Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Напалков, А. А. Нуятов, Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 2, 77–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7763>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:48:22

УДК 517.98

В. В. Напалков, А. А. Нуятов

Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки

Найдены условия, при которых пространство целых функций представимо в виде суммы идеала в пространстве целых функций и ядра оператора свертки. Тем самым найдены условия, при которых разрешима многоточечная задача Валле Пуссена.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: оператор свертки, пары Фишера, многоточечная задача Валле Пуссена.

§ 1. Введение

В работе найдены условия разрешимости многоточечной задачи Валле Пуссена [1] для операторов свертки. В основе доказательства лежит такое понятие, как пары Фишера. Изучение пар Фишера началось в 1917 г. с работы Э. Фишера [2], в которой получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Если $P(z) \in H_k$ при некотором $k \geq 0$ (H_k – пространство однородных полиномов степени k в $\mathbb{C}^n$), то всякий полином $Q(z) \in H_m$, $0 \leq m < \infty$, представляется в виде $Q(z) = h(z) + g(z)$, где $g, h \in H_m$, причем g кратно P , а h удовлетворяет дифференциальному уравнению $P^*(D)h = 0$, $D = (D_1, \dots, D_n)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$, $P^*(z) = \overline{P(\bar{z})}$.

Опираясь на этот результат, можно проследить связь между разложением (представлением) Фишера и задачей Коши для уравнений в частных производных гиперболического типа. Начало исследованиям в этом направлении было положено в работе [3]. Как показано в работе [4], представление (разложение) Фишера равносильно разрешимости (корректной разрешимости) задачи Валле Пуссена для оператора свертки, действующего из FS- или DFS-пространства в себя (пространство Фреше–Шварца и сопряженное к нему).

В 1963 г. Ньюман и Шапиро доказали разложение Фишера в частном случае для пространства Фока

$$F = \left\{ f(z) \in H(\mathbb{C}^n) : \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} d\tau < \infty \right\},$$

где $H(\mathbb{C}^n)$ – пространство целых функций в n -мерном комплексном пространстве, $d\tau$ – мера Лебега в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00179) и Министерства образования РФ (грант № РНП 2.1.1.3704).

В 1989 г. Шапиро [5] обобщил теорему Фишера на пространство $H(\mathbb{C}^n)$, $n \geq 1$. Им получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть P – произвольный однородный полином в $\mathbb{C}^n$. Тогда любую функцию $f \in H(\mathbb{C}^n)$ можно представить единственным образом в виде $f = g + h$, где $g, h \in H(\mathbb{C}^n)$, причем $g/P \in H(\mathbb{C}^n)$ и $P^*(D)h = 0$.

В 2001 г. в работе [6] в случае оператора свертки в $H(\mathbb{C})$ найдены условия, при которых имеет место разложение Фишера

$$H(\mathbb{C}) = \text{Ker } M_\varphi \oplus (\sin \pi z),$$

где M_φ – оператор свертки с характеристической функцией φ из определенного класса целых функций экспоненциального типа, $(\sin \pi z)$ – идеал в пространстве $H(\mathbb{C})$, порожденный функцией $\sin \pi z$. Тем самым решается многоточечная задача Валье Пуссена в целых точках. В настоящей статье существенным образом обобщается последний результат.

§ 2. Обозначения и предварительные результаты

Пусть $H(\mathbb{C})$ – пространство целых функций в $\mathbb{C}$ с топологией равномерной сходимости на компактах, $H^*(\mathbb{C})$ – сопряженное пространство к $H(\mathbb{C})$. Пусть $F \in H^*(\mathbb{C})$, известно (см., например, [7]), что преобразование Лапласа $F \rightarrow \hat{F}(\lambda) = (F, \exp\langle \lambda, z \rangle)$ устанавливает топологический изоморфизм между $H^*(\mathbb{C})$ и пространством целых функций экспоненциального типа $P_{\mathbb{C}}$ с топологией $\tau_{\mathbb{C}}$ индуктивного предела нормированных весовых пространств

$$B_n = \left\{ \varphi(\lambda) \in P_{\mathbb{C}} : \|\varphi\|_n = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |\varphi(\lambda)| e^{-n|\lambda|} < \infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть S – множество единственности в $P_{\mathbb{C}}$. Тогда в $P_{\mathbb{C}}$ можно ввести топологию τ_S индуктивного предела нормированных весовых пространств

$$B_{n,S} = \left\{ \varphi(\lambda) \in P_{\mathbb{C}} : \|\varphi\|_{n,S} = \sup_{\lambda \in S} |\varphi(\lambda)| e^{-n|\lambda|} < \infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество S называется *достаточным* в пространстве $P_{\mathbb{C}}$, если $\tau_{\mathbb{C}} = \tau_S$.

В работах [8], [9] изучены свойства топологии τ_S и указан метод построения достаточных множеств для различных весовых пространств целых функций.

Пусть $\varphi(\lambda) \in P_{\mathbb{C}}$ и $F \in H^*(\mathbb{C})$ такой, что $\hat{F}(\lambda) = \varphi(\lambda)$. Рассмотрим в пространстве $H(\mathbb{C})$ оператор свертки

$$M_\varphi[f](z) = (F_t, f(z+t)), \quad f \in H(\mathbb{C}).$$

Возьмем произвольную функцию $\psi(\lambda) \in H(\mathbb{C})$ и построим в $H(\mathbb{C})$ идеал $(\psi) = \{\psi(\lambda) \cdot R(\lambda) : R(\lambda) \in H(\mathbb{C})\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пара функций $(\varphi(z), \psi(z))$ называется *парой Фишера*, если пространство $H(\mathbb{C})$ можно представить в виде

$$H(\mathbb{C}) = \text{Ker } M_\varphi \oplus (\psi). \quad (2.1)$$

Равенство (2.1) называется *разложением Фишера*. Если $H(\mathbb{C})$ представимо виде

$$H(\mathbb{C}) = \text{Ker } M_\varphi + (\psi), \quad (2.2)$$

то равенство (2.2) называется *представлением Фишера*.

В этом случае любая целая функция представима в виде

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad f_1(z) \in \text{Ker } M_\varphi, \quad f_2(z) \in (\psi),$$

вообще говоря, не единственным образом.

Равенство (2.2) позволяет решать многоточечную задачу Валле Пуссена в классе $\text{Ker } M_\varphi$. Действительно, пусть $\mu_1, \mu_2, \dots$ – нулевая последовательность функции $\psi(z)$. Предположим для простоты, что все нули $\mu_1, \mu_2, \dots$ простые. Рассмотрим произвольную последовательность комплексных чисел a_j , $j = 1, 2, \dots$, и поставим многоточечную задачу Валле Пуссена следующим образом: существует ли функция $y(z) \in \text{Ker } M_\varphi$ такая, что $y(\mu_j) = a_j$, $j = 1, 2, \dots$? Равенство (2.2) дает ответ на поставленный вопрос, а именно, всегда существует функция $h(z) \in H(\mathbb{C})$ с условием $h(\mu_j) = a_j$, $j = 1, 2, \dots$. В силу (2.2) имеет место представление

$$h(z) = w(z) + \psi(z) \cdot q(z), \quad q(z) \in H(\mathbb{C}), \quad w(z) \in \text{Ker } M_\varphi,$$

из которого получаем равенство $w(\mu_j) = a_j$, $j = 1, 2, \dots$.

Дадим эквивалентную формулировку многоточечной задачи Валле Пуссена для оператора свертки $M_\varphi: H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{C})$ с данными на дивизоре Z_ψ : для любой функции $h(z) \in H(\mathbb{C})$ найти решение $u(z) \in H(\mathbb{C})$ уравнения $M_\varphi f = 0$ такое, что $\frac{u-h}{\psi} \in H(\mathbb{C})$, т.е. $u - h$ делится на ψ в $H(\mathbb{C})$.

Применив результат статьи [4] к пространству $H(C)$, получим теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) *многоточечная задача Валле Пуссена для M_φ с данными на Z_ψ разрешима;*
- (2) *имеет место представление Фишера.*

Согласно результатам статьи [10] функция $\psi(z) \in H(\mathbb{C})$ порождает в пространстве $P_{\mathbb{C}}$ оператор свертки $M_\psi: P_{\mathbb{C}} \rightarrow P_{\mathbb{C}}$, действующий по правилу

$$M_\psi[f](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \psi(\xi) e^{z\xi} \gamma(\xi) d\xi, \quad (2.3)$$

где $\gamma(\xi)$ – функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$, C – замкнутый контур, охватывающий все особые точки $\gamma(\xi)$.

Наряду с оператором $M_\varphi[f](z)$ введем линейный и непрерывный оператор

$$M_\varphi[\psi(z) \cdot y(z)]: H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{C}). \quad (2.4)$$

ЛЕММА 1 (см. [6]). *Равенство (2.2) эквивалентно сюръективности оператора (2.4).*

Так как оператор $M_\varphi[\psi \cdot]$ линейно и непрерывно отображает пространство $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$, то сопряженный оператор $\{M_\varphi[\psi \cdot]\}^*$ линейно и непрерывно отображает пространство $H^*(\mathbb{C})$ в $H^*(\mathbb{C})$. Поскольку пространства $H^*(\mathbb{C})$ и $P_{\mathbb{C}}$ топологически изоморфны (см. [7]), то оператор $\{M_\varphi[\psi \cdot]\}^*$ порождает линейный и непрерывный оператор

$$M_\psi[\varphi(z) \cdot G(z)]: P_{\mathbb{C}} \rightarrow P_{\mathbb{C}},$$

где M_ψ – оператор вида (2.3). Об операторе $M_\psi[\varphi \cdot]$ можно прочесть в работах [6], [11]. Так как $H(\mathbb{C})$ – пространство Фреше, то имеет место теорема.

ТЕОРЕМА 4 (см. [12]). *Справедливы следующие утверждения:*

- (1) *замкнутость $\text{im } M_\varphi[\psi \cdot]$ в $H(\mathbb{C})$ эквивалентна замкнутости $\text{im } M_\psi[\varphi \cdot]$ в $P_{\mathbb{C}}$;*
- (2) *инъективность $M_\psi[\varphi \cdot]$ эквивалентна всюду плотности $\text{im } M_\varphi[\psi \cdot]$ в $H(\mathbb{C})$.*

Учитывая лемму 1, для того чтобы доказать, что имеет место представление Фишера, необходимо доказать сюръективность оператора $M_\varphi[\psi \cdot]$. Для этого надо доказать, что оператор $M_\psi[\varphi \cdot]$ инъективен и $\text{im } M_\psi[\varphi \cdot]$ замкнут в $P_{\mathbb{C}}$.

§ 3. Инъективность и замкнутость образа оператора $M_\psi[\varphi \cdot]$ в пространстве $P_{\mathbb{C}}$

Пусть N_φ – множество нулей функции $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$.

ТЕОРЕМА 5. *Если N_φ – достаточное множество в $\text{Ker } M_\psi$, то оператор $M_\varphi[\psi \cdot]$ является сюръективным.*

Как уже было сказано, сюръективность $M_\varphi[\psi \cdot]$ вытекает из инъективности $M_\psi[\varphi \cdot]$ и замкнутости $\text{im } M_\psi[\varphi \cdot]$ в $P_{\mathbb{C}}$.

Для линейного оператора инъективность эквивалентна тому, что его ядро тривиально (состоит из единственного элемента 0). Если $G(z) \in P_{\mathbb{C}}$, удовлетворяет уравнению $M_\psi[\varphi(z) \cdot G(z)] = 0$, то, так как N_φ – достаточное множество в $\text{Ker } M_\psi$, оно является множеством единственности в $\text{Ker } M_\psi$, поэтому $\varphi(z)G(z) \equiv 0$ в $\text{Ker } M_\psi$, значит, $G(z) \equiv 0$.

Докажем, что образ оператора $M_\psi[\varphi \cdot]$ замкнут в пространстве $P_{\mathbb{C}}$. Пусть $g_n(z) \xrightarrow{P_{\mathbb{C}}} g(z)$, $n \rightarrow \infty$, и $g_n(z) \in \text{im } M_\psi[\varphi \cdot]$, покажем, что $g(z) \in \text{im } M_\psi[\varphi \cdot]$. Так как $g_n(z) \in \text{im } M_\psi[\varphi \cdot]$, то существуют функции $G_n(z) \in P_{\mathbb{C}}$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условию

$$M_\psi[\varphi(z)G_n(z)] = g_n(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Рассмотрим оператор $M_\psi[y]$, $y \in P_{\mathbb{C}}$. Известно (см. [10]), что этот оператор является сюръективным в пространстве $P_{\mathbb{C}}$ и, следовательно, имеет непрерывный правый обратный оператор M_ψ^{-1} , вообще говоря, нелинейный (см. [13]), поэтому существуют функции $y_n(z) \in P_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющие условиям:

- (a) $M_\psi[y_n] = g_n(z)$;
- (b) последовательность $y_n(z)$ в пространстве $P_{\mathbb{C}}$ сходится к некоторой функции $y(z) \in P_{\mathbb{C}}$, причем $M_\psi[y(z)] = g(z)$.

Из равенств (а) и (3.1) в силу линейности оператора M_ψ получаем

$$M_\psi[y_n(z) - \varphi(z)G_n(z)] = 0.$$

Функции $h_n = y_n(z) - \varphi(z)G_n(z)$ удовлетворяют условиям $h_n(\lambda_k) = y_n(\lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots$, и из того, что множество N_φ достаточное в $\text{Ker } M_\psi$, следует, что последовательность $h_n(z)$ сходится в $P_\mathbb{C}$ к некоторой функции $h(z) \in \text{Ker } M_\psi$. Так как $\varphi(z)G_n(z)$ сходится к некоторой функции $l(z)$ в $P_\mathbb{C}$, то $G := \frac{l(z)}{\varphi(z)}$ – целая функция и по теореме деления $G \in P_\mathbb{C}$. Покажем, что $G_n(z)$ сходится к $G(z)$ равномерно на компактах.

Из сходимости последовательности $\varphi(z)G_n(z)$ в $P_\mathbb{C}$ следует, что на любом компакте $\varphi(z)G_n(z)$ равномерно сходится к $l(z)$. Пусть K – замкнутый круг с центром в нуле такой, что на его границе ∂K

$$|\varphi(z)| > \delta \quad \text{для некоторого } \delta > 0. \quad (3.2)$$

Так как $\varphi(z)G_n(z)$ равномерно сходится на K к $l(z)$, то для любого $\varepsilon > 0$ выполняются соотношения

$$|\varphi(z)G_n(z) - l(z)| < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon), \quad z \in K. \quad (3.3)$$

Учитывая (3.2), получим оценку

$$\left| G_n(z) - \frac{l(z)}{\varphi(z)} \right| < \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad z \in \partial K, \quad n > N(\varepsilon), \quad (3.4)$$

которая по принципу максимума модуля может быть продолжена на весь компакт K . Таким образом, мы доказали, что $G_n(z)$ равномерно сходится к функции $G(z) = l(z)/\varphi(z)$ на K .

В силу непрерывности оператора свертки имеем

$$M_\psi[y(z) - \varphi(z)G(z)] = 0, \quad G(z) \in P_\mathbb{C},$$

поэтому

$$M_\psi[\varphi(z)G(z)] = M_\psi[y(z)] = g(z),$$

значит, $g(z) \in \text{im } M_\psi[\varphi \cdot]$.

Следовательно, оператор $M_\psi[\varphi \cdot]$ является сюръективным, и из леммы 1 следует справедливость представления Фишера

$$H(\mathbb{C}) = \text{Ker } M_\varphi + (\psi).$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\varphi \in P_\mathbb{C}$, $\psi \in H(\mathbb{C})$ и N_φ является достаточным множеством в $\text{Ker } M_\psi$. Тогда имеет место представление Фишера

$$H(\mathbb{C}) = \text{Ker } M_\varphi + (\psi).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно теореме 3 для функций $\varphi \in P_\mathbb{C}$ и $\psi \in H(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условиям теоремы 5, разрешима многоточечная задача Валле Пуссена для M_φ с данными на Z_ψ .

§ 4. Условия достаточности множества нулей функции φ в $\text{Ker } M_\psi$

Пусть последовательность $N_\varphi = \{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ нулей целой функции экспоненциального типа $\varphi(z)$ лежит в угле $\{z \in \mathbb{C} : |\text{Im } z| \leq \alpha |\text{Re } z|, 0 \leq \alpha < \infty\}$ и пронумерована целыми числами в порядке возрастания вещественных частей. Предполагается, что все нули простые и $\text{Re } \lambda_k \rightarrow \pm\infty$, когда $k \rightarrow \pm\infty$. Последовательность нулей целой функции ψ обозначим через $N_\psi = \{\mu_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$. Будем считать, что все нули простые, вещественные и пронумерованы целыми числами в порядке возрастания.

В этом параграфе мы докажем, что при таких условиях множество N_φ является достаточным множеством в ядре оператора M_ψ . Поскольку топология $\tau_{\mathbb{C}}$ заведомо сильнее топологии τ_S для любого подмножества $S \in \mathbb{C}$, то требуется доказать лишь обратное утверждение, а именно, топология τ_{N_φ} не слабее топологии $\tau_{\mathbb{C}}$. Другими словами, нужно показать, что если последовательность $f_m(z) \in \text{Ker } M_\psi$ стремится к нулю в топологии τ_{N_φ} , то эта последовательность стремится к нулю и в топологии $\tau_{\mathbb{C}}$. По известным свойствам рассматриваемых топологий (см. [14]) последовательность целых функций $f_m(z) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ в топологии τ_S тогда и только тогда, когда найдутся числа $\sigma > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$|f_m(z)| \leq M e^{\sigma|z|} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in S,$$

и для любого компакта $K_{\mathbb{C}}$

$$\max_{z \in K} |f_m(z)| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Учитывая дискретность множества N_φ , это условие сходимости к нулю в топологии τ_{N_φ} можно написать несколько иначе: последовательность целых функций $f_m(z) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ в топологии τ_{N_φ} тогда и только тогда, когда найдутся числа $\sigma > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$|f_m(\lambda_k)| \leq M e^{\sigma|\lambda_k|} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

и для любого $k \in \mathbb{Z}$

$$|f_m(\lambda_k)| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Исходным фактом в наших рассуждениях является утверждение из работы [10] о том, что пространство $\text{Ker } M_\psi$ состоит из квазиполиномов с показателями из множества N_ψ нулей функции $\psi(z)$. Это значит, что любой элемент $r(z) \in \text{Ker } M_\psi$ запишется в виде

$$r(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} C_j e^{\mu_j z},$$

где лишь конечное число коэффициентов C_j отлично от нуля. Итак, пусть последовательность

$$r_m(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} C_j(m) e^{\mu_j z} \quad (4.1)$$

стремится к нулю в топологии τ_{N_φ} . Это значит, что для некоторых постоянных $\sigma, M > 0$ выполняются соотношения

$$|r_m(\lambda_k)| \leq M e^{\sigma|\lambda_k|} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (4.2)$$

и для любого $k \in \mathbb{Z}$

$$|r_m(\lambda_k)| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Нам нужно показать, что $r_m \rightarrow 0$ в топологии $\tau_{\mathbb{C}}$.

1. Докажем, что при выполнении условия (4.2) коэффициент $C_j(m)$ отличен от нуля, только если $|\mu_j| \leq (1 + \alpha)\sigma$. Проведем доказательство от противного. Пусть для фиксированного m

$$\mu = \max\{\mu_j, j : C_j(m) \neq 0\} > (1 + \alpha)\sigma$$

и $C(m)$ – коэффициент при $e^{\mu z}$ в квазиполиноме $r_m(z)$. Тогда по соотношению (4.2)

$$|r_m(\lambda_k)|e^{-\mu \operatorname{Re} \lambda_k} \leq M e^{\sigma|\lambda_k| - \mu \operatorname{Re} \lambda_k} \leq M e^{((1+\alpha)\sigma - \mu) \operatorname{Re} \lambda_k} \rightarrow 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_k \rightarrow +\infty.$$

С другой стороны,

$$|r_m(\lambda_k)|e^{-\mu \operatorname{Re} \lambda_k} = \left| \sum_j C_j(m) e^{(\mu_j - \mu)\lambda_k} \right| \rightarrow C(m), \quad \operatorname{Re} \lambda_k \rightarrow +\infty,$$

т.е. $C(m) = 0$, что противоречит определению μ . Таким образом, $\mu_j \leq (1 + \alpha)\sigma$. Аналогично, используя то, что $\operatorname{Re} \lambda_k \rightarrow -\infty$, когда $k \rightarrow -\infty$, доказывается оценка $\mu_j \geq -(1 + \alpha)\sigma$.

2. Докажем дальше, что если последовательность квазиполиномов $r_m(z)$ стремится к нулю в топологии τ_{N_φ} , то коэффициенты $C_j(m)$ ограничены, т.е. найдется константа C такая, что $|C_j(m)| \leq C$ для всех $j \in \mathbb{Z}$ и $m = 1, 2, \dots$. В первом пункте мы показали, что в представлении (4.1) участвуют лишь $e^{\mu_j z}$ с показателями μ_j , удовлетворяющими оценке $|\mu_j| \leq (1 + \alpha)\sigma$. Поскольку μ_j – нули целой функции, то число показателей, участвующих в представлении (4.1), конечно.

Для упрощения изложения дальнейших рассуждений перейдем к последовательности квазиполиномов $q_m(z) = r_m(z)e^{-(\min \mu_j)z}$, которая тоже стремится к нулю в топологии τ_{N_φ} . Если положить $\nu_j = \mu_j - \min \mu_p$, то после перенумерования можно считать, что для некоторого N

$$q_m(z) = \sum_{j=1}^N C_j(m) e^{\nu_j z}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Мы воспользуемся простым замечанием, что если набор из N нулей λ_{k_p} выбрать так, что определитель матрицы $A = (e^{\nu_j \lambda_{k_p}})$, $j, p = 1, 2, \dots, N$, отличен от нуля, то коэффициенты $C_j(m)$ являются решениями системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^N C_j e^{\nu_j \lambda_{k_p}} = q_m(\lambda_{k_p}), \quad p = 1, 2, \dots, N.$$

Докажем по индукции по параметру $t = 1, 2, \dots$, что набор нулей можно выбрать так, что определители матриц $A(t) = (e^{\nu_j \lambda_{k_p}})$, $j, p = 1, 2, \dots, t$ будут больше 1. Поскольку $\nu_j \geq 0$, то в качестве λ_{k_1} можно взять любой нуль с положительной вещественной частью. Допустим, что нули λ_{k_p} , $p = 1, 2, \dots, t-1$,

выбраны нужным образом, причем $\operatorname{Re} \lambda_{k_p}$ возрастает по p . Определитель матрицы $A(t)$ разложим по последней строке:

$$\det A(t) = \sum_{j=1}^t (-1)^{j+t} \det A_{j,t} e^{\nu_j \lambda_{k_t}},$$

где $(-1)^{j+t} A_{j,t}$ – алгебраическое дополнение элемента $e^{\nu_j \lambda_{k_t}}$. Отсюда

$$|\det A(t)| \geq |\det A_{t,t}| e^{\nu_t \operatorname{Re} \lambda_{k_t}} \left(1 - (\det A_{t,t})^{-1} \left| \sum_{j=1}^{t-1} (-1)^{j+t} \det A_{j,t} e^{\nu_j - \nu_t \operatorname{Re} \lambda_{k_t}} \right| \right). \quad (4.4)$$

Грубо оценим сверху $|\det A_{j,t}|$. Этот определитель есть сумма $(N-1)!$ слагаемых, каждое слагаемое есть произведение $N-1$ множителей вида $e^{\nu_j \lambda_{k_p}}$, $j = 1, 2, \dots, t$, $p = 1, 2, \dots, t-1$. Учитывая монотонность наборов ν_j , λ_{k_p} , получим

$$|\det A_{j,t}| \leq (N-1)! e^{(N-1)\nu_t \operatorname{Re} \lambda_{k_{t-1}}}, \quad (4.5)$$

поэтому

$$\left| \sum_{j=1}^{t-1} (-1)^{j+t} \det A_{j,t} e^{\nu_j - \nu_t \lambda_{k_t}} \right| \leq (N-1)! (N-1) e^{(N \operatorname{Re} \lambda_{k_{t-1}} - \operatorname{Re} \lambda_{k_t}) \nu_t}.$$

Алгебраическое дополнение $A_{t,t}$ совпадает с матрицей A_{t-1} , и по допущению индукции $\det A_{t-1} \geq 1$. Из (4.4) теперь имеем

$$|\det A(t)| \geq e^{\nu_t \operatorname{Re} \lambda_{k_t}} (1 - (N-1)! (N-1) e^{N \operatorname{Re} \lambda_{k_{t-1}} - \operatorname{Re} \lambda_{k_t} \nu_t}).$$

Таким образом, если нуль λ_{k_t} выбрать с достаточно большим $\operatorname{Re} \lambda_{k_t}$, то $\Delta = \det |A(t)|$ будет больше 1. По правилу Крамера

$$C_j(m) = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где Δ_j – определитель матрицы, полученной из A_N заменой j -го столбца столбцом свободных членов. Для того чтобы оценить Δ_j сверху, разложим соответствующую матрицу по j -му столбцу:

$$\Delta_j = \sum_{p=1}^N (-1)^{j+p} \det A_{j,p} q_m(\lambda_{k_p}).$$

Так же как соотношение (4.5), получим оценку

$$|\det A_{j,p}| \leq (N-1)! e^{(N-1)\nu_N \operatorname{Re} \lambda_{k_N}},$$

а по условию (4.2)

$$|q_m(\lambda_{k_p})| = |r_m(\lambda_{k_p})| e^{-\min \mu_j \operatorname{Re} \lambda_{k_p}} \leq M e^{2(1+\alpha)\sigma \operatorname{Re} \lambda_{k_N}}.$$

Таким образом,

$$\Delta_j \leq N! M N e^{2N(1+\alpha)\sigma \operatorname{Re} \lambda_{k_N}}$$

и

$$|C_j(m)| \leq C := N! MN e^{2N(1+\alpha)\sigma \operatorname{Re} \lambda_{k_N}}.$$

3. Докажем, что при фиксированном j $\lim_{m \rightarrow \infty} C_j(m) = 0$. Возьмем λ_k с положительной вещественной частью, тогда по п. 2

$$\begin{aligned} |C_N(m)| &\leq e^{-\nu_N \operatorname{Re} \lambda_k} q_m(\lambda_k) + \sum_{j=1}^{N-1} |C_j(m)| e^{(\nu_j - \nu_N) \operatorname{Re} \lambda_k} \\ &\leq q_m(\lambda_k) e^{-\nu_N \operatorname{Re} \lambda_k} + (N-1) |C| e^{(\nu_{N-1} - \nu_N) \operatorname{Re} \lambda_k}. \end{aligned}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и точку λ_k выберем так, чтобы

$$(N-1) |C| e^{(\nu_{N-1} - \nu_N) \operatorname{Re} \lambda_k} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

тогда при больших m по условию (4.3) $|C_N(m)| \leq \varepsilon$. Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_N(m) = 0.$$

Очевидно, последовательность квазиполиномов

$$q_m^{(1)}(z) = q_m(z) - C_N(m) e^{\nu_N z}$$

в каждой точке λ_k стремится к нулю. Отсюда, как и выше, вытекает, что $\lim_{m \rightarrow \infty} C_{N-1}(m) = 0$, и т.д.

4. Закончим доказательство достаточности множества N_φ . В пп. 1, 2 мы доказали, что $|\nu_j| \leq 2\sigma(1+\alpha)$ и $|C_j(m)| \leq C$. Следовательно,

$$|q_m(z)| \leq C N e^{2\sigma(1+\alpha)|z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

В п. 3 мы доказали, что $C_j(m) \rightarrow 0$ при любом j , значит, $\max_j |C_j(m)| \rightarrow 0$. Поэтому для любого компакта $K_{\mathbb{C}}$ при $z \in K$

$$\frac{1}{N} |q_m(z)| \leq \max_{j=1, \dots, N} |C_j(m)| e^{2\sigma(1+\alpha) \max_{z \in K} |z|} \rightarrow 0.$$

Из этого следует, что $q_m(z) \rightarrow 0$ в топологии $\tau_{\mathbb{C}}$.

В заключение авторы выражают признательность Р. С. Юлмухаметову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Ch. J. De La Vallée Poussin, “Sur l’équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d’une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d’ordre n ”, *Journ. de Math.* (9), **8** (1929), 125–144.
- [2] E. Fischer, “Über die Differentiationsprozesse der Algebra”, *J. Math.*, **148** (1917), 1–78.
- [3] L. Ehrenpreis, *Fourier analysis in several complex variables*, Wiley, New York, 1970.
- [4] В. В. Напалков, С. В. Попёнов, “Голоморфная задача Коши для оператора свертки в аналитически равномерных пространствах и разложения Фишера”, *Докл. РАН*, **381**:2 (2001), 164–166; англ. пер.: V. V. Napalkov, S. V. Popenov, “The holomorphic Cauchy problem for the convolution operator in analytically uniform spaces, and Fisher expansions”, *Dokl. Math.*, **64**:3 (2001), 330–332.

- [5] H. S. Shapiro, “An algebraic theorem of E. Fischer, and the holomorphic Goursat problem”, *Bull. London Math. Soc.*, **21**:6 (1989), 513–537.
- [6] В. В. Напалков, “Комплексный анализ и задача Коши для операторов свертки”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Тр. МИАН, **235**, Наука, М., 2001, 165–168; англ. пер.: V. V. Napalkov, “Complex analysis and the Cauchy problem for convolution operators”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **235** (2001), 158–161.
- [7] В. В. Напалков, *Уравнения свертки в многомерных пространствах*, Наука, М., 1982.
- [8] В. В. Напалков, “О дискретных слабодостаточных множествах в некоторых пространствах целых функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:5 (1981), 1088–1099; англ. пер.: V. V. Napalkov, “On discrete weakly sufficient sets in certain spaces of entire functions”, *Math. USSR-Izv.*, **19**:2 (1982), 349–357.
- [9] В. В. Напалков, “О строгой топологии в некоторых весовых пространствах функций”, *Матем. заметки*, **39**:4 (1986), 529–538; англ. пер.: V. V. Napalkov, “The strict topology in certain weighted spaces of functions”, *Math. Notes*, **39**:4 (1986), 291–296.
- [10] H. Muggli, “Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten”, *Comment. Math. Helv.*, **11**:1 (1938), 151–179.
- [11] A. Meril, D. C. Struppa, “Equivalence of Cauchy problems for entire and exponential type functions”, *Bull. London Math. Soc.*, **17**:5 (1985), 469–473.
- [12] Ж. Дьёдонне, Л. Шварц, “Двойственность в пространствах $(\mathcal{F})$ и $(\mathcal{LF})$ ”, *Математика. Сб. пер.*, **2**:2 (1958), 77–107; пер. с фр.: J. Dieudonné, L. Schwartz, “La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$ ”, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **1** (1949), 61–101.
- [13] О. В. Епифанов, “О существовании непрерывного правого обратного оператора в одном классе локально выпуклых пространств”, *Изв. Сев.-Кавказ. Научного центра высшей школы. Сер. естеств. наук*, **3** (1991), 3–4.
- [14] Ж. Себаштьян-и-Силва, “О некоторых классах локально-выпуклых пространств, важных в приложениях”, *Математика. Сб. пер.*, **1** (1957), 60–77; пер. с итал.: J. Sebastião e Silva, “Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni”, *Rend. Mat. e Appl. (5)*, **14** (1955), 388–410.

В. В. Напалков (V. V. Napalkov)

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН
E-mail: shaig@anrb.ru

Поступила в редакцию
28.06.2010 и 28.01.2011

А. А. Нуятов (A. A. Nuyatov)

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: Nuyatov1aa@rambler.ru