anal. 1989. V. 13. № 7. P. 819–829.
16. *Cabada A., Liz E.* Discontinuous impulsive differential equations with nonlinear boundary conditions // Nonlinear Anal. 1997. V. 28. № 9. P. 1491–1497.
17. *Гургула С. И., Перестюк Н. А.* Об устойчивости положения равновесия импульсных систем // Матем. физика. 1982. № 31. С. 9–14.
18. *Рунт Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
19. *Савченко А. Я., Игнатъев А. О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. Киев: Наукова думка, 1989.
20. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
21. *Yoshizawa T.* Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions. New York: Springer-Verlag, 1975.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
E-mail: ignat@iamm.ac.donetsk.ua

Поступила в редакцию
30.05.2002