Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Маштаков, Ю. Л. Сачков, Экстремальные траектории и асимптотика времени Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 9, 97–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7762>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 06:51:35

УДК 517.977

А. П. Маштаков, Ю. Л. Сачков

Экстремальные траектории и асимптотика времени Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости

Рассматривается задача о качении сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания. Требуется перекатить сферу из одной контактной конфигурации в другую так, чтобы длина кривой, пробегаемой точкой контакта, была наименьшей. Получена параметризация экстремальных траекторий. Исследуется асимптотика экстремальных траекторий и поведение времени Максвелла при качении сферы по синусоидам малой амплитуды; для таких траекторий получены оценки так называемого времени разреза.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: оптимальное управление, геометрические методы, симметрии экспоненциального отображения, качение поверхностей, эластики Эйлера.

§ 1. Введение

Работа посвящена исследованию задачи об оптимальном качении сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания. Состояние системы описывается точкой контакта сферы с плоскостью и ориентацией сферы в трехмерном пространстве. Требуется перекатить сферу из заданного начального состояния в заданное терминальное состояние так, чтобы кривая, пробегаемая точкой контакта на плоскости, имела минимальную длину. Управлением является скорость центра сферы.

Описанная задача имеет большое значение для робототехники при моделировании движения сферы в руке робота-манипулятора. Задачи о качении поверхностей вызывают большой интерес в механике, робототехнике и теории управления (см., например, работы [1]–[4]).

Задача об оптимальном качении сферы по плоскости была поставлена в работе Дж. Хаммерсли [5]. А. Артурс и Дж. Уолш в [6] доказали, что уравнения для экстремальных траекторий в этой задаче интегрируемы в эллиптических функциях. В. Джарджевич в [7], [8] показал, что при оптимальном качении точка контакта сферы и плоскости движется по эластикам Эйлера (стационарным конфигурациям упругого стержня на плоскости; см. [9], [10]), и описал возможные типы качения сферы. Однако явная параметризация экстремальных траекторий не была получена.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00246-а).

Остается открытым важный вопрос об оптимальности экстремальных траекторий. Малые дуги экстремальных траекторий оптимальны, но большие дуги, вообще говоря, не оптимальны. Точка, в которой экстремальная траектория теряет оптимальность, называется точкой разреза. В работе [11] начато исследование этих точек на экстремальных траекториях. Описаны непрерывные и дискретные симметрии задачи, охарактеризованы соответствующие точки Максвелла (точки пересечения экстремальных траекторий с одинаковыми значениями функционала и времени). Известно (см. [12]), что после точки Максвелла экстремальная траектория не может быть оптимальной. В работе [11] точки Максвелла, соответствующие непрерывным и дискретным симметриям задачи, были описаны алгебраическими уравнениями в пространстве состояний.

Настоящая работа является непосредственным продолжением работы [11]. Получены результаты в двух направлениях. Во-первых, дается явная параметризация экстремальных траекторий эллиптическими функциями и интегралами; для получения этой параметризации вводятся естественные эллиптические координаты в пространстве сопряженных переменных принципа максимума Понтрягина. Во-вторых, исследована асимптотика экстремальных траекторий при качении сферы вдоль эластик, близких к прямой (т.е. вдоль синусоид малой амплитуды); для этих траекторий изучено поведение точек Максвелла, получены явные оценки времени разреза.

Напомним постановку задачи оптимального управления и некоторые известные результаты. Пусть $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ – точка касания сферы и плоскости, $R \in \text{SO}(3)$ – вращение трехмерного пространства, переводящее текущую ориентацию сферы в исходную. Задача об оптимальном качении сферы единичного радиуса по плоскости ставится следующим образом (см. [7], [8]):

$$\dot{x} = u_1, \quad \dot{y} = u_2, \quad (1.1)$$

$$\dot{R} = R(u_2 A_1 - u_1 A_2), \quad (1.2)$$

$$Q = (x, y, R) \in M = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3), \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.3)$$

$$Q(0) = Q_0 = (0, 0, \text{Id}), \quad Q(t_1) = Q_1, \quad (1.4)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \quad (1.5)$$

Здесь и далее используются базисные матрицы в алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Допустимые управления предполагаются измеримыми и существенно ограниченными, а допустимые траектории – липшицевыми.

Задача (1.1)–(1.5) есть левоинвариантная субриманова задача на группе Ли $M = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3)$. Введем следующий репер на этой группе Ли: $e_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $V_i(R) = R A_i$, $i = 1, 2, 3$. В терминах левоинвариантных полей $X_1 = e_1 - V_2$, $X_2 = e_2 + V_1$ управляемая система (1.1)–(1.3) принимает вид

$$\dot{Q} = u_1 X_1(Q) + u_2 X_2(Q), \quad Q \in M = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.7)$$

Функционал (1.5) есть функционал субримановой длины для левоинвариантной субримановой структуры, заданной полями X_1, X_2 как ортонормированным базисом:

$$l = \int_0^{t_1} \langle \dot{Q}, \dot{Q} \rangle^{1/2} dt \rightarrow \min, \quad \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2. \quad (1.8)$$

По теореме Рашевского–Чжоу (см. [4]) система (1.7) вполне управляема, т.е. любые две точки пространства состояний M можно соединить траекторией системы. Из теоремы Филиппова (см. [4]) следует существование оптимальных управлений в задаче (1.1)–(1.5). Для исследования оптимальных управлений применяется принцип максимума Понтрягина (см. [13], [4]). В аномальном случае сфера катится по прямой на плоскости (x, y) . Для нормального случая в работе В. Джарджевича [7] гамильтонова система принципа максимума Понтрягина (для траекторий единичной скорости $\langle \dot{Q}, \dot{Q} \rangle \equiv 1$) получена в следующей форме:

$$\dot{\theta} = c, \quad \dot{c} = -r \sin \theta, \quad \dot{\alpha} = \dot{r} = 0, \quad (1.9)$$

$$\dot{x} = \cos(\theta + \alpha), \quad \dot{y} = \sin(\theta + \alpha), \quad (1.10)$$

$$\dot{R} = R\Omega, \quad \Omega = \sin(\theta + \alpha)A_1 - \cos(\theta + \alpha)A_2, \quad (1.11)$$

$$\theta \in S^1, \quad c \in \mathbb{R}, \quad r \geq 0, \quad \alpha \in S^1, \quad Q = (x, y, R) \in M, \quad (1.12)$$

$$Q(0) = Q_0 = (0, 0, \text{Id}). \quad (1.13)$$

Уравнения (1.9)–(1.11) дают координатное представление гамильтоновой системы на поверхности уровня $\{H = 1/2\}$ в кокасательном расслоении для гамильтониана $H = ((h_1 - H_2)^2 + (h_2 + H_1)^2)/2$, где $h_i(\lambda) = \langle \lambda, e_i \rangle$, $H_i(\lambda) = \langle \lambda, V_i \rangle$, $\lambda \in T^*M$ (подробности см. в [7], [11]). Подсистема (1.9) гамильтоновой системы для сопряженных переменных (θ, c, r, α) есть уравнение маятника, а проекции экстремальных кривых на плоскость (x, y) суть эйлеровы эластики – стационарные конфигурации упругого стержня на плоскости с закрепленными концами и касательными на концах (см. [10]). В. Джарджевич в [7] описал разные качественные типы качения сферы по эластикам различных видов (инфлекссионных, неинфлекссионных, окружности, прямой), а также получил алгебраические и дифференциальные уравнения для углов Эйлера вдоль экстремальных кривых (мы приведем эти уравнения и воспользуемся некоторыми из них в § 3).

В работе [11] описаны непрерывные и дискретные симметрии экспоненциального отображения, параметризующего решения гамильтоновой системы:

$$\text{Exp} : (\lambda, t) \mapsto Q_t, \quad (\lambda, t) \in N = C \times \mathbb{R}_+, \quad Q_t \in M,$$

$$C = \left\{ \lambda \in T_{Q_0}^* M \mid H(\lambda) = \frac{1}{2} \right\} = \{(\theta, c, \alpha, r) \mid \theta \in S^1, c \in \mathbb{R}, r \geq 0, \alpha \in S^1\}.$$

Непрерывные симметрии $\{\Phi^\beta \mid \beta \in S^1\}$ суть повороты на угол β в плоскости (x, y) , а дискретные симметрии $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ – отражения траекторий маятника (1.9) соответственно в осях координат $\{\theta = 0\}$, $\{c = 0\}$ и в начале координат $(\theta, c) = (0, 0)$. Определено действие симметрий в прообразе N и образе M экспоненциального отображения. Получено описание множеств Максвелла, соответствующих симметриям ε^i , $i = 1, 2, 3$:

$$\text{MAX}^i = \{(\lambda, t) \in N \mid \exists \beta \in S^1 :$$

$$(\tilde{\lambda}, t) = \varepsilon^i \circ \Phi^\beta(\lambda, t), \text{Exp}(\lambda, s) \neq \text{Exp}(\tilde{\lambda}, s), \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp}(\tilde{\lambda}, t)\}.$$

В частности, для симметрии ε^1 доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1 (см. [11; теорема 4.1]). Пусть $t > 0$ и $Q_s = (x_s, y_s, R_s) = \text{Exp}(\lambda, s)$ есть такая экстремальная траектория, что:

- (i) $q_3(t) = 0$;
- (ii) эллиптика $\{(x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}$ не вырождена и не центрирована в точке перегиба.

Тогда $(\lambda, t) \in \text{MAX}^1$, поэтому для любого $t_1 > t$ траектория Q_s , $s \in [0, t_1]$, не оптимальна.

Здесь $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ – кватернион единичной длины, соответствующий матрице $R \in \text{SO}(3)$ (подробности см. в § 4, а также в [11]). В § 6 исследовано поведение точек Максвелла $(\lambda, t) \in \text{MAX}^1$ вблизи устойчивого положения равновесия маятника (1.9). Для множеств Максвелла MAX^2 , MAX^3 в работе [11] получены предложения, аналогичные теореме 1.1.

Настоящая работа имеет следующую структуру. В § 2 построено разбиение цилиндра C на подмножества, соответствующие однотипным движениям маятника (1.9). С использованием этого разбиения на подмножестве полной меры цилиндра C введены эллиптические координаты, выпрямляющие фазовый поток маятника. В § 3 эти координаты использованы для получения параметризации экстремальных траекторий.

В §§ 4–6 исследуется асимптотика экстремальных кривых и поведение множества Максвелла MAX^1 вблизи устойчивого положения равновесия маятника. С учетом того, что это множество описано в терминах кватернионов, в § 4 выводится управляемая система, описывающая изменение кватерниона единичной длины q , соответствующего матрице вращения R . В § 5 вычислены асимптотические разложения траекторий этой системы вблизи устойчивого положения равновесия маятника. В § 6 исследуется поведение множества Максвелла MAX^1 для соответствующих экстремальных траекторий; исследована асимптотика функции $q_3(t)$, задающей это множество; получены оценки времени разреза вдоль экстремальных траекторий, соответствующих малым колебаниям маятника (1.9).

§ 2. Эллиптические координаты в преобразе экспоненциального отображения

Уравнения маятника (1.9) имеют интеграл энергии $E = c^2/2 - r \cos \theta \in [-r, +\infty)$. Цилиндр C разбивается на следующие инвариантные подмножества этого уравнения:

$$C = \bigcup_{i=1}^7 C_i, \quad C_i \cap C_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

$$C_1 = \{\lambda \in C \mid E \in (-r, r), r > 0\}, \quad C_2 = \{\lambda \in C \mid E \in (r, +\infty), r > 0\},$$

$$C_3 = \{\lambda \in C \mid E = r > 0, c \neq 0\}, \quad C_4 = \{\lambda \in C \mid E = -r, r > 0\},$$

$$C_5 = \{\lambda \in C \mid E = r > 0, c = 0\}, \quad C_6 = \{\lambda \in C \mid r = 0, c \neq 0\},$$

$$C_7 = \{\lambda \in C \mid r = 0, c = 0\}.$$

При $\lambda \in \bigcup_{i=4}^7 C_i$ уравнения маятника (1.9) легко интегрируются. Однако при $\lambda \in \bigcup_{i=1}^3 C_i$ для интегрирования этих уравнений и полной гамильтоновой

системы (1.9)–(1.11) нам понадобятся специальные эллиптические координаты. Аналогичные координаты были применены к исследованию нескольких задач оптимального управления, для которых сопряженная система принципа максимума Понтрягина сводится к уравнению маятника (см. [12], [14], [15]).

В области $\widehat{C} = \bigcup_{i=1}^3 C_i$ эллиптические координаты (φ, k, α, r) вводятся следующим образом (здесь и далее используются функции Якоби sn , cn , dn , E и полный эллиптический интеграл I рода K ; см. [16], [17]).

Если $\lambda = (\theta, c, \alpha, r) \in C_1$, то

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = k \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi, k), \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi, k), \quad \frac{c}{2} = k\sqrt{r} \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi, k),$$

при этом $k = \sqrt{(E+r)/(2r)} \in (0, 1)$, $\sqrt{r}\varphi \pmod{4K} \in [0, 4K]$.

Если $\lambda = (\theta, c, \alpha, r) \in C_2$, то

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm \operatorname{sn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi}{k}, k\right), & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \operatorname{cn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi}{k}, k\right), \\ \frac{c}{2} &= \frac{\pm\sqrt{r}}{k} \operatorname{dn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi}{k}, k\right), \end{aligned}$$

где $\pm = \operatorname{sgn} c$, при этом $k = \sqrt{2r/(E+r)} \in (0, 1)$, $\sqrt{r}\varphi \pmod{2kK} \in [0, 2kK]$.

Если $\lambda \in C_3$, то

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi), \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi)}, \quad \frac{c}{2} = \frac{\pm\sqrt{r}}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi)},$$

где $\pm = \operatorname{sgn} c$, при этом $k = 1$, $\varphi \in (-\infty, +\infty)$.

Координата k есть перепараметризованная энергия маятника. Непосредственное дифференцирование показывает, что уравнения маятника (1.9) выпрямляются в координатах (φ, k, α, r) :

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{k} = 0, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad \dot{r} = 0, \quad (2.1)$$

т.е. координата φ – время движения маятника.

§ 3. Параметризация экстремалей

3.1. Интегрирование подсистемы для сопряженных переменных.

Если $\lambda = (\varphi, k, \alpha, r) \in \widehat{C}$, то в силу уравнений (2.1) траектории маятника (1.9) в эллиптических координатах имеют вид $\varphi_t = \varphi + t$, $k, \alpha, r = \operatorname{const}$. Учитывая выражения для эллиптических координат в области $\widehat{C}$ (см. § 2), получаем следующую параметризацию решений (θ_t, c_t) системы (1.9).

Если $\lambda \in C_1$, то

$$\sin\left(\frac{\theta_t}{2}\right) = k \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi_t, k), \quad \cos\left(\frac{\theta_t}{2}\right) = \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi_t, k), \quad \frac{c_t}{2} = k\sqrt{r} \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi_t, k).$$

Если $\lambda \in C_2$, то

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\theta_t}{2}\right) &= \pm \operatorname{sn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi_t}{k}, k\right), & \cos\left(\frac{\theta_t}{2}\right) &= \operatorname{cn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi_t}{k}, k\right), \\ \frac{c_t}{2} &= \frac{\pm\sqrt{r}}{k} \operatorname{dn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi_t}{k}, k\right), & \pm &= \operatorname{sgn} c. \end{aligned}$$

Если $\lambda \in C_3$, то

$$\sin\left(\frac{\theta_t}{2}\right) = \pm \operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi_t), \quad \cos\left(\frac{\theta_t}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi_t)},$$

$$\frac{c_t}{2} = \frac{\pm\sqrt{r}}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi_t)}, \quad \pm = \operatorname{sgn} c.$$

Для случаев $\lambda \in \bigcup_{i=4}^7 C_i$ система (1.9) интегрируется непосредственно:

$$\begin{aligned} \theta_t &\equiv 0, \quad c_t \equiv 0 && \text{при } \lambda \in C_4; \\ \theta_t &\equiv \pi, \quad c_t \equiv 0 && \text{при } \lambda \in C_5; \\ \theta_t &= ct + \theta, \quad c_t \equiv c \neq 0 && \text{при } \lambda \in C_6; \\ \theta_t &\equiv \theta, \quad c_t \equiv 0 && \text{при } \lambda \in C_7. \end{aligned}$$

3.2. Интегрирование уравнений для x, y . Для интегрирования уравнений (1.10) с начальными условиями $x_0 = y_0 = 0$ воспользуемся симметрией задачи – поворотом

$$\bar{x} = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad \bar{y} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \quad (3.1)$$

В новых переменных получаем задачу Коши

$$\dot{\bar{x}}_t = \cos \theta_t, \quad \dot{\bar{y}}_t = \sin \theta_t, \quad \bar{x}_0 = \bar{y}_0 = 0. \quad (3.2)$$

Используя полученные в п. 3.1 выражения для $\sin(\theta_t/2)$, $\cos(\theta_t/2)$, интегрируем уравнения (3.2) при $\lambda \in \hat{C}$ и получаем следующую параметризацию эйлеровых эластик $(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$.

Если $\lambda \in C_1$, то

$$\bar{x}_t = \frac{2(\operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi_t) - \operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi)) - \sqrt{r}t}{\sqrt{r}}, \quad \bar{y}_t = \frac{2k(\operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi) - \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi_t))}{\sqrt{r}}.$$

Если $\lambda \in C_2$, то

$$\begin{aligned} \bar{x}_t &= \frac{2(\operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi_t/k) - \operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi/k) - (2 - k^2)\sqrt{r}t/(2k))}{k\sqrt{r}}, \\ \bar{y}_t &= \frac{\pm 2(\operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi/k) - \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi_t/k))}{k\sqrt{r}}, \quad \pm = \operatorname{sgn} c. \end{aligned}$$

Если $\lambda \in C_3$, то

$$\begin{aligned} \bar{x}_t &= \frac{2(\operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi_t) - \operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi)) - \sqrt{r}t}{\sqrt{r}}, \\ \bar{y}_t &= \frac{\pm 2(1/\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi) - 1/\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi_t))}{\sqrt{r}}, \quad \pm = \operatorname{sgn} c. \end{aligned}$$

При $\lambda \in \bigcup_{i=4}^7 C_i$ уравнения (3.2) интегрируются непосредственно:

$$\begin{aligned} \bar{x}_t &= t, \quad \bar{y}_t = 0 && \text{при } \lambda \in C_4; \\ \bar{x}_t &= -t, \quad \bar{y}_t = 0 && \text{при } \lambda \in C_5; \\ \bar{x}_t &= \frac{\sin(ct + \theta) - \sin \theta}{c}, \quad \bar{y}_t = \frac{\cos \theta - \cos(ct + \theta)}{c} && \text{при } \lambda \in C_6; \\ \bar{x}_t &= t \cos \theta, \quad \bar{y}_t = t \sin \theta && \text{при } \lambda \in C_7. \end{aligned}$$

В терминах эллиптических координат естественно формулируются условия того, что эластика $\{(x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}$ центрирована в точке перегиба (в вершине), т.е. условия того, что средняя точка эластике $(x_{t/2}, y_{t/2})$ есть точка перегиба (соответственно вершина). Определим переменную τ следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{r} \left(\varphi + \frac{t}{2} \right) \quad \text{при } \lambda \in C_1 \cup C_3, \\ \tau &= \frac{\sqrt{r}(\varphi + \frac{t}{2})}{k} \quad \text{при } \lambda \in C_2. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.1. Пусть $\lambda \in \widehat{C}$, $\text{Exp}(\lambda, s) = (x_s, y_s, R_s)$, $t > 0$, и пусть $\gamma = \{(x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}$.

- (i) Эластика γ центрирована в точке перегиба тогда и только тогда, когда $\lambda \in C_1$ и $\text{sn } \tau = 0$.
- (ii) Эластика γ центрирована в вершине в том и только том случае, когда: $\text{sn } \tau = 0$ при $\lambda \in C_1$; $\text{sn } \tau \text{ cn } \tau = 0$ при $\lambda \in C_2$; $\tau = 0$ при $\lambda \in C_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кривизна эластике γ в точке (x_s, y_s) равна $\dot{\theta}_s = c_s$. При $\lambda \in \widehat{C}$ эластика γ не вырождена (не является прямолинейным отрезком или дугой окружности), поэтому точки перегиба γ задаются условием $c_s = 0$, а вершины – условием $\dot{c}_s = -r \sin \theta_s = 0$.

(i) Средняя точка эластике $(x_{t/2}, y_{t/2})$ есть точка перегиба тогда и только тогда, когда $c_{t/2} = 0$. Воспользуемся выражениями для компоненты экстремалей c_s в эллиптических координатах (п. 3.1). Если $\lambda \in C_1$, то равенство $c_{t/2} = 0$ эквивалентно $\text{sn } \tau = 0$; если $\lambda \in C_2$, то $c_{t/2} \neq 0$, так как $\text{dn } \tau \neq 0$; если $\lambda \in C_3$, то $c_{t/2} \neq 0$, так как $1/\text{ch } \tau \neq 0$.

Пункт (ii) доказывается аналогично.

3.3. Интегрирование уравнения для R . Для интегрирования уравнения (1.11) воспользуемся следующими результатами работы В. Джарджевича [7]. Вдоль экстремальных траекторий матрица R и вектор

$$\tilde{P} = (H_1, H_2, H_3)^T = (\sin(\theta + \alpha) - r \sin \alpha, r \cos \alpha - \cos(\theta + \alpha), c)^T$$

удовлетворяют тождеству $R\tilde{P} \equiv \text{const} \in \mathbb{R}^3$, $|R\tilde{P}|^2 = 1 + r^2 + 2E =: M$. Пусть $M > 0$. Если $R\tilde{P} = (0, 0, \sqrt{M})^T$, то матрица вращения имеет разложение $R(t) = e^{\varphi_1(t)A_3} e^{\varphi_2(t)A_2} e^{(\varphi_3(t)-\alpha)A_3}$, где углы Эйлера $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ удовлетворяют уравнениям

$$\cos \varphi_2 = \frac{c}{\sqrt{M}}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{\pm \sqrt{M - c^2}}{\sqrt{M}}, \quad (3.3)$$

$$\cos \varphi_3 = \frac{\mp \sin \theta}{\sqrt{M - c^2}}, \quad \sin \varphi_3 = \frac{\pm(r - \cos \theta)}{\sqrt{M - c^2}}, \quad (3.4)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\sqrt{M}(1 - r \cos \theta)}{M - c^2}. \quad (3.5)$$

Уравнения (3.3)–(3.5) корректно определены, если $M - c^2 > 0$. В силу равенства $M - c^2 = (1 - r)^2 + 4r \sin^2(\theta/2)$ при $r \neq 1$ имеем $M - c^2 > 0$. Если $r = 1$,

то уравнения (3.3)–(3.5) по непрерывности переходят в следующие уравнения:

$$\cos \varphi_2 = \frac{c}{\sqrt{M}}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{\pm 2 \sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{M}}, \quad (3.6)$$

$$\cos \varphi_3 = \mp \cos \left(\frac{\theta}{2} \right), \quad \sin \varphi_3 = \pm \sin \left(\frac{\theta}{2} \right), \quad (3.7)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\sqrt{M}}{2}. \quad (3.8)$$

Если $R\tilde{P}$ – произвольный вектор в $\mathbb{R}^3$ длины $\sqrt{M}$, то подходящим вращением он может быть переведен в вектор $(0, 0, \sqrt{M})^T$. Воспользовавшись инвариантностью задачи относительно левых сдвигов на $\text{SO}(3)$, получаем следующее выражение для матрицы вращения:

$$R(t) = e^{(\alpha - \varphi_3^0)A_3} e^{-\varphi_2^0 A_2} e^{\varphi_1(t)A_3} e^{\varphi_2(t)A_2} e^{(\varphi_3(t) - \alpha)A_3}, \quad (3.9)$$

где углы φ_i определяются из соотношений (3.3)–(3.5) при $r \neq 1$ и (3.6)–(3.8) при $r = 1$, а угол φ_1 удовлетворяет начальному условию $\varphi_1^0 = 0$.

Входящие в разложение (3.9) экспоненты матриц, содержащие φ_2 , φ_3 , выражаются через функции $\cos \varphi_2$, $\sin \varphi_2$, $\cos \varphi_3$, $\sin \varphi_3$, которые с помощью соотношений (3.3), (3.4), (3.6), (3.7) выражены через переменные c , $\cos(\theta/2)$, $\sin(\theta/2)$, которые в свою очередь представлены в п. 3.1 как функции эллиптических координат или непосредственно. При $r = 1$ имеем $\varphi_1(t) = \sqrt{M}t/2$. Интегрирование уравнения (3.5) при $r \neq 1$ вынесено в п. 3.4.

В случае $M = 0$ имеем $r = 1$, $c = 0$, $\theta = 0$, откуда $u_1 = \cos \alpha$, $u_2 = \sin \alpha$. Поэтому $\Omega = u_2 A_1 - u_1 A_2 \equiv \text{const}$ и $R(t) = e^{t\Omega}$.

3.4. Интегрирование уравнения для φ_1 . Для интегрирования уравнения (3.5) с начальным условием $\varphi_1(0) = 0$ преобразуем правую часть этого уравнения:

$$\sqrt{M} \frac{1 - r \cos \theta}{M - c^2} = \sqrt{M} \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - r^2}{2(M - c^2)} \right).$$

1) Пусть $\lambda \in C_1$; тогда из п. 3.1 получаем $c_s = 2k\sqrt{r} \text{sn}(\sqrt{r}(\varphi + s))$, а из п. 2 получаем $E = 2k^2 r - r$, откуда $M = (1 - r)^2 + 4k^2 r$. Преобразуем интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{ds}{M - c_s^2} &= \int_0^t \frac{ds}{(1 - r)^2 + 4k^2 r \text{sn}^2(\sqrt{r}(\varphi + s))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{r}(1 - r)^2} \int_{\sqrt{r}\varphi}^{\sqrt{r}(\varphi+t)} \frac{dp}{1 - l \text{sn}^2 p}, \quad l = -\frac{4k^2 r}{(1 - r)^2}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение эллиптический интеграл III рода в следующей форме:

$$\Pi(n, u, k) = \int_0^u \frac{dt}{(1 - n \sin^2 t) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \int_0^{F(u, k)} \frac{dv}{1 - n \text{sn}^2 v}.$$

Тогда

$$\int_0^t \frac{ds}{M - c_s^2} = \frac{1}{\sqrt{r}(1 - r)^2} (\Pi(l, \text{am}(\sqrt{r}(\varphi + t)), k) - \Pi(l, \text{am}(\sqrt{r}\varphi), k)),$$

откуда

$$\varphi_1(t) = \frac{\sqrt{M}}{2}t + \frac{\sqrt{M}(1+r)}{2\sqrt{r}(1-r)} (\Pi(l, \operatorname{am}(\sqrt{r}(\varphi+t)), k) - \Pi(l, \operatorname{am}(\sqrt{r}\varphi), k)),$$

где $l = -4k^2r/(1-r)^2$. Здесь и далее используются эллиптический интеграл первого рода F и амплитуда Якоби am (см. [16]).

2) Пусть $\lambda \in C_2$; тогда $c_s = \pm 2\sqrt{r}/k \operatorname{dn}(\sqrt{r}(\varphi+t)/k)$, $M = (1-r)^2 + 4r/k^2$, и аналогичное вычисление дает

$$\varphi_1(t) = \frac{\sqrt{M}}{2}t + \frac{\sqrt{M}k(1+r)}{2\sqrt{r}(1-r)} \left(\Pi\left(l, \operatorname{am}\left(\frac{\sqrt{r}(\varphi+t)}{k}\right), k\right) - \Pi\left(l, \operatorname{am}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi}{k}\right), k\right) \right),$$

где $l = -4r/(1-r)^2$.

3) Пусть $\lambda \in C_3$; тогда $c_s = \pm 2\sqrt{r}/\operatorname{ch}(\sqrt{r}(\varphi+s))$, $M = (1+r)^2$, и угол φ_1 выражается через элементарные функции:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{\sqrt{M}}{2}t + \frac{\sqrt{M}k(1-r^2)}{8r^{3/2}} (I(\sqrt{r}(\varphi+t), a) - I(\sqrt{r}\varphi, a)), \\ I(v, a) &= \int_0^v \frac{dt}{a^2 + \operatorname{th}^2 t} = \frac{at - \operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg}(e^t(a^2 \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)/a)}{a + a^3}, \end{aligned}$$

где $a = (1-r)/(2\sqrt{r})$.

4) Пусть $\lambda \in C_6$; тогда $r = 0$, $c \equiv \operatorname{const} \neq 0$, $M = 1 + c^2$, откуда $\dot{\varphi}_1 = \sqrt{M} = \sqrt{1+c^2}$, $\varphi_1(t) = \sqrt{1+c^2}t$.

5) В случае $\lambda \in C_4 \cup C_5 \cup C_7$ выражение для матрицы вращения вычисляется непосредственно:

$$\theta_t \equiv \operatorname{const} = \theta, \quad \Omega = \sin(\alpha + \theta)A_1 - \cos(\alpha + \theta)A_2 \equiv \operatorname{const}, \quad R(t) = e^{t\Omega}.$$

Итак, для задачи об оптимальном качении сферы по плоскости получена параметризация нормальных экстремалей, т.е. траекторий гамильтоновой системы (1.9)–(1.13). В п. 3.1 проинтегрированы уравнения для сопряженных переменных θ , c ; в п. 3.2 – уравнения для точки контакта сферы и плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; наконец, в пп. 3.3, 3.4 проинтегрировано уравнение для матрицы вращения сферы $R \in \operatorname{SO}(3)$. В отличие от других родственных задач оптимального управления, в которых подсистема для сопряженных переменных принципа максимума сводится к уравнению маятника: субриманова задача в случае Мартине (см. [18]), нильпотентная субриманова задача с вектором роста (2, 3, 5) (см. [17]), задача Эйлера об эластиках (см. [14]), субриманова задача на группе движений плоскости (см. [15]), где экстремали параметризуются функциями Якоби sn , sn , dn , E , в задаче о качении сферы по плоскости дополнительно возникает эллиптический интеграл III рода Π . Это представляет существенное новое затруднение при анализе задачи о качении сферы по плоскости и указывает на ее более сложную природу по сравнению с другими упомянутыми задачами. Другие признаки этого рода будут отмечены в § 6 после исследования предельного поведения множества Максвелла и времени разреза.

§ 4. Управляемая система в терминах кватернионов

Для описания изменения ориентации катящейся сферы удобно наряду с матрицей вращения R использовать кватернионы. В работе [11] кватернионы использованы для получения уравнений множеств Максвелла. В этом параграфе

выводятся уравнения управляемой системы, описывающей качение сферы по плоскости, в терминах кватернионов.

Пусть $\mathbb{H} = \{q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \mid q_0, \dots, q_3 \in \mathbb{R}\}$ – алгебра кватернионов, $S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1\}$ – единичная сфера, $I = \{q \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} q = q_0 = 0\}$ – подпространство чисто мнимых кватернионов. Любой кватернион $q \in S^3$ задает вращение евклидова пространства I (см. [19], [20]):

$$q \in S^3 \implies R_q(a) = qaq^{-1}, \quad a \in I, \quad R_q \in \operatorname{SO}(3) \cong \operatorname{SO}(I).$$

Отображение $p: q \mapsto R_q$ есть двулистное накрытие S^3 над $\operatorname{SO}(3)$: $R_q = R_{\hat{q}}$ тогда и только тогда, когда $q = \pm \hat{q}$. В силу того, что проекция $p: S^3 \rightarrow \operatorname{SO}(3)$ есть локальный диффеоморфизм, любое векторное поле V на $\operatorname{SO}(3)$ имеет единственный лифт на S^3 , т.е. такое векторное поле W на S^3 , что $p_*W = V$. Поэтому и управляемая система $\dot{R} = R(u_2A_1 - u_1A_2)$ имеет единственный лифт на S^3 . Для его вычисления воспользуемся выражением для матрицы $R_q = p(q) \in \operatorname{SO}(3)$, $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in S^3$, приведенным в книге [21]:

$$R = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_0q_2 + 2q_1q_3 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & -2q_0q_1 + 2q_2q_3 \\ -2q_0q_2 + 2q_1q_3 & 2q_0q_1 + 2q_2q_3 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Продифференцировав эту матрицу в силу системы $\dot{R} = R(u_2A_1 - u_1A_2)$, получаем систему уравнений относительно $\dot{q}_0, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$. Решая эту систему, получаем управляемую систему на S^3 :

$$\begin{cases} \dot{q}_0 = \frac{1}{2}(q_2u_1 - q_1u_2), \\ \dot{q}_1 = \frac{1}{2}(q_3u_1 + q_0u_2), \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{2}(-q_0u_1 + q_3u_2), \\ \dot{q}_3 = \frac{1}{2}(-q_1u_1 - q_2u_2), \end{cases} \quad q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in S^3, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.2)$$

Матрице $R(t)$, удовлетворяющей системе $\dot{R} = R(u_2A_1 - u_1A_2)$ и начальному условию $R(0) = \operatorname{Id}$, однозначно сопоставляется кватернион $q(t)$, удовлетворяющий системе (4.2) и начальному условию $q(0) = 1$. Итак, управляемая система на $\mathbb{R}^2 \times \operatorname{SO}(3)$ (1.1), (1.2) имеет лифт на $\mathbb{R}^2 \times S^3$ вида (1.1), (4.2) с начальными условиями $(x, y)(0) = (0, 0)$, $q(0) = 1$.

§ 5. Асимптотика экстремальных траекторий

Большой интерес представляет исследование экстремальных траекторий в рассматриваемой задаче. Ввиду сложности параметрических уравнений этих траекторий провести это исследование в полном объеме весьма затруднительно. В этом и следующем параграфах мы начнем это исследование с асимптотического случая, соответствующего малым колебаниям маятника (1.9); в этой асимптотике элаستيки (x, y) , по которым катится сфера, представляются синусоидами малой амплитуды.

В этом параграфе выводится указанная асимптотика экстремальных траекторий. Для представления ориентации сферы в пространстве будет использоваться не матрица вращения $R \in \operatorname{SO}(3)$, а кватернион $q \in S^3$, так как используемые для определения оптимальности экстремальных траекторий множества

Максвелла описаны в работе [11] в терминах кватернионов. Поэтому используется введенная в § 4 управляемая система (4.2). Соответствующая нормальная гамильтонова система принципа максимума имеет вид

$$\dot{\theta} = c, \quad \dot{c} = -r \sin \theta, \quad \dot{\alpha} = \dot{r} = 0, \quad (5.1)$$

$$\dot{x} = u_1, \quad \dot{y} = u_2, \quad (5.2)$$

$$\dot{q}_0 = \frac{1}{2}(q_2 u_1 - q_1 u_2), \quad (5.3)$$

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2}(q_3 u_1 + q_0 u_2), \quad (5.4)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{2}(-q_0 u_1 + q_3 u_2), \quad (5.5)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{2}(-q_1 u_1 - q_2 u_2), \quad (5.6)$$

$$u_1 = \cos(\theta + \alpha), \quad u_2 = \sin(\theta + \alpha), \quad (5.7)$$

$$(x, y)(0) = (0, 0), \quad (q_0, q_1, q_2, q_3)(0) = (1, 0, 0, 0). \quad (5.8)$$

Пусть $\lambda = (\theta, c, \alpha, r) \in C_1$, поэтому $r > 0$. Будем считать, что

$$r \in [r_{\min}, r_{\max}], \quad r_{\max} > r_{\min} > 0, \quad (5.9)$$

и выведем асимптотику решений системы (5.1)–(5.8) при $\theta_0^2 + c_0^2 \rightarrow 0$.

Перейдем в системе (5.1)–(5.8) к новым переменным:

$$(t, \theta, c, \alpha, r, x, y, u_1, u_2, q_0, q_1, q_2, q_3) \rightarrow (s, \theta, d, \alpha, m, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{q}_0, \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3),$$

$$s = mt, \quad d = \frac{c}{m}, \quad m = \sqrt{r},$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A(\alpha) \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A(\alpha) \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = A(\alpha) \begin{pmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} q_0 = \bar{q}_0, \\ q_3 = \bar{q}_3. \end{cases}$$

Обозначим дифференцирование по новому времени $\frac{d}{ds}$ через $'$. В новых переменных система (5.1)–(5.8) примет вид

$$\theta' = d, \quad d' = -\sin \theta, \quad \alpha' = m' = 0, \quad (5.10)$$

$$\bar{x}' = \frac{\bar{u}_1}{m}, \quad \bar{y}' = \frac{\bar{u}_2}{m}, \quad \bar{u}_1 = \cos \theta, \quad \bar{u}_2 = \sin \theta, \quad (5.11)$$

$$\bar{q}_0' = \frac{1}{2m}(\bar{q}_2 \bar{u}_1 - \bar{q}_1 \bar{u}_2), \quad \bar{q}_1' = \frac{1}{2m}(\bar{q}_3 \bar{u}_1 + \bar{q}_0 \bar{u}_2), \quad (5.12)$$

$$\bar{q}_2' = \frac{1}{2m}(-\bar{q}_0 \bar{u}_1 + \bar{q}_3 \bar{u}_2), \quad \bar{q}_3' = \frac{1}{2m}(-\bar{q}_1 \bar{u}_1 - \bar{q}_2 \bar{u}_2), \quad (5.13)$$

$$(\bar{x}, \bar{y})(0) = (0, 0), \quad (\bar{q}_0, \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3)(0) = (1, 0, 0, 0). \quad (5.14)$$

В силу условия (5.9) $O(\theta_0^2 + c_0^2)$ есть $O(\theta_0^2 + d_0^2)$, и обратно. Вычислим асимптотику решений системы (5.10)–(5.14) с начальным условием $\theta(0) = \theta_0$, $d(0) = d_0$ при $\theta_0^2 + d_0^2 \rightarrow 0$ с точностью до $O(\theta_0^2 + d_0^2)$. Обозначим $\rho_0 = \sqrt{\theta_0^2 + d_0^2}$.

Асимптотика решений уравнения маятника (5.10) хорошо известна – это малые колебания:

$$\theta(s) = \theta_0 \cos s + d_0 \sin s + O(\rho_0^2), \quad d(s) = -\theta_0 \sin s + d_0 \cos s + O(\rho_0^2).$$

Отсюда

$$\bar{u}_1(s) = 1 + O(\rho_0^2), \quad \bar{u}_2(s) = \theta_0 \cos s + d_0 \sin s + O(\rho_0^2). \quad (5.15)$$

Интегрируя обыкновенные дифференциальные уравнения (5.11) с начальными условиями (5.14), получаем

$$\bar{x}(s) = \frac{s}{m} + O(\rho_0^2), \quad (5.16)$$

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{m}(\theta_0 \sin s + d_0(1 - \cos s)) + O(\rho_0^2). \quad (5.17)$$

Таким образом, с точностью до $O(\rho_0^2)$, кривая $(\bar{x}, \bar{y})$, а потому и исходная кривая (x, y) , есть синусоида малой амплитуды ρ_0/m .

Теперь вычислим асимптотику для компонент кватерниона $\bar{q}_0, \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$. Из уравнений (5.12), (5.13) и разложений (5.15) получаем уравнения

$$\bar{q}'_0(s) = \frac{1}{2m}(\bar{q}_2 - \bar{q}_1(\theta_0 \cos s + d_0 \sin s)) + O(\rho_0^2), \quad (5.18)$$

$$\bar{q}'_1(s) = \frac{1}{2m}(\bar{q}_3 + \bar{q}_0(\theta_0 \cos s + d_0 \sin s)) + O(\rho_0^2), \quad (5.19)$$

$$\bar{q}'_2(s) = \frac{1}{2m}(-\bar{q}_0 + \bar{q}_3(\theta_0 \cos s + d_0 \sin s)) + O(\rho_0^2), \quad (5.20)$$

$$\bar{q}'_3(s) = \frac{1}{2m}(-\bar{q}_1 - \bar{q}_2(\theta_0 \cos s + d_0 \sin s)) + O(\rho_0^2). \quad (5.21)$$

Пусть $\bar{q}_i(s) = \alpha_{i0}(s) + \alpha_{i1}(s)\theta_0 + \alpha_{i2}(s)d_0 + O(\rho_0^2)$, $i = 0, \dots, 3$. Тогда из разложений (5.18)–(5.21) получаем

$$\alpha'_{00} = \frac{\alpha_{20}}{2m}, \quad \alpha'_{10} = \frac{\alpha_{30}}{2m}, \quad \alpha'_{20} = -\frac{\alpha_{00}}{2m}, \quad \alpha'_{30} = -\frac{\alpha_{10}}{2m},$$

из начальных условий (5.14) получаем

$$\alpha_{00}(0) = 1, \quad \alpha_{10}(0) = \alpha_{20}(0) = \alpha_{30}(0) = 0.$$

Поэтому

$$\alpha_{00} = \cos \frac{s}{2m}, \quad \alpha_{10} = 0, \quad \alpha_{20} = -\sin \frac{s}{2m}, \quad \alpha_{30} = 0.$$

Для коэффициентов α_{i1} , α_{i2} получаем из (5.18)–(5.21) дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \alpha'_{01} &= \frac{\alpha_{21}}{2m}, & \alpha'_{02} &= \frac{\alpha_{22}}{2m}, \\ \alpha'_{21} &= -\frac{\alpha_{01}}{2m}, & \alpha'_{22} &= -\frac{\alpha_{02}}{2m}, \\ \alpha'_{11} &= \frac{1}{2m} \left(\alpha_{31} + \cos \frac{s}{2m} \cos s \right), & \alpha'_{12} &= \frac{1}{2m} \left(\alpha_{32} + \cos \frac{s}{2m} \sin s \right), \\ \alpha'_{31} &= \frac{1}{2m} \left(-\alpha_{11} + \sin \frac{s}{2m} \cos s \right), & \alpha'_{32} &= \frac{1}{2m} \left(-\alpha_{12} + \sin \frac{s}{2m} \sin s \right) \end{aligned}$$

с начальными условиями $\alpha_{ij}(0) = 0$, $i = 0, \dots, 3$, $k = 1, 2$. Решение этих дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\alpha_{01}(s) &\equiv 0, & \alpha_{02}(s) &\equiv 0, \\ \alpha_{11}(s) &= \frac{1}{2(m^2 - 1)} \left(m \cos \frac{s}{2m} \sin s - (1 + \cos s) \sin \frac{s}{2m} \right), \\ \alpha_{12}(s) &= \frac{1}{2(m^2 - 1)} \left(m(1 - \cos s) \cos \frac{s}{2m} - \sin s \sin \frac{s}{2m} \right), \\ \alpha_{21}(s) &\equiv 0, & \alpha_{22}(s) &\equiv 0, \\ \alpha_{31}(s) &= \frac{1}{2(m^2 - 1)} \left((-1 + \cos s) \cos \frac{s}{2m} + m \sin s \sin \frac{s}{2m} \right), \\ \alpha_{32}(s) &= \frac{1}{2(m^2 - 1)} \left(\sin s \cos \frac{s}{2m} - m(1 + \cos s) \sin \frac{s}{2m} \right).\end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующую асимптотику для компонент кватерниона $\bar{q}_i$:

$$\bar{q}_0(s) = \cos \frac{s}{2m} + O(\rho_0^2), \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}\bar{q}_1(s) &= \frac{1}{2(m^2 - 1)} \left(m \cos \frac{s}{2m} \sin s - (1 + \cos s) \sin \frac{s}{2m} \right) \theta_0 \\ &\quad + \frac{1}{2(m^2 - 1)} \left(m(1 - \cos s) \cos \frac{s}{2m} - \sin s \sin \frac{s}{2m} \right) d_0 + O(\rho_0^2),\end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\bar{q}_2(s) = -\sin \frac{s}{2m} + O(\rho_0^2), \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned}\bar{q}_3(s) &= \frac{1}{2(m^2 - 1)} \left((-1 + \cos s) \cos \frac{s}{2m} + m \sin s \sin \frac{s}{2m} \right) \theta_0 \\ &\quad + \frac{1}{2(m^2 - 1)} \left(\sin s \cos \frac{s}{2m} - m(1 + \cos s) \sin \frac{s}{2m} \right) d_0 + O(\rho_0^2).\end{aligned} \quad (5.25)$$

Заметим, что эти разложения имеют устранимую особенность при $m = 1$, так как числители всех дробей со знаменателем $m^2 - 1$ обращаются в нуль при $m = 1$:

$$\begin{aligned}\alpha_{11}(s) &= \frac{1}{4} \cos \frac{s}{2} (s + \sin s) + O(m - 1), \\ \alpha_{12}(s) &= \frac{1}{4} \sin \frac{s}{2} (s + \sin s) + O(m - 1), \\ \alpha_{31}(s) &= \frac{1}{4} \sin \frac{s}{2} (-s + \sin s) + O(m - 1), \\ \alpha_{32}(s) &= \frac{1}{4} \cos \frac{s}{2} (s - \sin s) + O(m - 1), \\ \bar{q}_1 &= \alpha_{11} \theta_0 + \alpha_{12} d_0 + O(\rho_0^2), & \bar{q}_3 &= \alpha_{31} \theta_0 + \alpha_{32} d_0 + O(\rho_0^2).\end{aligned}$$

Итак, получены асимптотические разложения для переменных $\bar{x}$ (5.16), $\bar{y}$ (5.17) и $\bar{q}_i$ (5.22)–(5.25). Разложения для исходных x, y, q_i выражаются через найденные разложения с помощью формул (5.10).

В следующем параграфе мы используем полученную асимптотику при исследовании точек Максвелла и времени разреза при $\rho_0 \rightarrow 0$.

§ 6. Предельное поведение множества Максвелла и времени разреза

В статье [11] получено уравнение, задающее множество Максвелла MAX^1 для невырожденных и не центрированных в точке перегиба эластик $q_3(t) = 0$ (см. теорему 1.1 или [11; теорема 4.11]). В этом параграфе исследуется асимптотика корней этого уравнения при $\rho_0 \rightarrow 0$.

Воспользуемся равенством (5.25). Обозначим $p = s/2$ и вернемся к исходному $q_3(t) = \bar{q}_3(t)$; тогда

$$q_3(p, m, \theta_0, d_0) = \frac{d_0 \cos p - \theta_0 \sin p}{m^2 - 1} \left(\cos \frac{p}{m} \sin p - m \cos p \sin \frac{p}{m} \right) + O(\rho_0^2). \quad (6.1)$$

Корни множителя $d_0 \cos p - \theta_0 \sin p$ имеют простой геометрический смысл для синусоиды $(\bar{x}^0(s), \bar{y}^0(s)) = (s/m, (\theta_0 \sin s + d_0(1 - \cos s))/m)$ – главного члена асимптотики элаستيку $(\bar{x}(s), \bar{y}(s))$, а потому и для синусоиды $(x^0(s), y^0(s)) = (\cos \alpha \bar{x}^0(s) + \sin \alpha \bar{y}^0(s), -\sin \alpha \bar{x}^0(s) + \cos \alpha \bar{y}^0(s))$ – главного члена асимптотики элаستيку $(x(s), y(s))$ при $\rho_0 \rightarrow 0$. Легко видеть, что синусоида $\{(x^0(\sigma), y^0(\sigma)) \mid \sigma \in [0, s]\}$ центрирована в точке перегиба тогда и только тогда, когда $d_0 \cos p - \theta_0 \sin p = 0$.

В силу теоремы 1.1 обращение в нуль функции q_3 означает наличие точки Максвелла для эластик, не центрированных в точке перегиба. Поэтому мы исследуем корни множителя $(\cos \frac{p}{m} \sin p - m \cos p \sin \frac{p}{m})/(m^2 - 1)$. При $m = 0$ этот множитель имеет неустранимую особенность, а при $m = 1$ он не обращается в нуль для $p \neq 0$. Поэтому далее будет рассмотрена функция

$$g_1(p, m) = \cos \frac{p}{m} \sin p - m \cos p \sin \frac{p}{m}, \quad m \in (0, 1) \cup (1, +\infty), \quad p > 0, \quad (6.2)$$

и исследован ее первый положительный корень

$$p_1(m) = \min\{p > 0 \mid g_1(p, m) = 0\}. \quad (6.3)$$

Будет показано, что траектории $Q_t = \text{Exp}(\lambda, t)$, $\lambda = (\theta_0, d_0, m, \alpha) \in C_1$, при $\rho_0 \rightarrow 0$ содержат точку разреза (т.е. не оптимальны) на отрезках $t \in [0, t_1 + \varepsilon]$, $t_1 = 2p_1(m)/m$.

6.1. Исследование функции $p_1(m)$. В теореме 6.1 доказана конечность функции $p_1(m)$ при $m > 0$, $m \neq 1$, приведены ее двусторонние оценки и доказаны свойства монотонности и регулярности.

Определим следующие функции:

$$\widehat{p}(m) = \begin{cases} m\rho & \text{при } m \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \\ m\pi \left(\left\lceil \frac{m}{1-m} \right\rceil + 1 \right) & \text{при } m \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \\ \pi \left(\left\lceil \frac{1}{m-1} \right\rceil + 1 \right) & \text{при } m \in (1, 2], \\ \rho & \text{при } m > 2, \end{cases} \quad \text{где } \rho = \text{tg } \rho, \quad \rho \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\widetilde{p}(m) = \begin{cases} m\pi \left(\left\lceil \frac{m}{1-m} \right\rceil + 2 \right) & \text{при } m \in (0, 1), \\ \pi \left(\left\lceil \frac{1}{m-1} \right\rceil + 2 \right) & \text{при } m \in (1, +\infty). \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $t \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Тогда функция $g_1(p, t)$ имеет минимальный положительный корень $p_1(t)$, удовлетворяющий следующим свойствам:

- a) $\hat{p}(t) \leq p_1(t) < \tilde{p}(t)$, поэтому $\lim_{t \rightarrow 1} p_1(t) = +\infty$;
- b) $p_1(t)$ возрастает при $t \in (0, 1)$ и убывает при $t \in (1, +\infty)$;
- c) функция $p_1(t)$ непрерывна при $t \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$;
- d) функция $p_1(t)$ имеет следующие частные значения:
 - если $t^* = 1 + \frac{1}{n}$, то $p_1(t^*) = \pi(n+1)$,
 - если $t^* = \frac{n}{n+1}$, то $p_1(t^*) = \pi n$,
 - если $t^* = 1 + \frac{2}{2n+1}$, то $p_1(t^*) = \pi(n + \frac{3}{2})$,
 - если $t^* = \frac{2n+1}{2n+3}$, то $p_1(t^*) = \pi(n + \frac{1}{2})$;
- e) функция $p_1(t)$ непрерывно дифференцируема при

$$t \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \setminus \left(\left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \right).$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ $p'_1(\frac{n}{n+1}) = +\infty$, $p'_1(\frac{n+1}{n}) = -\infty$;

- f) в точке $p = p_1(t)$ функция $p \mapsto g_1(p, t)$ меняет знак.

Доказательство этой теоремы основывается на леммах 6.1–6.9, приведенных далее. Графики функций $p_1(t)$ и ее границ $\hat{p}(t)$, $\tilde{p}(t)$ приведены на рис. 1.

Рис. 1. Графики функций $\hat{p}(t)$, $p_1(t)$ и $\tilde{p}(t)$, где $\hat{p}(t) \leq p_1(t) < \tilde{p}(t)$

ЛЕММА 6.1. Если $t > 1$ и $p \in (0, \pi)$, то $g_1(p, t) > 0$, поэтому $p_1(t) > \pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу выражения для производной

$$\frac{\partial g_1}{\partial p} = \frac{m^2 - 1}{m} \sin p \sin \frac{p}{m} \quad (6.4)$$

функция $p \mapsto g_1(p, t)$ возрастает при $p \in (0, \pi)$. Так как $g_1(0, t) = 0$, то $g_1(p, t) > 0$ для любого $p \in (0, \pi)$.

ЛЕММА 6.2. Если $m > 1$, то $g_1(\tilde{p}(m), m) < 0$, поэтому $p_1(m) < \tilde{p}(m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m принадлежит промежутку $(1, 2]$. Этот промежуток покрывается полуинтервалами $\tilde{I}(n) = (1 + \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n}]$, где $n \in \mathbb{N}$. Если $m \in \tilde{I}(n)$, то $\tilde{p} = \tilde{p}(m) = \pi(n+2)$ и $g_1(\tilde{p}, m) = (-1)^{n+1} m \sin(\frac{2+n}{m}\pi)$. Так как $n < \frac{2+n}{m} < n+1$, то:

- если $n = 2s$, то $\sin(\frac{2+n}{m}\pi) > 0$, поэтому $g_1(\tilde{p}, m) < 0$;
- если $n = 2s - 1$, то $\sin(\frac{2+n}{m}\pi) < 0$, поэтому $g_1(\tilde{p}, m) < 0$.

Для случая $m > 2$ имеем $\tilde{p}(m) = 2\pi$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $g_1(2\pi, m) = -m \sin \frac{2\pi}{m} < 0$.

ЛЕММА 6.3. Если $m = 1 + \frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$, то $p_1(m) = \pi(n+1) = \hat{p}(m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $m^* = 1 + \frac{1}{n}$, $p^* = \pi(n+1)$, где $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $g_1(p^*, m^*) = 0$. Докажем, что $g_1(p, m^*) > 0$ для всех $p \in (0, p^*)$. Рассмотрим значения функции $g_1(p, m^*)$ в критических точках по переменной p , когда $\frac{\partial g_1}{\partial p} = 0$. Функция g_1 имеет две серии таких критических точек: $p^1(k_1) = \pi k_1$ и $p^2(k_2) = \pi k_2 m$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Рассматривая эти критические точки $p^1(k_1), p^2(k_2) \in (0, p^*)$, заключаем, что в них $g_1(p, m^*) > 0$. Поэтому $g_1(p, m^*) > 0$ для всех $p \in (0, p^*)$. Следовательно, $p_1(m^*) = p^*$.

ЛЕММА 6.4. Пусть $\Omega = (1, +\infty) \setminus \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Тогда $p_1 \in C^1(\Omega)$ и $p'_1(m) < 0$ при $m \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 6.3 дает опорные точки $m^* = 1 + \frac{1}{n}$, в которых известно значение функции $p_1(m^*) = p^* = \pi(n+1)$. В этих точках $\frac{\partial g_1}{\partial p} \big|_{(p^*, m^*)} = 0$ и график функции $p_1(m)$ имеет вертикальную касательную. В данной лемме утверждается, что функция $p_1(m)$ гладкая при $m > 1$, $m \neq m^*$; докажем это включение, опираясь на неравенство $\frac{\partial g_1}{\partial p} \big|_{p=p_1(m)} \neq 0$ и теорему о неявной функции.

Пусть $m \in \Omega \cap (1, 2]$; тогда $m \in I(n) = (1 + \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n})$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим значения $g_1(p^i(k_i), m)$ в критических точках $p^1(k_1), p^2(k_2)$, где $\frac{\partial g_1}{\partial p} = 0$. Легко проверить, что $g_1(p^i(k_i), m) \neq 0$, т.е. при всех $m \in I(n)$ выполнено $\frac{\partial g_1}{\partial p} \big|_{p=p_1(m)} \neq 0$ и по теореме о неявной функции $p_1(m)$ есть непрерывно дифференцируемая функция на $I(n)$, причем

$$p'_1(m) = \frac{-\frac{\partial g_1(p, m)}{\partial m}}{\frac{\partial g_1(p, m)}{\partial p}} \bigg|_{p=p_1(m)} = -\frac{p + m \operatorname{ctg} p(-m + p \operatorname{ctg} \frac{p}{m})}{m(m^2 - 1)} \bigg|_{p=p_1(m)}.$$

Из условия $g_1(p, m) \big|_{p=p_1(m)} = 0$ получаем, что

$$m \operatorname{ctg} p \big|_{p=p_1(m)} = \operatorname{ctg} \frac{p}{m} \bigg|_{p=p_1(m)}.$$

Тогда $\operatorname{sign}(p'_1(m)) = -\operatorname{sign}(f(p_1(m), m))$, где $f(p, m) = p - m \operatorname{ctg} \frac{p}{m} + p \operatorname{ctg}^2 \frac{p}{m}$. Рассмотрим функцию f как полином второй степени относительно $\operatorname{ctg} \frac{p}{m}$. Так как $m \leq 2$ и по лемме 6.1 $p_1(m) > \pi > 1$, то дискриминант этого полинома $D(f) = m^2 - 4p^2 < 0$, поэтому $f(p_1(m), m) > 0$ и $p'_1(m) < 0$.

Пусть $m > 2$. Тогда $\frac{\partial g_1}{\partial p} \big|_{p=p_1(m)} \neq 0$. Функция $f(p, m)$ больше нуля при $p = p_1(m)$, так как либо $D(f) < 0$, а значит, $f(p, m) > 0$, либо $D(f) \leq 0$, тогда

$m \geq 2p$, а $\operatorname{ctg} \frac{p}{m} > q_2$, где q_2 – больший из корней функции f как квадратичного полинома относительно $\operatorname{ctg} \frac{p}{m}$. Таким образом, $f(p_1(m), m) > 0$, поэтому $p'_1(m) < 0$.

ЛЕММА 6.5. *Функция $p_1(m)$ непрерывна при $m > 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом лемм 6.3, 6.4 требуется доказать, что существуют пределы

$$\lim_{m \rightarrow 1+1/n \pm 0} p_1(m) = p_1\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \pi(n+1).$$

В силу монотонности и ограниченности $p_1(m)$ при $m \neq 1 + \frac{1}{n}$ существуют конечные пределы

$$p_{\pm}(n) = \lim_{m \rightarrow 1+1/n \pm 0} p_1(m).$$

Неравенства $p_+(n) < \pi(n+1)$, $p_-(n) < \pi(n+1)$ противоречат равенству

$$p_1\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \pi(n+1).$$

А неравенства $p_+(n) > \pi(n+1)$, $p_-(n) > \pi(n+1)$ противоречат непрерывности кривой $\{(p, m) \mid g_1(p, m) = 0\}$ в окрестности точки $(\pi(n+1), 1 + \frac{1}{n})$, следующей по теореме о неявной функции из неравенства

$$\frac{\partial g_1}{\partial m}\left(\pi(n+1), 1 + \frac{1}{n}\right) = -m\left(1 + \frac{1}{n}\right) \neq 0.$$

ЛЕММА 6.6. *Если $m > 1$, то $p_1(m) \geq \widehat{p}(m)$, поэтому $\lim_{m \rightarrow 1+0} p_1(m) = +\infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 6.4, 6.5 следует, что функция $p_1(m)$ монотонно убывает при $m \in (1, +\infty)$.

Пусть $m \in (1, 2] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{I}(n)$. Если $m \in \widetilde{I}(n)$, то $p_1(m) \geq \pi(n+1) = \pi([\frac{1}{m-1}] + 1) = \widehat{p}(m)$. Так как $\lim_{m \rightarrow 1+0} \widehat{p}(m) = +\infty$ и $p_1(m) \geq \widehat{p}(m)$ для любого $m \in (1, 2]$, то $\lim_{m \rightarrow 1+0} p_1(m) = +\infty$.

При $m > 2$ рассмотрим предел $\lim_{m \rightarrow +\infty} g_1(p, m) = \sin p - p \cos p$. Так как $p_1(m)$ убывает, то $p_1(m) > \rho = \widehat{p}(m)$, где $\rho \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ – корень уравнения $p = \operatorname{tg} p$, эквивалентного уравнению $\sin p - p \cos p = 0$.

ЛЕММА 6.7. *Если $m = 1 + \frac{2}{2n+1}$, то $p_1(m) = \pi(n + \frac{3}{2})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $m_* = 1 + \frac{2}{2n+1}$, $p_* = \pi(n + \frac{3}{2})$. Очевидно, что $g_1(p_*, m_*) = 0$. Далее, проверим, что на отрезке $p \in [\widehat{p}(m_*), p_*]$, где $\widehat{p}(m_*) = \pi(n+1)$, нет других корней функции $g_1(p, m_*)$, кроме p_* . Это следует из того, что $g_1(\widehat{p}(m_*), m_*) > 0$ и $\frac{\partial g_1}{\partial p}(p, m_*) \neq 0$ при $p \in [\widehat{p}(m_*), p_*)$.

ЛЕММА 6.8. *Если $m > 1$, то функция $p \mapsto g_1(p, m)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку $p = p_1(m)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 6.4 следует, что $\frac{\partial g_1}{\partial p}|_{p=p_1(m)} \neq 0$ при $m \in \Omega$, поэтому $g_1(p, m)$ меняет знак при переходе через точку $p = p_1(m)$. Из леммы 6.1 следует, что $g_1(p, m) > 0$ для всех $p \in (0, p_1(m))$. Поэтому при переходе через $p = p_1(m)$ знак меняется с плюса на минус.

Пусть $m = m^* = 1 + \frac{1}{n}$. Из лемм 6.1, 6.3 следует, что $g_1(p, m^*) > 0$ при $p \in (0, p_1(m^*))$. Так как $g_1(p, m)$ – аналитическая функция, то $p_1(m^*)$ – изолированный корень функции $g_1(p, m^*)$. Из предыдущего абзаца по непрерывности следует, что $g_1(p, m^*)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку $p_1(m^*)$.

ЛЕММА 6.9. Для любого $n \in \mathbb{N}$ $p'_1(1 + \frac{1}{n}) = -\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 6.3 для любого $m^* = 1 + \frac{1}{n}$ известно явное значение $p^* = p_1(m^*) = \pi(n+1)$. Имеем

$$\frac{\partial g_1(p^*, m^*)}{\partial m} = \pi n, \quad \frac{\partial g_1(p^*, m^*)}{\partial p} = 0,$$

поэтому

$$\lim_{m \rightarrow m^*} p'_1(m) = - \lim_{m \rightarrow m^*} \frac{\frac{\partial g_1}{\partial m}(p, m)}{\frac{\partial g_1}{\partial p}(p, m)} \bigg|_{p=p_1(m)} = \infty.$$

В силу непрерывности $p_1(m)$ по теореме Лагранжа о конечных приращениях получаем

$$p'_1(m^*) = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{p_1(m^* + \Delta m) - p_1(m^*)}{\Delta m} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} p'_1(\tilde{m}) = \lim_{m \rightarrow m^*} p'_1(m) = \infty,$$

где $\tilde{m} \in (m^*, m^* + \Delta m)$. В силу убывания функции $p_1(m)$ при $m > 1$ заключаем что $p'_1(m^*) = -\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. В случае $m > 1$ теорема следует из приведенных выше лемм 6.2–6.9.

В случае $m \in (0, 1)$ воспользуемся заменой переменных $\bar{p} = \frac{p}{m}$, $\bar{m} = \frac{1}{m} > 1$, в которых $g_1(\bar{p}, \bar{m}) = \frac{1}{m} g_1(p, m)$. Заключаем, что $g_1(\bar{p}, \bar{m}) = 0$ тогда и только тогда, когда $g_1(p, m) = 0$. Таким образом, $p_1(m) = m p_1(\frac{1}{m})$ и при $m \in (0, 1)$ свойства а)–ф) функции $p_1(m)$ вытекают из этих же свойств для $m > 1$.

6.2. Время Максвелла и время разреза при качении сферы по синусоидам малой амплитуды. Пусть $\lambda = (\theta, d, m, \alpha) \in C_1$. В этом пункте исследуется поведение множества Максвелла MAX^1 и времени разреза

$$t_{\text{cut}}(\lambda) = \sup\{t > 0 \mid Q_s = \text{Exp}(\lambda, s) \text{ оптимальна при } s \in [0, t]\}$$

при $(\theta, d) \rightarrow (0, 0)$, т.е. вблизи устойчивого положения равновесия математического маятника (1.9). В этом случае эластики (x_t, y_t) в главном члене являются синусоидами малой амплитуды $\frac{p}{m}$. С учетом леммы 3.1 приведенная в § 1 теорема 1.1 утверждает следующее. Если $t > 0$ таково, что $q_3(t) = 0$ и $\text{sn } \tau = \text{sn}(m(\frac{t}{2} + \varphi), k) \neq 0$, то $(\lambda, t) \in \text{MAX}^1$ и траектория $Q_s = \text{Exp}(\lambda, s)$, $s \in [0, t]$, не оптимальна, поэтому $t_{\text{cut}}(\lambda) \leq t$.

Введем полярные координаты $(\rho, \chi) : d = \rho \cos \chi$, $\theta = \rho \sin \chi$; тогда равенство (6.1) переписывается в виде

$$q_3(\rho, \chi, m, t) = \rho \frac{\cos(\chi + \frac{tm}{2})}{m^2 - 1} g_1\left(\frac{tm}{2}, m\right) + \rho^2 h, \quad \text{где } |h| \leq C. \quad (6.5)$$

Зафиксируем $\bar{\chi} \in S^1$ и $\bar{m} > 0$, $\bar{m} \neq 1$. Для исследования поведения времени Максвелла при $\rho \rightarrow 0$, $\chi \rightarrow \bar{\chi}$, $m \rightarrow \bar{m}$ введем множества

$$D_\delta = \{\lambda = (\rho, \chi, m, \alpha) \in C_1 \mid 0 < \rho < \delta, \mid \chi - \bar{\chi} \mid < \delta, \mid m - \bar{m} \mid < \delta\}.$$

Обозначим $t_1 = t_1(\bar{m}) = \frac{2p_1(\bar{m})}{\bar{m}} > 0$, где $p_1(m)$ – минимальный положительный корень функции $g_1(p, m)$ (см. п. 6.1). Обозначим также

$$I_\varepsilon = \{t > 0 \mid t_1 - \varepsilon < t < t_1 + \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Следующая теорема описывает поведение множества Максвелла в окрестности устойчивого положения равновесия маятника $(\theta, d) = (0, 0)$.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $\bar{\chi} \in S^1$ и $\bar{m} > 0$, $\bar{m} \neq 1$, $\cos(\bar{\chi} + t_1\bar{m}/2) \neq 0$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall \lambda \in D_\delta \quad \exists t \in I_\varepsilon : (\lambda, t) \in \text{MAX}^1.$$

При доказательстве этой теоремы мы используем следующую лемму, гарантирующую отсутствие эллипсов, центрированных в точке перегиба, для рассматриваемых значений параметров λ, t .

ЛЕММА 6.10. Пусть $\bar{m}, t_1, \bar{\chi}$ удовлетворяют условиям теоремы 6.2. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что для любых $\lambda \in D_\delta$ и $t \in I_\varepsilon$

$$\text{cn}\left(m\left(\frac{t}{2} + \varphi\right), k\right) \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть существуют такие последовательности $t^n \in \mathbb{R}_+$, $\lambda_n = (\rho_n, \chi_n, m_n, \alpha_n) \in C_1$, что $\rho_n \rightarrow 0$, $m_n \rightarrow \bar{m}$, $\chi_n \rightarrow \bar{\chi}$, $t^n \rightarrow t_1$ и $\text{cn}(m_n(t^n/2 + \varphi_n), k_n) = 0$. Из определений эллиптических координат (φ, k) (см. § 2) и полярных координат (χ, ρ) получаем

$$k^2 = \frac{d^2}{4} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\rho^2}{4} \left(\cos^2 \chi + \sin^2 \chi \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{(\frac{\theta}{2})^2} \right),$$

$$\text{cn}(m\varphi, k) = \cos \chi \frac{\rho}{2k}, \quad \text{sn}(m\varphi, k) = \sin \chi \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \frac{\rho}{k}.$$

Следовательно, $k_n \sim \rho_n/2$ и $m_n \varphi_n \rightarrow \bar{\chi}$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\text{cn}\left(m_n\left(\frac{t^n}{2} + \varphi_n\right), k_n\right) \rightarrow \cos\left(\bar{\chi} + \frac{t_1\bar{m}}{2}\right) \neq 0,$$

противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.2. Из неравенств $\cos(\bar{\chi} + t_1\bar{m}/2) \neq 0$, $\bar{m} \neq 1$, следует, что существует окрестность $D_{\delta_0} \times I_{\varepsilon_0}$, в которой $\cos(\chi + tm/2) \neq 0$ и $m^2 - 1 \neq 0$. Учитывая лемму 6.10 и уменьшая при необходимости δ_0 , ε_0 , получаем, что для всех $(\lambda, t) \in D_{\delta_0} \times I_{\varepsilon_0}$ выполнено неравенство $\text{sn } \tau = \text{cn}(m(t/2 + \varphi), k) \neq 0$. Поэтому если для некоторого $(\lambda, t) \in D_{\delta_0} \times I_{\varepsilon_0}$ выполняется равенство $q_3(\lambda, t) = q_3(\rho, \chi, m, t) = 0$, то $(\lambda, t) \in \text{MAX}^1$ в силу теоремы 1.1 и леммы 3.1.

Для $\lambda \in D_{\delta_0}$, $t \in I_{\varepsilon_0}$ определим функцию

$$\tilde{q}_3(\lambda, t) = \frac{q_3(\lambda, t)}{\rho \cos(\chi + \frac{tm}{2})} (m^2 - 1),$$

для которой в силу (6.5) имеем разложение

$$\tilde{q}_3(\lambda, t) = g_1\left(\frac{tm}{2}, m\right) + \rho \tilde{h}, \quad \text{где } |\tilde{h}| \leq C.$$

По теореме 6.1 существует такое $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ выполнено $g_1(\overline{m}(t_1 - \varepsilon)/2, \overline{m}) > 0$ и $g_1(\overline{m}(t_1 + \varepsilon)/2, \overline{m}) < 0$ в случае $\overline{m} > 1$ (в случае $\overline{m} \in (0, 1)$ знаки функции g_1 противоположные и рассуждения не меняются). В силу непрерывности функции $g_1(p, m)$ существуют такие $\delta_1(\varepsilon) \in (0, \delta_0)$ и $\gamma > 0$, что для всех $m \in (\overline{m} - \delta_1, \overline{m} + \delta_1)$ имеем $g_1(m(t_1 - \varepsilon)/2, m) > \gamma$ и $g_1(m(t_1 + \varepsilon)/2, m) < -\gamma$. Поэтому существует такое $\delta_2(\varepsilon) \in (0, \delta_1(\varepsilon)]$, что при $\lambda \in D_{\delta_2}$ имеем $\tilde{q}_3(\lambda, t_1 - \varepsilon) > \gamma/2$ и $\tilde{q}_3(\lambda, t_1 + \varepsilon) < -\gamma/2$. Следовательно, существует $t \in I_\varepsilon$, для которого $\tilde{q}_3(\lambda, t) = 0$, поэтому $q_3(\lambda, t) = 0$.

Итак, для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ существует такое $\delta = \delta_2(\varepsilon)$, что для любого $\lambda \in D_\delta$ найдется $t \in I_\varepsilon$, для которого $q_3(\lambda, t) = 0$, $\sin \tau \neq 0$, поэтому $(\lambda, t) \in \text{MAX}^1$. Утверждение теоремы доказано для малых ε . Увеличивая ε и оставляя неизменным δ , получаем утверждение теоремы для произвольных $\varepsilon > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть последовательность $\lambda_n = (\rho_n, \chi_n, m_n, \alpha_n) \in C_1$ удовлетворяет условиям

$$\rho_n \rightarrow 0, \quad m_n \rightarrow \overline{m} > 0, \quad \overline{m} \neq 1, \quad \chi_n \rightarrow \overline{\chi}, \quad \cos\left(\frac{\overline{m}t_1}{2} + \overline{\chi}\right) \neq 0.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{t}_{\text{cut}}(\lambda_n) \leq t_1, \quad t_1 = t_1(\overline{m}). \quad (6.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$. Для достаточно больших n элемент λ_n принадлежит области D_δ , указанной в теореме 6.2. Тогда существует $t^n \in (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$, для которого $(\lambda_n, t^n) \in \text{MAX}^1$, поэтому $t_{\text{cut}}(\lambda_n) \leq t^n < t_1 + \varepsilon$. В силу произвольности ε заключаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{\text{cut}}(\lambda_n) \leq t_1$.

Докажем, что в формулировке следствия 6.1 можно избавиться от условий $\chi_n \rightarrow \overline{\chi}$, $\cos(\overline{m}t_1/2 + \overline{\chi}) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть последовательность $\lambda_n = (\rho_n, \chi_n, m_n, \alpha_n) \in C_1$ удовлетворяет условиям $\rho_n \rightarrow 0$, $m_n \rightarrow \overline{m} > 0$, $\overline{m} \neq 1$. Тогда выполняется неравенство (6.6).

Иными словами, теорема 6.3 утверждает, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0, m \rightarrow \overline{m}} \overline{t}_{\text{cut}}(\lambda) \leq t_1(\overline{m}) \quad \text{при } \overline{m} > 0, \overline{m} \neq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.3. Начнем с нескольких замечаний к задаче (1.1), (1.2), (1.3), (1.5) с общими граничными условиями $Q(0) = Q'_0$, $Q(t_1) = Q'_1 \in \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3)$. В силу инвариантности этой задачи относительно левых сдвигов на $\mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3)$ любое решение с общим граничным условием получается из некоторого решения с частным граничным условием (1.4) левым сдвигом на элемент $Q'_0 = (x'_0, y'_0, R'_0)$, т.е. параллельным переносом на вектор (x'_0, y'_0) в плоскости (x, y) и умножением матрицы $R(t)$ слева на матрицу R'_0 .

Из гамильтоновой системы (1.9)–(1.12) получаем, что эластика $(x(t), y(t))$ и матрица R'_0 однозначно задают матрицу $R(t)$. Будем называть экстремальную кривую $(x(t), y(t), R(t))$ качением сферы по эластике $(x(t), y(t))$. Если качение $(x(t), y(t), R(t))$, $t \in [0, \hat{t}]$, оптимально, то в силу инвариантности задачи относительно левых сдвигов на $\text{SO}(3)$ оптимально и любое другое качение по той же эластике $(x(t), y(t), \tilde{R}R(t))$, $t \in [0, \hat{t}]$. В этом случае будем говорить, что эластика $(x(t), y(t))$, $t \in [0, \hat{t}]$, оптимальна. В силу инвариантности задачи

относительно сдвигов на $\mathbb{R}^2$ эластика $(x(t), y(t))$, $t \in [0, \hat{t}]$, оптимальна тогда и только тогда, когда оптимален любой ее сдвиг $(x(t) + \tilde{x}, y(t) + \tilde{y})$, $t \in [0, \hat{t}]$.

Эллиптическая координата φ (см. § 2) есть время на траекториях маятника. Поэтому если ввести с использованием эллиптических координат ковекторы $\lambda = (\varphi, k, m, \alpha)$, $\lambda = (\varphi + \sigma, k, m, \alpha) \in C_1$, $\sigma \in \mathbb{R}$, и обозначить соответствующие им эластики как $(x(t), y(t))$, $(x'(t), y'(t))$, получим $(x(t + \sigma), y(t + \sigma)) = (x'(t), y'(t)) + (x(\sigma), y(\sigma))$.

Перейдем к доказательству неравенства (6.6). От противного, пусть

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N: Q_n(t) = \text{Exp}(\lambda_n, t)$, $t \in [0, t_1 + \varepsilon]$, оптимальна.

Возьмем любую подпоследовательность последовательности λ_n , на которой сходится последовательность $\chi_n \in S^1$; обозначим $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n = \bar{\chi}$. Сохраним для этой подпоследовательности обозначение λ_n . Учитывая следствие 6.1, достаточно рассмотреть случай $\cos(\bar{m}t_1/2 + \bar{\chi}) = 0$. Представим ковектор λ_n с помощью эллиптических координат: $\lambda_n = (\varphi_n, k_n, m_n, \alpha_n)$. Так же, как в лемме 6.10, заключаем, что $\varphi_n \rightarrow \bar{\varphi} = \bar{\chi}/\bar{m}$. Для малого $\sigma > 0$ (которое выберем ниже) определим ковектор $\lambda'_n = (\varphi_n + \sigma/m_n, k_n, m_n, \alpha_n) \in C_1$ и соответствующую экстремальную траекторию $Q'_n(t) = \text{Exp}(\lambda'_n, t) = (x'_n(t), y'_n(t), R'_n(t))$. В силу совпадения параметров k и m кривые $(x_n(t), y_n(t))$ и $(x'_n(t), y'_n(t))$ принадлежат с точностью до движений плоскости одной бесконечной эластике, но имеют разные начальные фазы φ_n и $\varphi_n + \sigma/m_n$. Имеем $m_n(\varphi_n + \sigma/m_n) \rightarrow \bar{\chi} + \sigma = \bar{\chi}'$, поэтому $\cos(\bar{m}t_1/2 + \bar{\chi}') \neq 0$ для достаточно малых σ . В силу следствия 6.1 существует такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что при $n > N_1$ траектория $Q'_n(t)$, $t \in [0, t_1 + \varepsilon/2]$, не оптимальна, т.е. эластика $\gamma'_n = \{(x'_n(t), y'_n(t)) \mid t \in [0, t_1 + \varepsilon/2]\}$ не оптимальна. Но дуга γ'_n совпадает с точностью до сдвигов плоскости с дугой $\gamma_n = \{(x_n(t), y_n(t)) \mid t \in [\sigma/m_n, \sigma/m_n + t_1 + \varepsilon/2]\}$, поэтому дуга γ_n не оптимальна. Выберем $\sigma > 0$ настолько малым, что $[\sigma/m_n, \sigma/m_n + t_1 + \varepsilon/2] \subset [0, t_1]$. Тогда неоптимальная дуга γ_n содержится в оптимальной дуге $\{(x_n(t), y_n(t)) \mid t \in [0, t_1 + \varepsilon]\}$, противоречие.

Зафиксируем любой компакт $K \subset \{m \in \mathbb{R} \mid m > 0, m \neq 1\}$ и определим подмножество цилиндра C :

$$\Lambda_\delta = \{\lambda = (\rho, \chi, m, \alpha) \in C_1 \mid 0 < \rho < \delta, m \in K\}.$$

В следующей теореме получена оценка времени разреза $t_{\text{cut}}(\lambda)$ для ковекторов $\lambda \in \Lambda_\delta$ при достаточно малых δ , т.е. для малых колебаний маятника (1.9).

ТЕОРЕМА 6.4. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $\lambda \in \Lambda_\delta$ выполнено неравенство $t_{\text{cut}}(\lambda) \leq \max_{m \in K} t_1(m) + \varepsilon$.*

Иными словами, теорема 6.4 утверждает, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0, m \in K} \overline{t_{\text{cut}}(\lambda)} \leq \max_{m \in K} t_1(m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.4. Предположим противное. Пусть существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $\delta_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, существует $\lambda_n \in \Lambda_{1/n}$, для которого $t_{\text{cut}}(\lambda_n) > \max_{m \in K} t_1(m) + \varepsilon$. Тогда для последовательности $\lambda_n = (\rho_n, \chi_n, m_n, \alpha_n)$ имеем $\rho_n \rightarrow 0$. В силу того, что $(\chi_n, m_n) \in S^1 \times K$ — компакт, существует сходящаяся подпоследовательность $(\chi_{n_k}, m_{n_k}) \rightarrow (\bar{\chi}, \bar{m})$, $\bar{\chi} \in S^1$, $\bar{m} \in K$. Из теоремы 6.3 заключаем, что $t_{\text{cut}}(\lambda_{n_k}) \leq t_1(\bar{m}) + \varepsilon$ для достаточно больших k , поэтому $t_{\text{cut}}(\lambda_{n_k}) \leq \max_{m \in K} t_1(m) + \varepsilon$. Это противоречит неравенству $t_{\text{cut}}(\lambda_n) > \max_{m \in K} t_1(m) + \varepsilon$.

В §§ 5, 6 исследованы свойства оптимальности экстремальных траекторий $Q_t = \text{Exp}(\lambda, t)$, $\lambda = (\theta, d, m, \alpha)$, в окрестности устойчивого положения равновесия $(\theta, d) = (0, 0)$ уравнения маятника (5.10). В § 5 вычислены главные члены асимптотики экстремальных траекторий при $\rho = \sqrt{\theta^2 + d^2} \rightarrow 0$. В § 6 исследовано поведение при $\rho \rightarrow 0$ множества Максвелла MAX^1 . На основе этого при $\rho \rightarrow 0$, $m \rightarrow \bar{m}$ для экстремальных траекторий $Q_t = \text{Exp}(\lambda, t)$ получена верхняя оценка времени разреза вида $t_{\text{cut}}(\lambda) < t_1(\bar{m}) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мал. Задающая эту оценку функция $t_1(m) = 2p_1(m)/m$ характеризуется весьма сложным поведением: ее график имеет вертикальные касательные при $m = (n+1)/n$ и $m = n/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$; помимо этого $\lim_{m \rightarrow 1} t_1(m) = +\infty$.

Момент времени $t = t_1(\bar{m})$ определяет для траекторий Q_t при $\rho \rightarrow 0$, $m \rightarrow \bar{m}$ асимптотику времени Максвелла, соответствующего отражению ε^1 фазового портрета маятника (1.9) в оси координат θ . Аналогичный момент времени $t = t_2(\bar{m})$ можно определить для отражения ε^2 фазового портрета маятника (1.9) в оси координат s (т.е. для страта Максвелла MAX^2). Поведение функции $t_2(m)$ аналогично поведению функции $t_1(m)$; можно показать, что графики этих функций имеют бесконечное число точек пересечения. Приближенные вычисления показывают также, что функции $t_1(m)$ и $t_2(m)$ являются границами первого сопряженного времени $t_{\text{conj}}(m)$ вдоль экстремальных траекторий (рис. 2).

Рис. 2. Графики функций $t_1(m)$, $t_{\text{conj}}(m)$, $t_2(m)$

Отметим, что в родственных задачах оптимального управления: субриманова задача в случае Мартине (см. [18]), нильпотентная субриманова задача с вектором роста $(2, 3, 5)$ (см. [17]), задача Эйлера об эластиках (см. [14]), субриманова задача на группе движений плоскости (см. [15]), глобальное поведение аналогичных времен Максвелла $t_1(\lambda)$, $t_2(\lambda)$, $\lambda \in C$, гораздо проще, чем асимптотика $t_1(\bar{m})$, $t_2(\bar{m})$ в задаче о качении сферы по плоскости. Это отражает более сложный характер данной задачи по сравнению с указанными

родственными задачами. А с учетом сложности параметризации экстремальных траекторий в данной задаче представляется затруднительным получить ее точное решение. Однако на основе полученных результатов возможна разработка алгоритма и программы приближенного решения задачи о качении сферы по плоскости, что составит предмет будущей работы.

Список литературы

- [1] Z. Li, J. Canny, “Motion of two rigid bodies with rolling constraint”, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, **6**:1 (1990), 62–72.
- [2] A. Bicchi, D. Prattichizzo, S. S. Sastry, “Planning motions of rolling surfaces”, *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control* (New Orleans, LA, USA, 1995), 2812–2817.
- [3] A. Marigo, A. Bicchi, “Rolling bodies with regular surface: the holonomic case”, *Differential geometry and control* (Boulder, CO, 1997), Proc. Sympos. Pure Math., **64**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 241–256.
- [4] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2004.
- [5] J. M. Hammersley, “Oxford commemoration ball”, *Probability, statistics and analysis*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **79**, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1983, 112–142.
- [6] A. M. Arthurs, G. R. Walsh, “On Hammersley’s minimum problem for a rolling sphere”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **99**:3 (1986), 529–534.
- [7] V. Jurdjevic, “The geometry of the plate-ball problem”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **124**:4 (1993), 305–328.
- [8] V. Jurdjevic, *Geometric control theory*, Cambridge Stud. Adv. Math., **52**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [9] Л. Эйлер, “Приложение I, “Об упругих кривых””, *Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле*, ГТТИ, М.–Л., 1934, 447–572.
- [10] А. Ляв, *Математическая теория упругости*, ОНТИ, М.–Л., 1935; пер. с англ.: A. E. H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.
- [11] Ю. Л. Сачков, “Симметрии и страты Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости”, *Матем. сб.*, **201**:7 (2010), 99–120; англ. пер.: Yu. L. Sachkov, “Maxwell strata and symmetries in the problem of optimal rolling of a sphere over a plane”, *Sb. Math.*, **201**:7 (2010), 1029–1051.
- [12] Ю. Л. Сачков, “Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны”, *Матем. сб.*, **197**:6 (2006), 111–160; англ. пер.: Yu. L. Sachkov, “Complete description of the Maxwell strata in the generalized Dido problem”, *Sb. Math.*, **197**:6 (2006), 901–950.
- [13] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкредидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, М., 1976; англ. пер.: L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *Selected works. Vol. 4. The mathematical theory of optimal processes*, Classics Soviet Math., Gordon & Breach, New York, 1986.
- [14] Yu. L. Sachkov, “Maxwell strata in the Euler elastic problem”, *J. Dyn. Control Syst.*, **14**:2 (2008), 169–234.
- [15] I. Moiseev, Yu. L. Sachkov, “Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane”, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **16**:2 (2010), 380–399.

- [16] Ю. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, УРСС, М., 2002; пер. с англ.: E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, New York, 1962.
- [17] Ю. Л. Сачков, “Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны”, *Матем. сб.*, **194**:9 (2003), 63–90; англ. пер.: Yu. L. Sachkov, “Exponential map in the generalized Dido problem”, *Sb. Math.*, **194**:9 (2003), 1331–1359.
- [18] A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, I. Kupka, “Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case”, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **2** (1997), 377–448.
- [19] В. И. Арнольд, *Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спиноров*, МЦНМО, М., 2002.
- [20] Л. С. Понтрягин, *Обобщения чисел*, Библиотека “Квант”, **54**, Наука, М., 1986; нем. пер.: L. S. Pontrjagin, *Verallgemeinerungen der Zahlen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1991.
- [21] Э. Т. Уиттекер, *Аналитическая динамика*, УРСС, М., 2004; пер. с англ.: E. T. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge Math. Lib., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

А. П. Маштаков (A. P. Mashtakov)

Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН,
г. Переславль-Залесский

E-mail: alexey.mashtakov@gmail.com

Поступила в редакцию

24.06.2010

Ю. Л. Сачков (Yu. L. Sachkov)

Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН,
г. Переславль-Залесский

E-mail: sachkov@sys.botik.ru