Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. П. Рочев, Обобщение теорем Гельфонда и Вальд-шмидта о целозначных целых функциях, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 8, 117–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7761>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 17:07:06

УДК 517.53+511

И. П. Рочев

Обобщение теорем Гельфонда и Вальдшмидта о целозначных целых функциях

Получен ряд обобщений теорем Гельфонда и Вальдшмидта, обобщающих, в свою очередь, известную теорему Поля о целозначных целых функциях.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: целая функция, целозначная функция, конечное расширение, интерполяционный ряд Ньютона.

§ 1. Введение

Для целой функции $f(z)$ обозначим через $|f|_R$ максимум $|f(z)|$ на круге $B_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, $|f|_R = \max_{z \in B_R} |f(z)|$. В 1915 г. Поля в [1] доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $f(z)$ – целая трансцендентная функция. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $f(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \subseteq \mathbb{Z}$, то

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{R^{1/2} |f|_R}{2^R} > 0; \quad (1.1)$$

2) если $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$, то

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{R^{3/2} |f|_R}{((3 + \sqrt{5})/2)^R} > 0. \quad (1.2)$$

Поля также предположил, что множитель $R^{1/2}$ в (1.1) можно опустить. Это было вскоре доказано Харди в [2]; доказательство Харди было упрощено Ландау в [3]. Используя работу Харди, Поля в [4] показал, что неравенства (1.1), (1.2) можно заменить на неравенства

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{|f|_R}{2^R} \geq 1, \quad \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{|f|_R}{((3 + \sqrt{5})/2)^R} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

соответственно. Как показывают примеры функций

$$f(z) = 2^z, \quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^z - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^z \right),$$

эти неравенства являются неулучшаемыми.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00371а).

Более того, в [4] По́йа доказал, что если целая функция $f(z)$ удовлетворяет условию $f(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \subseteq \mathbb{Z}$ и при этом $|f|_R = O(R^c 2^R)$, $R \geq 1$, для некоторой положительной постоянной c , то $f(z)$ можно представить в следующем виде:

$$f(z) = A(z) + B(z)2^z, \quad A, B \in \mathbb{Q}[z].$$

Аналогичное утверждение справедливо и для случая $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$.

Результаты По́йа послужили отправной точкой для исследований целозначных функций. Мы не будем здесь подробно останавливаться на истории вопроса, а отсылаем заинтересованного читателя к [5; п. 6.3]–[8].

В литературе часто встречается следующая более слабая формулировка теоремы По́йа.

ТЕОРЕМА 1.2. *Если $f(z)$ – целая трансцендентная функция с $f(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \subseteq \mathbb{Z}$, то*

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f|_R}{R} \geq \ln 2.$$

В 1929 г. Гельфонд в [9] доказал следующее обобщение этой версии теоремы По́йа.

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть $f(z)$ – целая трансцендентная функция такая, что для некоторого $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ выполнено $f^{(\sigma)}(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \subseteq \mathbb{Z}$ при $\sigma = 0, 1, \dots, s-1$. Тогда*

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f|_R}{R} \geq s \ln(1 + e^{(1-s)/s}).$$

В отличие от оценки в теореме По́йа, оценка в теореме Гельфонда при $s > 1$ не является оптимальной (более того, ни для одного значения $s > 1$ оптимальная оценка сегодня неизвестна). Результат Гельфонда позже уточнялся в работах [10], [11], [7].

Введем ряд обозначений. Для $\Omega \subseteq \mathbb{Z}$ обозначим

$$\Omega_R = \Omega \cap B_R = \{a \in \Omega : |a| \leq R\}, \quad \Omega(R) = \#(\Omega_R).$$

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{Z}$, причем

$$\omega := \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{\Omega(R)}{R} > 0, \quad (1.3)$$

$s \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\alpha \in [0, +\infty)$, $\mathbb{K}$ – конечное расширение $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ – кольцо целых чисел поля $\mathbb{K}$. Положим

$$\varkappa = \begin{cases} [\mathbb{K} : \mathbb{Q}], & \text{если } \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}, \\ \frac{1}{2}[\mathbb{K} : \mathbb{Q}], & \text{если } \mathbb{K} \not\subseteq \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Обозначим через $\gamma_s(\Omega; \mathbb{K}; \alpha)$ точную нижнюю грань чисел $\gamma > 0$, для которых существует целая трансцендентная функция $f(z)$ со следующими свойствами:

- 1) при $a \in \Omega$ найдутся числа $d_a \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\}$, удовлетворяющие следующим условиям:
 - а) $d_a f^{(\sigma)}(a) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ при $0 \leq \sigma \leq s-1$;
 - б) $\overline{d_a} = O(e^{\alpha|a|})$ (как обычно, через $\overline{\xi}$ обозначается максимум модулей сопряженных алгебраического числа ξ);
 - в) если $\varkappa > 1$, то

$$\max_{0 \leq \sigma \leq s-1} \overline{d_a f^{(\sigma)}(a)} = O(e^{\alpha|a|});$$

- 2) имеет место следующая оценка: $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$.

В случае $\varkappa = 1$ (т.е. когда $\mathbb{K}$ – это $\mathbb{Q}$ или мнимое квадратичное поле) будем для краткости вместо $\gamma_s(\Omega; \mathbb{K}; 0)$ писать $\gamma_s(\Omega)^1$.

В частности, согласно теореме Поля справедливы равенства

$$\gamma_1(\mathbb{Z}_{\geq 0}) = \ln 2, \quad \gamma_1(\mathbb{Z}) = \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Более того, результат Гельфонда в этих обозначениях можно сформулировать в таком виде:

$$\gamma_s(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \geq s \ln(1 + e^{(1-s)/s}) > s \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) = s \cdot 0.3132 \dots$$

Значительное усиление последнего неравенства при больших s получено в [7], где доказаны следующие оценки:

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{\gamma_s(\mathbb{Z}_{\geq 0})}{s} \geq \max_{\theta > 1} \frac{(2\theta^2 - 1) \ln \theta - (\theta^2 - 1) \ln(\theta^2 - 1)}{\theta} = 0.7859 \dots, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{\gamma_s(\mathbb{Z})}{s} &\geq \max_{\theta > 1} \frac{(\theta^2 + 1) \ln(\theta^2 + 1) - (\theta^2 - 1) \ln(\theta^2 - 1) - 2 \ln(2\theta)}{\theta} \\ &= 0.9905 \dots \end{aligned} \quad (1.6)$$

Что касается оценок сверху, то пример функции $f(z) = (\sin \pi z)^s$ показывает, что $\gamma_s(\mathbb{Z}) \leq \pi s$. (Стоит отметить, что функция $(\sin \pi z)^s$ является в определенном смысле самой медленно растущей целой функцией, имеющей нули порядка больше или равного s во всех целых точках (см. лемму 2.5, а также замечание к ней).) Более того, из результатов работы [11] следует, что при любом $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ справедливо неравенство $\gamma_s(\mathbb{Z}) \leq \pi s/3$.

Рассмотрим теперь общий случай. В 1978 г. Вальдшмидт в [12] доказал, что для любых Ω (с $\omega > 0$), $\mathbb{K}$ и α справедливо неравенство $\gamma_1(\Omega; \mathbb{K}; \alpha) > 0$ (и, следовательно, также неравенство $\gamma_s(\Omega; \mathbb{K}; \alpha) > 0$ при любом $s \geq 1$). В частности, отсюда следует слабая версия теоремы Поля в форме $\gamma_1(\mathbb{Z}_{\geq 0}) > 0$. Более точно, Вальдшмидт показал, что $\gamma_1(\Omega; \mathbb{K}; \alpha) \geq \gamma_0$ для некоторой (эффективной) постоянной $\gamma_0 > 0$, зависящей лишь от ω , $\varkappa$ и α (смысл параметров ω и $\varkappa$ разъяснен выше; см. (1.3), (1.4)). Точное значение γ_0 в работе вычислено не было (лишь было указано, что в условиях теоремы Поля получается неравенство $\gamma_1(\mathbb{Z}_{\geq 0}) > 1/283$). В 1994 г. Вальдшмидт в [13] передоказал слабую версию теоремы Поля (с оценкой $\gamma_1(\mathbb{Z}_{\geq 0}) > 1/165$) с помощью метода интерполяционных определителей. Используя последний метод (точнее, вариант этого метода, приведенный в [7]), автор в [14] получил следующие оценки:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\mathbb{Z}_{>0}; \mathbb{K}; \alpha) &\geq \exp(-2\varkappa\alpha - \varkappa \ln 4), \\ \gamma_1(\mathbb{Z}; \mathbb{K}; \alpha) &\geq \exp(-\varkappa\alpha - \varkappa \ln \sqrt{6.75} - 0.1477). \end{aligned}$$

Отметим, что в [14] предполагалось, что числа d_a из определения величины $\gamma_s(\Omega; \mathbb{K}; \alpha)$ являются целыми рациональными, однако рассуждения остаются в силе и в общем случае. Кроме того, вместо (1.4) предполагалось, что

¹Заметим, что это обозначение корректно, поскольку для любого мнимого квадратичного поля $\mathbb{K}$ выполнено $\gamma_s(\Omega; \mathbb{K}; 0) = \gamma_s(\Omega; \mathbb{Q}; 0)$; для доказательства этого факта достаточно вместо $f(z)$ рассмотреть функции $f(z) + \overline{f(\bar{z})}$ и $\frac{f(z) - \overline{f(\bar{z})}}{\sqrt{D}}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

$\varkappa = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$, поскольку в [14] использовалась слабая версия неравенства Лиувилля (см. лемму 2.7).

С другой стороны, если $\varkappa, N \in \mathbb{Z}_{>0}$, то, как показывает пример функции $f(z) = \xi^z$, где $\xi = (1 + N^{-\varkappa})^{1/\varkappa}$, для поля $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\xi)$ и $\alpha = \frac{1}{\varkappa} \ln(N^\varkappa + 1)$ справедливо неравенство

$$\gamma_1(\mathbb{Z}; \mathbb{K}; \alpha) \leq -\frac{1}{\varkappa} \ln(1 - e^{-\varkappa\alpha}).$$

Настоящая работа посвящена выводу оценок снизу и сверху для величины $\gamma_s(\Omega; \mathbb{K}; \alpha)$. Основными результатами работы являются теоремы 1.4–1.6. В теореме 1.4 содержатся общие оценки снизу.

ТЕОРЕМА 1.4. *Для любых $s, \Omega, \mathbb{K}, \alpha$ справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} \gamma_s(\Omega; \mathbb{K}; \alpha) &\geq \max_{r \in \{1, 2, \dots, s\}} (s + 1 - r) \omega^{1+\varkappa/r} \\ &\times \exp\left(-\frac{(r+1)\varkappa\alpha}{(s+1-r)r\omega} - \frac{\varkappa \ln 15(r+2)}{r} - 3\right). \end{aligned}$$

Более того,

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{\gamma_s(\Omega; \mathbb{K}; \alpha)}{\omega s} \geq \max_{\theta > 1} \frac{\ln((\theta^2 + 1)/(2\theta))}{\theta} = 0.1912 \dots \quad (1.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Отметим, что оценка (1.7) не зависит от поля $\mathbb{K}$ и α . Более того, эту оценку можно улучшить, применяя чуть более аккуратные рассуждения, аналогичные содержащимся в работе [7]. В частности, можно показать, что оценка (1.5) останется в силе, если величину $\gamma_s(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ заменить на $\gamma_s(\Omega; \mathbb{K}; \alpha)$ с произвольными $\Omega \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$ с $\omega = 1$, $\mathbb{K}$ и α . Аналогичное замечание справедливо и для оценки (1.6).

Для величины $\gamma_s(\Omega)$ при фиксированном s и $\omega \rightarrow +0$ теорема 1.4 дает оценку $\gamma_s(\Omega) \gg \omega^{1+1/s}$. Небольшое уточнение этой оценки содержится в теореме 1.5.

ТЕОРЕМА 1.5. *При произвольном s и $\omega \leq 0.01$ справедливо неравенство*

$$\gamma_s(\Omega) \geq 0.01s\omega \left(\ln \frac{1}{\omega}\right)^{-1}.$$

Наконец, в теореме 1.6 мы обобщаем оценку сверху $\gamma_s(\mathbb{Z}; \mathbb{Q}; 0) \leq \pi s/3$ работы [11].

ТЕОРЕМА 1.6. *Пусть множество $\Omega \subseteq \mathbb{Z}$ таково, что существует предел*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\Omega(R)}{R} = \omega > 0.$$

Тогда для любых $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ и $\alpha \geq 0$ справедливо неравенство

$$\gamma_s(\Omega; \mathbb{Q}; \alpha) \leq \begin{cases} \omega s \ln 4 - \alpha, & \text{если } \alpha \leq \omega s \ln 2, \\ -\omega s \ln(1 - e^{-\alpha/(\omega s)}), & \text{если } \alpha \geq \omega s \ln 2. \end{cases}$$

Более того, если существуют равные пределы

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\Omega^\pm(R)}{R} = \frac{\omega}{2},$$

где обозначено $\Omega^+ = \Omega \cap \mathbb{Z}_{>0}$, $\Omega^- = \Omega \cap \mathbb{Z}_{<0}$ (будем говорить, что Ω асимптотически симметрично), то при любых $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ и $\alpha \geq 0$ имеем

$$\gamma_s(\Omega; \mathbb{Q}; \alpha) \leq \omega s \arcsin\left(\frac{e^{-\alpha/(\omega s)}}{2}\right).$$

Доказательства теорем 1.4, 1.5 используют стандартные средства теории трансцендентных чисел; при этом доказательство теоремы 1.4 является непосредственным обобщением рассуждений работы [7], в то время как доказательство теоремы 1.5 близко к рассуждениям работы [13]. Доказательство теоремы 1.6 основано на методе интерполяционных рядов, стандартном для подобных утверждений.

§ 2. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 2.1. 1) Пусть $R > 0$, $z, \zeta \in \mathbb{C}$, $|z| \leq r$, $|\zeta| \leq \rho$, $\max\{r; \rho\} < R$. Тогда

$$\left| \frac{z - \zeta}{R^2 - z\bar{\zeta}} \right| \leq \frac{r + \rho}{R^2 + r\rho}.$$

2) Пусть $R > 0$, $\theta > 1$, $z, \zeta \in \mathbb{C}$, $\max\{|z|; |\zeta|\} \leq R/\theta$. Тогда

$$\left| \frac{R(z - \zeta)}{R^2 - z\bar{\zeta}} \right| \leq \frac{2\theta}{\theta^2 + 1}.$$

3) Пусть $R > 0$, $z, \zeta \in \mathbb{C}$, $|z| = R$, $\zeta \neq z$. Тогда

$$\left| \frac{R(z - \zeta)}{R^2 - z\bar{\zeta}} \right| = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Согласно принципу максимума можно считать, что $|z| = r$, $|\zeta| = \rho$. Если $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, то

$$\left| \frac{z - \zeta}{R^2 - z\bar{\zeta}} \right| = \left| \frac{z_1 - \rho}{R^2 - z_1\rho} \right|,$$

где $z_1 = ze^{-i\varphi}$. Поэтому можно считать, что $\zeta = \rho$. Кроме того, можно предполагать, что $r > 0$.

Рассмотрим дробно-линейное отображение

$$L(z) = \frac{z - \rho}{R^2 - \rho z}.$$

Оно отображает $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ в $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, поэтому окружность $|z| = r$ под его действием переходит в окружность с диаметром $[L(-r); L(r)]$. Следовательно, при $|z| = r$ выполнено

$$|L(z)| \leq \max\{|L(-r)|; |L(r)|\} = \frac{r + \rho}{R^2 + r\rho}.$$

2) Доказательство п. 2) следует из п. 1).

3) Так как $R^2 = z\bar{z}$, то

$$\left| \frac{R(z - \zeta)}{R^2 - z\bar{\zeta}} \right| = \left| \frac{R(z - \zeta)}{z(\bar{z} - \bar{\zeta})} \right| = 1.$$

Лемма доказана.

Для дальнейшего определим функцию

$$\ell(\theta) = \ln \frac{\theta^2 + 1}{2\theta}, \quad \theta > 0. \quad (2.1)$$

ЛЕММА 2.2. Пусть $F(z)$ – целая функция, $\theta > 1$, $R \geq 0$. Предположим, что количество нулей (с учетом кратностей) функции $F(z)$ в круге B_R не меньше $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда при любом $\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ справедливо неравенство

$$|F^{(\sigma)}|_R \leq \sigma! |F|_{\theta(R+1)} \exp(-N\ell(\theta)),$$

где функция $\ell(\theta)$ определена в (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\zeta_1, \dots, \zeta_N \in B_R$ – некоторые нули $F(z)$ (с учетом кратностей). Тогда функция

$$G(z) = F(z) \prod_{n=1}^N \frac{A^2 - z\bar{\zeta}_n}{A(z - \zeta_n)},$$

где $A = \theta(R+1)$, является целой, поэтому при $|z| \leq R+1$ справедливо неравенство $|G(z)| \leq |G|_A = |F|_A$ (последнее равенство следует из принципа максимума модуля и п. 3) леммы 2.1). Отсюда в силу п. 2) леммы 2.1 получаем при $|z| \leq R+1$ неравенство

$$|F(z)| = |G(z)| \prod_{n=1}^N \left| \frac{A(z - \zeta_n)}{A^2 - z\bar{\zeta}_n} \right| \leq |F|_A \left(\frac{2\theta}{\theta^2 + 1} \right)^N.$$

Применяя формулу

$$F^{(\sigma)}(z) = \frac{\sigma!}{2\pi i} \int_{|\zeta-z|=1} \frac{F(\zeta)}{(\zeta-z)^{\sigma+1}} d\zeta,$$

получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 2.3. Пусть $L \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\varphi_1(z), \dots, \varphi_L(z)$ – целые функции. При $\tau \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ положим

$$\Phi_\tau(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(\tau)}(z) \\ \vdots \\ \varphi_L^{(\tau)}(z) \end{pmatrix}.$$

Пусть $t \in \mathbb{Z}_{>0}$. Для $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ обозначим

$$n(\nu) = \left\lfloor \frac{\nu}{t} \right\rfloor, \quad \tau(\nu) = t \left\{ \frac{\nu}{t} \right\} = \nu - tn(\nu).$$

Пусть $a_0, a_1, \dots$ – попарно различные комплексные числа, причем $|a_0| \leq |a_1| \leq \dots$. Пусть $0 \leq \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_L$ – целые числа. Положим $\tau_j = \tau(\nu_j)$, $\zeta_j = a_{n(\nu_j)}$, $1 \leq j \leq L$. Предположим, что при всех $1 \leq j \leq L$ и $0 \leq \nu < \nu_j$ для $\tau = \tau(\nu)$ и $n = n(\nu)$ выполнено

$$\text{rk}(\Phi_{\tau_1}(\zeta_1), \dots, \Phi_{\tau_{j-1}}(\zeta_{j-1}), \Phi_\tau(a_n)) < j.$$

Положим

$$\Delta = \det(\Phi_{\tau_1}(\zeta_1), \dots, \Phi_{\tau_L}(\zeta_L)).$$

Тогда при любых $\theta_1 > 1, \dots, \theta_L > 1$ справедливо неравенство

$$|\Delta| \leq L! \max_{\sigma \in S_L} \prod_{j=1}^L \tau_j! |\varphi_{\sigma(j)}|_{\theta_j(|\zeta_j|+1)} \exp(-\nu_j \ell(\theta_j)),$$

где S_L – множество подстановок множества $\{1, 2, \dots, L\}$, а функция $\ell(\theta)$ определена в (2.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Отметим для дальнейшего, что $\Phi_{\tau(\nu)}(a_{n(\nu)})$ – это $(\nu + 1)$ -й столбец матрицы

$$\mathcal{A} = (\Phi_0(a_0), \Phi_1(a_0), \dots, \Phi_{t-1}(a_0), \Phi_0(a_1), \Phi_1(a_1), \dots, \Phi_{t-1}(a_1), \dots). \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.3. Используем индукцию по L .

При $L = 1$ утверждение леммы непосредственно следует из леммы 2.2.

Пусть $L > 1$. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \det(\Phi_{\tau_1}(\zeta_1), \dots, \Phi_{\tau_{L-1}}(\zeta_{L-1}), \Phi_0(z)). \quad (2.3)$$

Тогда $F^{(\tau(\nu))}(a_{n(\nu)}) = 0$ при $0 \leq \nu < \nu_L$. Поэтому, применяя лемму 2.2, получаем

$$|\Delta| = |F^{(\tau_L)}(\zeta_L)| \leq \tau_L! |F|_{\theta_L(|\zeta_L|+1)} \exp(-\nu_L \ell(\theta_L)). \quad (2.4)$$

Раскладывая определитель (2.3) по последнему столбцу, получаем

$$F(z) = \sum_{j=1}^L \Delta_j \varphi_j(z),$$

где через Δ_j обозначены соответствующие алгебраические дополнения. Поэтому

$$|F|_R \leq L \max_{1 \leq j \leq L} |\Delta_j| |\varphi_j|_R. \quad (2.5)$$

Оценивая $|\Delta_j|$ с помощью предположения индукции, из (2.4) и (2.5) получаем требуемое неравенство.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\rho > 0$, функция $F(z)$ регулярна при $\operatorname{Re} z \geq 0$, $F(z) \not\equiv 0$. При $R > \rho$ положим

$$\Sigma(F, R) = \sum_a \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{R^2} \right) \cos \varphi \cdot \operatorname{ord}_{z=a} F,$$

где суммирование идет по нулям $a = re^{i\varphi}$ функции $F(z)$ (без учета кратностей), которые удовлетворяют условиям $\rho < r < R$, $\cos \varphi > 0$;

$$I(F, R) = \frac{1}{2\pi} \int_{\rho}^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) \ln |F(it)F(-it)| dt;$$

$$J(F, R) = \frac{1}{\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \cdot \ln |F(Re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Тогда при $R \rightarrow \infty$ имеем

$$\Sigma(F, R) = I(F, R) + J(F, R) + O(1).$$

Доказательство см. в [15; раздел III, задача 178].

ЛЕММА 2.5. Пусть $F(z)$ – целая функция, $t \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\Omega \subseteq \mathbb{Z}$, причем

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\Omega(R)}{R} = \omega > 0.$$

Пусть для $\tau = 0, \dots, t-1$ и $a \in \Omega$ выполнено $F^{(\tau)}(a) = 0$. Если

$$\gamma = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ |F|_R}{R} < \frac{\omega \pi t}{2} \quad (2.6)$$

(где $\ln^+ x = \ln \max\{x, 1\}$), то $F(z) \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Как будет видно из доказательства, для $\Omega \subseteq \mathbb{Z}_{>0}$ неравенство (2.6) можно заменить более слабым неравенством, а именно, $\gamma < \omega \pi t$. Для $\Omega = \mathbb{Z}_{>0}$ и $t = 1$ это утверждение известно как теорема Карлсона (см., например, [5; теорема 1.3.5]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.5. Предположим обратное. Применим лемму 2.4 к функциям $F_1(z) = F(z)$ и $F_2(z) = F(-z)$ при $\rho = 1$.

При $R \rightarrow \infty$ имеем

$$I(F_{1,2}, R) \leq \frac{\gamma}{\pi} \ln R + o(\ln R), \quad J(F_{1,2}, R) \leq O(1).$$

Следовательно,

$$\Sigma(F_1, R) + \Sigma(F_2, R) \leq \frac{2\gamma}{\pi} \ln R + o(\ln R). \quad (2.7)$$

Обозначим $\Omega^1 = \Omega \cap \mathbb{Z}_{>0}$, $\Omega^2 = (-\Omega) \cap \mathbb{Z}_{>0}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Sigma(F_j, R) &\geq \sum_{\substack{n \in \Omega^j \\ 1 < n < R}} \left(\frac{1}{n} - \frac{n}{R^2} \right) t = t \sum_{n \in (\Omega^j)_R} \frac{1}{n} + O(1) \\ &= t \sum_{n \leq R} \Omega^j(n) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + O(1). \end{aligned}$$

Следовательно, при $R \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} \Sigma(F_1, R) + \Sigma(F_2, R) &\geq t \sum_{n \leq R} (\omega + o_{n \rightarrow \infty}(1)) n \cdot \frac{1}{n(n+1)} + O(1) \\ &= (\omega t + o(1)) \ln R, \end{aligned}$$

что противоречит (2.7) в силу (2.6).

Лемма доказана.

Для $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ обозначим

$$\Delta_k(z) = \binom{z+k-1}{k} = \frac{z(z+1) \cdots (z+k-1)}{k!}.$$

Для $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ положим

$$\Delta_{k,N}(z) = \Delta_N(z)^q \Delta_r(z), \quad (2.8)$$

где q и r – частное и остаток при делении k на N соответственно (т.е. $k = qN + r$, $0 \leq r < N$). Кроме того, обозначим через D_N наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, N$.

ЛЕММА 2.6. При $m \in \mathbb{Z}$, $k, \sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ имеем

$$D_N^\sigma \cdot \frac{1}{\sigma!} \Delta_{k,N}^{(\sigma)}(m) \in \mathbb{Z}.$$

Кроме того, при $z \in \mathbb{C}$ справедливо неравенство

$$\sum_{\tau=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{\tau} |\Delta_{k,N}^{(\tau)}(z)| \leq \sigma! e^{k+N} \left(1 + \frac{|z|}{N}\right)^k.$$

Доказательство см. в [16; лемма 4].

СЛЕДСТВИЕ 2.1. При $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, $R \geq 0$ имеем

$$|\Delta_{k,N}|_R \leq e^{k+N} \left(1 + \frac{R}{N}\right)^k.$$

ЛЕММА 2.7 (неравенство Лиувилля). Пусть $\mathbb{K}$ – расширение $\mathbb{Q}$ конечной степени. Определим κ с помощью (1.4). Тогда для $\xi \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\}$ справедливо неравенство

$$|\xi| \cdot \left\lceil \xi \right\rceil^{\kappa-1} \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ – степень поля $\mathbb{K}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ – все вложения поля $\mathbb{K}$ в $\mathbb{C}$. Тогда норма $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\xi) = \prod_{j=1}^d \sigma_j(\xi) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Следовательно, $|N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\xi)| \geq 1$. Так как $|N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\xi)| \leq |\xi| \cdot \left\lceil \xi \right\rceil^{d-1}$, то в случае $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ сразу получаем требуемое. В противном случае среди нетождественных вложений имеется комплексное сопряжение, поэтому имеем

$$|N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\xi)| \leq |\xi|^2 \cdot \left\lceil \xi \right\rceil^{d-2} = (|\xi| \cdot \left\lceil \xi \right\rceil^{\kappa-1})^2.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.8. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{K}$ – конечное расширение $\mathbb{Q}$, $f(z)$ – целая функция, удовлетворяющая линейному дифференциальному уравнению

$$\sum_{\sigma=0}^s P_\sigma(z) f^{(\sigma)}(z) = Q(z), \quad (2.9)$$

где $P_\sigma, Q \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$, $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Пусть для каждого $a \in \Omega$ найдется $d_a \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $d_a f^{(\sigma)}(a) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ при $\sigma = 0, \dots, s-1$;
- 2) верна оценка

$$\max \left\{ \left\lceil d_a \right\rceil; \max_{0 \leq \sigma < s} \left\lceil d_a f^{(\sigma)}(a) \right\rceil \right\} = O(e^{\alpha|a|}), \quad (2.10)$$

где $\alpha \geq 0$ – некоторая постоянная.

Предположим также, что $P_s(a) \neq 0$ при $a \in \Omega$. Тогда при $\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $a \in \Omega$ имеем $f^{(\sigma)}(a) \in \mathbb{K}$; более того, найдутся $d_{a,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\}$, удовлетворяющие следующим условиям:

- i) $d_{a,\sigma} f^{(\tau)}(a) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ при $\tau = 0, \dots, \sigma$;

ii) *верна оценка*

$$\max\left\{\overline{d_{a,\sigma}}; \max_{0 \leq \tau \leq \sigma} \overline{d_{a,\sigma} f^{(\tau)}(a)}\right\} \leq \exp(c(\sigma^2 + |a| + 1)),$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная (не зависящая от a, σ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что в качестве $d_{a,\sigma}$ можно взять

$$d_{a,\sigma} = d_a \cdot P_s(a)^\sigma. \quad (2.11)$$

Дифференцируя (2.9), получаем, что при $\sigma \geq s$ функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sum_{\tau=0}^{\sigma} P_{\sigma,\tau}(z) f^{(\tau)}(z) = Q_\sigma(z), \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} Q_s &= Q, & P_{s,\tau} &= P_\tau, \\ Q_{\sigma+1} &= Q'_\sigma, & P_{\sigma+1,\tau} &= P'_{\sigma,\tau} + P_{\sigma,\tau-1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

(считаем, что $P_{\sigma,-1} = P_{\sigma,\sigma+1} = 0$); в частности, $P_{\sigma,\sigma} = P_s$ при любом $\sigma \geq s$. Отсюда по индукции получаем справедливость i).

Для $P(z) = \sum_{\nu=0}^n p_\nu z^\nu \in \mathbb{K}[z]$ обозначим

$$H(P) = \max_{0 \leq \nu \leq n} \overline{p_\nu}.$$

Положим

$$D = \max\left\{\deg Q; \max_{0 \leq \sigma \leq s} \deg P_\sigma\right\};$$

тогда $\deg P_{\sigma,\tau} \leq D$ и $\deg Q_\sigma \leq D$ при любых $\sigma \geq s$, $0 \leq \tau \leq \sigma$. Далее, обозначим

$$\mathcal{H} = \max\left\{H(Q); \max_{\sigma} H(P_\sigma)\right\},$$

$$H_\sigma = \max\left\{H(Q_\sigma); \max_{0 \leq \tau \leq \sigma} H(P_{\sigma,\tau})\right\}, \quad \sigma \geq s.$$

Из (2.13) получаем, что $H_{\sigma+1} \leq (D+1)H_\sigma$, откуда $H_\sigma \leq \mathcal{H}(D+1)^\sigma$. Следовательно, при $a \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\max\left\{\overline{Q_\sigma(a)}; \max_{0 \leq \tau \leq \sigma} \overline{P_{\sigma,\tau}(a)}\right\} \leq \mathcal{H}(D+1)^\sigma (|a|+1)^D. \quad (2.14)$$

Зафиксируем $a \in \Omega$ и положим при $\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$M_\sigma = \max\left\{\overline{d_{a,\sigma}}; \max_{0 \leq \tau \leq \sigma} \overline{d_{a,\sigma} f^{(\tau)}(a)}\right\}.$$

Докажем, что при $\sigma \geq s$ справедливо неравенство

$$M_\sigma \leq M_{\sigma-1} \cdot (\sigma+1) \mathcal{H}(D+1)^\sigma (|a|+1)^D.$$

Действительно, в силу (2.11) имеем

$$\max\left\{\overline{d_{a,\sigma}}; \max_{0 \leq \tau \leq \sigma-1} \overline{d_{a,\sigma} f^{(\tau)}(a)}\right\} \leq M_{\sigma-1} \cdot \overline{P_s(a)} \leq M_{\sigma-1} \cdot \mathcal{H}(|a|+1)^D.$$

Кроме того, в силу (2.12) и (2.14)

$$\begin{aligned} \overline{d_{a,\sigma} f^{(\sigma)}(a)} &= \overline{d_{a,\sigma-1} Q_\sigma(a) - \sum_{\tau=0}^{\sigma-1} P_{\sigma,\tau}(a) \cdot d_{a,\sigma-1} f^{(\tau)}(a)} \\ &\leq M_{\sigma-1} \cdot (\sigma+1) \mathcal{H}(D+1)^\sigma (|a|+1)^D. \end{aligned}$$

Окончательно, учитывая (2.10), получаем

$$\ln M_\sigma \leq c_1(|a|+1 + \sigma \ln(|a|+1) + \sigma^2) \leq c(\sigma^2 + |a| + 1).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathbb{K}$ – конечное расширение $\mathbb{Q}$, $\Omega \subseteq \mathbb{Z}$, причем

$$\omega = \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\Omega(R)}{R} > 0.$$

Пусть целая функция $f(z)$ такова, что для $a \in \Omega$, $\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ найдутся $d_{a,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\}$, удовлетворяющие условиям i)–ii) леммы 2.8. Тогда если

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ |f|_R}{R^2} < \gamma,$$

где $\gamma > 0$ – некоторая (эффективная) постоянная, зависящая только от постоянной s из леммы 2.8, $\varkappa = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ и ω , то $f(z)$ – многочлен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через N растущий целочисленный параметр с условием $\Omega(N) = (\omega + o(1))N$. Положим $K = \lfloor 0.6\omega N^2 \rfloor$.

В следующей лемме предполагается, что выполнены условия предложения 2.1.

ЛЕММА 2.9. Найдутся $c_{m,k} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $m = 0, 1$, $k = 0, 1, \dots, K-1$, такие, что

$$0 < \max \overline{c_{m,k}} \leq \exp((5c + 6\omega + 5)N^2),$$

и функция

$$F(z) = \sum_{m=0}^1 \sum_{k=0}^{K-1} c_{m,k} \Delta_{k,N}(z) f(z)^m$$

(многочлены $\Delta_{k,N}$ определены в (2.8)) удовлетворяет условиям

$$F^{(\sigma)}(a) = 0, \quad a \in \Omega_{N-1}, \quad \sigma = 0, 1, \dots, N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.9. Для доказательства потребуется следующее общеизвестное утверждение (см. [17; гл. 3, лемма 13], а также [18]).

ЛЕММА 2.10 (лемма Зигеля). Допустим, что коэффициенты линейных форм

$$L_i = \sum_{j=1}^q a_{i,j} x_j, \quad i = 1, \dots, p,$$

где $p < q$, удовлетворяют условиям

$$a_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \quad \overline{a_{i,j}} \leq A, \quad A \geq 1.$$

Тогда система линейных уравнений

$$L_i = 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

имеет решение $x_1, \dots, x_q$, удовлетворяющее условиям

$$x_j \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \quad 0 < \max_{1 \leq j \leq q} \overline{x_j} \leq c(cqA)^{p/(q-p)},$$

где постоянная $c > 0$ зависит только от поля $\mathbb{K}$.

Неизвестные коэффициенты $c_{m,k}$ должны удовлетворять однородной системе линейных уравнений

$$D_N^\sigma d_{a,\sigma} F^{(\sigma)}(a) = 0 \quad (2.15)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} & D_N^\sigma d_{a,\sigma} \left(\frac{d}{dz} \right)^\sigma (\Delta_{k,N}(z) f(z)^m) \Big|_{z=a} \\ &= \sum_{\tau=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{\tau} \cdot D_N^\sigma \Delta_{k,N}^{(\tau)}(a) \cdot d_{a,\sigma} \left(\frac{d}{dz} \right)^{\sigma-\tau} (f(z)^m) \Big|_{z=a} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

(по лемме 2.6; мы учли, что $m \leq 1$).

Согласно условиям предложения 2.1 имеем

$$\left| d_{a,\sigma} \left(\frac{d}{dz} \right)^{\sigma-\tau} (f(z)^m) \Big|_{z=a} \right| \leq \exp(c(\sigma^2 + |a| + 1)) \leq \exp((c + o(1))N^2).$$

Далее, по лемме 2.6

$$\sum_{\tau=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{\tau} |\Delta_{k,N}^{(\tau)}(a)| \leq \sigma! e^{k+N} \left(1 + \frac{|a|}{N} \right)^k \leq \exp((0.6\omega \ln(2e) + o(1))N^2).$$

Наконец, из асимптотического закона распределения простых чисел следует, что

$$D_N^\sigma = \exp((1 + o(1))\sigma N) \leq \exp((1 + o(1))N^2),$$

поэтому для коэффициентов уравнений (2.15) получаем следующую оценку:

$$\left| D_N^\sigma d_{a,\sigma} \left(\frac{d}{dz} \right)^\sigma (\Delta_{k,N}(z) f(z)^m) \Big|_{z=a} \right| \leq \exp((c + 1.1\omega + 1 + o(1))N^2).$$

Так как количество уравнений $p = (N+1)\Omega(N-1) \sim \omega N^2$, а количество неизвестных $q = 2K \sim 1.2\omega N^2$, то $p/(q-p) \sim 5$. Применяя лемму Зигеля, получаем требуемое.

Пусть $F(z)$ – функция, построенная в лемме 2.9.

ЛЕММА 2.11. *При подходящем выборе γ в условии предложения 2.1 (и при всех достаточно больших N) справедливо следующее утверждение: при $M \geq N$ функция $F(z)$ удовлетворяет условиям*

$$F^{(\sigma)}(a) = 0, \quad a \in \Omega_{M-1}, \quad \sigma = 0, 1, \dots, M. \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.11. Допустим противное. Возьмем минимальное $M > N$, при котором (2.16) не выполнено.

Пусть $a \in \Omega_{M-1}$ и $\sigma \in \{0, 1, \dots, M\}$ таковы, что $F^{(\sigma)}(a) \neq 0$. Тогда число $\xi = D_N^\sigma d_{a,\sigma} F^{(\sigma)}(a) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\}$ (см. доказательство леммы 2.9). Оценим $|\xi|$ и $|\bar{\xi}|$.

Для оценки $|\xi|$ применим лемму 2.2. Пусть $\theta > 1$ – фиксированное число, не зависящее от N , которое мы выберем позже. С учетом выбора M получаем

$$|F^{(\sigma)}(a)| \leq \sigma! |F|_{\theta M} \exp(-M\Omega(M-2)\ell(\theta)) \leq |F|_{\theta M} \exp(-(\omega + o(1))M^2\ell(\theta)).$$

Учитывая следствие 2.1, имеем

$$|F|_{\theta M} \leq 2K \exp((5c + 6\omega + 5)N^2) \exp\left(K + N + K \ln\left(1 + \frac{\theta M}{N}\right) + \gamma(\theta M)^2\right).$$

Так как функция $x^{-2} \ln(1+x)$ убывает при $x > 0$, то

$$K \ln\left(1 + \frac{\theta M}{N}\right) \leq 0.6\omega M^2 \ln(1+\theta).$$

Окончательно для $|\xi|$ получаем оценку

$$\ln |\xi| \leq (c_1 + 0.6\omega \ln(1+\theta) - 0.9\omega \ell(\theta) + \gamma\theta^2)M^2,$$

где c_1 – постоянная, зависящая только от c и ω .

Оценим теперь $|\xi|$. Имеем

$$\xi = D_N^\sigma \sum_{m,k} c_{m,k} \sum_{\tau=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{\tau} \Delta_{k,N}^{(\tau)}(a) \cdot d_{a,\sigma} \left(\frac{d}{dz}\right)^{\sigma-\tau} (f(z)^m) \Big|_{z=a}.$$

Используя лемму 2.6, получаем

$$\begin{aligned} |\xi| &\leq 2K \exp((1+o(1))MN + (5c + 6\omega + 5)N^2 + c(M^2 + M)) \\ &\quad \times \exp\left(M \ln M + K + N + K \ln\left(1 + \frac{M}{N}\right)\right) \leq \exp(c_2 M^2), \end{aligned}$$

где c_2 – постоянная, зависящая только от c и ω .

Так как $\xi \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\}$, то согласно неравенству Лиувилля (см. лемму 2.7) имеем

$$|\xi| \cdot |\xi|^{\varkappa-1} \geq 1,$$

откуда получаем

$$c_1 + (\varkappa - 1)c_2 + 0.6\omega \ln(1+\theta) - 0.9\omega \ell(\theta) + \gamma\theta^2 \geq 0. \quad (2.17)$$

Выберем настолько большое $\theta > 1$, что

$$c_1 + (\varkappa - 1)c_2 + 0.6\omega \ln(1+\theta) - 0.9\omega \ell(\theta) < 0.$$

Тогда при достаточно малом γ получим противоречие с (2.17). Лемма 2.11 доказана.

Выберем γ в соответствии с леммой 2.11. Тогда при достаточно большом N получим, что $F(z) \equiv 0$, так как при $a \in \Omega$ и всех $\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ выполняется $F^{(\sigma)}(a) = 0$. Следовательно, $f(z)$ – целая рациональная функция, т.е. многочлен. Предложение 2.1 доказано.

§ 3. Доказательство теоремы 1.4

Отметим, что эту теорему достаточно доказать для случая, когда вместо (1.3) выполнено неравенство

$$\Omega(R) \geq \omega R + O(1), \quad R \geq 0. \quad (3.1)$$

Действительно, если в этих условиях теорема доказана, то достаточно применить доказанное для $\tilde{\omega} \in (0, \omega)$ вместо ω и перейти к пределу при $\tilde{\omega} \rightarrow \omega$.

Пусть $r \in \{1, 2, \dots, s\}$, $t = s - r + 1$. Допустим, что $f(z)$ – целая функция, удовлетворяющая условиям 1), 2) из определения величины $\gamma_s(\Omega; \mathbb{K}; \alpha)$, причем

$$\gamma < t\omega^{1+\kappa/r} \exp\left(-\frac{(r+1)\kappa\alpha}{r\omega t} - \frac{\kappa \ln 15(r+2)}{r} - 3\right). \quad (3.2)$$

Докажем, что $f(z)$ – многочлен. При этом для доказательства оценки (1.7) вместо (3.2) мы будем предполагать, что

$$\frac{\gamma}{\omega s} \leq \max_{\theta > 1} \frac{\ell(\theta)}{\theta} - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

где функция $\ell(\theta)$ определена в (2.1), $r = \lfloor \sqrt{s} \rfloor$, а s достаточно велико (при фиксированных ω, κ, α и ε).

Перенумеруем точки $\Omega = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ так, чтобы выполнялись неравенства $|a_0| \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$. Тогда в силу (3.1) имеем

$$|a_n| \leq \frac{n}{\omega} + O(1).$$

Пусть N – достаточно большое целое число. Обозначим $K = 2tN$, $L = (r+1)K$.

Рассмотрим функции $D_N^{t-1}\Delta_{k,N}(z)$, $D_N^{t-1}\Delta_{k,N}(z)f^{(\rho)}(z)$, $0 \leq k < K$, $0 \leq \rho < r$ (по поводу обозначений см. абзац перед леммой 2.6). Перенумеруем их в произвольном порядке: $\varphi_1(z), \dots, \varphi_L(z)$. Рассмотрим матрицу (2.2) размера $L \times \infty$ (в обозначениях леммы 2.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Верна оценка $\text{rk } \mathcal{A} < L$ (при $N \geq N_0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим обратное. Пусть $0 \leq \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_L$ – минимальный относительно лексикографического порядка набор целых чисел такой, что $\Delta \neq 0$ (см. обозначения леммы 2.3).

Рассмотрим

$$\xi = d_{\zeta_1} \cdots d_{\zeta_L} \Delta = \sum_{\sigma \in S_L} \text{sgn } \sigma \prod_{j=1}^L d_{\zeta_j} \varphi_{\sigma(j)}^{(\tau_j)}(\zeta_j) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\}$$

(последнее следует из леммы 2.6). Оценим сверху $|\xi|$ (при $\kappa > 1$) и $|\xi|$.

Оценим $|\xi|$. Имеем

$$|\xi| \leq L! \max_{\sigma \in S_L} \prod_{j=1}^L |d_{\zeta_j} \varphi_{\sigma(j)}^{(\tau_j)}(\zeta_j)|.$$

Каждая функция $\varphi_{\sigma(j)}(z)$ имеет вид $\varphi_{\sigma(j)}(z) = D_N^{t-1}\Delta_{k,N}(z)f^{(\rho)}(z)^m$ с некоторыми k, ρ и $m \in \{0; 1\}$. Тогда $\varphi_{\sigma(j)}^{(\tau_j)}(z)$ есть сумма не более чем $\tau_j + 1 \leq t$ слагаемых вида

$$\binom{\tau_j}{\tau} D_N^{t-1}\Delta_{k,N}^{(\tau)}(z)f^{(\sigma)}(z)^m,$$

где $\tau \leq t-1$ и $\sigma \leq s-1$. С учетом леммы 2.6 и оценки

$$|\zeta_j| = |a_{n(\nu_j)}| \leq \frac{\nu_j}{\omega t} + O(1)$$

получаем

$$\begin{aligned} |D_N^{t-1} \Delta_{k,N}^{(\tau)}(\zeta_j)| &\leq \exp\left((t-1)N + k + N + k \ln\left(1 + \frac{|\zeta_j|}{N}\right) + o(N)\right) \\ &\leq \exp(tN + kv(\nu_j) + o(N)), \end{aligned}$$

где обозначено

$$v(x) = 1 + \ln\left(1 + \frac{x}{\omega t N}\right).$$

Далее,

$$\overline{d_{\zeta_j} f^{(\sigma)}(\zeta_j)^m} \leq \exp\left(\frac{\alpha \nu_j}{\omega t} + O(1)\right).$$

Следовательно,

$$\overline{d_{\zeta_j} \varphi_{\sigma(j)}^{(\tau_j)}(\zeta_j)} \leq \exp\left(tN + kv(\nu_j) + \frac{\alpha \nu_j}{\omega t} + o(N)\right).$$

Так как числа $v(\nu_j)$ возрастают, то с учетом перестановочного неравенства (см. [19; теорема 368]) окончательно для $|\xi|$ получаем следующую оценку:

$$\ln |\xi| \leq tNL + \sum_{j=1}^L \left(k(j)v(\nu_j) + \frac{\alpha \nu_j}{\omega t}\right) + o(N^2),$$

где $k(j) = \lfloor \frac{j-1}{r+1} \rfloor$.

Оценим теперь $|\xi|$. Имеем

$$\ln |\xi| \leq \ln |\Delta| + \frac{\alpha}{\omega t}(\nu_1 + \dots + \nu_L) + O(N).$$

Для оценки $|\Delta|$ применим лемму 2.3 с $\theta_1 = \dots = \theta_L = \theta$, где точное значение $\theta > 1$, не зависящее от N , будет выбрано позже. Получаем

$$\ln |\xi| \leq \max_{\sigma \in S_L} \sum_{j=1}^L \left(\ln |\varphi_{\sigma(j)}|_{\theta(|\zeta_j|+1)} + \left(\frac{\alpha}{\omega t} - \ell(\theta)\right) \nu_j\right) + o(N^2).$$

Снова запишем $\varphi_{\sigma(j)}(z) = D_N^{t-1} \Delta_{k,N}(z) f^{(\rho)}(z)^m$. Как и выше, имеем

$$\ln |\Delta_{k,N}|_{\theta(|\zeta_j|+1)} \leq N + kv(\theta \nu_j) + o(N) \leq N + k \ln \theta + kv(\nu_j) + o(N),$$

поэтому с учетом перестановочного неравенства получаем

$$\begin{aligned} \ln |\xi| &\leq tNL + \frac{(r+1)K^2 \ln \theta}{2} \\ &\quad + \sum_{j=1}^L \left(k(j)v(\nu_j) + \left(\frac{\alpha + m(j)\gamma\theta}{\omega t} - \ell(\theta)\right) \nu_j\right) + o(N^2), \end{aligned}$$

где, как и раньше, $k(j) = \lfloor \frac{j-1}{r+1} \rfloor$, а

$$m(j) = \begin{cases} 0, & 1 \leq j \leq K, \\ 1, & K < j \leq L. \end{cases}$$

Так как $\xi \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\}$, то

$$0 \leq \ln |\xi| + (\varkappa - 1) \ln \lceil \xi \rceil \leq \varkappa t N L + \frac{(r+1)K^2 \ln \theta}{2} + \sum_{j=1}^L f_j(\nu_j) + o(N^2), \quad (3.3)$$

где обозначено

$$f_j(x) = \varkappa k(j)v(x) + A_j x, \quad A_j = \frac{\varkappa \alpha + m(j)\gamma\theta}{\omega t} - \ell(\theta).$$

При $x \geq j - 1$ выполнено

$$f'_j(x) = \frac{\varkappa k(j)}{x + \omega t N} + A_j < \frac{\varkappa}{r+1} + A_L.$$

Допустим, что

$$\frac{\varkappa}{r+1} + A_L < 0. \quad (3.4)$$

Тогда получаем

$$\sum_{j=1}^L f_j(\nu_j) \leq \sum_{j=1}^L f_j(j-1) \leq \frac{\varkappa v(L)L^2}{2(r+1)} + \left(\frac{\varkappa \alpha}{\omega t} - \ell(\theta) \right) \frac{L^2}{2} + \frac{\gamma\theta(L^2 - K^2)}{2\omega t} + o(N^2)$$

(мы использовали грубую оценку $v(j-1) < v(L)$).

Таким образом, в предположении (3.4) из (3.3) получаем, что $0 \leq AL^2/2 + o(N^2)$, где обозначено

$$A = \frac{\varkappa}{r+1} \left(2 + \ln \left(1 + \frac{2(r+1)}{\omega} \right) \right) + \frac{\ln \theta}{r+1} + \frac{\varkappa \alpha}{\omega t} - \ell(\theta) + \left(1 - \frac{1}{(r+1)^2} \right) \frac{\gamma\theta}{\omega t}.$$

Если последнее выражение отрицательно, то получаем противоречие, поэтому для завершения доказательства предложения 3.1 достаточно добиться того, чтобы выполнялись неравенства (3.4) и $A < 0$.

Пусть сначала ω , $\varkappa$ и α фиксированы, а $s \rightarrow +\infty$. При выборе $r \sim \sqrt{s}$ оба неравенства принимают вид $\gamma < (\ell(\theta)/\theta + o(1))\omega s$, откуда получаем справедливость предложения 3.1 в этом случае (предположение (3.2) до сих пор нигде в доказательстве не использовалось).

Рассмотрим общий случай. Покажем, что можно взять

$$\theta = \frac{(r+1)\omega t}{(r+2)\gamma} > \frac{r+1}{r+2} \left(\frac{15(r+2)}{\omega} \right)^{\varkappa/r} \exp \left(\frac{(r+1)\varkappa \alpha}{r\omega t} + 3 \right) > 1.$$

Действительно, во-первых,

$$\frac{\varkappa}{r+1} + A_L < \frac{\varkappa}{r+1} + \frac{\varkappa \alpha}{\omega t} + 1 - \ln \frac{\theta}{2} < 0.$$

Во-вторых,

$$A < \frac{\varkappa}{r+1} \ln \frac{15(r+2)}{\omega} + \frac{\varkappa \alpha}{\omega t} + \ln 2 - \left(1 - \frac{1}{r+1} \right) \ln \theta + \frac{r}{r+1} < 0.$$

Предложение 3.1 доказано.

Из предложения 3.1 получаем, что существует ненулевой набор чисел C_k , $C_{\rho,k}$, $0 \leq \rho < r$, $0 \leq k < K$, такой, что для функции

$$F(z) = \sum_{k=0}^{K-1} C_k \Delta_{k,N}(z) + \sum_{\rho=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{K-1} C_{\rho,k} \Delta_{k,N}(z) f^{(\rho)}(z)$$

выполнено $F^{(\tau)}(a) = 0$ при $a \in \Omega$, $0 \leq \tau < t$. Так как

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ |F|_R}{R} \leq \gamma < \frac{\omega \pi t}{2}$$

(для оценки $|f^{(\rho)}|_R$ используется формула

$$f^{(\rho)}(z) = \frac{\rho!}{2\pi i} \int_{|\zeta-z|=1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\rho+1}} d\zeta,$$

то из леммы 2.5 получаем, что $F(z) \equiv 0$, и теорема 1.4 следует из леммы 2.8 и предложения 2.1. При этом для того чтобы обеспечить выполнение неравенства $P_s(a) \neq 0$, $a \in \Omega$, леммы 2.8, достаточно выбросить из Ω конечное число точек, а для проверки условия (2.10) при $\varkappa = 1$ достаточно заметить, что

$$|d_a f^{(\sigma)}(a)| = |d_a f^{(\sigma)}(a)| = O(e^{(\alpha+\gamma)|a|}).$$

§ 4. Доказательство теоремы 1.5

Доказательство теоремы 1.5 аналогично доказательству теоремы 1.4, поэтому приведем лишь его схему. При этом мы также будем предполагать, что выполнено (3.1).

Пусть $f(z)$ – целая функция, $f^{(\sigma)}(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ при $0 \leq \sigma < s$ (этого всегда можно добиться, домножив на подходящую ненулевую постоянную), причем $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$ с

$$\gamma < 0.01s\omega \left(\ln \frac{1}{\omega} \right)^{-1}.$$

Докажем, что $f(z)$ – многочлен.

В качестве функций $\varphi_1(z), \dots, \varphi_L(z)$ возьмем функции $D_N^{s-1} \Delta_{k,N}(z) f(z)^m$, $0 \leq m < M$, $0 \leq k < K$, где

$$M = \left\lceil \ln \frac{1}{\omega} \right\rceil \geq 5,$$

N – достаточно большое целое число, $K = 2sN$, $L = MK$, и рассмотрим бесконечную матрицу (2.2) при $t = s$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Имеет место оценка $\text{rk } \mathcal{A} < L$ (при $N \geq N_0$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим обратное. Пусть $0 \leq \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_L$ – минимальный относительно лексикографического порядка набор целых чисел такой, что выполнено $\Delta \neq 0$ (см. обозначения леммы 2.3 при $t = s$). При этом $\Delta \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, поэтому

$$|\Delta| \geq 1. \quad (4.1)$$

Для оценки $|\Delta|$ сверху применим лемму 2.3, где

$$\theta_1 = \dots = \theta_L = \theta = \frac{6\omega s}{(4M+1)\gamma} > \frac{600 \ln(1/\omega)}{4 \ln(1/\omega) + 5} > 100.$$

Получим

$$\ln |\Delta| \leq sNL + \frac{MK^2}{2} + \sum_{j=1}^L \left(k(j) \ln \left(1 + \frac{\theta \nu_j}{\omega s N} \right) + \left(\frac{m(j)\gamma\theta}{\omega s} - \ell(\theta) \right) \nu_j \right) + o(N^2),$$

где $k(j) = \lfloor \frac{j-1}{M} \rfloor$, $m(j) = \lfloor \frac{j-1}{K} \rfloor$.

Так как при $x \geq j-1$ выполнено

$$\frac{k(j)}{x + \omega s N / \theta} + \frac{m(j)\gamma\theta}{\omega s} - \ell(\theta) < \frac{1}{M} + 1.5 - \ln \frac{\theta}{2} < 0,$$

то

$$\begin{aligned} \ln |\Delta| &\leq sNL + \frac{MK^2}{2} + \sum_{j=1}^L \left(k(j) \ln \left(1 + \frac{\theta L}{\omega s N} \right) + \left(\frac{m(j)\gamma\theta}{\omega s} - \ell(\theta) \right) j \right) + o(N^2) \\ &= \frac{AL^2}{2} + o(N^2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{M} \left(2 + \ln \left(1 + \frac{2M\theta}{\omega} \right) \right) + \frac{(M-1)(4M+1)\gamma\theta}{6M\omega s} - \ell(\theta) \\ &< \frac{2}{M} + 1 + \frac{\ln(2M + \omega/\theta)}{M} + \left(1 - \frac{1}{M} \right) + \ln 2 - \left(1 - \frac{1}{M} \right) \ln \theta < 0, \end{aligned}$$

и при достаточно большом N приходим к противоречию с (4.1).

Предложение 4.1 доказано.

Из предложения 4.1 и леммы 2.5 получаем, что существует ненулевой набор многочленов $P_m(z)$, $0 \leq m < M$, такой, что

$$\sum_{m=0}^{M-1} P_m(z) f(z)^m \equiv 0.$$

Следовательно, $f(z)$ – целая алгебраическая функция, т.е. многочлен.

Теорема 1.5 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 1.6

Не теряя общности, можно считать, что $0 \notin \Omega$. В противном случае достаточно построить искомую функцию $f(z)$ для множества $\Omega \setminus \{0\}$ и рассмотреть функцию $z^s f(z)$.

Для доказательства общего случая пронумеруем элементы Ω в порядке убывания модулей: $\Omega = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, так что $|a_0| \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$; если же Ω асимптотически симметрично, то примем такую нумерацию, чтобы выполнялось неравенство $(-1)^n a_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и последовательности a_{2n} и $|a_{2n+1}|$ возрастали. В любом случае выполнено

$$|a_n| = \frac{n}{\omega} + o(n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Введем многочлены $p_n(z)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$p_0(z) = 1, \quad p_{n+1}(z) = (z - a_{[n/s]})p_n(z), \quad n \geq 0.$$

Функцию $f(z)$ будем искать в следующем виде:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \left(\frac{z}{a_{[n/s]}} \right)^{[\tau n]} p_n(z), \quad (5.1)$$

где

$$\tau = \begin{cases} \max \left\{ \ln 2 - \frac{\alpha}{\omega s}, 0 \right\} & \text{в общем случае,} \\ 0, & \text{если } \Omega \text{ а.с.} \end{cases}$$

(“а.с.” – сокращение для “асимптотически симметрично”). Неизвестные коэффициенты c_n будем определять последовательно.

Допустим, что ряд для $f(z)$ сходится равномерно внутри $\mathbb{C}$ (т.е. на любом компакте). Пусть q и r – частное и остаток при делении числа $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ на s соответственно (т.е. $n = qs + r$, $0 \leq r < s$). Тогда

$$p_n(z) = ((z - a_0) \cdots (z - a_{q-1}))^s (z - a_q)^r.$$

Отсюда получаем

$$f^{(r)}(a_q) = \left(\frac{d}{dz} \right)^r \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} c_{\nu} \cdot \left(\frac{z}{a_{[\nu/s]}} \right)^{[\tau \nu]} p_{\nu}(z) \right) \Big|_{z=a_q} + c_n r! \prod_{\nu=0}^{q-1} (a_q - a_{\nu})^s.$$

Если числа $c_0, \dots, c_{n-1}$ уже определены, то возьмем такое c_n , удовлетворяющее условию

$$0 < c_n \leq \frac{1}{r! [e^{\alpha|a_q|}] \prod_{\nu=0}^{q-1} |a_q - a_{\nu}|^s},$$

чтобы выполнялось $[e^{\alpha|a_q|}] f^{(r)}(a_q) \in \mathbb{Z}$.

Для окончания доказательства осталось показать, что при таком выборе c_n ряд (5.1) сходится равномерно в каждом круге B_R и оценить $|f|_R$ при $R \rightarrow \infty$. Заметим, что при этом функция $f(z)$ будет трансцендентной, поскольку среди чисел c_n бесконечное число ненулевых. Действительно, если бы функция $f(z)$ была многочленом, то при всех достаточно больших n выполнялось бы следующее соотношение:

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} c_{\nu} \cdot \left(\frac{1}{2a_{[\nu/s]}} \right)^{[\tau \nu]} p_{\nu} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{(1/2)^{[\tau n]} p_n(1/2)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta^{[\tau n]} p_n(\zeta) (\zeta - 1/2)} = 0,$$

где $R > \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{[(n-1)/s]}|\}$, откуда следовало бы, что $c_n = 0$ при $n \geq n_0$.

По построению имеем

$$\begin{aligned} |f|_R &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{|a_q|} \right)^{[\tau n]} \frac{|p_n|_R}{[e^{\alpha|a_q|}] \prod_{\nu=0}^{q-1} |a_q - a_{\nu}|^s} \\ &\leq \frac{\pi^2}{6} \sup_{n \geq 0} \left((n+1)^2 \left(\frac{R}{|a_q|} \right)^{[\tau n]} \frac{|p_n|_R}{[e^{\alpha|a_q|}] \prod_{\nu=0}^{q-1} |a_q - a_{\nu}|^s} \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

(из конечности последнего супремума, которую мы докажем ниже одновременно с оценкой сверху, следует равномерная сходимость ряда (5.1) в круге B_R). Здесь и всюду далее $q = [n/s]$.

При $n \rightarrow \infty$ (или, что то же самое, при $q \rightarrow \infty$) равномерно по $R \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} \ln |p_n|_R &\leq s \ln |(z - a_0) \cdots (z - a_{q-1})|_R + O(\ln R + \ln q) \\ &\leq s \sum_{\nu=0}^{q-1} \ln \left(R + \frac{\nu}{\omega} \right) + O(\ln R) + o(q) \leq s \int_0^q \ln \left(R + \frac{x}{\omega} \right) dx + O(\ln R) + o(q) \\ &= s(q + \omega R) \ln \left(\frac{q}{\omega R} + 1 \right) + sq \ln \frac{R}{e} + O(\ln R) + o(q). \end{aligned}$$

Более того, если Ω асимптотически симметрично, то при $\nu \rightarrow \infty$ равномерно по $R \geq 2$ выполнено

$$\ln |(z - a_{2\nu})(z - a_{2\nu+1})|_R = \ln \left(R^2 + \frac{4\nu^2}{\omega^2} + o(\nu R + \nu^2) \right) = \ln \left(R^2 + \frac{4\nu^2}{\omega^2} \right) + o(1),$$

поэтому имеем

$$\begin{aligned} \ln |p_n|_R &\leq s \sum_{0 \leq \nu < q/2} \ln \left(R^2 + \frac{4\nu^2}{\omega^2} \right) + O(\ln R) + o(q) \\ &\leq s \int_0^{q/2} \ln \left(R^2 + \frac{4x^2}{\omega^2} \right) dx + O(\ln R) + o(q) \\ &= s\omega R \operatorname{arctg} \frac{q}{\omega R} + \frac{sq}{2} \ln \left(\frac{q^2}{\omega^2 R^2} + 1 \right) + sq \ln \frac{R}{e} + O(\ln R) + o(q). \end{aligned}$$

Далее, фиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$. Тогда при $q \rightarrow \infty$ равномерно по $0 \leq \nu < (1-\varepsilon)q$ имеем

$$|a_q - a_\nu| \geq |a_q| - |a_\nu| \geq \left(\frac{1}{\omega} + o(1) \right) (q - \nu).$$

Кроме того, все числа $a_q - a_\nu$ с $(1-\varepsilon)q \leq \nu < q$ одного знака и различны, поэтому

$$\sum_{(1-\varepsilon)q \leq \nu < q} \ln |a_q - a_\nu| \geq \sum_{(1-\varepsilon)q \leq \nu < q} \ln |q - \nu|.$$

Следовательно,

$$\ln \prod_{\nu=0}^{q-1} |a_q - a_\nu| \geq \sum_{0 \leq \nu < q} \ln (q - \nu) - (1-\varepsilon)q \ln \omega + o(q) = q \ln q - q - (1-\varepsilon)q \ln \omega + o(q).$$

В силу произвольности ε получаем

$$\ln \prod_{\nu=0}^{q-1} |a_q - a_\nu| \geq q \ln \frac{q}{e\omega} + o(q), \quad q \rightarrow \infty.$$

Если Ω асимптотически симметрично, то аналогично получаем

$$\sum_{0 < \nu \leq q/2} \ln |a_q - a_{q-2\nu}| \geq \sum_{0 < \nu \leq q/2} \ln \nu + \frac{q}{2} \ln \frac{2}{\omega} + o(q), \quad q \rightarrow \infty.$$

Кроме того, в этом случае имеем

$$\sum_{0 < \nu \leq (q+1)/2} \ln |a_q - a_{q+1-2\nu}| = \sum_{0 < \nu \leq (q+1)/2} \ln (q+1-\nu) + \frac{q}{2} \ln \frac{2}{\omega} + o(q),$$

откуда

$$\ln \prod_{\nu=0}^{q-1} |a_q - a_\nu| \geq q \ln \frac{2q}{e\omega} + o(q), \quad q \rightarrow \infty.$$

Таким образом, имеем равномерную по $R \geq 2$ оценку

$$(n+1)^2 \left(\frac{R}{|a_q|} \right)^{\lfloor \tau n \rfloor} \frac{|p_n|_R}{[e^{\alpha|a_q|}] \prod_{\nu=0}^{q-1} |a_q - a_\nu|^s} \leq \exp \left(\omega s R g \left(\frac{q}{\omega R} \right) + o_{q \rightarrow \infty}(q) + O(\ln R) \right),$$

где

$$g(x) = \begin{cases} (x+1) \ln(x+1) - (\tau+1)x \ln x - \frac{\alpha}{\omega s} x & \text{в общем случае,} \\ \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2} \ln(x^2+1) - x \ln x - \left(\ln 2 + \frac{\alpha}{\omega s} \right) x, & \text{если } \Omega \text{ а.с.} \end{cases}$$

Так как

$$g'(x) = \begin{cases} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \tau \ln x - \left(\tau + \frac{\alpha}{\omega s} \right) & \text{в общем случае,} \\ \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \left(\ln 2 + \frac{\alpha}{\omega s} \right), & \text{если } \Omega \text{ а.с.,} \end{cases}$$

то наибольшее значение g_0 при $x \geq 0$, равное

$$g_0 = \begin{cases} \ln 4 - \frac{\alpha}{\omega s}, & \alpha \leq \omega s \ln 2, \\ -\ln(1 - e^{-\alpha/(\omega s)}), & \alpha > \omega s \ln 2, \end{cases}$$

в общем случае, и

$$g_0 = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{4e^{2\alpha/(\omega s)} - 1}} = \arcsin \left(\frac{e^{-\alpha/(\omega s)}}{2} \right),$$

если Ω асимптотически симметрично, функция $g(x)$ принимает при

$$x = \begin{cases} \min \left\{ 1, \frac{1}{e^{\alpha/(\omega s)} - 1} \right\} & \text{в общем случае,} \\ \frac{1}{\sqrt{4e^{2\alpha/(\omega s)} - 1}}, & \text{если } \Omega \text{ а.с.} \end{cases}$$

Кроме того, для некоторых положительных постоянных x_0 и C_0 при $x \geq x_0$ имеем

$$g(x) \leq -C_0 x.$$

Окончательно получаем при $R \rightarrow \infty$ следующую оценку:

$$(n+1)^2 \left(\frac{R}{|a_q|} \right)^{\lfloor \tau n \rfloor} \frac{|p_n|_R}{[e^{\alpha|a_q|}] \prod_{\nu=0}^{q-1} |a_q - a_\nu|^s} \leq \begin{cases} \exp(\omega s g_0 R + o(R)), & \text{если } q \leq \omega R x_0, \\ \exp(-C_0 s q + C_0 s q) = 1, & \text{если } q > \omega R x_0. \end{cases}$$

Учитывая (5.2), получаем требуемое.

Теорема 1.6 доказана.

Список литературы

- [1] G. Pólya, “Ueber ganzwertige ganze Funktionen”, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **40**:1 (1915), 1–16.
- [2] G. H. Hardy, “On a theorem of Mr. G. Pólya”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **19** (1917), 60–63.

- [3] E. Landau, “Note on Mr. Hardy’s extension of a theorem of Mr. Pólya”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **20** (1920), 14–15.
- [4] G. Pólya, “Über ganze ganzwertige Funktionen”, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, 1920, 1–10.
- [5] Л. Бибербах, *Аналитическое продолжение*, Наука, М., 1967; пер. с нем.: L. Bieberbach, *Analytische Fortsetzung*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1955.
- [6] D. Sato, “Utterly integer valued entire functions. I”, *Pacific J. Math.*, **118**:2 (1985), 523–530.
- [7] M. Welter, “Sur un théorème de Gelfond–Selberg et une conjecture de Bundschuh–Shiokawa”, *Acta Arith.*, **116**:4 (2005), 363–385.
- [8] T. Rivoal, M. Welter, “Sur les fonctions arithmétiques non entières”, *Israel J. Math.*, **169**:1 (2009), 155–179.
- [9] A. Gelfond, “Sur un théorème de M. G. Pólya”, *Atti Accad. Naz. Lincei*, **10** (1929), 569–574.
- [10] A. Selberg, “Über einen Satz von A. Gelfond”, *Arch. Math. Naturvid.*, **44** (1941), 159–170.
- [11] P. Bundschuh, W. Zudilin, “On theorems of Gelfond and Selberg concerning integral-valued entire functions”, *J. Approx. Theory*, **130**:2 (2004), 164–178.
- [12] M. Waldschmidt, “Pólya’s theorem by Schneider’s method”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **31**:1–2 (1978), 21–25.
- [13] M. Waldschmidt, “Extrapolation et alternants”, *Groupe d’études sur les problèmes Diophantiens 1992–1993*, **108**, Publ. Math. Univ. Pierre Marie Curie, Paris, 1994; <http://www.math.jussieu.fr/~miw/articles/ps/EA.ps>.
- [14] И. П. Рочев, “Об одном обобщении теоремы Поля”, *Матем. заметки*, **81**:2 (2007), 280–293; англ. пер.: I. P. Rochev, “On a generalization of Pólya’s theorem”, *Math. Notes*, **81**:1–2 (2007), 247–259.
- [15] Г. Поля, Г. Сегё, *Задачи и теоремы из анализа*, т. I, Наука, М., 1978; пер. с нем.: G. Pólya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, v. I, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1964.
- [16] М. Вальдшмидт, Ю. В. Нестеренко, “О приближении алгебраическими числами значений экспоненциальной функции и логарифма”, *Диофантовы приближения*, Матем. записки, **2**, 1996, 23–42; Yu. Nesterenko, M. Waldschmidt, *On the approximation of the values of exponential function and logarithm by algebraic numbers*, arXiv: [math/0002047](https://arxiv.org/abs/math/0002047).
- [17] А. Б. Шидловский, *Трансцендентные числа*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. B. Shidlovskii, *Transcendental numbers*, de Gruyter Stud. Math., **12**, de Gruyter, Berlin, 1989.
- [18] E. Bombieri, J. Vaaler, “On Siegel’s lemma”, *Invent. Math.*, **73**:1 (1983), 11–32.
- [19] Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Поля, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.

И. П. Рочев (I. P. Rochev)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: justrip@rambler.ru

Поступила в редакцию
22.06.2010 и 02.12.2010