Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Друца, Существование “в целом” решения системы уравнений крупномасштабной динамики океана на многообразии, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 10, 55–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7769>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 04:03:52

УДК 517.958

А. В. Друца

Существование “в целом” решения системы уравнений крупномасштабной динамики океана на многообразии

В работе для системы примитивных уравнений на произвольном гладком ориентированном римановом многообразии в области-цилиндре доказана теорема существования и единственности “в целом”. А именно, доказано, что для произвольного промежутка времени $[0, T]$ в трехмерной области $\Omega \equiv \Omega' \times [-h, 0]$, где $h = \text{const}$, а Ω' – компактно вкладывающаяся область двумерного многообразия $\mathcal{M}$, для любых коэффициентов вязкости

$\mu, \nu, \mu_1, \nu_1 > 0$ и любых начальных условий $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$, $\int_{-h}^0 \text{div } \mathbf{u}_0 dz = 0$,

$\rho_0 \in W_2^2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение, для которого $\partial_z \mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^1(Q_T)$, $\partial_z \rho \in W_2^1(Q_T)$ (z – вертикальная переменная) и нормы $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}$, $\|\rho\|_{W_2^1(\Omega)}$ непрерывны по t .

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: примитивные уравнения, уравнения динамики океана, нелинейные уравнения в частных производных, априорные оценки, существование “в целом”.

§ 1. Введение

Проблема доказательства существования и единственности решения “в целом” системы примитивных уравнений, описывающих крупномасштабную динамику океана (см. [1], [2]), в течение многих лет оставалась открытой. Недавно эта проблема была успешно решена в работах [3]–[5], в которых существование и единственность решения были доказаны для областей-цилиндров над плоскостью. В последующих работах было рассмотрено расширение класса областей на случай неровного дна для различных граничных условий – как для условий непротекания и прилипания, так и для условий непротекания и свободного скольжения (см. [6], [7]). Однако во всех указанных работах примитивные уравнения рассматривались в евклидовом пространстве на плоскости. В то же время Мировой океан располагается на Земном шаре и все уравнения, описывающие его динамику, рассматриваются на этой поверхности.

Как показано в [6], формальное использование методики работы Г. М. Кобелькова [3] для примитивных уравнений с переменным дном, не позволяет доказать теорему существования и единственности. Требуется несколько изменить постановку задачи. Поэтому неочевидно, что техника работы [3] может быть непосредственно применена для доказательства теоремы существования

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00415а).

и единственности на сфере. Это обстоятельство послужило стимулом для написания настоящей статьи. Как оказалось, метод работы [3] с небольшими изменениями может быть применен и в данном случае.

В настоящей работе с помощью общей методики работ [6] и [3] для системы примитивных уравнений в области, представляющей собой “цилиндр” над произвольным двумерным гладким ориентированным римановым многообразием, доказывается теорема существования и единственности “в целом”.

§ 2. Постановка задачи

2.1. Основные обозначения.

2.1.1. *Основные понятия из тензорного анализа.* Мы всегда будем опускать знак суммирования по индексам, встречающимся вверху и внизу одного выражения, как это принято в тензорном анализе. Будем считать, что все индексы $i, j, k, l, m, \dots$ пробегает значения 1, 2; противное будет отдельно оговариваться.

Пусть $\mathcal{M}$ – двумерное гладкое ориентированное риманово многообразие. Обозначим касательное расслоение через $T\mathcal{M}$, атлас карт – через $\mathbf{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, где $A_\lambda = (D_\lambda, \{x_\lambda^i\})$, $D_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область, $\{x_\lambda^i\}$ – локальные координаты на ней, причем все карты атласа $\mathbf{A}$ имеют согласованную ориентацию.

Пусть в точке $M \in \mathcal{M}$ выбрана карта $A = (D, \{x^i\})$, ее покрывающая. Через $\{\partial_i\}$, $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}(M) \in T_M\mathcal{M}$, обозначим натуральный базис касательного пространства $T_M\mathcal{M}$ в точке $M \in \mathcal{M}$ (см. [8]). Компоненты произвольного вектора $\mathbf{v} \in T_M\mathcal{M}$ в этом базисе обозначим через v^i . Таким образом, $\mathbf{v} = v^i \partial_i$. Через $\{dx^i\} \subset T_M^*\mathcal{M}$ обозначим дуальный базис, а компоненты произвольного ковектора $f \in T_M^*\mathcal{M}$ в этом базисе обозначим через f_i . Таким образом, $f = f_i dx^i$. Компоненты тензоров более высокого порядка будем обозначать аналогичным образом. Компоненты тензора будем называть тензором, если это не приводит к путанице.

Метрический тензор обозначим через g_{ij} , а через g^{ij} – контравариантный метрический тензор, $g = \det((g_{ij}))$. Таким образом, скалярное произведение двух векторов $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in T_M\mathcal{M}$ равно $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \equiv g_{ij} v^i u^j$. Аналогично задается и обозначается скалярное произведение для тензоров более высокого порядка. Длина вектора $\mathbf{v}$ обозначается так: $|\mathbf{v}| \equiv (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2}$.

В силу того, что рассматриваемый атлас карт имеет согласованную ориентацию, все псевдотензоры будут являться обычными тензорами с точки зрения замены координат. Поэтому далее приставка “псевдо” будет опускаться. Пусть ε_{ij} – дискриминантный тензор (тензор Леви-Чивита). Напомним, что это кососимметричный тензор и для его существенной компоненты верно равенство $\varepsilon_{12} = \sqrt{g}$. Введем операцию $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \equiv \varepsilon_{ij} u^i v^j$, а также операцию $\mathbf{u}_\perp \equiv \varepsilon^{ij} g_{jk} u^k \partial_i$, задающую вектор, перпендикулярный $\mathbf{u}$, причем $|\mathbf{u}_\perp| = |\mathbf{u}|$.

Через $\nabla_{\mathbf{h}} \equiv h^i \nabla_i$ обозначим оператор ковариантного дифференцирования вдоль вектора $\mathbf{h}$, а через $\Gamma_{ik}^j \equiv \frac{1}{2} g^{jl} (\partial_i g_{kl} + \partial_k g_{il} - \partial_l g_{ik})$ – компоненты римановой связности (символы Кристоффеля). Таким образом, для скалярного поля f верно равенство $\nabla_i f = \partial_i f$, где ∂_i обозначает частное дифференцирование по

локальной координате x_i . Для векторного аргумента имеет место равенство $(\nabla_i \mathbf{v})^j = \partial_i v^j + \Gamma_{ik}^j v^k$. Также введем обозначение оператора $\nabla G \equiv g^{ij} \nabla_j G \partial_i$, где G – произвольное тензорное поле.

Градиент скалярного поля f и дивергенцию векторного поля $\mathbf{v}$ обозначим так:

$$\nabla f \equiv g^{ij} \partial_j f \partial_i, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} \equiv (\nabla_i \mathbf{v})^i.$$

На двумерном многообразии существуют два оператора, которые называются ротором, один из них переводит векторное поле в скалярное, другой – наоборот, скалярное поле в векторное. Чтобы отличить один от другого, для обозначения последнего из них будем использовать полужирный шрифт.

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \equiv \varepsilon^{ij} \nabla_j (g_{ik} v^k) \equiv \varepsilon^{ij} \partial_j (g_{ik} v^k), \quad \mathbf{rot} f \equiv \varepsilon^{ij} \nabla_i f \partial_j \equiv \varepsilon^{ij} \partial_i f \partial_j.$$

Для операторов Лапласа (см. [8], [9]) скалярного поля f и векторного поля $\mathbf{v}$ также будем использовать различные обозначения:

$$\Delta f \equiv g^{ij} \nabla_i \nabla_j f = \operatorname{div} \nabla f, \quad \nabla^2 \mathbf{v} \equiv g^{ij} \nabla_i \nabla_j \mathbf{v} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Имеют место следующие факты из курса дифференциальной геометрии:

$$g^{jl} \partial_k g_{il} = -g_{il} \partial_k g^{lj}, \quad (2.1)$$

$$\Gamma_{ik}^i = \partial_k \ln \sqrt{g}, \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{nm} \varepsilon^{ij} = \delta_n^i \delta_m^j - \delta_n^j \delta_m^i, \quad \varepsilon_{nm} \varepsilon^{nj} = \delta_m^j, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{rot} = 0, \quad \operatorname{rot} \nabla = 0. \quad (2.4)$$

2.1.2. Область и величины. Рассмотрим область $\Omega \equiv \Omega' \times [-h, 0]$, где $h = \operatorname{const}$, а Ω' – компактно вкладывающаяся область двумерного многообразия $\mathcal{M}$ с границей, состоящей из конечного числа гладких дуг, пересекающихся под ненулевыми углами. Другими словами, можно сказать, что Ω – это цилиндр над многообразием с краем. Границу $\partial\Omega$ разобьем на две части: $S = \partial\Omega' \times [0, 1]$ – боковую поверхность и $S_1 = \Omega' \times \{0, -h\}$ – объединение верхнего и нижнего оснований цилиндра Ω . Через $Q_T \equiv \Omega \times [0, T]$ обозначим цилиндр по времени. Через (M, z) (или через (M, ζ)) обозначим точку в Ω .

Границу $\partial\Omega'$ можно параметризовать натуральным параметром s так, чтобы вектор нормали $\mathbf{n}$, определяемый равенством $n^i \equiv (\boldsymbol{\tau}_\perp)^i$, был внешним по отношению к области Ω' . Здесь $\boldsymbol{\tau}$ – касательный вектор к границе, задаваемый параметром s . Таким образом, заданный вектор будет единичным в силу свойств $\boldsymbol{\tau}_\perp$ и натуральной параметризации. Очевидно, что вектор $\mathbf{n}$ является внешней единичной нормалью к S . На оставшейся части границы S_1 определим нормаль так: $n_3 = 1$, если $z = 0$, и $n_3 = -1$, если $z = -h$.

Для удобства введем обозначение $\nabla_3 \equiv (\nabla, \partial_z)$.

Если $\mathcal{X}$ – какое-то измеримое компактное подмногообразие $\mathcal{M} \times [-h, 0]$ с классической мерой Лебега, то через $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{X}}$ обозначим скалярное произведение в $L_2(\mathcal{X})$, при этом индекс будет опускаться, если интегрирование ведется

по всей области, т.е. $(\cdot, \cdot) \equiv (\cdot, \cdot)_\Omega$. Аналогично будем использовать следующие обозначения для норм:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{q, \mathcal{X}} &= \|\cdot\|_{L_q(\mathcal{X})}, & \|\cdot\|_{\mathcal{X}} &= \|\cdot\|_{2, \mathcal{X}}, \\ \|\cdot\|_q &= \|\cdot\|_{q, \Omega}, & \|\cdot\| &= \|\cdot\|_2, & |\cdot|_q &= \|\cdot\|_{q, \Omega'}, & |\cdot| &= |\cdot|_2. \end{aligned}$$

При этом нормы для $L_q(\mathcal{X})$ и $\mathbf{L}_q(\mathcal{X})$ будем обозначать одинаково. Отметим, что в силу того, что многообразия являются прямыми произведениями, меры на них являются прямыми произведениями мер, т.е. $\mu_L^4 \equiv \mu_L^3 \times \mu_L$ – мера на Q_T , $\mu_L^3 \equiv \mu_L^2 \times \mu_L$ – мера на Ω , μ_L – классическая мера Лебега на прямой, μ_L^2 – мера на Ω' , причем $d\mu_L^2 = \sqrt{g} dx^1 dx^2$ в координатном представлении.

Через $(\mathbf{u}, w)$ обозначим трехмерное векторное поле скоростей, где $\mathbf{u} \in \mathbf{T}\mathcal{M}$, а через p и ρ – давление и плотность соответственно.

Буквой c (c индексами и без них) обозначим в неравенствах положительные константы, которые не зависят от функций, участвующих в этих неравенствах, но зависят от длины интервала времени T , формы области Ω и норм начальных условий. Чаще всего разные константы будут обозначаться одной и той же буквой, если это не будет вводить в заблуждение.

Пространство Соболева функций, чьи первые производные интегрируемы в квадрате, обозначим через $W_2^1(\mathcal{X})$, а его подпространство, состоящее из функций, равных нулю (в смысле следа) на $\partial\mathcal{X}$, – через $\dot{W}_2^1(\mathcal{X})$.

2.2. Система уравнений и краевые условия в инвариантной (тензорной) форме. Система примитивных уравнений рассматривается в области Q_T и состоит из одного векторного уравнения и трех скалярных:

$$\partial_t \mathbf{u} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \nu \partial_z^2 \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} + w \partial_z \mathbf{u} + \ell \mathbf{u} + \gamma \nabla p = 0, \quad (2.5)$$

$$\partial_z p = -\rho \tilde{g}, \quad (2.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} + \partial_z w = 0, \quad (2.7)$$

$$\partial_t \rho - \mu_1 \Delta \rho - \nu_1 \partial_z^2 \rho + \nabla_{\mathbf{u}} \rho + w \partial_z \rho = 0. \quad (2.8)$$

Здесь μ , ν , μ_1 , ν_1 , γ , $\tilde{g}$ – положительные вещественные константы, ℓ – линейный ограниченный оператор над $\mathbf{T}\mathcal{M}$ (тензор типа $(1, 1)$).

Ставятся следующие граничные условия:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}} \rho = 0 \quad \text{на } S, \quad (2.9)$$

$$w = 0, \quad \partial_z \mathbf{u} = 0, \quad \partial_z \rho = 0 \quad \text{на } S_1. \quad (2.10)$$

Начальные условия задаются так:

$$\mathbf{u}(0, M, z) = \mathbf{u}_0(M, z), \quad \rho(0, M, z) = \rho_0(M, z), \quad \int_{-h}^0 \operatorname{div} \mathbf{u}_0 dz = 0. \quad (2.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В классической записи примитивных уравнений (см. [10]) вместо уравнения для плотности ρ (2.8) используются два аналогичных уравнения для температуры T и для солёности S . Плотность ρ , в свою очередь, линейно выражается через эти величины: $\rho = \rho_0(1 - \beta_T(T - T_r) - \beta_S(S - S_r))$,

где $\rho_0 = \gamma^{-1}$ в наших обозначениях. Это отличие не играет существенной роли в доказательстве утверждений настоящей работы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Для случая $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$ задача (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) полностью идентична задаче, исследованной в работах [3], [4].

2.3. Система уравнений и краевые условия в координатной (тензорной) форме. Выпишем уравнения системы (2.5)–(2.8) в координатах некоторой карты многообразия $\mathcal{M}$, получив при этом пять скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_t u^i - \mu(g^{ij} \partial_j (\partial_k u^k + \partial_k \ln \sqrt{g} u^k) + \varepsilon^{ij} \partial_j (\varepsilon^{kl} \partial_l (g_{km} v^m))) - \nu \partial_z^2 u^i \\ + u^j (\partial_j u^i + \Gamma_{jk}^i u^k) + w \partial_z u^i + \ell_j^i u^j + \gamma g^{ij} \partial_j p = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\partial_z p = -\rho \tilde{g}, \quad (2.13)$$

$$\partial_i u^i + \partial_k \ln \sqrt{g} u^k + \partial_z w = 0, \quad (2.14)$$

$$\partial_t \rho - \mu_1 (\partial_k (g^{kj} \partial_j \rho) + g^{kj} \partial_k \ln \sqrt{g} \partial_j \rho) - \nu_1 \partial_z^2 \rho + u^j \partial_j \rho + w \partial_z \rho = 0. \quad (2.15)$$

Краевые условия в координатах имеют следующий вид:

$$g_{ij} u^i n^j = 0, \quad \varepsilon^{ij} n^k (\partial_k u^i + \Gamma_{kl}^i u^l) n^i = 0, \quad n^i \partial_i \rho = 0 \quad \text{на } S, \quad (2.16)$$

$$w = 0, \quad \partial_z u^i = 0, \quad \partial_z \rho = 0 \quad \text{на } S_1. \quad (2.17)$$

§ 3. Подготовительные утверждения

3.1. Утверждения дифференциальной геометрии. Сформулируем, используя введенные выше обозначения, теоремы о перебрасывании производных, которые можно доказать явно через координатное представление или же сведением к общей теореме Стокса на многообразии. Для полноты рассуждений приведем, например, доказательство последнего равенства.

ТЕОРЕМА 3.1. Для любого векторного поля $\mathbf{v}$ верно равенство

$$(\operatorname{div} \mathbf{v}, 1)_{\Omega'} = (\mathbf{v}, \mathbf{n})_{\partial \Omega'}. \quad (3.1)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Для любого векторного поля $\mathbf{v}$ и скалярного поля f верно равенство

$$(\operatorname{div} \mathbf{v}, f)_{\Omega'} + (\mathbf{v}, \nabla f)_{\Omega'} = (f \mathbf{v}, \mathbf{n})_{\partial \Omega'}. \quad (3.2)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Для любых векторных полей $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{h}$ верно равенство

$$(\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{v}, \mathbf{u})_{\Omega'} + (\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u})_{\Omega'} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{h})_{\Omega'} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{h} \cdot \mathbf{n})_{\partial \Omega'}. \quad (3.3)$$

ТЕОРЕМА 3.2. Для любого векторного поля $\mathbf{v}$ и скалярного поля f верно равенство

$$(\operatorname{rot} f, \mathbf{v})_{\Omega'} - (f, \operatorname{rot} \mathbf{v})_{\Omega'} = (f, \mathbf{v} \times \mathbf{n})_{\partial \Omega'}. \quad (3.4)$$

ТЕОРЕМА 3.3. Для любых векторных полей $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ верно равенство

$$(\nabla^2 \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega'} + (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\Omega'} = (\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\partial \Omega'}. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3. Рассмотрим вектор $\mathbf{h} = g^{ij}(\nabla_j \mathbf{u})^k g_{kl} v^l \partial_i$ и покажем, что формула перебрасывания производных из теоремы 3.1 для вектора $\mathbf{h}$ совпадает с (3.5):

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = (g^{ij}(\nabla_j \mathbf{u})^k g_{kl} v^l) g_{im} n^m = n^j (\nabla_j \mathbf{u})^k g_{kl} v^l = \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Здесь мы воспользовались определением метрических тензоров, а также определением ковариантной производной вдоль вектора. Далее воспользуемся тем, что связность риманова, т.е. согласована с метрикой. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{h} &= (\nabla_m (g^{ij}(\nabla_j \mathbf{u})^k g_{kl} v^l \partial_i))^m = g^{ij} g_{kl} (\nabla_i \nabla_j \mathbf{u})^k v^l + g^{ij} g_{kl} (\nabla_j \mathbf{u})^k (\nabla_i \mathbf{v})^l \\ &= \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если вектор $\mathbf{v}$ удовлетворяет на $\partial \Omega'$ краевым условиям вида (2.9), то для него верно равенство

$$\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В фиксированной точке $\partial \Omega'$ рассмотрим локальную систему координат. Из второго краевого условия (2.9) следует равенство

$$(\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v})^1 n^2 = (\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v})^2 n^1.$$

Без ограничения общности будем считать, что $n^1 \neq 0$. Таким образом, мы имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} g_{ij} (\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v})^i v^j &= (g_{1j} (\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v})^1 + g_{2j} n^2 (n^1)^{-1} (\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v})^1) v^j \\ &= (n^1)^{-1} (\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v})^1 (g_{1j} n^1 + g_{2j} n^2) v^j = (n^1)^{-1} (\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v})^1 g_{ij} n^i v^j = 0, \end{aligned}$$

которая и доказывает предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть задано векторное поле $\boldsymbol{\tau}$ и перпендикулярное ему поле $\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_\perp$, причем длина $\boldsymbol{\tau}$ равна единице. Тогда для любого векторного поля $\mathbf{h}$ выполняется тождество

$$\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{h} \times \mathbf{n} = -\operatorname{rot} \mathbf{h} + \mathbf{n} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{h}. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторую точку на многообразии и рассмотрим локальную систему координат в ней. Тогда

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{h} \times \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{h} &= \varepsilon_{ij} n^i n^k (\nabla_k \mathbf{h})^j + g_{ij} n^i g_{sm} \varepsilon^{km} n^s (\nabla_k \mathbf{h})^j \\ &= (\nabla_k \mathbf{h})^j n^i (\varepsilon_{ij} n^k + g_{ij} g_{sm} n^s \varepsilon^{km}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

В силу того, что связность риманова, $\operatorname{rot} \mathbf{h} = \varepsilon^{ik} g_{ij} (\nabla_k \mathbf{h})^j$. Проверим, что в формуле ротора и в выражении (3.8) множители при $(\nabla_k \mathbf{h})^j$ совпадают. В силу обратимости операций поднятия и опускания индексов нам необходимо проверить выполнение равенства

$$n_i (\varepsilon^{ij} n^k + \varepsilon^{ki} n^j) = \varepsilon^{kj}. \quad (3.9)$$

При $j = k$ правая часть равенства (3.9) равна нулю в силу косой симметрии дискриминантного тензора, а левая часть равна $n_2 \varepsilon^{21} n^1 + n_2 \varepsilon^{12} n^1 = 0$ при $j = k = 1$ также в силу косой симметрии. Пусть теперь j и k различны. Тогда без ограничения общности считаем, что $j = 1$ и $k = 2$. В этом случае левая часть (3.9) равна $-\varepsilon^{12} n^2 n_2 - \varepsilon^{12} n^1 n_1 = \varepsilon^{21} \mathbf{n}^2$. Поскольку $|\mathbf{n}| = |\boldsymbol{\tau}| = 1$, предложение доказано.

3.2. Утверждения функционального анализа. Выпишем несколько утверждений функционального анализа, которыми далее будем часто пользоваться. При этом их формулировки приведем в том виде, в котором мы будем их использовать.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1 (неравенство Юнга). Пусть даны числа $a_1, a_2, a_3 > 0$, заданы любые числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ и любые числа $p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 \geq 1$, удовлетворяющие соотношениям $p_1^{-1} + p_2^{-1} = 1$, $q_1^{-1} + q_2^{-1} + q_3^{-1} = 1$. Тогда выполнены следующие два неравенства:

$$a_1 a_2 \leq \varepsilon_1 a_1^{p_1} + c(\varepsilon_1, p_1) a_2^{p_2}, \quad (3.10)$$

$$a_1 a_2 a_3 \leq \varepsilon_1 a_1^{q_1} + \varepsilon_2 a_2^{q_2} + c(\varepsilon_1, \varepsilon_2, q_1, q_2) a_3^{q_3}. \quad (3.11)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2 (неравенство Гронуолла). Если для функции $f(t) \geq 0$ выполнено неравенство

$$\partial_t f(t) \leq C_1(t) f(t) + C_2(t), \quad (3.12)$$

где $C_1(t), C_2(t) \geq 0$, то

$$f(t) \leq \exp\left(\int_0^t C_1(\tau) d\tau\right) \left(f(0) + \int_0^t C_2(\tau) d\tau\right). \quad (3.13)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. Пусть числа $p, q \in [1, \infty]$, достаточно гладкая функция $f(s)$ определена на отрезке $[a, b]$ и на этом отрезке существует точка, в которой f обращается в нуль. Тогда верна цепочка неравенств

$$\|f\|_{p,[a,b]} \leq c \|f\|_{C[a,b]} \leq c \|\partial_s f\|_{q,[a,b]}, \quad p, q \in [1, \infty]. \quad (3.14)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4 (неравенство Гёльдера). Пусть числа $p_1, p_2, p_3 \in [1, \infty]$ таковы, что $p_1^{-1} + p_2^{-1} + p_3^{-1} = 1$, и даны функции $f_k \in L_{p_k}(\mathcal{X})$. Тогда

$$|(1, f_1 f_2 f_3)_{\mathcal{X}}| \leq \|f_1\|_{p_1, \mathcal{X}} \|f_2\|_{p_2, \mathcal{X}} \|f_3\|_{p_3, \mathcal{X}}. \quad (3.15)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. Для функции $f \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ верно неравенство

$$\|f\|_4 \leq c \|\nabla_3 f\|^{3/4} \|f\|^{1/4}. \quad (3.16)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.6. Для функции $f \in W_2^1(\Omega)$ верно неравенство

$$\|f\|_4 \leq c (\|f\| + \|\nabla_3 f\|^{3/4} \|f\|^{1/4}). \quad (3.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы Стокса (см. [8]), рассмотрим следующее разбиение единицы: $1 \equiv \sum_{\lambda \in \Lambda} \Xi_\lambda$, где Ξ_λ – гладкая функция на многообразии с компактным носителем в карте A_λ . Это разбиение позволяет представить поле в виде $f \equiv \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$, где $f_\lambda = f\Xi_\lambda$, причем $\overline{\text{supp } f_\lambda}$ лежит в карте A_λ .

Из результатов работы [3] следует, что в координатах каждой карты A_λ на области выполняется неравенство

$$\|f_\lambda\|_4 = \|f_\lambda\|_{4, A_\lambda} \leq c(\|f_\lambda\|_{A_\lambda} + \|\nabla_3 f_\lambda\|_{A_\lambda}^{3/4} \|f_\lambda\|_{A_\lambda}^{1/4}).$$

Отметим, что

$$\|\nabla_3 f_\lambda\|_{A_\lambda}^{3/4} \leq c(\|\nabla_3 f \Xi_\lambda\|_{A_\lambda}^{3/4} + \|\nabla_3 \Xi_\lambda f\|_{A_\lambda}^{3/4}) \leq c(\|\nabla_3 f\|_{A_\lambda}^{3/4} + \|f\|_{A_\lambda}^{3/4}).$$

Следовательно,

$$\|f\|_4 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \|f_\lambda\|_{4, A_\lambda} \leq c(\|f\| + \|\nabla_3 f\|^{3/4} \|f\|^{1/4}),$$

что доказывает утверждение.

Аналогичным образом может быть доказано утверждение для двумерного случая.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.7 (см. [3]). *Для функции $f \in W_2^1(\Omega')$ верно неравенство*

$$|f|_4 \leq c(|f| + |\nabla f|^{1/2} |f|^{1/2}). \quad (3.18)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.8 (см. [11]). *Для функции $f(M)$, удовлетворяющей условиям*

$$\nabla_n f|_{\partial\Omega'} = 0, \quad (f, 1)_{\Omega'} = 0, \quad (3.19)$$

верны оценки

$$|\nabla \nabla f|_{4/3} \leq c|\Delta f|_{4/3}, \quad |\nabla f|_{4/3} \leq c|\Delta f|_{4/3}. \quad (3.20)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.9 (см. [12]). *Для функций $f \in W_{4/3}^1(\Omega')$ и $g \in W_2^1(\Omega')$ верны неравенства*

$$\|f\|_{4/3, \partial\Omega'} \leq c(|\nabla f|_{4/3} + |f|_{4/3}), \quad \|g\|_{\partial\Omega'} \leq c(|\nabla g| + |g|). \quad (3.21)$$

§ 4. Априорные оценки

4.1. Оценки для скорости, давления и плотности. В этом пункте мы получим априорные оценки для вектора скоростей, давления и плотности. Далее предположим, что решение задачи существует и дифференцируемо достаточно количество раз.

4.1.1. Оценки норм $\max_t \|\rho\|_4$ и $\max_t \|\mathbf{u}\|$.

ЛЕММА 4.1. Для решения системы (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) выполняются следующие оценки

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\rho(t)\|_4 \leq c, \quad \int_0^T \|\rho \nabla_3 \rho\|^2 dt \leq c. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как техника доказательств большинства утверждений настоящей работы одинакова, то доказательство первых лемм разберем достаточно подробно, чтобы в получении последующих оценок не останавливаться на аналогичных простых деталях. Умножим уравнение (2.8) скалярно на ρ^3 :

$$(\partial_t \rho, \rho^3) - (\mu_1 \Delta \rho, \rho^3) - (\nu_1 \partial_z^2 \rho, \rho^3) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho, \rho^3) + (w \partial_z \rho, \rho^3) = 0. \quad (4.2)$$

Первое слагаемое может быть представлено так:

$$(\partial_t \rho, \rho^3) = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\rho\|_4^4.$$

Далее воспользуемся формулами перебрасывания производных: по вертикальной переменной – формулой Ньютона–Лейбница, а по горизонтали – выражением (3.2).

Сумма последних слагаемых равна нулю в силу краевых условий и уравнения для дивергенции (2.7):

$$\frac{1}{4} ((\mathbf{u}, \nabla \rho^4) + (w, \partial_z \rho^4)) = -\frac{1}{4} ((\operatorname{div} \mathbf{u} + \partial_z w, \rho^4) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \rho^4)_S + (w, n_3 \rho^4)_{S_1}) = 0.$$

Наконец, интегрируя по частям и используя краевые условия (3.6), преобразуем слагаемые с производными второго порядка. Имеем

$$\begin{aligned} & \mu_1 (\operatorname{div} \nabla \rho, \rho^3) + \nu_1 (\partial_z^2 \rho, \rho^3) \\ &= -\mu_1 (\nabla \rho, 3 \nabla \rho \rho^2) - \nu_1 (\partial_z \rho, 3 \partial_z \rho \rho^2) + \mu_1 (\nabla \rho \rho^3, \mathbf{b})_S + \nu_1 (\partial_z \rho, n_3 \rho^3)_{S_1} \\ &= -\mu_1 \frac{3}{4} (\nabla \rho \rho, \nabla \rho \rho) - \nu_1 \frac{3}{4} (\partial_z \rho \rho, \partial_z \rho \rho). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (4.2) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\rho\|_4^4 + \mu_1 \frac{3}{4} \|\rho \nabla \rho\|^2 + \nu_1 \frac{3}{4} \|\rho \partial_z \rho\|^2 = 0. \quad (4.3)$$

Для функции $\|\rho(t)\|_4^4$ применим утверждение о неравенстве Гронуолла:

$$\|\rho(t)\|_4^4 \leq c \|\rho(0)\|_4^4 \leq c, \quad t \in [0, T]. \quad (4.4)$$

Первое неравенство из требуемых доказано. Теперь, пользуясь (4.4), интегрируем по отрезку $[0, T]$ равенство (4.3). В результате получаем оценку

$$\int_0^T (\|\rho \nabla \rho\|^2 + \|\rho \partial_z \rho\|^2) dt \leq c,$$

что доказывает лемму.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Верна следующая оценка для производной давления по вертикали

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\partial_z p(t)\|_4 \leq c. \quad (4.5)$$

Доказательство этого утверждения следует из второго уравнения системы (2.6) и предыдущей леммы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Для третьей компоненты скорости w верно соотношение

$$\|w\|_q \leq c \|\nabla \mathbf{u}\|_q, \quad q \in [1, \infty]. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь утверждением 3.3 о функции, имеющей нуль на отрезке, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|w\|_q &= \left| \left(\int_{-h}^0 |w(z)|^q dz \right)^{1/q} \right|_q \leq c \left| \left(\int_{-h}^0 |\partial_z w(z)|^q dz \right)^{1/q} \right|_q = c \|\partial_z w\|_q \\ &= c \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_q \leq c \|\nabla \mathbf{u}\|_q. \end{aligned}$$

В последней строчке мы воспользовались уравнением для дивергенции. Таким образом, предложение доказано.

ЛЕММА 4.2. Для решения системы (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) выполняются следующие оценки

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\| \leq c, \quad \int_0^T \|\nabla_3 \mathbf{u}\|^2 dt \leq c. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (2.5) скалярно на $\mathbf{u}$:

$$(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}) - \mu(\nabla^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}) - \nu(\partial_z^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}) + (w \partial_z \mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\ell \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \gamma(\nabla p, \mathbf{u}) = 0. \quad (4.8)$$

Первое слагаемое может быть представлено так:

$$(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|^2.$$

Сумма нелинейных слагаемых равна нулю. Сначала заметим, что при $U = \mathbf{u}^2$ выполнено следующее соотношение:

$$\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} U = \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \nabla U.$$

Далее используем формулы Ньютона–Лейбница и перебрасывания производных (3.3), уравнение для дивергенции (2.7), а также краевые условия. Получаем, что

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}) + (w \partial_z \mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{2} ((\mathbf{u}, \nabla U) + (w, \partial_z U)) \\ &= -\frac{1}{2} ((\operatorname{div} \mathbf{u}, U) + (\partial_z w, U)) + \frac{1}{2} ((\mathbf{u}, \mathbf{n} U)_S + (w n_3, U)_{S_1}) = 0. \end{aligned}$$

Слагаемое с градиентом давления преобразуем следующим образом:

$$(\nabla p, \mathbf{u}) = -(p, \operatorname{div} \mathbf{u}) = (p, \partial_z w) = -(\partial_z p, w).$$

Наконец, используя теорему 3.3 о перебрасывании производных, преобразуем слагаемые второго порядка к следующему виду:

$$\begin{aligned} \mu(\nabla^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \nu(\partial_z^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}) &= -\mu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) - \nu(\partial_z \mathbf{u}, \partial_z \mathbf{u}) + \mu(\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{u}, \mathbf{u})_S + \nu(\partial_z \mathbf{u} n_3, \mathbf{u})_{S_1} \\ &= -\mu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) - \nu(\partial_z \mathbf{u}, \partial_z \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Интегралы по границе цилиндра $\partial\Omega$ равны нулю в силу граничных условий и предложения 3.1.

Таким образом, из равенства (4.8) получаем выражение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|^2 + \mu \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \nu \|\partial_z \mathbf{u}\|^2 = -(\ell \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \gamma(\partial_z p, w). \quad (4.9)$$

Теперь последовательно оценим правую часть этого равенства через нормы, стоящие в левой. Имеем

$$|\gamma(\partial_z p, w)| \leq \gamma \|\partial_z p\| \|w\| \leq c \|\partial_z p\| \|\nabla \mathbf{u}\| \leq \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + c \|\partial_z p\|^2 \leq \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + c.$$

Здесь мы воспользовались следствием 4.1, предложением 4.1, а также, как и в предыдущей лемме, неравенствами Гёльдера и Юнга. Слагаемое с линейным оператором оценивается очевидным образом, а именно, $|(\ell \mathbf{u}, \mathbf{u})| \leq c \|\mathbf{u}\|^2$.

Взяв $2\varepsilon = \mu/4$, в итоге получаем неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{\mu}{4} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\partial_z \mathbf{u}\|^2 \leq c \|\mathbf{u}\|^2 + c. \quad (4.10)$$

Далее, как и в предыдущей лемме, для функции $\|\mathbf{u}(t)\|^2$ применяем утверждение о неравенстве Гронуолла:

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2 \leq c \|\mathbf{u}(0)\|^2 + c \leq c, \quad t \in [0, T]. \quad (4.11)$$

Первое неравенство из требуемых доказано. Теперь, пользуясь (4.11), интегрируем по отрезку $[0, T]$ неравенство (4.10). В результате получаем следующую оценку:

$$\int_0^T (\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\partial_z \mathbf{u}\|^2) dt \leq c,$$

что доказывает лемму.

Из последней леммы и предложения 4.1 вытекает следствие 4.2.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Верна следующая оценка для третьей компоненты скорости и ее производной по вертикали

$$\int_0^T \|w\|^2 + \|\partial_z w\|^2 dt \leq c. \quad (4.12)$$

4.1.2. *Оценка нормы $\|p\|_4$.* Следующая теорема играет одну из основных ролей в доказательстве априорных оценок и существования решения. Для ее доказательства применяется техника, значительно отличающаяся от способов доказательств остальных утверждений настоящей работы.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для решения системы (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) выполняется следующая оценка*

$$\|p\|_4 \leq c[(\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2})(\|U\|^{1/2} + 1) + 1], \quad (4.13)$$

где $U = \mathbf{u}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала представим давление в виде $p = p_1 + p_2$, где

$$p_1(M) = \int_{-h}^0 p(M, z) dz, \quad M \in \Omega'.$$

Из этого представления следует, что

$$\int_{-h}^0 p_2 dz = 0, \quad \partial_z p = \partial_z p_2. \quad (4.14)$$

В частности, так как интеграл равен нулю, то применимо утверждение 3.3 о функции с нулем на отрезке (аналогично доказательству предложения 4.1):

$$\|p_2\|_4 \leq c\|\partial_z p_2\|_4 = c\|\partial_z p\|_4 = c. \quad (4.15)$$

В силу того, что p из уравнений (2.5), (2.6) определяется с точностью до константы, выберем эту константу таким образом, чтобы $(p_1^3, 1) = 0$. Пусть функция $q = q(M)$ является решением следующей задачи в области Ω' :

$$\Delta q = p_1^3, \quad \nabla_{\mathbf{n}} q|_{\partial\Omega'} = 0, \quad (q, 1)_{\Omega'} = 0. \quad (4.16)$$

Тогда для q верны оценки норм (здесь используем утверждение 3.8):

$$|\nabla \nabla q|_{4/3} + |\nabla q|_{4/3} \leq c|\Delta q|_{4/3} = c|p_1^3|_{4/3} = c\|p_1^3\|_{4/3} = c\|p_1\|_4^3. \quad (4.17)$$

Продолжим доказательство теоремы. Теперь представим $\mathbf{u}$ в следующем виде: $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \bar{\bar{\mathbf{u}}}$, где

$$\bar{\mathbf{u}}(M) = \int_{-h}^0 \mathbf{u}(M, z) dz, \quad M \in \Omega'.$$

Из этого представления следует, что

$$\int_{-h}^0 \bar{\bar{\mathbf{u}}} dz = 0, \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = \int_{-h}^0 \operatorname{div} \mathbf{u} dz = - \int_{-h}^0 \partial_z w dz = 0.$$

В силу последнего равенства и выражения для векторного оператора Лапласа получаем, что $\nabla^2 \bar{\mathbf{u}}$ представимо в следующем виде:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{u}} = \nabla \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}}.$$

Интегрируя краевые условия для $\mathbf{u}$ на боковой поверхности цилиндра S (2.9), получаем такие же условия для $\bar{\mathbf{u}}$, а именно,

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}} \bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega'. \quad (4.18)$$

Дифференцируя первое граничное условие вдоль касательной, получаем, что

$$0 = \nabla_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\tau}} \bar{\mathbf{u}} + \nabla_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}}.$$

Из второго краевого условия для $\bar{\mathbf{u}}$ и предложения 3.2 следует, что

$$0 = \nabla_{\mathbf{n}} \bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{n} = -\text{rot } \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{n} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\tau}} \bar{\mathbf{u}}.$$

Из последних двух равенств выводим соотношение

$$-\text{rot } \bar{\mathbf{u}} = \nabla_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}}. \quad (4.19)$$

Таким образом, $|\text{rot } \bar{\mathbf{u}}| \leq c|\bar{\mathbf{u}}|$ на $\partial\Omega'$.

Теперь, получив все предварительные оценки, переходим к оценке нормы p_1 в $L_4(\Omega)$. Для этого умножим первое уравнение системы (2.5) скалярно на ∇q :

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{u}, \nabla q) - \mu(\nabla^2 \mathbf{u}, \nabla q) - \nu(\partial_z^2 \mathbf{u}, \nabla q) + (\ell \mathbf{u}, \nabla q) + \gamma(\nabla p, \nabla q) \\ + (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}, \nabla q) + (w \partial_z \mathbf{u}, \nabla q) = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Первое слагаемое равно нулю. Чтобы это показать, воспользуемся независимостью q от координаты z и независимостью краевых условий системы от времени. Имеем

$$(\partial_t \mathbf{u}, \nabla q) = -(\text{div } \partial_t \mathbf{u}, q) + (\partial_t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}), q)_S = (\partial_z w_t, q) = (w_t|_{z=-h}^0, q)_{\Omega'} = 0.$$

Далее оценим члены равенства (4.20) с производными второго порядка:

$$\begin{aligned} (\partial_z^2 \mathbf{u}, \nabla q) &= (\partial_z \mathbf{u} n_3, \nabla q)_{S_1} = 0, \\ (\nabla^2 \mathbf{u}, \nabla q) &= (\nabla^2(\bar{\mathbf{u}} + \bar{\bar{\mathbf{u}}}), \nabla q) = (\nabla^2 \bar{\mathbf{u}}, \nabla q) = -h(\mathbf{rot} \text{ rot } \bar{\mathbf{u}}, \nabla q)_{\Omega'} \\ &= -h(\text{rot } \bar{\mathbf{u}}, \text{rot } \nabla q)_{\Omega'} - h(\text{rot } \bar{\mathbf{u}}, \nabla q \times \mathbf{n})_{\partial\Omega'} = h(\nabla_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}}, \nabla q \times \mathbf{n})_{\partial\Omega'}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Из равенства (4.19) следует, что

$$|(\nabla^2 \mathbf{u}, \nabla q)| \leq c \|\bar{\mathbf{u}}\|_{4, \partial\Omega'} \|\nabla q\|_{4/3, \partial\Omega'}.$$

Теперь воспользуемся утверждением 3.9. Получаем, что

$$\begin{aligned} \|\nabla q\|_{4/3, \partial\Omega'} &\leq c \|\nabla \nabla q\|_{4/3} + c \|\nabla q\|_{4/3} \leq c \|p_1\|_4^3, \\ \|\bar{\mathbf{u}}\|_{4, \partial\Omega'} &\leq c \left(\int_{\partial\Omega'} \int_{-h}^0 \mathbf{u}^4 dz dl \right)^{1/4} = c \left(\int_{-h}^0 \int_{\partial\Omega'} U^2 dl dz \right)^{1/4} \\ &= c \left(\int_{-h}^0 (\|U\|_{\partial\Omega'}^{1/2})^4 dz \right)^{1/4} \leq c \left(\int_{-h}^0 (|\nabla U|^{1/2} + |U|^{1/2})^4 dz \right)^{1/4} \\ &\leq c \left(\int_{-h}^0 (|\nabla U|^{1/2})^4 dz \right)^{1/4} + c \left(\int_{-h}^0 (|U|^{1/2})^4 dz \right)^{1/4} \\ &= c(\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Таким образом, приходим к оценке

$$|(\nabla^2 \mathbf{u}, \nabla q)| \leq c(\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2})\|p_1\|_4^3.$$

Далее,

$$\begin{aligned} |(\ell \mathbf{u}, \nabla q)| &\leq c\|\mathbf{u}\|_4 \|\nabla q\|_{4/3} \leq c\|U\|^{1/2} \|p_1\|_4^3, \\ (\nabla p, \nabla q) &= -(p, \operatorname{div} \nabla q) + (p, \nabla q \cdot \mathbf{n})_S = -(p, \Delta q) \\ &= -(p_1, p_1^3) - (p_2, p_1^3) = -\|p_1\|_4^4 - (p_2, p_1^3). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Последний член в этом выражении легко оценивается с помощью неравенства Гёльдера:

$$|(p_2, p_1^3)| \leq \|p_2\|_4 \|p_1^3\|_{4/3} \leq c\|p_1\|_4^3.$$

Для преобразования нелинейных слагаемых будем использовать следствие 3.2 и уравнение для дивергенции (2.7). Имеем

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}, \nabla q) + (w \partial_z \mathbf{u}, \nabla q) &= -(\operatorname{div}(\mathbf{u}) \mathbf{u}, \nabla q) - (\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}} \nabla q) - (\partial_z w \mathbf{u}, \nabla q) - (\mathbf{u}, \partial_z \nabla q) \\ &\quad + ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}, \nabla q)_S + (w n_3 \mathbf{u}, \nabla q)_{S_1} = -(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}} \nabla q). \end{aligned}$$

Таким образом, используя утверждение 3.7, получаем, что

$$\begin{aligned} |(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} + w \partial_z \mathbf{u}, \nabla q)| &\leq c \int_{-h}^0 \int_{\Omega'} |\mathbf{u} \mathbf{u}| |\nabla \nabla q| d\mu_L^2 dz \leq c \int_{-h}^0 |U|_4 |p_1|_4^3 dz \\ &\leq c\|p_1\|_4^3 \int_{-h}^0 (|\nabla U|^{1/2} + |U|^{1/2}) |U|^{1/2} dz \\ &\leq c\|p_1\|_4^3 \left[\left(\int_{-h}^0 |\nabla U|^2 dz \right)^{1/4} \left(\int_{-h}^0 |U|^{2/3} dz \right)^{3/4} + \int_{-h}^0 |U| dz \right] \\ &\leq c\|p_1\|_4^3 (\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2}) \|U\|^{1/2}. \end{aligned}$$

В результате оценок всех слагаемых в равенстве (4.20) имеем следующее неравенство:

$$\|p_1\|_4^4 \leq c((\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2})\|U\|^{1/2} + \|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2} + 1)\|p_1\|_4^3. \quad (4.25)$$

Из него и неравенства (4.15) следует оценка, требуемая в теореме. Таким образом, теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Отметим, что в работе [5] неверно утверждалось, что второе слагаемое в левой части уравнения (4.20) равно нулю. Это верно только лишь в случае, когда граница Ω' состоит из отрезков прямых и дуг окружностей. В частности, нетрудно показать, что для $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$ имеет место равенство, если выполнены равенства вида (4.18) и $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$,

$$(\nabla^2 \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \equiv (\nabla_{\tau} \kappa) \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau},$$

где κ – кривизна $\partial\Omega'$.

4.1.3. Оценка нормы $\max_t \|\mathbf{u}\|_4$.

ЛЕММА 4.3. Для решения системы (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) выполняются следующие оценки

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_4 \leq c, \quad \int_0^T \|\mathbf{u} \nabla_3 \mathbf{u}\|^2 dt \leq c. \quad (4.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (2.5) скалярно на $U\mathbf{u} = \mathbf{u}^2\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{u}, U\mathbf{u}) - \mu(\Delta \mathbf{u}, U\mathbf{u}) - \nu(\partial_z^2 \mathbf{u}, U\mathbf{u}) + (\ell \mathbf{u}, U\mathbf{u}) + \gamma(\nabla p, U\mathbf{u}) \\ + (\nabla \mathbf{u}, U\mathbf{u}) + (w \partial_z \mathbf{u}, U\mathbf{u}) = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

По аналогии с доказательством предыдущих утверждений слагаемые этого равенства преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{u}, U\mathbf{u}) &= \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_4^4, \\ (\nabla \mathbf{u}, U\mathbf{u}) + (w \partial_z \mathbf{u}, U\mathbf{u}) &= \frac{1}{4} (\mathbf{u}, \nabla U^2) + (w, \partial_z U^2) \\ &= -\frac{1}{4} (\operatorname{div} \mathbf{u} + \partial_z \mathbf{u}, U^2) + \frac{1}{4} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, U^2)_S + \frac{1}{4} (wn_3, U^2)_{S_1} = 0. \end{aligned}$$

Члены равенства (4.27) с производными второго порядка преобразуем к такому виду:

$$\begin{aligned} (\mu \Delta \mathbf{u}, U\mathbf{u}) + (\nu \partial_z^2 \mathbf{u}, U\mathbf{u}) \\ = -\mu (\nabla \mathbf{u}, \nabla(U\mathbf{u})) - \nu (\partial_z \mathbf{u}, \partial_z(U\mathbf{u})) + \mu (\nabla \mathbf{n} \mathbf{u}, U\mathbf{u})_S + \nu (\partial_z \mathbf{u} n_3, U\mathbf{u})_{S_1} \\ = -\frac{\mu}{2} \|\nabla U\|^2 - \frac{\nu}{2} \|\partial_z U\|^2 - \mu (U, (\nabla \mathbf{u})^2) - \nu (U, (\partial_z \mathbf{u})^2). \end{aligned}$$

В итоге равенство (4.27) сводится к равенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_4^4 + \frac{\mu}{2} \|\nabla U\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\partial_z U\|^2 + \mu (U, (\nabla \mathbf{u})^2) + \nu (U, (\partial_z \mathbf{u})^2) \\ = -\gamma (\nabla p, U\mathbf{u}) - (\ell \mathbf{u}, U\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Как и ранее, оценим правую часть последнего равенства. Имеем

$$|(\nabla p, U\mathbf{u})| = |(p, \operatorname{div}(U\mathbf{u}))| = |(pU, \operatorname{div} \mathbf{u}) + (p\mathbf{u}, \nabla U)| \leq c(|p|U, |\nabla \mathbf{u}|). \quad (4.29)$$

Далее оценим правое выражение в (4.29), используя неравенство $|p| \leq |p_1| + |p_2|$, а также неравенство Гёльдера с показателями (4, 4, 2), утверждение 3.6 и неравенство Юнга:

$$\begin{aligned} c(|p_2|U, |\nabla \mathbf{u}|) &\leq c\|p_2\|_4 \|U\|_4 \|\nabla \mathbf{u}\| \\ &\leq c(\|\nabla U\|^{3/4} + \|\partial_z U\|^{3/4} + \|U\|^{3/4}) \|U\|^{1/4} \|\nabla \mathbf{u}\| \\ &\leq \varepsilon \|\nabla U\|^2 + \varepsilon_1 \|\partial_z U\|^2 + c\|U\|^2 + c\|\nabla \mathbf{u}\|^2. \end{aligned}$$

Далее также используем неравенство Гёльдера для двумерной области с теми же показателями, утверждением 3.7 и неравенством Юнга. Получаем, что

$$\begin{aligned}
 c(|p_1|U, |\nabla \mathbf{u}|) &\leq c \int_{-h}^0 |p_1|_4 |U|_4 |\nabla \mathbf{u}| dz \leq c |p_1|_4 \int_{-h}^0 |U|_4 |\nabla \mathbf{u}| dz, \\
 \int_{-h}^0 |U|_4 |\nabla \mathbf{u}| dz &\leq c \int_{-h}^0 (|\nabla U|^{1/2} + |U|^{1/2}) |U|^{1/2} |\nabla \mathbf{u}| dz \\
 &\leq c \left(\int_{-h}^0 (|\nabla U| + |U|) |U| dz \right)^{1/2} \left(\int_{-h}^0 |\nabla \mathbf{u}|^2 dz \right)^{1/2} \\
 &\leq c (\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2}) \|U\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}\|.
 \end{aligned}$$

Используя оценку для p (4.13), находим, что

$$\begin{aligned}
 c(|p_1|U, |\nabla \mathbf{u}|) &\leq c \|p_1\|_4 (\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2}) \|U\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}\| \\
 &\leq c [(\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2})(\|U\|^{1/2} + 1) + 1] (\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2}) \|U\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}\| \\
 &\leq \varepsilon \|\nabla U\|^2 + c \|U\|^2 (\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + 1) + c \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + c.
 \end{aligned}$$

Оставшееся слагаемое правой части равенства (4.28) оцениваем, используя технику, стандартную для настоящей работы.

Таким образом, взяв $2\varepsilon = \mu/4$ и $\varepsilon_1 = \nu/4$, из равенства (4.28) получаем неравенство

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_4^4 + \frac{1}{4} (\mu \|\nabla U\|^2 + \nu \|\partial_z U\|^2) + (U, \mu (\nabla \mathbf{u})^2 + \nu (\partial_z \mathbf{u})^2) \\
 \leq c (\|\mathbf{u}\|_4^4 + 1) (\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + 1).
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Применяя неравенство Гронуолла и вторую оценку леммы 4.2, выводим неравенство $\|\mathbf{u}(t)\|_4^4 \leq c$, откуда следует первое неравенство доказываемой леммы. Из него и неравенства (4.30) следует и второе неравенство, стоящее в условии данной леммы, а значит, лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Для решения системы (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) выполняется следующая оценка:

$$\int_0^T \|\mathbf{u} \partial_z w\|^2 dt \leq c. \tag{4.31}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из третьего уравнения системы (2.7) следует равенство $\partial_z w = \operatorname{div} \mathbf{u}$. Оно и два неравенства предыдущей леммы доказывают это следствие.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Для функции давления выполняется следующая оценка:

$$\int_0^T \|p\|_4^4 dt \leq c. \tag{4.32}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4.1 и леммы 4.3 вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\|p\|_4 \leq c [(\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2})(\|U\|^{1/2} + 1) + 1] \leq c (\|\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}\|^{1/2} + 1).$$

Она и второе неравенство леммы 4.3 завершают доказательство следствия.

4.2. Оценки для производных скорости и плотности по вертикали. В этом пункте мы получим оценки норм для $\partial_z \mathbf{u}$ и $\partial_z \rho$. Для этого введем дополнительные обозначения: $\mathbf{v} = \partial_z \mathbf{u}$, $w_z = \partial_z w$, $V = \mathbf{v}^2$ и $r = \rho_s$. Теперь продифференцируем по z систему уравнений (2.5)–(2.8), а также краевые условия на S и начальные условия (2.9)–(2.11):

$$\partial_t \mathbf{v} - \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nu \partial_z^2 \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} + w_z \partial_z \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + w \partial_z \mathbf{v} + \ell \mathbf{v} + \gamma \nabla \partial_z p = \mathbf{0}, \quad (4.33)$$

$$\partial_z^2 p = -r \tilde{g}, \quad (4.34)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} + \partial_z w_z = 0, \quad (4.35)$$

$$\partial_t r - \mu_1 \Delta r - \nu_1 \partial_z^2 r + \nabla_{\mathbf{v}} \rho + w_z \partial_z \rho + \nabla_{\mathbf{u}} r + w \partial_z r = 0, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}} r = 0 \quad \text{на } S, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{v}(0, M, z) = \partial_z \mathbf{u}_0(M, z), \quad r(0, M, z) = \partial_z \rho_0(M, z), \quad \int_{-h}^0 \operatorname{div} \mathbf{v}_0 dz = 0. \quad (4.38)$$

Отметим, что в силу условий (4.37) для $\mathbf{v}$ выполняется условие (3.7) на S .

4.2.1. Оценка нормы $\max_t \|\mathbf{u}_z\|$.

ЛЕММА 4.4. *Для решения системы (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) выполняются следующие оценки:*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{v}(t)\| \leq c, \quad \int_0^T \|\nabla_3 \mathbf{v}\|^2 dt \leq c. \quad (4.39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (4.33) скалярно на $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{v}, \mathbf{v}) - \mu (\nabla^2 \mathbf{v}, \mathbf{v}) - \nu (\partial_z^2 \mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ + (w_z \partial_z \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}, \mathbf{v}) + (w \partial_z \mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\ell \mathbf{v}, \mathbf{v}) + \gamma (\nabla \partial_z p, \mathbf{v}) = 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Слагаемые с оператором Лапласа преобразуются следующим образом:

$$\mu (\nabla^2 \mathbf{v}, \mathbf{v}) + \nu (\partial_z^2 \mathbf{v}, \mathbf{v}) = -\mu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) - \nu (\partial_z \mathbf{v}, \partial_z \mathbf{v}).$$

Здесь граничные интегралы равны нулю в силу граничных условий (4.37), предложения 3.2 и краевого условия $\mathbf{v} = 0$ на S_1 .

Остальное преобразуем стандартным образом:

$$\begin{aligned} (\nabla \partial_z p, \mathbf{v}) &= -(\partial_z p, \operatorname{div} \mathbf{v}), \\ (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}, \mathbf{v}) + (w \partial_z \mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2} ((\mathbf{u}, \nabla V) + (w, \mathbf{v})) = -\frac{1}{2} ((\operatorname{div} \mathbf{u}, V) + (\partial_z w, V)) = 0, \\ (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (w_z \partial_z \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= -(\operatorname{div} \mathbf{v}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - (\partial_z w_z \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v}, \mathbf{u}) - (w_z \partial_z \mathbf{v}, \mathbf{u}) \\ &= -(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v}, \mathbf{u}) + (\operatorname{div} \mathbf{u}, \partial_z \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}). \end{aligned}$$

В итоге равенство (4.40) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \mu \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \nu \|\partial_z \mathbf{v}\|^2 \\ = -(\ell \mathbf{v}, \mathbf{v}) + \gamma (\partial_z p, \operatorname{div} \mathbf{v}) + (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v}, \mathbf{u}) - (\operatorname{div} \mathbf{u}, \partial_z \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Далее оценим правую часть этого равенства. Имеем

$$\gamma |(\partial_z p, \operatorname{div} \mathbf{v})| \leq c \|\partial_z p\| \|\nabla \mathbf{v}\| \leq \varepsilon \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + c.$$

Здесь воспользовались оценкой из следствия 4.1, из которой следует, что $\|\partial_z p\| \leq c$. Далее,

$$|(\operatorname{div} \mathbf{u}, \mathbf{u} \cdot \partial_z \mathbf{v})| \leq c \|\partial_z \mathbf{v}\| \|\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}\| \leq \varepsilon_1 \|\partial_z \mathbf{v}\|^2 + c \|\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}\|^2.$$

Для оценки оставшегося слагаемого воспользуемся неравенством Гёльдера с показателями $(4, 4, 2)$, а затем утверждением 3.6. Имеем

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v}, \mathbf{u}) &\leq c \|\mathbf{u}\|_4 \|\mathbf{v}\|_4 \|\nabla \mathbf{v}\| \leq c (\|\nabla \mathbf{v}\|^{3/4} + \|\partial_z \mathbf{v}\|^{3/4} + \|\mathbf{v}\|^{3/4}) \|\mathbf{v}\|^{1/4} \|\nabla \mathbf{v}\| \\ &\leq c \|\nabla \mathbf{v}\|^{7/4} \|\mathbf{v}\|^{1/4} + \|\partial_z \mathbf{v}\|^{7/4} \|\mathbf{v}\|^{1/4} + c \|\nabla \mathbf{v}\| \|\mathbf{v}\| \\ &\leq \varepsilon \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \varepsilon_1 \|\partial_z \mathbf{v}\|^2 + c \|\mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве воспользовались неравенствами Юнга с показателями $(8/7, 8)$, а также $(2, 2)$.

Таким образом, взяв $2\varepsilon = \mu/2$ и $2\varepsilon_1 = \nu/2$, из (4.41) получаем следующее неравенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\partial_z \mathbf{v}\|^2 \leq c \|\mathbf{v}\|^2 + c \|\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}\|^2. \quad (4.42)$$

Так как в силу леммы 4.3 интеграл по отрезку времени от $\|\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}\|^2$ ограничен константой, то, воспользовавшись неравенством Гронуолла, получаем оценку

$$\|\mathbf{v}\|^2 \leq c,$$

из которой следует первое неравенство условия доказываемой леммы. Из него и неравенства (4.42) следует вторая оценка условия леммы, что завершает доказательство леммы.

4.2.2. Оценка нормы $\max_t \|\mathbf{u}_z\|_4$.

ТЕОРЕМА 4.2. Для решения системы (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) выполняются следующие оценки:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{v}(t)\|_4 \leq c, \quad \int_0^T \|\mathbf{v} \nabla_3 \mathbf{v}\|^2 dt \leq c. \quad (4.43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (4.33) скалярно на $\mathbf{v}^2 \mathbf{v} = V \mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{v}, V \mathbf{v}) - \mu (\nabla^2 \mathbf{v}, V \mathbf{v}) - \nu (\partial_z^2 \mathbf{v}, V \mathbf{v}) + (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u}, V \mathbf{v}) + (w_z \partial_z \mathbf{u}, V \mathbf{v}) \\ + (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}, V \mathbf{v}) + (w \partial_z \mathbf{v}, V \mathbf{v}) + (\ell \mathbf{v}, V \mathbf{v}) + \gamma (\nabla \partial_z p, V \mathbf{v}) = 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Как и ранее, с помощью формул перебрасывания производных проведем некоторые преобразования. Имеем

$$\begin{aligned} (\mu \Delta \mathbf{v}, V \mathbf{v}) + (\nu \partial_z^2 \mathbf{v}, V \mathbf{v}) &= -\mu (\nabla \mathbf{v}, \nabla (V \mathbf{v})) - \nu (\partial_z \mathbf{v}, \partial_z (V \mathbf{v})) \\ &= -\frac{\mu}{2} \|\nabla V\|^2 - \frac{\nu}{2} \|\partial_z V\|^2 - \mu (V, (\nabla \mathbf{v})^2) - \nu (V, (\partial_z \mathbf{v})^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \partial_z p, V \mathbf{v}) &= -(\partial_z p, \operatorname{div}(V \mathbf{v})), \\
(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}, V \mathbf{v}) + (w \partial_z \mathbf{v}, V \mathbf{v}) &= \frac{1}{4}((\mathbf{u}, \nabla V^2) + (w, \partial_z V^2)) \\
&= -\frac{1}{4}((\operatorname{div} \mathbf{u}, V^2) + (\partial_z w, V^2)) = 0, \\
(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u}, V \mathbf{v}) + (w_z \partial_z \mathbf{u}, V \mathbf{v}) &= -(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{v}}(V \mathbf{v})) - (\mathbf{u}, V \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{u}, V^2) \\
&= -(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{v}}(V \mathbf{v})) - (\mathbf{u}, V \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \nabla(V^2)).
\end{aligned}$$

В результате равенство (4.44) сводится к следующему равенству:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|_4^4 + \frac{\mu}{2} \|\nabla V\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\partial_z V\|^2 + \mu(V, (\nabla \mathbf{v})^2) + \nu(V, (\partial_z \mathbf{v})^2) \\
= -(\ell \mathbf{v}, V \mathbf{v}) + \gamma(\partial_z p, \operatorname{div}(V \mathbf{v})) + (\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{v}}(V \mathbf{v})) + (\mathbf{u}, V \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v}) - (\mathbf{u}, \nabla(V^2)).
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Теперь оценим каждое слагаемое, стоящее в правой части (4.45), через нормы, стоящие в левой части (4.45).

Пользуясь оценкой (4.5) для $\partial_z p$, получаем, что

$$|\gamma(\partial_z p, \operatorname{div}(V \mathbf{v}))| \leq c \|\partial_z p\|_4 \|\nabla V\| \|\mathbf{v}\|_4 \leq \varepsilon \|\nabla V\|^2 + c \|\mathbf{v}\|_4^2.$$

Для оценки остальных слагаемых применяем неравенство Гёльдера с показателями (4, 4, 2), утверждение 3.6 и неравенство Юнга с показателями (8/7, 8). Имеем

$$\begin{aligned}
|(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{v}}(V \mathbf{v})) + (\mathbf{u}, V \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v}) - (\mathbf{u}, \nabla(V^2))| &\leq c \|\mathbf{u}\|_4 \|\nabla V\| \|\mathbf{v}\|_4^2 \\
&\leq c(\|\nabla V\| + \|V\|)(\|\nabla V\|^{3/4} + \|\partial_z V\|^{3/4} + \|V\|^{3/4}) \|\mathbf{v}\|_4^{1/4} \\
&\leq \varepsilon \|\nabla V\|^2 + \varepsilon_1 \|\partial_z V\|^2 + c \|\mathbf{v}\|_4^4 + c.
\end{aligned}$$

Взяв $2\varepsilon = \mu/4$ и $\varepsilon_1 = \nu/4$, из равенства (4.45) получаем следующее неравенство:

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|_4^4 + \frac{\mu}{4} \|\nabla V\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\partial_z V\|^2 + \mu(V, (\nabla \mathbf{v})^2) + \nu(V, (\partial_z \mathbf{v})^2) \leq c \|\mathbf{v}\|_4^4 + c. \tag{4.46}$$

Из неравенства Гронуолла следует первое неравенство доказываемой теоремы, с учетом которого интегрирование по $[0, T]$ неравенства (4.46) приводит ко второму неравенству из условия теоремы. Таким образом, теорема доказана.

4.2.3. Оценка нормы $\max_t \|\partial_z \rho\|$.

ЛЕММА 4.5. *Для решения системы (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) выполняются следующие оценки:*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|r(t)\| \leq c, \quad \int_0^T \|\nabla_3 r\|^2 dt \leq c. \tag{4.47}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (4.36) скалярно на r :

$$(\partial_t r, r) - \mu_1(\Delta r, r) - \nu_1(\partial_z^2 r, r) + (\nabla_{\mathbf{v}} \rho, r) + (w_z \partial_z \rho, r) + (\nabla_{\mathbf{u}} r, r) + (w \partial_z r, r) = 0. \quad (4.48)$$

Используя формулы перебрасывания производных, преобразуем некоторые слагаемые. Имеем

$$\begin{aligned} \mu_1(\Delta r, r) + \nu_1(\partial_z^2 r, r) &= -\mu_1(\nabla r, \nabla r) - \nu_1(\partial_z r, \partial_z r) + \mu_1(\nabla r, \mathbf{n}r)_S + \nu_1(\partial_z r, n_3 r)_{S_1} \\ &= -\mu_1 \|\nabla r\|^2 - \nu_1 \|\partial_z r\|^2, \\ (\nabla_{\mathbf{u}} r, r) + (w \partial_z r, r) &= -\frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u} + \partial_z w, r^2) = 0, \\ (\nabla_{\mathbf{v}} \rho, r) + (w_z \partial_z \rho, r) &= (\mathbf{v}, \nabla \rho r) - (\operatorname{div} \mathbf{u} \partial_z \rho, r) \\ &= -(\operatorname{div} \mathbf{v}, \rho r) - (\rho \mathbf{v}, \nabla r) + 2(\mathbf{u} r, \nabla r). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующее равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|r\|^2 + \mu_1 \|\nabla r\|^2 + \nu_1 \|\partial_z r\|^2 = (\operatorname{div} \mathbf{v}, \rho r) + (\rho \mathbf{v}, \nabla r) - 2(\mathbf{u} r, \nabla r). \quad (4.49)$$

Далее последовательно оценим все слагаемые, стоящие в правой части (4.49), через нормы левой части. Следующие скалярные произведения будем оценивать с помощью неравенства Гёльдера с показателями $(4, 4, 2)$. Имеем

$$\begin{aligned} |(\operatorname{div} \mathbf{v}, \rho r)| &\leq c \|\nabla \mathbf{v}\| \|\rho\|_4 \|r\|_4 \leq c \|\nabla \mathbf{v}\| (\|\nabla r\|^{3/4} + \|\partial_z r\|^{3/4} + \|r\|^{3/4}) \|r\|^{1/4} \\ &\leq \varepsilon \|\nabla r\|^2 + \varepsilon_1 \|\partial_z r\|^2 + c \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + c \|r\|^2 + c. \end{aligned}$$

Здесь воспользовались утверждением 3.6 и неравенством Юнга с показателями $(8/3, 8, 2)$. Далее,

$$\begin{aligned} |(\rho \mathbf{v}, \nabla r)| &\leq c \|\rho\|_4 \|\mathbf{v}\|_4 \|\nabla r\| \leq c \|\nabla r\| \leq \varepsilon \|\nabla r\|^2 + c, \\ |2(\mathbf{u} r, \nabla r)| &\leq c \|\mathbf{u}\|_4 \|r\|_4 \|\nabla r\| \leq c \|\nabla r\| (\|\nabla r\|^{3/4} + \|\partial_z r\|^{3/4} + \|r\|^{3/4}) \|r\|^{1/4} \\ &\leq \varepsilon \|\nabla r\|^2 + \varepsilon_1 \|\partial_z r\|^2 + c \|r\|^2 + c. \end{aligned}$$

Здесь также воспользовались утверждением 3.6 и неравенством Юнга с показателями $(8/7, 8)$.

Взяв $3\varepsilon = \mu/2$ и $2\varepsilon_1 = \nu_1/2$, из равенства (4.49) получаем следующее неравенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|r\|^2 + \mu_1 \|\nabla r\|^2 + \nu_1 \|\partial_z r\|^2 \leq c \|r\|^2 + c \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + c. \quad (4.50)$$

Далее, как и в предыдущих доказательствах, применение второго неравенства леммы 4.4 и неравенства Гронуолла приводит к оценкам, стоящим в условиях леммы. Лемма доказана.

4.3. Оценки для производных скорости и плотности по времени.

В этом пункте мы получим оценки норм для $\mathbf{u}_t \equiv \partial_t \mathbf{u}$ и $\rho_t \equiv \partial_t \rho$. Для этого

продифференцируем по t систему уравнений (2.5)–(2.8), а также граничные условия (2.9), (2.10):

$$\partial_t \mathbf{u}_t - \mu \nabla^2 \mathbf{u}_t - \nu \partial_z^2 \mathbf{u}_t + \nabla_{\mathbf{u}_t} \mathbf{u} + w_t \partial_z \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}_t + w \partial_z \mathbf{u}_t + \ell \mathbf{u}_t + \gamma \nabla p_t = \mathbf{0}, \quad (4.51)$$

$$\partial_z p_t = -\rho_t \tilde{g}, \quad (4.52)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_t + \partial_z w_t = 0, \quad (4.53)$$

$$\partial_t \rho_t - \mu_1 \Delta \rho_t - \nu_1 \partial_z^2 \rho_t + \nabla_{\mathbf{u}_t} \rho + w_t \partial_z \rho + \nabla_{\mathbf{u}} \rho_t + w \partial_z \rho_t = 0, \quad (4.54)$$

$$\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{u}_t \times \mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}} \rho_t = 0 \quad \text{на } S, \quad (4.55)$$

$$w_t = 0, \quad \partial_z \mathbf{u}_t = \mathbf{0}, \quad \partial_z \rho_t = 0 \quad \text{на } S_1. \quad (4.56)$$

Здесь $w_t \equiv \partial_t w$ и $p_t \equiv \partial_t p$. Отметим также, что в силу условий (4.55) для $\mathbf{u}_t$ выполняется условие (3.7) на S .

4.3.1. *Оценки норм $\|\partial_t \mathbf{u}(0)\|$ и $\|\partial_t \rho(0)\|$.* Отметим, что функции $\mathbf{u}_t(0)$ и $\rho_t(0)$ не являются исходными данными, поэтому перед тем как перейти к доказательству последних априорных оценок, оценим через нормы начальных данных производную по скорости функций $\mathbf{u}$ и ρ в начальный момент времени. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 4.6. *Для решения системы (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) выполняются следующие оценки:*

$$\|\rho_t(0)\| \leq c \|\rho_0\|_{W_2^2} (1 + \|\mathbf{u}_0\|_{W_2^2}), \quad \|\mathbf{u}_t(0)\| \leq c (\|\rho_0\|_{W_2^2} + \|\mathbf{u}_0\|_{W_2^2}^2). \quad (4.57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение (2.8) для $t = 0$ и умножим его на $\rho_{0t} \equiv \rho_t(0)$:

$$(\rho_t(0), \rho_t(0)) - (\mu_1 \Delta \rho_0, \rho_t(0)) - (\nu_1 \partial_z^2 \rho_0, \rho_t(0)) + (\nabla_{\mathbf{u}} \rho_0, \rho_t(0)) + (w \partial_z \rho_0, \rho_t(0)) = 0. \quad (4.58)$$

Оцениваем слагаемое с оператором Лапласа:

$$|(\mu_1 \Delta \rho_0, \rho_t(0)) + (\nu_1 \partial_z^2 \rho_0, \rho_t(0))| \leq c \|\rho_0\|_{W_2^2} \|\rho_{0t}\|.$$

Для оценки оставшегося слагаемого равенства (4.58) воспользуемся предложением 4.1, а также следующим неравенством (теорема вложения; см. [12]):

$$\|f\|_4 \leq c \|f\|_{W_2^1(\Omega)}. \quad (4.59)$$

Имеем

$$\begin{aligned} |(\nabla_{\mathbf{u}(0)} \rho_0, \rho_{0t})| + |(w(0) \partial_z \rho_0, \rho_{0t})| &\leq c (\|\mathbf{u}_0\|_4 \|\nabla \rho_0\|_4 + \|w(0)\|_4 \|\partial_z \rho_0\|_4) \|\rho_{0t}\| \\ &\leq c (\|\mathbf{u}_0\|_4 \|\nabla \rho_0\|_{W_2^1} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}_0\|_4 \|\partial_z \rho_0\|_{W_2^1}) \|\rho_{0t}\| \leq c \|\mathbf{u}_0\|_{W_2^2} \|\rho_0\|_{W_2^2} \|\rho_{0t}\|. \end{aligned}$$

Из приведенных неравенств и тождества (4.58) следует, что

$$\|\rho_t(0)\| \leq c \|\rho_0\|_{W_2^2} + c \|\rho_0\|_{W_2^2} \|\mathbf{u}_0\|_{W_2^2}.$$

Для доказательства второго неравенства в (4.57) умножим первое уравнение системы (2.5) на $\mathbf{u}_t$:

$$\|\mathbf{u}_t\|^2 = \mu(\nabla^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) + \nu(\partial_z^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) - (\ell \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) - \gamma(\nabla p, \mathbf{u}_t) - (\nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) - (w \partial_z \mathbf{u}, \mathbf{u}_t). \quad (4.60)$$

Затем оценим каждое слагаемое, стоящее в правой части (4.60):

$$\begin{aligned} |\mu(\nabla^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) + \nu(\partial_z^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}_t)| &\leq c \|\mathbf{u}\|_{W_2^2} \|\mathbf{u}_t\|, & |(\ell \mathbf{u}, \mathbf{u}_t)| &\leq c \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}_t\|, \\ (\nabla p, \mathbf{u}_t) &= (\nabla p_1, \mathbf{u}_t) + (\nabla p_2, \mathbf{u}_t), \\ (\nabla p_1, \mathbf{u}_t) &= (p_1 \mathbf{n}, \mathbf{u}_t)_S - (p_1, \operatorname{div} \mathbf{u}_t) = (p_1, \partial_z w_t) = (p_1, w_t n_3)_{S_1} = 0. \end{aligned}$$

Для получения последнего равенства мы воспользовались независимостью p_1 от переменной z . Далее, используя равенство (4.14), соотношения

$$0 = \nabla \int_{-h}^0 p_2 dz = \int_{-h}^0 \nabla p_2 dz,$$

а также утверждение 3.3 о функции, имеющей нуль на отрезке, получаем оценку $\|\nabla p_2\| \leq c \|\nabla \partial_z p_2\|$.

Из последнего неравенства следует, что

$$|(\nabla p_2, \mathbf{u}_t)| \leq c \|\nabla p_2\| \|\mathbf{u}_t\| \leq c \|\nabla \partial_z p_2\| \|\mathbf{u}_t\| \leq c \|\nabla \rho\| \|\mathbf{u}_t\|.$$

Для оценки оставшихся слагаемых правой части равенства (4.60) воспользуемся предложением 4.1, а также неравенством (4.59). Имеем

$$\begin{aligned} |(\nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) + (w \partial_z \mathbf{u}, \mathbf{u}_t)| &\leq c(\|\mathbf{u}\|_4 \|\nabla \mathbf{u}\|_4 + \|w\|_4 \|\partial_z \mathbf{u}\|_4) \|\mathbf{u}_t\| \\ &\leq c(\|\mathbf{u}\|_4 \|\nabla \mathbf{u}\|_4 + \|\nabla \mathbf{u}\|_4 \|\partial_z \mathbf{u}\|_4) \|\mathbf{u}_t\| \leq c \|\mathbf{u}\|_{W_2^2}^2 \|\mathbf{u}_t\|. \end{aligned}$$

Из последних оценок и равенства (4.60), рассмотренного при $t = 0$, получаем второе неравенство в (4.57), что и требовалось доказать.

4.3.2. *Оценки норм $\max_t \|\partial_t \mathbf{u}\|$ и $\max_t \|\partial_t \rho\|$.* Теперь перейдем к доказательству основных априорных оценок этого пункта.

ТЕОРЕМА 4.3. *Для решения системы (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) выполняются следующие оценки:*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}_t(t)\| \leq c, \quad \max_{0 \leq t \leq T} \|\rho_t(t)\| \leq c, \quad (4.61)$$

$$\int_0^T \|\nabla_3 \mathbf{u}_t\|^2 dt \leq c, \quad \int_0^T \|\nabla_3 \rho_t\|^2 dz \leq c. \quad (4.62)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (4.51) скалярно на $\mathbf{u}_t$:

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) - \mu(\nabla^2 \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) - \nu(\partial_z^2 \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + (\nabla \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + (w_t \partial_z \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) \\ + (\nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) + (w \partial_z \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + (\ell \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + \gamma(\nabla p_t, \mathbf{u}_t) = 0. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Преобразуем некоторые слагаемые этого равенства:

$$\mu(\nabla^2 \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + \nu(\partial_z^2 \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) = -\mu \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 - \nu \|\partial_z \mathbf{u}_t\|^2.$$

Здесь граничные интегралы равны нулю в силу краевого условия (4.55) и предложения 3.7. Далее,

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + (w \partial_z \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) &= \frac{1}{2}((\mathbf{u}, \nabla(\mathbf{u}_t^2))) = -\frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u} + \partial_z w, \mathbf{u}_t^2) = 0, \\(\nabla p_t, \mathbf{u}_t) &= -(p_t, \operatorname{div} \mathbf{u}_t) = (p_t, \partial_z w_t) = -(\partial_z p_t, w_t), \\(\nabla_{\mathbf{u}_t} \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) &= -(\operatorname{div} \mathbf{u}_t \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) - (\nabla_{\mathbf{u}_t} \mathbf{u}_t, \mathbf{u}).\end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_t\|^2 + \mu \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 + \nu \|\partial_z \mathbf{u}_t\|^2 \\= -(\ell \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + \gamma(\partial_z p_t, w_t) + (\operatorname{div} \mathbf{u}_t \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) + (\nabla_{\mathbf{u}_t} \mathbf{u}_t, \mathbf{u}) - (w_t \partial_z \mathbf{u}, \mathbf{u}_t).\end{aligned}\quad (4.64)$$

Далее, используя неравенства Гёльдера и Юнга, оцениваем все слагаемые, стоящие в правой части данной формулы. Имеем

$$\gamma|(\partial_z p_t, w_t)| \leq c \|\partial_z p_t\| \|w_t\| \leq c \|\rho_t\| \|\nabla \mathbf{u}_t\| \leq \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 + c \|\rho_t\|^2.$$

Для получения последней оценки воспользовались неравенством $\|w_t\| \leq c \|\nabla \mathbf{u}_t\|$, которое доказывается аналогично предложению 4.1. Далее,

$$\begin{aligned}|(\operatorname{div} \mathbf{u}_t \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) + (\nabla_{\mathbf{u}_t} \mathbf{u}_t, \mathbf{u}) - (w_t \partial_z \mathbf{u}, \mathbf{u}_t)| &\leq c \|\nabla \mathbf{u}_t\| \|\mathbf{u}\|_4 \|\mathbf{u}_t\|_4 + c \|w_t\| \|\mathbf{u}\|_4 \|\mathbf{u}_t\|_4 \\&\leq c(\|\nabla \mathbf{u}_t\| + \|\mathbf{u}_t\|) \|\mathbf{u}_t\|_4 \\&\leq c(\|\nabla \mathbf{u}_t\| + \|\mathbf{u}_t\|)(\|\nabla \mathbf{u}_t\|^{3/4} + \|\partial_z \mathbf{u}_t\|^{3/4} + \|\mathbf{u}_t\|^{1/4}) \|\mathbf{u}_t\|^{1/4} \\&\leq \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 + \varepsilon_1 \|\partial_z \mathbf{u}_t\|^2 + c \|\mathbf{u}_t\|^2.\end{aligned}$$

Здесь воспользовались утверждением 3.6, а также неравенствами Юнга с показателями $(8/7, 8)$ и показателями $(8/3, 8/5)$.

В результате из равенства (4.64) следует неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_t\|^2 + \mu \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 + \nu \|\partial_z \mathbf{u}_t\|^2 \leq 2\varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 + \varepsilon_1 \|\partial_z \mathbf{u}_t\|^2 + c \|\mathbf{u}_t\|^2 + c \|\rho_t\|^2. \quad (4.65)$$

Отметим, что пока применить утверждение о неравенстве Гронуолла нельзя, так как в правой части (4.65) стоит норма плотности, для которой пока нет оценки. Поэтому сначала получим аналогичное неравенство, выведенное из уравнения для плотности. Умножим уравнение (4.54) скалярно на ρ_t :

$$\begin{aligned}(\partial_t \rho_t, \rho_t) - \mu_1 (\Delta \rho_t, \rho_t) - \nu_1 (\partial_z^2 \rho_t, \rho_t) + (\nabla_{\mathbf{u}_t} \rho_t, \rho_t) \\+ (w_t \partial_z \rho_t, \rho_t) + (\nabla_{\mathbf{u}} \rho_t, \rho_t) + (w \partial_z \rho_t, \rho_t) = 0.\end{aligned}\quad (4.66)$$

Преобразуем некоторые слагаемые:

$$\begin{aligned}\mu_1 (\Delta \rho_t, \rho_t) + \nu_1 (\partial_z^2 \rho_t, \rho_t) &= -\mu_1 \|\nabla \rho_t\|^2 - \nu_1 \|\partial_z \rho_t\|^2, \\(\nabla_{\mathbf{u}} \rho_t, \rho_t) + (w \partial_z \rho_t, \rho_t) &= \frac{1}{2}((\mathbf{u}, \nabla(\rho_t^2)) + (w, \partial_z(\rho_t^2))) = -\frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u} + \partial_z w, \rho_t^2) = 0, \\(\nabla_{\mathbf{u}_t} \rho_t, \rho_t) &= -(\operatorname{div} \mathbf{u}_t, \rho \rho_t) - (\nabla_{\mathbf{u}_t} \rho_t, \rho).\end{aligned}$$

Таким образом, равенство (4.66) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho_t\|^2 + \mu_1 \|\nabla \rho_t\|^2 + \nu_1 \|\partial_z \rho_t\|^2 = (\operatorname{div} \mathbf{u}_t, \rho \rho_t) + (\nabla_{\mathbf{u}_t} \rho_t, \rho) - (w_t \partial_z \rho, \rho_t). \quad (4.67)$$

Теперь оценим слагаемые, стоящие в правой части данного равенства. Имеем

$$\begin{aligned} |(\nabla_{\mathbf{u}_t} \rho_t, \rho)| &\leq c \|\mathbf{u}_t\|_4 \|\rho\|_4 \|\nabla \rho_t\| \leq \varepsilon_2 \|\nabla \rho_t\|^2 + c \|\mathbf{u}_t\|_4^2 \\ &\leq \varepsilon_2 \|\nabla \rho_t\|^2 + \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 + \varepsilon_1 \|\partial_z \mathbf{u}_t\|^2 + c \|\mathbf{u}_t\|^2. \end{aligned}$$

Здесь воспользовались утверждением 3.6, а также неравенствами Юнга с показателями $(8/7, 8)$ и показателями $(4/3, 4)$. Аналогично оцениваем следующий член равенства (4.67):

$$\begin{aligned} |(\operatorname{div} \mathbf{u}_t, \rho \rho_t)| &\leq c \|\operatorname{div} \mathbf{u}_t\| \|\rho\|_4 \|\rho_t\|_4 \leq c \|\nabla \mathbf{u}_t\| \|\rho_t\|_4 \leq \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 + c \|\rho_t\|_4^2 \\ &\leq \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 + \varepsilon_2 \|\nabla \rho_t\|^2 + \varepsilon_3 \|\partial_z \rho_t\|^2 + c \|\rho_t\|^2. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} |(w_t \rho_t, \partial_z \rho)| &= \left| \int_{\Omega} \int_{-h}^z \operatorname{div} \mathbf{u}_t \, d\zeta \rho_t \partial_z \rho \, d\mu_L^3 \right| \leq \int_{\Omega} \int_{-h}^0 |\operatorname{div} \mathbf{u}_t| \, d\zeta |\rho_t| |\partial_z \rho| \, d\mu_L^3 \\ &\leq \left\| \int_{-h}^0 |\operatorname{div} \mathbf{u}_t| \, dz \right\|_{\Omega'} \int_{-h}^0 \|\rho_t\|_{4, \Omega'} \|\partial_z \rho\|_{4, \Omega'} \, dz. \end{aligned}$$

Воспользуемся оценкой

$$\left\| \int_{-h}^0 |\operatorname{div} \mathbf{u}_t| \, dz \right\|_{\Omega'}^2 \leq c \|\nabla \mathbf{u}_t\|,$$

а также оценкой из утверждения 3.7. Имеем

$$\begin{aligned} |(w_t \rho_t, \rho_s)| &\leq c \|\nabla \mathbf{u}_t\| \int_{-h}^0 (|\nabla \rho_t|^{1/2} + |\rho_t|^{1/2}) |\rho_t|^{1/2} (|\nabla \partial_z \rho|^{1/2} + |\partial_z \rho|^{1/2}) |\partial_z \rho|^{1/2} \, dz \\ &\leq \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 + \varepsilon_2 \|\nabla \rho_t\|^2 + c (\|\nabla \partial_z \rho\|^2 + 1) \|\rho_t\|^2. \end{aligned}$$

В итоге из равенства (4.67) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho_t\|^2 + \mu_1 \|\nabla \rho_t\|^2 + \nu_1 \|\partial_z \rho_t\|^2 &\leq 3\varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 + \varepsilon_1 \|\partial_z \mathbf{u}_t\|^2 \\ &\quad + 3\varepsilon_2 \|\nabla \rho_t\|^2 + \varepsilon_3 \|\partial_z \rho_t\|^2 + c \|\mathbf{u}_t\|^2 + c (\|\nabla \partial_z \rho\|^2 + 1) \|\rho_t\|^2. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Объединяя это неравенство с (4.65), взяв $6\varepsilon = \mu/2$, $2\varepsilon_1 = \nu/2$, $4\varepsilon_2 = \mu_1/2$ и $\varepsilon_3 = \nu_1/2$, получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho_t\|^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\partial_z \mathbf{u}_t\|^2 + \frac{\mu_1}{2} \|\nabla \rho_t\|^2 + \frac{\nu_1}{2} \|\partial_z \rho_t\|^2 \\ \leq c \|\mathbf{u}_t\|^2 + c (\|\nabla \partial_z \rho\|^2 + 1) \|\rho_t\|^2. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Из неравенства Гронуолла для величины $\frac{1}{2}\|\mathbf{u}_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\rho_t\|^2$ и леммы 4.6 следует оценка

$$\|\mathbf{u}_t\|^2 + \|\rho_t\|^2 \leq c. \quad (4.70)$$

Таким образом, половина оценок из формулировки теоремы 4.3 доказана. Далее, используя полученные оценки и неравенство (4.69), выводим оценку

$$\int_0^T \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 + \|\partial_z \mathbf{u}_t\|^2 + \|\nabla \rho_t\|^2 + \|\partial_z \rho_t\|^2 dt \leq c, \quad (4.71)$$

которая завершает доказательство теоремы 4.3.

4.4. Итоговые априорные оценки. В конце этого параграфа получим более “сильные” оценки для ρ и $\mathbf{u}$, выведем некоторые следствия и выпишем еще раз все полученные оценки в одной формуле.

ЛЕММА 4.7. *Для решения системы (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) выполняется следующая оценка:*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\nabla_3 \rho\| \leq c. \quad (4.72)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение для плотности (2.8) скалярно на ρ и преобразуем его следующим образом:

$$\frac{1}{2}\mu_1 \|\nabla \rho\|^2 + \frac{1}{2}\nu_1 \|\partial_z \rho\|^2 = -(\rho_t, \rho). \quad (4.73)$$

Правая часть оценивается очевидным образом с помощью неравенств Гёльдера и Юнга, а именно:

$$|(\rho_t, \rho)| \leq c \|\rho_t\| \|\rho\| \leq c,$$

что доказывает лемму.

ЛЕММА 4.8. *Для решения системы (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) выполняется следующая оценка:*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\nabla_3 \mathbf{u}\| \leq c. \quad (4.74)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим неравенство (4.10), полученное при доказательстве леммы 4.2. Из него следует в силу леммы 4.2, что

$$\frac{\mu}{4} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\partial_z \mathbf{u}\|^2 \leq -(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}) + c. \quad (4.75)$$

Правую часть этого неравенства легко оценить, используя теорему 4.3, неравенства Гёльдера и Юнга:

$$|(\mathbf{u}_t, \mathbf{u})| \leq c \|\mathbf{u}_t\| \|\mathbf{u}\| \leq c.$$

Комбинация этой оценки с последним неравенством доказывает лемму.

Отсюда, из леммы 4.2 и предложения 4.1 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. *Для решения системы (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) выполняется следующая оценка:*

$$\max_{0 \leq t \leq T} (\|w\| + \|\partial_z w\|) \leq c. \quad (4.76)$$

СЛЕДСТВИЕ 4.6. Для решения системы (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) нормы

$$\|\nabla_3 \mathbf{u}(t)\|, \quad \|\nabla_3 \rho(t)\|, \quad \|w(t)\| \quad (4.77)$$

непрерывны по t на $[0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Верна следующая оценка:

$$2\|\nabla \mathbf{u}\| \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}\| = \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 = \frac{d}{dt} (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = 2(\nabla \mathbf{u}_t, \nabla \mathbf{u}) \leq 2\|\nabla \mathbf{u}_t\| \|\nabla \mathbf{u}\|. \quad (4.78)$$

Из этой оценки вытекает, что в силу теоремы 4.3 выполнено $\partial_t \|\nabla \mathbf{u}\| \in L_2[0, T]$. Значит, $\|\nabla \mathbf{u}\| \in W_2^1[0, T]$. Для одномерного случая верно вложение $W_2^1[0, T] \subset C[0, T]$. Таким образом, доказана непрерывность нормы $\|\nabla \mathbf{u}(t)\|$. Аналогично доказывается непрерывность оставшихся норм для $\mathbf{u}$ и ρ . Из равенства $w(t) = -\int_{-h}^z \operatorname{div} \mathbf{u}(t) d\zeta$ выводится непрерывность нормы $\|w\|$. Следствие доказано.

В следующей теореме объединим результаты, полученные в настоящем параграфе.

ТЕОРЕМА 4.4. Для решения системы (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) выполняются следующие оценки:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} (\|\rho\|_4 + \|\mathbf{u}\|_4 + \|w\| + \|\partial_z w\| + \|\partial_z p\|_4 + \|\partial_z \rho\|_4 + \|\partial_z \mathbf{u}\|_4 \\ + \|\rho_t\| + \|\mathbf{u}_t\| + \|\nabla \rho\| + \|\nabla \mathbf{u}\|) \leq c(\mathbf{u}_0, \rho_0, \Omega', \mu, \nu, \mu_1, \nu_1, h, T), \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T (\|\nabla_3 \rho^2\|^2 + \|\mathbf{u} \nabla_3 \mathbf{u}\|^2 + \|p\|_4^4 + \|\mathbf{u} \partial_z w\|^2 + \|\nabla_3 \partial_z \rho\|^2 + \|\nabla_3 \partial_z \mathbf{u}\|^2 \\ + \|\partial_z \mathbf{u} \nabla_3 \partial_z \mathbf{u}\|^2 + \|\nabla_3 \rho_t\|^2 + \|\nabla_3 \mathbf{u}_t\|^2) dt \leq c(\mathbf{u}_0, \rho_0, \Omega', \mu, \nu, \mu_1, \nu_1, h, T). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Доказательство теоремы следует из всех доказанных в этом параграфе оценок.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Зависимость констант, стоящих в правых частях неравенств (4.79) и (4.80), от интервала времени T и коэффициентов μ, ν, μ_1, ν_1 имеет следующий вид:

$$\exp \left(cT \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\nu_1} \right) \right) + c.$$

Это вытекает из использованных нами неравенств Гронуолла и Юнга.

§ 5. Существование и единственность решения системы

5.1. Определение обобщенного решения. Сначала введем два пространства функций, $\mathbf{V}$ и R :

$$\mathbf{V} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^1(Q_T) \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ на } S, \partial_z \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ на } S_1, \right. \\ \left. \partial_z \mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^1(Q_T), \int_{-h}^0 \operatorname{div} \mathbf{v} dz = 0 \right\}, \quad (5.1)$$

$$R = \{r \in W_2^1(Q_T) \mid \partial_z r \in W_2^1(Q_T)\}. \quad (5.2)$$

Теперь перейдем к определению обобщенного решения задачи (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11). Умножим равенство (2.5) скалярно в $L_2(Q_{t_1})$ на $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, после чего воспользуемся формулами перебрасывания производных:

$$\begin{aligned} \int_{Q_{t_1}} \left(-\mathbf{u} \partial_t \mathbf{v} + \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nu \partial_z \mathbf{u} \cdot \partial_z \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + w \partial_z \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \ell \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \gamma \nabla p \cdot \mathbf{v} \right) d\mu_L^4 \\ + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \big|_{t=t_1} d\mu_L^3 - \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} \big|_{t=0} d\mu_L^3 = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Из этого равенства исключим вертикальную компоненту измененных скоростей w и давление p . Из третьего уравнения системы (2.7) и граничных условий (2.10) w выражается через $\mathbf{u}$ следующим образом:

$$w(t, M, z) = - \int_{-h}^z \operatorname{div} \mathbf{u}(t, M, \zeta) d\zeta.$$

Преобразуем некоторые слагаемые:

$$\begin{aligned} (\nabla p, \mathbf{v}) &= -(p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = - \left(p, \partial_z \int_{-h}^z \operatorname{div} \mathbf{v} d\zeta \right) = \left(\tilde{g}\rho, \int_{-h}^z \operatorname{div} \mathbf{v} d\zeta \right), \\ (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (w \partial_z \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= -(\operatorname{div} \mathbf{u} + \partial_z w, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}) - (w \mathbf{u}, \partial_z \mathbf{v}) \\ &= -(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}) + \left(\int_{-h}^z \operatorname{div} \mathbf{u} d\zeta \mathbf{u}, \partial_z \mathbf{v} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (5.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \int_{Q_{t_1}} \left(-\mathbf{u} \partial_t \mathbf{v} + \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nu \partial_z \mathbf{u} \cdot \partial_z \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \int_{-h}^z \operatorname{div} \mathbf{u} d\zeta \mathbf{u} \cdot \partial_z \mathbf{v} + \ell \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right. \\ \left. + \gamma \tilde{g}\rho \int_{-h}^z \operatorname{div} \mathbf{v} d\zeta \right) d\mu_L^4 + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \big|_{t=t_1} d\mu_L^3 - \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} \big|_{t=0} d\mu_L^3 = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Умножим последнее уравнение системы (2.8) скалярно в $L_2(Q_{t_1})$ на $r \in R$, после чего воспользуемся формулами перебрасывания производных:

$$\begin{aligned} \int_{Q_{t_1}} \left(-\rho r_t + \mu_1 \nabla \rho \cdot \nabla r + \nu_1 \partial_z \rho \partial_z r - \rho \nabla_{\mathbf{u}} r + \int_{-h}^z \operatorname{div} \mathbf{u} d\zeta \rho \partial_z r \right) d\mu_L^4 \\ + \int_{\Omega} \rho r \big|_{t=t_1} d\mu_L^3 - \int_{\Omega} \rho_0 r \big|_{t=0} d\mu_L^3 = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Обобщенным решением задачи (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) называется пара функций $(\mathbf{u}, \rho) \in \mathbf{V} \times R$ такая, что для любой пары $(\mathbf{v}, r) \in \mathbf{V} \times R$ и любого $t_1 \in [0, T]$ выполняются соотношения (5.4), (5.5).

5.2. Единственность решения.

ТЕОРЕМА 5.1. Если существует обобщенное решение задачи (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11), то оно единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: пусть существуют два обобщенных решения $(\mathbf{u}_1, w_1, p_1, \rho_1)$ и $(\mathbf{u}_2, w_2, p_2, \rho_2)$. Рассмотрим их разность

$$(\mathbf{u}, w, p, \rho) = (\mathbf{u}_1, w_1, p_1, \rho_1) - (\mathbf{u}_2, w_2, p_2, \rho_2),$$

которая будет удовлетворять следующим уравнениям, краевым и начальным условиям:

$$\mathbf{u} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \nu \partial_z^2 \mathbf{u} + \ell \mathbf{u} + \gamma \nabla p + \nabla_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u} + w_1 \partial_z \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}_2 + w \partial_z \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}, \quad (5.6)$$

$$\partial_z p = -\tilde{g}\rho, \quad (5.7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} + \partial_z w = 0, \quad (5.8)$$

$$\rho_t - \mu_1 \Delta \rho - \nu_1 \partial_z^2 \rho + \nabla_{\mathbf{u}_1} \rho + w_1 \partial_z \rho + \nabla_{\mathbf{u}} \rho_2 + w \partial_z \rho_2 = 0, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}} \rho = 0 \quad \text{на } S, \quad (5.10)$$

$$w = 0, \quad \partial_z \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \partial_z \rho = 0 \quad \text{на } S_1, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{u}(0, M, z) = \mathbf{0}, \quad \rho(0, M, z) = 0. \quad (5.12)$$

Умножим уравнение для плотности (5.9) скалярно на ρ :

$$(\rho_t, \rho) - \mu_1 (\Delta \rho, \rho) - \nu_1 (\partial_z^2 \rho, \rho) + (\nabla_{\mathbf{u}_1} \rho, \rho) + (w_1 \partial_z \rho, \rho) + (\nabla_{\mathbf{u}} \rho_2, \rho) + (w \partial_z \rho_2, \rho) = 0. \quad (5.13)$$

После преобразований это равенство примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho\|^2 + \mu_1 \|\nabla \rho\|^2 + \nu_1 \|\partial_z \rho\|^2 \\ & = -(\nabla_{\mathbf{u}_1} \rho, \rho) - (w_1 \partial_z \rho, \rho) - (\nabla_{\mathbf{u}} \rho_2, \rho) - (w \partial_z \rho_2, \rho). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Далее,

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{u}_1} \rho, \rho) + (w_1 \partial_z \rho, \rho) &= (\mathbf{u}_1, \nabla \rho^2) + (w_1, \partial_z \rho^2) = -(\operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \partial_z w_1, \rho^2) = 0, \\ (\nabla_{\mathbf{u}} \rho_2, \rho) &= -(\operatorname{div} \mathbf{u}, \rho_2 \rho) - (\mathbf{u} \rho_2, \nabla \rho). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Теперь оценим каждое слагаемое, стоящее в правой части (5.15). Воспользуемся неравенством Гёльдера, утверждением 3.6 и неравенствами Юнга:

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u} \rho_2, \nabla \rho)| &\leq c \|\mathbf{u}\|_4 \|\rho_2\|_4 \|\nabla \rho\| \leq c \|\nabla \rho\| ((\|\nabla \mathbf{u}\|^{3/4} + \|\partial_z \mathbf{u}\|^{3/4}) \|\mathbf{u}\|^{1/4} + \|\mathbf{u}\|) \\ &\leq \varepsilon \|\nabla \rho\|^2 + \varepsilon_2 \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \varepsilon_3 \|\partial_z \mathbf{u}\|^2 + c \|\mathbf{u}\|^2. \end{aligned}$$

Аналогичным методом оцениваем следующий член правой части равенства (5.15):

$$\begin{aligned} |(\operatorname{div} \mathbf{u}, \rho_2 \rho)| &\leq c \|\rho\|_4 \|\rho_2\|_4 \|\nabla \mathbf{u}\| \leq c \|\nabla \mathbf{u}\| ((\|\nabla \rho\|^{3/4} + \|\partial_z \rho\|^{3/4}) \|\rho\|^{1/4} + \|\rho\|) \\ &\leq \varepsilon_2 \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \varepsilon \|\nabla \rho\|^2 + \varepsilon_1 \|\partial_z \rho\|^2 + c \|\rho\|^2. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое оценивается так:

$$\begin{aligned} |(w \partial_z \rho_2, \rho)| &= \left| \int_{\Omega} \int_{-h}^z \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\zeta \partial_z \rho_2 \rho \, d\mu_L^3 \right| \leq \int_{\Omega} \int_{-h}^0 |\operatorname{div} \mathbf{u}| \, d\zeta |\rho_s^2| |\rho| \, d\mu_L^3 \\ &\leq \left\| \int_{-h}^0 |\operatorname{div} \mathbf{u}| \, d\zeta \right\| \int_{\Omega'} \|\partial_z \rho_2\|_{4, \Omega'} \|\rho\|_{4, \Omega'} \, dz. \end{aligned}$$

Воспользуемся оценкой

$$\left\| \int_{-h}^0 |\operatorname{div} \mathbf{u}| d\zeta \right\|_{\Omega'} \leq c \|\nabla \mathbf{u}\|$$

и оценкой из утверждения 3.7:

$$\begin{aligned} |(w \partial_z \rho_2, \rho)| & \leq c \|\nabla \mathbf{u}\| \int_{-h}^0 (|\nabla \partial_z \rho_2|^{1/2} + |\partial_z \rho_2|^{1/2}) |\partial_z \rho_2|^{1/2} (|\nabla \rho|^{1/2} + |\rho|^{1/2}) |\rho|^{1/2} dz \\ & \leq \varepsilon_2 \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \varepsilon \|\nabla \rho\|^2 + c(\|\nabla \partial_z \rho_2\|^2 + 1) \|\rho\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, из равенства (5.14) получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho\|^2 + \mu_1 \|\nabla \rho\|^2 + \nu_1 \|\partial_z \rho\|^2 & \leq 3\varepsilon \|\nabla \rho\|^2 + \varepsilon_1 \|\partial_z \rho\|^2 + 3\varepsilon_2 \|\nabla \mathbf{u}\|^2 \\ & + \varepsilon_3 \|\partial_z \mathbf{u}\|^2 + c(\|\nabla \partial_z \rho_2\|^2 + 1) \|\rho\|^2. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Теперь умножим уравнение (5.6) скалярно на $\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_t, \mathbf{u}) - \mu(\nabla^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}) - \nu(\partial_z^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\ell \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \gamma(\nabla p, \mathbf{u}) \\ + (\nabla_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}, \mathbf{u}) + (w_1 \partial_z \mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) + (w \partial_z \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

После преобразований это равенство примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|^2 + \mu \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \nu \|\partial_z \mathbf{u}\|^2 & = -(\ell \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \gamma(\nabla p, \mathbf{u}) \\ & - (\nabla_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}, \mathbf{u}) - (w_1 \partial_z \mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) - (w \partial_z \mathbf{u}_2, \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Далее,

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}, \mathbf{u}) + (w_1 \partial_z \mathbf{u}, \mathbf{u}) & = (\mathbf{u}_1, \nabla(\mathbf{u}^2)) + (w_1, \partial_z(\mathbf{u}^2)) = -(\operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \partial_z w, \mathbf{u}^2) = 0, \\ (\nabla p, \mathbf{u}) & = -(p, \operatorname{div} \mathbf{u}) = (p, \partial_z w) = -(\partial_z p, w), \\ (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) & = -(\operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) - (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}, \mathbf{u}_2). \end{aligned}$$

Теперь оценим каждое слагаемое, стоящее в правой части (5.18):

$$\gamma|(\nabla p, \mathbf{u})| = \gamma|(\partial_z p, w)| \leq c \|\rho\| \|w\| \leq c \|\rho\| \|\nabla \mathbf{u}\| \leq \varepsilon_2 \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + c \|\rho\|^2.$$

Используя неравенство Гёльдера, неравенство из утверждения 3.6 и неравенства Юнга, выводим следующие оценки:

$$\begin{aligned} |(\operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) + (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}, \mathbf{u}_2)| & \leq c \|\nabla \mathbf{u}\| \|\mathbf{u}_2\|_4 \|\mathbf{u}\|_4 \leq c \|\nabla \mathbf{u}\| \|\mathbf{u}\|_4 \\ & \leq c \|\nabla \mathbf{u}\| (\|\nabla \mathbf{u}\|^{3/4} + \|\partial_z \mathbf{u}\|^{3/4} + \|\mathbf{u}\|^{3/4}) \|\mathbf{u}\|^{1/4} \\ & \leq \varepsilon_2 \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \varepsilon_3 \|\partial_z \mathbf{u}\|^2 + c \|\mathbf{u}\| r^2, \\ |(w \partial_z \mathbf{u}_2, \mathbf{u})| & \leq c \|\partial_z \mathbf{u}_2\|_4 \|\mathbf{u}\|_4 \|w\| \leq c \|\mathbf{u}\|_4 \|\nabla \mathbf{u}\| \\ & \leq c \|\nabla \mathbf{u}\| (\|\nabla \mathbf{u}\|^{3/4} + \|\partial_z \mathbf{u}\|^{3/4} + \|\mathbf{u}\|^{3/4}) \|\mathbf{u}\|^{1/4} \\ & \leq \varepsilon_2 \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \varepsilon_3 \|\partial_z \mathbf{u}\|^2 + c \|\mathbf{u}\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, из равенства (5.18) получаем неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|^2 + \mu \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \nu \|\partial_z \mathbf{u}\|^2 \leq 3\varepsilon_2 \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + 2\varepsilon_3 \|\partial_z \mathbf{u}\|^2 + c\|\rho\|^2 + c\|\mathbf{u}\|^2. \quad (5.19)$$

Взяв $3\varepsilon = \mu_1/2$, $\varepsilon_1 = \nu_1/2$, $6\varepsilon_2 = \mu/2$, и $3\varepsilon_3 = \nu/2$, объединяем неравенства (5.16) и (5.19):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\rho\|^2 + \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|^2 + \mu_1 \|\nabla \rho\|^2 + \nu_1 \|\partial_z \rho\|^2 + \mu \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \nu \|\partial_z \mathbf{u}\|^2 \\ \leq c(\|\nabla \partial_z \rho_2\|^2 + 1)(\|\rho\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Применив здесь неравенство Гронуолла для величины $\|\rho\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2$, получаем оценку

$$\|\rho(t)\|^2 + \|\mathbf{u}(t)\|^2 \leq c(\|\rho(0)\|^2 + \|\mathbf{u}(0)\|^2). \quad (5.21)$$

Из начальных условий на ρ и $\mathbf{u}$ (5.12) следует, что $\|\rho(t)\|^2 = 0$ и $\|\mathbf{u}(t)\|^2 = 0$. Отсюда получаем, что $(\mathbf{u}_1, \rho_1) = (\mathbf{u}_2, \rho_2)$. Из уравнения несжимаемости (5.8), краевых условий (5.11) и полученных соотношений также следует, что $w = 0$. Значит, w_1 совпадает с w_2 .

Из второго уравнения системы (5.7) следует, что $\partial_z p = 0$. Таким образом, разность между p_1 и p_2 равна константе $\bar{p}$. Из уравнений системы (2.5) и (2.6) давление определяется с точностью до константы, а в теореме 4.1 эта константа однозначно определяется условием $(p^3, 1) = 0$. Значит, $\bar{p} = 0$, т.е. $p_1 = p_2$. Таким образом, единственность решения доказана.

5.3. Существование решения “в малом”. В работе [10] для случая сферы, т.е. при $\mathcal{M} = \mathbb{S}_a^2$, показано, что найдется $t_* > 0$, при котором существует классическое решение задачи (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) на Q_{t_*} (существование решения “в малом”). Это доказательство нетрудно обобщить на случай произвольного двумерного гладкого ориентированного риманова многообразия.

5.4. Существование решения “в целом”. Теперь докажем, что обобщенное решение существует на всем промежутке $[0, T]$, т.е. справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.2. *Для любого $T > 0$ на Q_T существует обобщенное решение задачи (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случая гладких начальных условий покажем, что $t_* = T$. Предположим противное. Тогда в силу непрерывности норм $\|\nabla_3 \mathbf{u}\|$ и $\|\nabla_3 \rho\|$ существует $t_1 \in (0, T)$ такое, что

$$\|\nabla_3 \mathbf{u}\| + \|\nabla_3 \rho\| \xrightarrow{t \rightarrow t_1 - 0} +\infty. \quad (5.22)$$

Но это соотношение противоречит априорным оценкам (4.79).

Далее для случая начальных условий из пространств Соболева $\mathbf{W}_2^2(\Omega) \times W_2^2(\Omega)$ доказательство проводится стандартным образом. Строится последовательность гладких начальных условий, стремящихся к заданным условиям. В силу неравенства (5.20) последовательность классических решений будет сходиться к обобщенному решению исходной задачи. Теорема доказана.

Таким образом, в настоящей работе получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$, $\rho_0 \in W_2^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_0, \rho_0$ удовлетворяют граничным условиям (2.9)–(2.11) и $\int_{-h}^0 \operatorname{div} \mathbf{u}_0 \, dz = 0$. Тогда для любых $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1 > 0$ и произвольного $T > 0$ задача (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) имеет единственное обобщенное решение $(\mathbf{u}, \rho) \in \mathbf{V} \times R$ на Q_T , причем

$$\mathbf{u}^2, (\partial_z \mathbf{u})^2, \mathbf{u} \nabla_3 \mathbf{u}, \partial_z \mathbf{u} \nabla_3 (\partial_z \mathbf{u}), \mathbf{u}_t, \nabla_3 \mathbf{u}_t \in \mathbf{L}_2(Q_T) \quad (5.23)$$

и норма $\|\nabla_3 \mathbf{u}\|$ непрерывна по t .

Доказательство этой теоремы следует из предыдущих теорем.

Список литературы

- [1] J.-L. Lions, R. Temam, S. Wang, “On the equations of the large-scale ocean”, *Nonlinearity*, **5**:5 (1992), 1007–1053.
- [2] Г. И. Марчук, А. С. Саркисян, *Математическое моделирование циркуляции океана*, Наука, М., 1988; англ. пер.: G. I. Marchuk, A. S. Sarkisyan, *Mathematical modelling of ocean circulation*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [3] G. M. Kobelkov, “Existence of a solution “in the large” for ocean dynamics equations”, *J. Math. Fluid Mech.*, **9**:4 (2007), 588–610.
- [4] G. M. Kobelkov, “Existence of a solution “in the large” for the 3D large-scale ocean dynamics equations”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **343**:4 (2006), 283–286.
- [5] C. Cao, E. S. Titi, “Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics”, *Ann. of Math. (2)*, **166**:1 (2007), 245–267.
- [6] A. V. Drutsa, “Existence “in the large” of a solution to primitive equations in a domain with uneven bottom”, *Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **24**:6 (2009), 515–542.
- [7] I. Kukavica, M. Ziane, “On the regularity of the primitive equations of the ocean”, *Nonlinearity*, **20**:12 (2007), 2739–2753.
- [8] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1986; англ. пер.: B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern geometry – methods and applications. Part I. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*, Grad. Texts in Math., **93**, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [9] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Grad. Texts in Math., **94**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1983.
- [10] R. Temam, M. Ziane, “Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics”, *Handbook of mathematical fluid dynamics*, v. 3, North-Holland, Amsterdam, 2004, 535–658.
- [11] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей*, Наука, М., 1991; англ. пер.: S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, de Gruyter Exp. Math., **13**, de Gruyter, Berlin, 1994.

- [12] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988; англ. пер.: S. L. Sobolev, *Some applications of functional analysis in mathematical physics*, Transl. Math. Monogr., **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

А. В. Друца (A. V. Drutsa)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: alexey@adrutsa.ru

Поступила в редакцию

02.07.2010