Общероссийский математический портал

Е. Д. Нурсултанов, Н. Т. Тлеуханова, Квадратурные формулы для классов функций малой гладкости, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 10, 133–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm777>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:06:01

УДК 517.5

Е. Д. Нурсултанов, Н. Т. Тлеуханова

Квадратурные формулы для классов функций малой гладкости

Для пространств функций многих переменных Соболева и Коробова построена квадратурная формула, коэффициенты и узлы которой определены в явном виде. Полученная формула является точной для тригонометрических полиномов с гармониками из соответствующего ступенчатого гиперболического окреста. Погрешность этой квадратурной формулы в классах $W_p^\alpha[0, 1]^n$, $E^\alpha[0, 1]^n$ равна $o((\ln M)^\beta / M^\alpha)$, где M – число узлов, β – параметр, зависящий от этих классов.

Рассмотрена задача о приближенном вычислении кратных интегралов для функций из класса $W_p^\alpha[0, 1]^n$ в случае, когда указанный класс не вложен в пространство непрерывных функций, т.е. при $\alpha \leq 1/p$.

Библиография: 26 названий.

Пусть F – некоторый класс функций, интегрируемых в смысле Римана на $[0, 1]^n$, $n > 1$, $c = (c_1, \dots, c_M) \in \mathbb{R}^M$, $t_k \in [0, 1]^n$, $k = 1, 2, \dots, M$, $I(f) = \int_{[0, 1]^n} f(y) dy$.

Число

$$\delta_M(F; c, t) = \sup_{\|f\|_F=1} \left| I(f) - \sum_{k=1}^M c_k f(t_k) \right|$$

называется *погрешностью* квадратурной формулы

$$\sum_{k=1}^M c_k f(t_k)$$

для класса функций F .

Оптимальной погрешностью квадратурных формул, соответствующих количеству узлов M , для класса F называется число

$$\delta_M(F) = \inf_{t, c} \delta_M(F; c, t),$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным наборам $t = (t_1, \dots, t_M)$, $c = (c_1, \dots, c_M)$, $t_k \in [0, 1]^n$, $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, M$.

Пусть $W_p^\alpha[0, 1]^n$ – пространство Соболева с доминирующей смешанной производной.

В 1959 г. Н. М. Коробов [1] ввел в рассмотрение квадратурные формулы с сетками вида

$$t_k = \left(\left\{ \frac{ka_1}{M} \right\}, \left\{ \frac{ka_2}{M} \right\}, \dots, \left\{ \frac{ka_n}{M} \right\} \right), \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (1)$$

где $\{x\}$ – дробная часть числа x и $a_1, a_2, \dots, a_n$ – некоторые взаимно простые с M числа, зависящие от размерности n и количества точек M . Эти сетки называются *параллелепипедными теоретико-числовыми сетками*. Оценка погрешности квадратурных формул, полученных с помощью подобных сеток (см. [1]–[11]), с коэффициентами $c_k = 1/M$ точна относительно степенной шкалы, а именно имеет место соотношение: при $\alpha > 1/p$

$$\delta_M(W_p^\alpha[0, 1]^n) \ll \frac{\ln^\beta M}{M^\alpha}, \quad (2)$$

где β – некоторое число, зависящее от параметров α , p и n .

В случае $\alpha > \max\{1/p, 1/2\}$, $1 < p < \infty$, получен точный порядок

$$\delta_M(W_p^\alpha[0, 1]^n) \asymp M^{-\alpha} (\log_2 M)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Нижняя оценка доказана в [11] и [12], а верхняя – в [13] при $2 \leq p < \infty$ и в [14], [3] при $1 \leq p < 2$.

Несмотря на простоту задания сетки вида (1) нахождение чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ является самостоятельной задачей. Построению квадратурных формул с алгоритмом нахождения чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ посвящены работы [7]–[9]. Показано, что при $n < 19$ имеется алгоритм, позволяющий вычислить коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ за $O(M \ln \ln M)$ операций.

Второй подход связан с работами С. А. Смоляка [15], В. Н. Темлякова [16], [17]. Он основан на аппроксимативных свойствах тригонометрических полиномов с гармониками из гиперболических крестов. Здесь используются введенные С. А. Смоляком сетки вида

$$\left\{ \left(\frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, \frac{r_n}{2^{k_n}} \right) : 0 \leq r_j \leq 2^{k_j} - 1, j = 1, \dots, n, k_1 + \dots + k_n \leq [\log_2 M] \right\}, \quad (3)$$

а коэффициенты c_k могут быть вычислены за $O(M (\ln M)^{n-1})$ операций.

В настоящей работе построены квадратурные формулы для пространств Соболева $W_p^\alpha[0, 1]^n$, Коробова $E^\alpha[0, 1]^n$ (см. [1]) с погрешностью вида (2), точные для тригонометрических полиномов со спектром из соответствующего гиперболического креста. Коэффициенты и узлы сетки этой формулы определены в явном виде.

Рассмотрена задача восстановления интегралов для классов $W_{pq}^\alpha[0, 1]^n$ в предельном ($\alpha = 1/p$) и “запредельном” ($\alpha \leq 1/p$) случаях.

При $\alpha = 1/p$ рассматривается пространство $W_{pq}^\alpha[0, 1]^n$, где в определении вместо нормы пространства Лебега $L_p[0, 1]^n$ используется норма анизотропного пространства Лоренца $L_{pq}[0, 1]^n$ (см. [18], [19]), здесь q является “слабым” метрическим параметром по отношению к p . Для классов $W_{p1}^{1/p}[0, 1]^n$ имеет место вложение в пространство непрерывных функций $C[0, 1]^n$ и появляется возможность построения квадратурных формул.

При $\alpha \leq 1/p$ мы исходим из того, что в реальных задачах информация f о рассматриваемом объекте $[0, 1]^n$ поступает в виде некоторых усредненных данных $\frac{1}{|e_k|} \int_{e_k} f(x) dx$ с соответствующих участков e_k ($|e_k|$ – мера e_k). Можно считать,

что метод сбора информации единообразен, т.е. $e_k = e + t_k$. Таким образом, приходим к задаче восстановления интеграла Лебега

$$I(f) = \int_{[0,1]^n} f(x) dx$$

с помощью квадратурных формул

$$\sum_{k=1}^M b_k \frac{1}{|e|} \int_{e+t_k} f(x) dx.$$

Эта задача рассматривается в §6.

Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ будем обозначать соответственно множества натуральных и целых чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}^n = \{r = (r_1, \dots, r_n) : r_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, n\}$. Аналогично определяются множества $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Z}_+^n$.

§1. Некоторые вспомогательные утверждения

Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 < q \leq \infty$. Пространство Лоренца $L_{pq}[0, 1]^n$ определяется как множество измеримых функций f на отрезке $[0, 1]^n$, для которых верно

$$\|f\|_{L_{pq}[0,1]^n} = \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 ((t_1 \cdots t_n)^{1/p} f^{*1 \cdots *n}(t_1, \dots, t_n))^q \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/q} < \infty,$$

здесь $f^{*1 \cdots *n}(t_1, \dots, t_n)$ – невозрастающая перестановка функции $f(x_1, \dots, x_n)$, взятая последовательно по переменным $x_1, \dots, x_n$. В случае $q = \infty$ выражение

$$\left(\int |F(t)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \text{ понимается как } \sup_{t>0} |F(t)|.$$

Пространство l_{pq} – это множество последовательностей $\xi = \{\xi_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ таких, что

$$\|\xi\|_{l_{pq}} = \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} (k_1 \cdots k_n)^{q/p-1} (\xi_{k_1 \dots k_n}^{*1 \cdots *n})^q \right)^{1/q} < \infty,$$

где $\{\xi_{k_1 \dots k_n}^{*1 \cdots *n}\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ – невозрастающая перестановка последовательности $\{\xi_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$, взятая последовательно по переменным индексам $m_1, \dots, m_n$. Аналогично,

$$\left(\sum_k k^{-1} |b_k|^q \right)^{1/q} = \sup_k |b_k|$$

при $q = \infty$.

Для этих пространств имеют место неравенство Гёльдера и неравенство типа Юнга–О’Нейла [20].

1. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $p' = p/(p-1)$, $q' = q/(q-1)$, тогда имеют место неравенства

$$\int_{[0,1]^n} |f(x)g(x)| dx \leq c \|f\|_{L_{pq}} \|g\|_{L_{p'q'}}, \quad (4)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |a_k b_k| \leq c \|a\|_{l_{pq}} \|b\|_{l_{p'q'}}, \quad (5)$$

где константа c зависит только от параметров p и q .

2. Пусть $1 < p, q, r < \infty$, $1 \leq \tau \leq \infty$ и

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}.$$

Тогда

$$\|f * g\|_{L_{q\tau}} \leq c \|g\|_{L_{r\infty}} \|f\|_{L_{p\tau}}, \quad (6)$$

$$\|a * b\|_{l_{q\tau}} \leq c \|b\|_{l_{r\infty}} \|a\|_{l_{p\tau}}, \quad (7)$$

где константа c зависит только от параметров p и q .

ТЕОРЕМА А. Пусть $1 < p < q < \infty$, $1 \leq \tau \leq \infty$, $\alpha = 1/p - 1/q$, $f \in L_{p\tau}[0, 1]^n$, $f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi i k x}$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ – векторы с целочисленными координатами, $\bar{k}_j = \max(|k_j|, 1)$. Тогда

$$A(f; \alpha, u, v) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\prod_{j=1}^n \bar{k}_j \right)^{-\alpha} a_{u_1+k_1v_1, \dots, u_n+k_nv_n} e^{2\pi i \sum_{j=1}^n (u_j + k_j v_j x_j)} \\ \in L_{q\tau}[0, 1]^n \quad (8)$$

и

$$\|A(f; \alpha, u, v)\|_{L_{q\tau}} \leq c \|f\|_{L_{p\tau}},$$

где константа c не зависит от функции f и векторов u, v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка нормы оператора A сводится к оценке нормы интегрального оператора свертки с ядром

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\prod_{j=1}^n (e^{2\pi i v_j x_j} - 1)^{1-\alpha}}.$$

Невозрастающая перестановка $\varphi^{*1 \dots *n}(t_1, \dots, t_n)$ функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ оценивается через $\frac{c}{t_1^{1-\alpha} \dots t_n^{1-\alpha}}$, $t \in (0, 1]^n$, где константа c не зависит от вектора v . Поэтому утверждение теоремы следует из неравенства (6).

В случае, когда $v = (1, \dots, 1)$, $u = (0, \dots, 0)$, теорема А приведена в работе В. Н. Темлякова [21].

ТЕОРЕМА Б. Пусть $1 \leq q \leq \infty$, $p' = p/(p-1)$.

а) Если $1 < p < 2$ и $f \in L_{pq}[0, 1]^n$, $f \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i m x}$, то $a \in l_{p'q}$ и

$$\|a\|_{l_{p'q}} \leq c \|f\|_{L_{pq}[0, 1]^n}.$$

б) Если $2 < p < \infty$ и $a = \{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n} \in l_{p'q}$, то найдется функция $f \in L_{pq}[0, 1]^n$ такая, что $f \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i m x}$ и

$$\|f\|_{L_{pq}[0, 1]^n} \leq c \|a\|_{l_{p'q}}.$$

Теорема Б доказана в работе [22] в более общем случае.

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ – векторы такие, что если $1 \leq p_j < \infty$, то $1 \leq q_j \leq \infty$, если же $p_j = \infty$, то $q_j = \infty$, $j = 1, \dots, n$.

Если W_j , $j = 1, \dots, n$, – некоторые фиксированные семейства конечных множеств из $\mathbb{Z}$, то семейство $W = W_1 \times \dots \times W_n$ подмножеств $\mathbb{Z}^n$ назовем *сетью* в $\mathbb{Z}^n$. Сетевое пространство $n_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(W)$ определяется как множество последовательностей комплексных чисел $\{a_{k_1 \dots k_n}\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ таких, что

$$\|a\|_{n_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(W)} = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} k_n^{q_n/p_n-1} \dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{q_1/p_1-1} (\bar{a}_{k_1 \dots k_n}(W))^{q_1} \right)^{q_2/q_1} \dots \right)^{1/q_n} < \infty,$$

здесь

$$\bar{a}_{k_1 \dots k_n}(W) = \sup_{|e_j| > k_j, e \in W} \frac{1}{|e|} \left| \sum_{k \in e} a_k \right|,$$

$|e|$ – количество элементов множества $e = e_1 \times \dots \times e_n$, а $|e_j|$ – количество элементов e_j , $j = 1, \dots, n$. Если для некоторого j $\sup_{e_j \in W_j} |e_j| = d_j$ и $k_j > d_j$, то будем считать, что $\bar{a}_{k_1 \dots k_n}(W) = 0$.

Для пространств $n_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(W)$ верны следующие свойства:

- 1) если $W_1 \subset W_2$, то $n_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(W_2) \hookrightarrow n_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(W_1)$;
- 2) если $\mathbf{q} \leq \mathbf{q}_1$, т.е. $q_j \leq q_j^1$, $j = 1, \dots, n$, то верно $n_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(W) \hookrightarrow n_{\mathbf{p}\mathbf{q}_1}(W)$;
- 3) если $p_{j_0} < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеют место вложения

$$n_{\mathbf{p}_\varepsilon \mathbf{q}_1}(W) \hookrightarrow n_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(W),$$

где

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n),$$

$$\mathbf{p}_\varepsilon = (p_1, \dots, p_{j_0-1}, p_{j_0} - \varepsilon, p_{j_0+1}, \dots, p_n),$$

$$\mathbf{q}_1 = (q_1, \dots, q_{j_0-1}, \infty, q_{j_0+1}, \dots, q_n).$$

Пусть $B = \{m_0, m_0 + 1, \dots, m_0 + l\}$ – отрезок в $\mathbb{N}$, $d \in \mathbb{Z}$, $d > l$. Множество вида $I = \bigcup_{k=0}^N [B + kd] = \bigcup_{k=0}^N \{m + kd : m \in B\}$ назовем *гармоническим отрезком* в $\mathbb{Z}$. Тогда множество вида $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, где I_i – гармонические отрезки в $\mathbb{Z}$, называется гармоническим отрезком в $\mathbb{Z}^n$.

В работе [22] в терминах сетевых пространств при $\mathbf{1} < \mathbf{p} < \infty$ получена оценка снизу нормы функции f из $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}[0, 1]^n$ через ее коэффициенты Фурье по тригонометрической системе. Фигурирующая константа в этом неравенстве зависит от параметра $\mathbf{p}$. В следующем утверждении приведено это неравенство с константой, имеющей явную зависимость от $\mathbf{p}$, которое будет использовано в дальнейшем.

ТЕОРЕМА В. Пусть $1 < \mathbf{p} < \infty$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}/(\mathbf{p} - 1)$, $f \sim \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} a_r e^{2\pi i r x}$.

Если W_0 — множество всех гармонических отрезков в $\mathbb{Z}^n$, то верно неравенство

$$\|a\|_{n_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}(W_0)} \leq c \prod_{j=1}^n \max\{p_j, p'_j\} \|f\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}[0,1]^n}$$

и, в частности, при $\mathbf{p} = (p, \dots, p)$, $\mathbf{q} = (q, \dots, q)$

$$\left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^n k_j \right)^{q/p'-1} \bar{a}_k^q(W_0) \right)^{1/q} \leq c (\max\{p, p'\})^n \|f\|_{L_{pq}[0,1]^n}.$$

Пусть $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n); \varepsilon_j = 0, 1, j = 1, \dots, n\}$ — множество вершин n -мерного единичного куба. Для вектора $\varepsilon \in E$ и последовательности комплексных чисел определим разность $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$:

$$\Delta_{\varepsilon} b_k = \Delta_{\varepsilon_1} (\Delta_{\varepsilon_2} \dots (\Delta_{\varepsilon_n} b_{k_1 \dots k_n}) \dots),$$

где

$$\Delta_{\varepsilon_j} b_k = \begin{cases} b_k, & \varepsilon_j = 0, \\ b_{k_1 \dots k_{j-1}, k_j+1, k_{j+1} \dots k_n} - b_k, & \varepsilon_j = 1. \end{cases}$$

Верно тождество

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=1}^N \cdots \sum_{k_n=1}^N b_{k_1 \dots k_n} a_{k_1 \dots k_n} \\ &= \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{k_1=(1-\varepsilon_1)N+\varepsilon_1}^{N-\varepsilon_1} \cdots \sum_{k_n=(1-\varepsilon_n)N+\varepsilon_n}^{N-\varepsilon_n} \Delta_{\varepsilon} b_{k_1 \dots k_n} \sum_{m_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{m_n=1}^{k_n} a_{m_1 \dots m_n}. \end{aligned} \quad (9)$$

Данное соотношение назовем *многомерным преобразованием Абеля*.

§ 2. Классы функций $W_{pq}^{\alpha}[0, 1]^n$ и $E_{pq}^{\alpha}[0, 1]^n$

Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\alpha > 0$, f — 1-периодическая функция из $L_{pq}[0, 1]^n$ с рядом Фурье $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi i k x}$. Будем говорить, что $f \in W_{pq}^{\alpha}[0, 1]^n$, если найдется $f^{\alpha} \in L_{pq}[0, 1]^n$, ряд Фурье которой совпадает с рядом $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \bar{k}^{\alpha} a_k e^{2\pi i k x}$, здесь и далее $\bar{k}^{\alpha} = \prod_{j=1}^n \bar{k}_j^{\alpha}$, $\bar{k}_j = \max\{|k_j|, 1\}$, $j = 1, 2, \dots, n$,

$$\|f\|_{W_{pq}^{\alpha}[0,1]^n} \stackrel{\text{def}}{=} \|f^{\alpha}\|_{L_{pq}[0,1]^n}.$$

Класс $E_{pq}^{\alpha}[0, 1]^n$, $0 < \alpha < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, $1 \leq q \leq \infty$, определяется как множество функций f из $L_1[0, 1]^n$ с коэффициентами Фурье $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ по тригонометрической системе $\{e^{2\pi i k x}\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$, удовлетворяющих соотношению

$$\|f\|_{E_{pq}^{\alpha}[0,1]} = \|\{\bar{k}^{\alpha} a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{l_{p'q}} < \infty.$$

Данный класс при $p = 1, q = \infty$ совпадает с классом Коробова [1].

Отметим некоторые свойства пространств $W_{pq}^\alpha[0, 1]^n, E_{pq}^\alpha[0, 1]^n$.

1°. Если $q < q_1$, то

$$E_{pq}^\alpha[0, 1]^n \hookrightarrow E_{pq_1}^\alpha[0, 1]^n, \quad W_{pq}^\alpha[0, 1]^n \hookrightarrow W_{pq_1}^\alpha[0, 1]^n.$$

2°. Пусть $1 \leq q, q_1 \leq \infty$; для любого $\varepsilon > 0$ верно

$$E_{pq}^\alpha[0, 1]^n \hookrightarrow E_{p-\varepsilon q_1}^\alpha[0, 1]^n, \quad W_{pq}^\alpha[0, 1]^n \hookrightarrow W_{p-\varepsilon q_1}^\alpha[0, 1]^n.$$

Свойства 1° и 2° следуют из соответствующих свойств пространств Лоренца [19].

3°. Пусть $\alpha_1 < \alpha$ и $1/p - \alpha = 1/p_1 - \alpha_1$, тогда

$$E_{pq}^\alpha[0, 1]^n \hookrightarrow E_{p_1 q}^{\alpha_1}[0, 1]^n, \quad W_{pq}^\alpha[0, 1]^n \hookrightarrow W_{p_1 q}^{\alpha_1}[0, 1]^n.$$

Докажем свойство 3°. Пусть $1 \leq q < \infty, \varepsilon > 0$. Через $\{(\bar{r}^\alpha a_r)_{m_1 \dots m_n}^{*1 \dots *n}\}_{m \in \mathbb{N}^n}$ будем обозначать невозрастающую перестановку последовательности $\bar{r}^{\alpha_1} a_r = \{\bar{r}_1^{\alpha_1} \dots \bar{r}_n^{\alpha_n} a_{r_1 \dots r_n}\}_{r \in \mathbb{Z}^n}$, взятую по переменным индексам $r_1, \dots, r_n$.

Используем свойства невозрастающей перестановки и неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned} \|f\|_{E_{p_1 q}^{\alpha_1}} &\leq \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} (k_1 \dots k_n)^{q/p'_1-1} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{1}{k_1 \dots k_n} \sum_{m_1=1}^{k_1} \dots \sum_{m_n=1}^{k_n} (\bar{r}^{\alpha_1} a_r)_{m_1 \dots m_n}^{*1 \dots *n} \right)^q \right)^{1/q} \\ &\leq c_1 \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} (k_1 \dots k_n)^{q/p'_1-1} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{1}{k_1 \dots k_n} \sum_{m_1=1}^{k_1} \dots \sum_{m_n=1}^{k_n} (m_1 \dots m_n)^{\alpha_1-\alpha} (\bar{r}^\alpha a_r)_{m_1 \dots m_n}^{*1 \dots *n} \right)^q \right)^{1/q} \\ &\leq c_2 \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} (k_1 \dots k_n)^{-q\varepsilon-1} \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{m_1=1}^{k_1} \dots \sum_{m_n=1}^{k_n} (m_1 \dots m_n)^{q(1/p'+\varepsilon)-1} ((\bar{r}^\alpha a_r)_{m_1 \dots m_n}^{*1 \dots *n})^q \right)^{1/q} \\ &\leq c_3 \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_n=1}^{\infty} (m_1 \dots m_n)^{q/p'-1} ((\bar{r}^\alpha a_r)_{m_1 \dots m_n}^{*1 \dots *n})^q \right)^{1/q} = c_3 \|f\|_{E_{pq}^\alpha}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $q = \infty$, тогда

$$\begin{aligned} \|f\|_{E_{p\infty}^{\alpha_1}} &\leq \sup_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{(k_1 \dots k_n)^{1/p}} \sum_{m_1=1}^{k_1} \dots \sum_{m_n=1}^{k_n} (\bar{r}^{\alpha_1} a_r)_{m_1 \dots m_n}^{*1 \dots *n} \\ &\leq c_1 \sup_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{(k_1 \dots k_n)^{1/p}} \sum_{m_1=1}^{k_1} \dots \sum_{m_n=1}^{k_n} (m_1 \dots m_n)^{\alpha_1 - \alpha} (\bar{r}^{\alpha} a_r)_{m_1 \dots m_n}^{*1 \dots *n} \\ &\leq c_1 \sup_{k \in \mathbb{N}^n} (k_1 \dots k_n)^{1/p'} (\bar{r}^{\alpha} a_r)_{k_1 \dots k_n}^{*1 \dots *n} \\ &\quad \times \sup_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{(k_1 \dots k_n)^{1/p}} \sum_{m_1=1}^{k_1} \dots \sum_{m_n=1}^{k_n} (m_1 \dots m_n)^{-1/p'_1} = c \|f\|_{E_{p\infty}^{\alpha}}. \end{aligned}$$

Вложение $W_{pq}^{\alpha}[0, 1]^n \hookrightarrow W_{p_1 q}^{\alpha_1}[0, 1]^n$ непосредственно следует из теоремы А.

4°. При $2 < p < \infty$

$$E_{pq}^{\alpha}[0, 1]^n \hookrightarrow W_{pq}^{\alpha}[0, 1]^n,$$

при $1 < p < 2$

$$W_{pq}^{\alpha}[0, 1]^n \hookrightarrow E_{pq}^{\alpha}[0, 1]^n.$$

Свойство 4° следует из теоремы Б.

Пусть $A[0, 1]^n$ – множество абсолютно сходящихся кратных тригонометрических рядов,

$$\|f\|_A = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |a_k|$$

и $U[0, 1]^n$ – множество непрерывных функций на $[0, 1]^n$ с мажорантой частичных сумм,

$$\|f\|_U = \sup_{x \in [0, 1]^n} \sup_{N \in \mathbb{N}} |S_{Q_N}(f; x)|,$$

где $S_{Q_N}(f; x) = \sum_{m_1=-N}^N \dots \sum_{m_n=-N}^N a_{m_1 \dots m_n} e^{2\pi i \sum_{j=1}^n m_j x_j}$ – частичная сумма Фурье, соответствующая кубу $Q_N = \{m \in \mathbb{Z}^n : |m_j| \leq N, j = 1, \dots, n\}$.

5°. Пусть $1 < p < \infty$, тогда $E_{p1}^{1/p}[0, 1]^n \hookrightarrow A[0, 1]^n$.

Действительно, пусть $f \in E_{p1}^{1/p}[0, 1]^n$, $f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi i k x}$. Заметим, что $\left\{ \frac{1}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_n)^{1/p}} \right\} \in l_{p\infty}$, поэтому из неравенства Гёльдера (5) непосредственно следует

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |a_k| \leq \|\{\bar{k}^{1/p} a_k\}\|_{l_{p'_1}} \|\{\bar{k}^{-1/p}\}\|_{l_{p\infty}} = c \|f\|_{E_{p1}^{1/p}}.$$

6°. Если $1 < p < 2$, то $W_{p1}^{1/p}[0, 1]^n \hookrightarrow A[0, 1]^n$. Если $2 \leq p < \infty$, то $W_{p1}^{1/p}[0, 1]^n \hookrightarrow U[0, 1]^n$.

Докажем свойство 6°. При $1 < p < 2$ соответствующее вложение следует из 4° и 5°. Пусть теперь $2 \leq p < \infty$. Достаточно оценить частичную сумму ряда Фурье функции $f \in W_{p1}^{1/p}[0, 1]^n$ вида

$$\sum_{1 \leq k \leq N} a_k e^{2\pi i k x} = \sum_{k_1=1}^N \dots \sum_{k_n=1}^N a_{k_1 \dots k_n} e^{2\pi i \sum_{j=1}^n k_j x_j}.$$

Применяя преобразование Абеля (9), получаем

$$\left| \sum_{1 \leq k \leq N} a_k e^{2\pi i k x} \right| \leq c \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{k=(1-\varepsilon)N+\varepsilon}^{N-\varepsilon} \frac{1}{k^{1/p}} \left| \frac{1}{k^\varepsilon} \sum_{1 \leq m \leq k} m^{1/p} a_m e^{2\pi i m x} \right|.$$

Используем неравенство Гёльдера (5), учитывая, что $\left\{ \frac{1}{k^{1/p}} \right\}_{k \in \mathbb{N}^n} \in l_{p\infty}$:

$$\left| \sum_{1 \leq k \leq N} a_k e^{2\pi i k x} \right| \leq c \sum_{\varepsilon \in E} \left\| \left\{ \frac{1}{k^{1/p}} \right\} \right\|_{l_{p\infty}} \left\| \{m^{1/p} a_m e^{2\pi i m x}\} \right\|_{n_{p', \varepsilon^{-1}}(W)}. \quad (10)$$

Здесь W — множество всех гармонических отрезков, $\varepsilon^{-1} = (\varepsilon_1^{-1}, \dots, \varepsilon_n^{-1})$, считаем, что $\varepsilon_j^{-1} = \infty$ при $\varepsilon_j = 0$ и $\varepsilon_j^{-1} = 1$ при $\varepsilon_j = 1$. Воспользуемся теоремой В и (10) и получим

$$\left| \sum_{1 \leq k \leq N} a_k e^{2\pi i k x} \right| \leq c 2^n \left\| \{m^{1/p} a_m e^{2\pi i m x}\} \right\|_{n_{p', 1}} \leq c_1 \|f\|_{W_{p'}^{1/p}}.$$

§3. Квадратурные формулы

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1]^n$, $\operatorname{sgn} r = 1$ при $r > 0$ и $\operatorname{sgn} r = 0$ при $r = 0$. Для 1-периодической функции f из $C[0, 1]^n$ определим функцию

$$\begin{aligned} T_{2^m}(f; x) &= \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} \frac{1}{2^m} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \dots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^n (r_j + \operatorname{sgn} k_j)} \\ &\quad \times f\left(x_1 + \frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, x_n + \frac{r_n}{2^{k_n}}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Построенный оператор является конечной линейной комбинацией операторов сдвига, соответствующих узлам сетки Смоляка

$$\left\{ \left(\frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, \frac{r_n}{2^{k_n}} \right) : 0 \leq r_j \leq 2^{k_j} - 1, k_1 + \dots + k_n = m, r_j, k_j \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Через D_k , $D_{k\nu}$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $\nu = 1, \dots, n-1$, обозначим множества

$$\begin{aligned} D_k &= \left\{ (2^{k_1-1}(2r_1 + \operatorname{sgn} k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1} + \operatorname{sgn} k_{n-1}), 2^{k_n} r_n) : \right. \\ &\quad \left. r \in \mathbb{Z}^n, r_n \neq 0 \right\}, \\ D_{k\nu} &= \left\{ (0, \dots, 0, 2^{k_\nu-1}(2r_\nu + \operatorname{sgn} k_\nu), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1} + \operatorname{sgn} k_{n-1}), 0) : \right. \\ &\quad \left. (r_\nu, \dots, r_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Целью этого параграфа является доказательство теоремы, показывающей, что оператор T_{2^m} есть мультипликативное преобразование кратных рядов Фурье, соответствующее определенной числовой последовательности $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$, принимающей значения $+1, -1, 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in L_1[0, 1]^n$ и $\sum_{r \in \mathbb{Z}^n} a_r e^{2\pi i r x}$ – ее ряд Фурье. Тогда для функции $T_{2^m}(f; x)$, определенной равенством (11), имеет место

$$\begin{aligned} T_{2^m}(f; x) \sim a_{0 \dots 0} + \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \text{sgn } k_j} \sum_{r \in D_k} a_r e^{2\pi i r x} \\ + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{\substack{\sum_{j=\nu+1}^{n-1} k_j \leq m < \sum_{j=\nu}^{n-1} k_j}} (-1)^{\sum_{j=\nu+1}^{n-1} \text{sgn } k_j} \sum_{r \in D_{k_\nu}} a_r e^{i 2\pi r x}. \end{aligned}$$

Здесь и далее будем считать, что $\sum_{j=\nu+1}^{n-1} \beta_j = 0$ при $\nu = n-1$.

Доказательству теоремы 1 предпошлем несколько лемм.

ЛЕММА 1 [19]. Пусть $d \in \mathbb{N}^n$, $B = B_1 \times \dots \times B_n$ – отрезок в $\mathbb{Z}^n$, $d_j > |B_j|$, $j = 1, \dots, n$, $I = \bigcup_{r \in \mathbb{Z}^n} ((B_1 + r_1 d_1) \times \dots \times (B_n + r_n d_n))$.

Если $f \in L_1[0, 1]^n$, $f \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i m x}$, то ряд

$$S_I(f) = \sum_{m \in I} a_m e^{2\pi i m x}$$

является рядом Фурье функции

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} \sum_{0 \leq r \leq d-1} f\left(x + \frac{r}{d}\right) D_B\left(\frac{r}{d}\right) \\ = \frac{1}{d_1 \dots d_n} \sum_{r_1=0}^{d_1-1} \dots \sum_{r_n=0}^{d_n-1} f\left(x_1 + \frac{r_1}{d_1}, \dots, x_n + \frac{r_n}{d_n}\right) D_B\left(\frac{r_1}{d_1}, \dots, \frac{r_n}{d_n}\right), \end{aligned}$$

где $D_B(x) = \sum_{m \in B} e^{i 2\pi m x}$ – ядро Дирихле, соответствующее отрезку B .

ЛЕММА 2. Пусть f – 1-периодическая функция из $L_1[0, 1]^n$ и $\sum_{r \in \mathbb{Z}^n} a_r e^{i 2\pi r x}$ – ее ряд Фурье. Тогда ряд Фурье функции $T_{2^m}(f; x)$, определенной равенством (11), совпадает с рядом

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \text{sgn } k_j} \\ \times \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1 + \text{sgn } k_1), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n + \text{sgn } k_n), r_n} 2^{k_n}, \end{aligned}$$

где $d_{r_1 \dots r_n} = a_{r_1 \dots r_n} e^{2\pi i \sum_{j=1}^n r_j x_j}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $T_{2^m}(f; x)$ есть конечная линейная комбинация функций из $L_1[0, 1]^n$, то $T_{2^m}(f; x) \in L_1[0, 1]$. Заметим теперь, что $(-1)^r = e^{i2\pi \frac{2^{k-1}r}{2^k}}$ при $k \in \mathbb{N}$, $r = 1, 2, \dots, 2^k - 1$, поэтому функцию $T_{2^m}(f; x)$ можно представить в виде

$$T_{2^m}(f; x) = \frac{1}{2^m} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \times \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \dots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} D_{k_1 \dots k_n} \left(\frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, \frac{r_n}{2^{k_n}} \right) f \left(x_1 + \frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, x_n + \frac{r_n}{2^{k_n}} \right),$$

где

$$D_{k_1 \dots k_n}(y_1, \dots, y_n) = e^{2\pi i \sum_{j=1}^{n-1} 2^{k_j-1} y_j}.$$

Воспользовавшись леммой 1, убеждаемся в справедливости утверждения.

ЛЕММА 3. Пусть $b = \{b_m\}_{m \in \mathbb{Z}} \in l_1$, тогда верно представление

$$\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} b_m = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_{2^{k-1} + r2^k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что произвольное целое число m , отличное от нуля, представимо единственным образом в виде $m = 2^{k-1} + r2^k$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$, откуда и следует соответствующее представление суммы $\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} b_m$.

ЛЕММА 4. Пусть $d = \{d_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n} \in l_1$, тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n \leq m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^n \operatorname{sgn} k_j} \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1 + \operatorname{sgn} k_1), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n + \operatorname{sgn} k_n)} = d_{0, \dots, 0} \\ & + \sum_{\nu=1}^n \sum_{\substack{k_{\nu+1} + \dots + k_n \leq m \\ < k_{\nu} + \dots + k_n}} (-1)^{\sum_{j=\nu+1}^n \operatorname{sgn} k_j} \\ & \times \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-\nu+1}} d_{0, \dots, 0, 2^{k_{\nu}-1}(2r_{\nu} + \operatorname{sgn} k_{\nu}), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n + \operatorname{sgn} k_n)}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n \leq m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\text{sgn } k_1+\dots+\text{sgn } k_n} \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\text{sgn } k_1), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n+\text{sgn } k_n)} \\
&= \sum_{k_1=0}^m (-1)^{\text{sgn } k_1} \sum_{\substack{k_2+\dots+k_n \leq m-k_1 \\ k_j \in \mathbb{Z}_+}} (-1)^{\sum_{j=2}^n \text{sgn } k_j} \\
&\quad \times \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\text{sgn } k_1), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n+\text{sgn } k_n)} \\
&= \sum_{\substack{k_2+\dots+k_n \leq m \\ k_j \in \mathbb{Z}_+}} (-1)^{\sum_{j=2}^n \text{sgn } k_j} \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} d_{r_1, 2^{k_2-1}(2r_2+\text{sgn } k_2), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n+\text{sgn } k_n)} \\
&\quad - \sum_{k_1=1}^m \sum_{k_2+\dots+k_n \leq m-k_1} (-1)^{\sum_{j=2}^n \text{sgn } k_j} \\
&\quad \times \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\text{sgn } k_1), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n+\text{sgn } k_n)}.
\end{aligned}$$

Воспользуемся леммой 3:

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{k_2+\dots+k_n \leq m} (-1)^{\sum_{j=2}^n \text{sgn } k_j} \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} d_{0, 2^{k_2-1}(2r_2+\text{sgn } k_2), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n+\text{sgn } k_n)} \\
&\quad + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2+\dots+k_n \leq m} (-1)^{\sum_{j=2}^n \text{sgn } k_j} \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\text{sgn } k_1), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n+\text{sgn } k_n)} \\
&\quad - \sum_{k_1=1}^m \sum_{k_2+\dots+k_n \leq m-k_1} (-1)^{\sum_{j=2}^n \text{sgn } k_j} \\
&\quad \times \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\text{sgn } k_1), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n+\text{sgn } k_n)} \\
&= \sum_{\substack{k_2+\dots+k_n \leq m \\ k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}}} (-1)^{\sum_{j=2}^n \text{sgn } k_j} \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} d_{0, 2^{k_2-1}(2r_2+\text{sgn } k_2), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n+\text{sgn } k_n)} \\
&\quad + \sum_{\substack{k_2+\dots+k_n \leq m \\ < k_1+\dots+k_n}} (-1)^{\sum_{j=2}^n \text{sgn } k_j} \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\text{sgn } k_1), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n+\text{sgn } k_n)}.
\end{aligned}$$

Применяя к сумме

$$\sum_{\substack{k_2+\dots+k_n \leq m \\ k_j \in \mathbb{Z}_+}} (-1)^{\sum_{j=2}^n \text{sgn } k_j} \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} d_{0, 2^{k_2-1}(2r_2+\text{sgn } k_2), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n+\text{sgn } k_n)}$$

ту же процедуру, что и выше, через $n-1$ шагов придем к искомому результату.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из леммы 3 следует, что

$$\begin{aligned}
 T_{2^m}(f; x) &\sim \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m \\ k_j \in \mathbb{Z}_+}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \\
 &\times \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}), r_n} 2^{k_n} \\
 &= \sum_{k_1+\dots+k_n=m} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \\
 &\times \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} \sum_{r_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}), r_n} 2^{k_n} \\
 &+ \sum_{k_1+\dots+k_{n-1} \leq m} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \\
 &\times \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}), 0}.
 \end{aligned}$$

Применяя лемму 4 ко второму слагаемому, получаем требуемое утверждение.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$Q_k = \{r \in \mathbb{Z}^n : |r_j| \leq 2^{k_j-1}, j = 1, 2, \dots, n\} \setminus \{(\pm[2^{k_1-1}], \dots, \pm[2^{k_n-1}])\}$$

— целочисленный параллелепипед, в котором исключены вершины. Множество

$$G_m = \bigcup_{\substack{k_1+\dots+k_n=m+1 \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} Q_k \quad (13)$$

назовем *ступенчатым гиперболическим крестом порядка m* .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$,

$$f(y) = \sum_{k \in G_m} a_k e^{2\pi i k y}$$

— тригонометрический полином, соответствующий ступенчатому гиперболическому кресту G_m , тогда оператор (11) определяет квадратурную формулу, точную для этой функции, т.е.

$$\sup_{x \in [0,1]^n} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть F — некоторое функциональное пространство,

$$E_{G_m}(f)_F = \inf_{\{c_r\}} \left\| f(x) - \sum_{r \in G_m} c_r e^{2\pi i r x} \right\|_F$$

— наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами со спектром из гиперболического креста G_m в функциональном пространстве F .

Из следствия 1 и линейности оператора $T_{2^m}(f; x)$ вытекает, что для получения оценок вида

$$|I(f) - T_{2^m}(f; x)| \leq C(m; F) E_{G_m}(f)_F,$$

где константа $C(m, F)$ зависит от класса F и параметра m , достаточно доказать, что

$$|I(f) - T_{2^m}(f; x)| \leq C(m; F) \|f\|_F.$$

§ 4. Оценка погрешности квадратурных формул для функций из пространств E_{pq}^α

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $m, n \in \mathbb{N}$, G_m – ступенчатый гиперболический крест (13).

а) Если $\alpha > 1/p$, $f \in E_{pq}^\alpha[0, 1]^n$, то

$$\sup_{x \in [0, 1]^n} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| \leq c \frac{m^{(n-1)/p}}{2^{\alpha m}} E_{G_m}(f)_{E_{pq}^\alpha}.$$

б) Если $\alpha = 1/p$, $f \in E_{p1}^{1/p}[0, 1]^n$, то

$$\sup_{x \in [0, 1]^n} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| \leq c \frac{m^{(n-1)/p}}{2^{m/p}} E_{G_m}(f)_{E_{p1}^{1/p}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in E_{pq}^\alpha[0, 1]^n$. Из теоремы 1 и свойства 5° пространства $E_{pq}^\alpha[0, 1]^n$ следует, что

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in [0, 1]^n} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| \\ & \leq \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} \left| \sum_{r \in D_k} a_r e^{2\pi i r x} \right| + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{\substack{k_\nu + 1 + \dots + k_{n-1} \leq m \\ < k_\nu + \dots + k_{n-1}}} \left| \sum_{r \in D_{k_\nu}} a_r e^{2\pi i r x} \right| \\ & \leq J_m + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} \sum_{\substack{k_\nu + \dots + k_{n-1} = s \\ k \in \mathbb{Z}_+^{n-\nu}}} \left| \sum_{r \in D_{k_\nu}} a_r e^{2\pi i r x} \right| \\ & = J_m + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} J_{\nu s}, \end{aligned}$$

D_k , D_{k_ν} определены в (12). Слагаемое $J_{\nu s}$ оценивается через

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{\alpha(s-n+\nu)}} \sum_{\substack{k_\nu + \dots + k_{n-1} = s \\ k_j \in \mathbb{Z}_+}} \\ & \times \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-\nu}} \frac{|b_{0, \dots, 0, 2^{k_\nu-1}(2r_\nu + \operatorname{sgn} k_\nu), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1} + \operatorname{sgn} k_{n-1}), 0}|}{|\bar{r}_\nu \cdots \bar{r}_{n-1}|^\alpha}, \end{aligned}$$

где

$$b_{l_1 \dots l_n} = |\bar{l}_1 \dots \bar{l}_n|^\alpha a_{l_1 \dots l_n}.$$

Применяя неравенство Гёльдера (5), получаем

$$J_{\nu s} \leq \frac{1}{2^{\alpha s}} \|b\|_{l_{p'q}} \|\xi_{\nu s}\|_{l_{pq'}} \leq \frac{1}{2^{\alpha s}} \|f\|_{E_{pq}^\alpha} \|\xi_{\nu s}\|_{l_{pq'}}, \quad (14)$$

здесь $\xi_{\nu s} = \{\xi_t^{\nu s}\}_{t \in \mathbb{Z}^n}$ — последовательность, элементы которой определяются следующим образом: $\xi_t^{\nu s} = |\bar{r}_\nu \dots \bar{r}_n|^{-\alpha}$ при $k_\nu + \dots + k_{n-1} = s$, $t = (0, \dots, 2^{k_\nu-1}(2r_\nu + \operatorname{sgn} k_\nu), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1} + \operatorname{sgn} k_{n-1}), 0)$ и $\xi_t^{\nu s} = 0$ в остальных случаях.

Данная последовательность $\xi_{\nu s}$ состоит из чисел вида $1/|\bar{r}_\nu \dots \bar{r}_{n-1}|^\alpha$, $r \in \mathbb{Z}^{n-\nu}$, причем каждое такое число встречается не более $s^{n-\nu}$ раз. Учитывая условие $\alpha > 1/p$, нетрудно видеть, что

$$\|\xi_{\nu s}\|_{l_{pq}} \leq c_1 s^{(n-\nu)/p} \leq c_1 s^{(n-1)/p}$$

и, следовательно,

$$J_{\nu s} \leq \frac{c_1 s^{(n-1)/p}}{2^{\alpha s}} \|f\|_{E_{pq}^\alpha}.$$

Тогда

$$\sum_{s=m+1}^{\infty} J_{\nu s} \leq c_1 \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{s^{(n-1)/p}}{2^{\alpha s}} \|f\|_{E_{pq}^\alpha} \leq c_2 \frac{m^{(n-1)/p}}{2^{\alpha m}} \|f\|_{E_{pq}^\alpha}.$$

Слагаемое J_m оценивается так же:

$$J_m \leq c_3 \frac{m^{(n-1)/p}}{2^{\alpha m}} \|f\|_{E_{pq}^\alpha}.$$

С учетом замечания 1 утверждение п. а) теоремы 2 доказано.

Доказательство п. б) проводится по той же схеме. Достаточно рассмотреть неравенство (14) при $q = 1$, учитывая, что $\{(\bar{r}_\nu \dots \bar{r}_{n-1})^{-1/p}\}_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} \in l_{p\infty}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Порядок оптимальной погрешности квадратурных формул для класса Коробова известен:

$$\delta_M(E^\alpha[0, 1]^n) \asymp M^{-\alpha} (\log_2 M)^{n-1}.$$

Нижняя оценка получена в [23], а верхняя — в [3] при $n = 2$ и в [13] в общем случае.

Оператор $T_{2^m}(f; x)$ не реализует оптимальную погрешность. Из теоремы 2 следует оценка

$$\delta_M(E^\alpha[0, 1]^n) \leq M^{-\alpha} (\log_2 M)^{(n-1)(1+\alpha)}.$$

Следующее утверждение показывает, что оценки, приведенные в теореме 2 для квадратурной формулы $T_{2^m}(f; x)$, неулучшаемые по порядку.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $x \in [0, 1]^n$, $1 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1/p$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{\|f\|_{E_{pq}^\alpha}=1} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| &\asymp \frac{m^{(n-1)/p}}{2^{\alpha m}}, \\ \sup_{\|f\|_{E_{p1}^{1/p}}=1} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| &\asymp \frac{m^{(n-1)/p}}{2^{m/p}}, \end{aligned}$$

где соответствующие константы зависят лишь от параметров p, α, n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху следует из теоремы 2. Пусть $x \in [0, 1]^n$,

$$f(y) = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{N}^n}} 2^{-\alpha m} e^{2\pi i \sum_{j=1}^n 2^{k_j} (y_j - x_j)},$$

тогда

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{[0,1]^n} f(y) dy = 0, \\ \|f\|_{E_{pq}^\alpha} &\sim \left(\sum_{k=1}^{m^{(n-1)}} k^{q/p'-1} \right)^{1/q} \sim m^{(n-1)/p'}, \\ \|f\|_{E_{p1}^{1/p}} &\sim \sum_{k=1}^{m^{(n-1)}} k^{1/p'-1} \sim m^{(n-1)/p'}. \end{aligned}$$

Рассмотрим функции $f_1(y) = f(y)/\|f\|_{E_{pq}^\alpha}$ и $f_2(y) = f(y)/\|f\|_{E_{p1}^{1/p}}$.

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \sup_{\|f\|_{E_{pq}^\alpha}=1} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| &\geq |T_{2^m}(f_1, x)| \\ &\geq c_1 m^{-(n-1)/p'} 2^{-\alpha m} \left(\sum_{k=1}^{m^{n-1}} 1 \right) = c_1 \frac{m^{(n-1)/p}}{2^{\alpha m}}, \\ \sup_{\|f\|_{E_{p1}^{1/p}}=1} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| &\geq |T_{2^m}(f_2, x)| \geq c_2 \frac{m^{(n-1)/p}}{2^{m/p}}. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

§ 5. Оценка погрешности квадратурных формул для функций из пространств $W_{pq}^\alpha[0, 1]^n$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha > 1/2$, $p \neq 2$, $1 \leq q \leq \infty$, $m, n \in \mathbb{N}$, G_m – ступенчатый гиперболический крест (13).

а) Если $\alpha > 1/p$, $r = \min\{p, 2\}$, $f \in W_{pq}^\alpha[0, 1]^n$, то

$$\sup_{x \in [0, 1]^n} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| \leq c \frac{m^{(n-1)/r}}{2^{\alpha m}} E_{G_m}(f)_{W_{pq}^\alpha}.$$

б) Если $\alpha = 1/p$, $f \in W_{p1}^{1/p}[0, 1]^n$, то

$$\sup_{x \in [0, 1]^n} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| \leq c \frac{m^{(n-1)/p}}{2^{m/p}} E_{G_m}(f)_{W_{p1}^{1/p}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $p < 2$. Из условий теоремы следует, что $r = p$, $1/\alpha < r < 2$. Воспользуемся теоремой 2 и вложением $W_{pq}^\alpha[0, 1]^n \hookrightarrow E_{pq}^\alpha[0, 1]^n$ при $1 < p < 2$ (см. свойство 4°). Тогда

$$\sup_{x \in [0, 1]^n} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| \leq c_1 \frac{m^{(n-1)/r}}{2^{\alpha m}} E_{G_m}(f)_{E_{pq}^\alpha} \leq c \frac{m^{(n-1)/r}}{2^{\alpha m}} E_{G_m}(f)_{W_{pq}^\alpha}.$$

Если $p > 2$, то, учитывая, что $\alpha > 1/2$, из теоремы 2 и неравенства Гёльдера (4) также имеем

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, 1]^n} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| &\leq c_1 \frac{m^{(n-1)/r}}{2^{\alpha m}} E_{G_m}(f)_{E_{22}^\alpha} \\ &\sim \frac{m^{(n-1)/r}}{2^{\alpha m}} E_{G_m}(f)_{W_{22}^\alpha} \leq c \frac{m^{(n-1)/r}}{2^{\alpha m}} E_{G_m}(f)_{W_{pq}^\alpha}. \end{aligned}$$

Пункт б) также следует из теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\alpha > 1/2 > 1/p$, $m, n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\sup_{\|f\|_{W_p^\alpha[0, 1]^n} = 1} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| \asymp \frac{m^{(n-1)/2}}{2^{\alpha m}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим тот же пример, что и в доказательстве следствия 2.

Пусть $x \in [0, 1]^n$,

$$f_0(y) = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} 2^{-\alpha m} e^{2\pi i \sum_{j=1}^n k_j (y_j - x_j)}.$$

Тогда, используя теорему Литтлвуда–Пели [24], получаем

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{W_p^\alpha} &\sim \left\| \left(\sum_{k_1} \cdots \sum_{k_n} |\Delta_k(f_0^\alpha, x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p} \sim m^{(n-1)/2}, \\ \sup_{\|f\|_{W_p^\alpha}=1} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| &\geq cm^{-(n-1)/2} |T_{2^m}(f_0, x)| \\ &\geq cm^{-(n-1)/2} 2^{-\alpha m} m^{n-1} = c \frac{m^{(n-1)/2}}{2^{\alpha m}}. \end{aligned}$$

Обратное неравенство следует из теоремы 3. Следствие доказано.

ЛЕММА 5. Пусть $2 \leq p < \infty$, $N \geq 2$, $r > 0$, W – произвольная сеть в $\mathbb{Z}^n$. Если T_N – линейный оператор такой, что

$$\begin{aligned} \|T_N f\|_{n_{p'/p}(W)} &\leq c_1 N p^r \|f\|_{L_p}, \\ \|T_N f\|_{n_{22}(W)} &\leq c_2 N^{1/2} \|f\|_{L_2}, \end{aligned} \quad (15)$$

где c_1, c_2 – постоянные, не зависящие от p, f, N , то

$$\|T_N f\|_{n_{p'/p}(W)} \leq c p^r N^{1/p'} (\log_2 N)^{r(1/p' - 1/p)} \|f\|_{L_p}, \quad (16)$$

где постоянная c не зависит от p, f, N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_0 = \log_2 N$, тогда, используя соотношения

$$N = N^{1/p'_0} N^{1/p_0} = 2N^{1/p'_0},$$

$$p_0^r = (\log_2 N)^r = (\log_2 N)^{r(1/p'_0 - 1/p_0)} (\log_2 N)^{2r/p_0} \leq 4^r (\log_2 N)^{r(1/p'_0 - 1/p_0)},$$

неравенство (15) перепишем в виде

$$\|T_N f\|_{n_{p'_0/p_0}} \leq c_r N^{1/p'_0} (\log_2 N)^{r(1/p'_0 - 1/p_0)} \|f\|_{L_{p_0}}.$$

Воспользуемся комплексным интерполяционным методом, учитывая при этом (см. [25]), что

$$\begin{aligned} (n_{p_0 q_0}(W), n_{p_0 q_0}(W))_{[\theta]} &\hookrightarrow n_{pq}(W), \\ \frac{1}{p} &= \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \end{aligned}$$

тогда при $2 < p < p_0 = \log_2 N$ получим

$$\|T_N f\|_{n_{p'/p}} \leq c_r N^{1/p'} (\log_2 N)^{r(1/p' - 1/p)} \|f\|_{L_p}. \quad (17)$$

Пусть теперь $p_0 \leq p < \infty$, тогда $N \leq N^{1/p'} N^{1/p_0} \leq 2N^{1/p'}$ и, следовательно, из (15) имеем

$$\|T_N f\|_{n_{p'/p}} \leq 2c_1 N^{1/p'} p^r \|f\|_{L_p} \leq 2c_1 N^{1/p'} (\log_2 N)^{r(1/p' - 1/p)} p^r \|f\|_{L_p}. \quad (18)$$

Таким образом, объединяя неравенства (17) и (18), получаем (16).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha \leq 1/2$, $1 \leq q \leq \infty$, $n, m \in \mathbb{N}$, $Y_k = \bigcup_{j=1}^n \{r \in \mathbb{Z}^n : |r_j| < 2^{k_j-1}\}$ – крест, соответствующий индексу $k \in \mathbb{Z}_+^n$, G_m – ступенчатый гиперболический крест (13).

а) Если $\alpha > 1/p$, $f \in W_{pq}^\alpha[0, 1]^n$, то

$$\sup_{x \in [0, 1]^n} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| \leq c \frac{m^{(n-1)(1-\alpha)} (\log_2 m)^{n(2(1-\alpha)-1/p)}}{2^{\alpha m}} \times E_{G_m}(f)_{W_{pq}^\alpha}, \quad (19)$$

$$\sup_{x \in [0, 1]^n} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| \leq c \frac{1}{2^{-\alpha m}} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} E_{Y_k}(f)_{W_{pq}^\alpha}. \quad (20)$$

б) Если $\alpha = 1/p$, $f \in W_{p1}^{1/p}[0, 1]^n$, то

$$\sup_{x \in [0, 1]^n} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| \leq c \frac{1}{2^{-m/p}} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} E_{Y_k}(f)_{W_{p1}^{1/p}}. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно свойствам 4°, 6° (см. § 2) можно считать, что $f(y) = \sum_r a_r e^{2\pi i r y}$ – тригонометрический полином, т.е. только конечное число коэффициентов отлично от нуля. По теореме 1 для квадратурной формулы $T_{2^m}(f; x)$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| &= \left| \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \text{sgn } k_j} \sum_{r \in D_k} a_r e^{2\pi i r x} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{\substack{k_\nu + 1 + \dots + k_{n-1} \leq m \\ < k_\nu + \dots + k_{n-1}}} (-1)^{\sum_{j=\nu+1}^{n-1} \text{sgn } k_j} \sum_{r \in D_{k_\nu}} a_r e^{2\pi i r x} \right| \\ &\leq \left| \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \text{sgn } k_j} \sum_{r \in D_k} a_r e^{2\pi i r x} \right| \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} \left| \sum_{\substack{k_\nu + \dots + k_{n-1} = s \\ k_j \in \mathbb{Z}_+}} (-1)^{\sum_{j=\nu+1}^{n-1} \text{sgn } k_j} \sum_{r \in D_{k_\nu}} a_r e^{2\pi i r x} \right| \\ &= J_m(x) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} J_{s\nu}(x), \end{aligned}$$

множества D_k , D_{k_ν} определены в (12). Пусть $b_{r_1 \dots r_n} = \bar{r}_1^\alpha \dots \bar{r}_n^\alpha a_{r_1 \dots r_n} e^{2\pi i r x}$,

$r \in \mathbb{Z}^n$, $x \in [0, 1]^n$, тогда для первого слагаемого $J_m(x)$ имеет место

$$J_m(x) \leq 2^{-\alpha(m-n+1)} \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} \sum_{r_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|r_n|^\alpha \prod_{j=1}^{n-1} |2r_j + 1|^\alpha} \\ \times \left| \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \right. \\ \left. \times b_{2^{k_1-1}(2r_1 + \operatorname{sgn} k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1} + \operatorname{sgn} k_{n-1}), r_n} 2^{k_n} \right|.$$

Для оценки $J_m(x)$ достаточно оценить сумму вида

$$\sum_{r_1=1}^N \dots \sum_{r_n=1}^N \frac{1}{\prod_{j=1}^n |r_j|^\alpha} \left| \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \right. \\ \left. \times b_{2^{k_1-1}(2r_1 + \operatorname{sgn} k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1} + \operatorname{sgn} k_{n-1}), r_n} 2^{k_n} \right|. \quad (22)$$

Пусть $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n); \varepsilon_j = 0, 1, j = 1, \dots, n\}$ – множество вершин n -мерного единичного куба, h – произвольное число, удовлетворяющее условию $1/p < 1/h < \alpha$. Применим преобразование Абеля (9), а затем неравенство Гёльдера (5), учитывая при этом, что $1/p < \alpha$:

$$\left| \sum_{r_1=1}^N \dots \sum_{r_n=1}^N \frac{1}{\prod_{j=1}^n |r_j|^\alpha} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \right. \\ \left. \times b_{2^{k_1-1}(2r_1 + \operatorname{sgn} k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1} + \operatorname{sgn} k_{n-1}), r_n} 2^{k_n} \right| \\ \leq c_1 \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{r_n = (1-\varepsilon_n)N + \varepsilon_n}^{N-\varepsilon_n} \dots \sum_{r_1 = (1-\varepsilon_1)N + \varepsilon_1}^{N-\varepsilon_1} \frac{1}{\prod_{j=1}^n |r_j|^{\alpha + \varepsilon_j}} \\ \times \left| \sum_{\nu_1=1}^{r_1} \dots \sum_{\nu_n=1}^{r_n} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \right. \\ \left. \times b_{2^{k_1-1}(2\nu_1 + \operatorname{sgn} k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2\nu_{n-1} + \operatorname{sgn} k_{n-1}), \nu_n} 2^{k_n} \right| \\ \leq c_2 \sum_{\varepsilon \in E} \|r^{-\alpha}\|_{l_{hh'}} \|d\|_{n_{h', h\varepsilon-1}} \leq c_3 2^n \|r^{-\alpha}\|_{l_{hh'}} \|d\|_{n_{h', h}}, \quad (23)$$

где $r^{-\alpha} = \{(r_1 \cdots r_n)^{-\alpha}\}_{r \in \mathbb{N}^n}$,

$$d = \left\{ \sum_{\substack{k_1 + \cdots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \text{sgn } k_j} \times b_{2^{k_1-1}(2\nu_1 + \text{sgn } k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2\nu_{n-1} + \text{sgn } k_{n-1}), \nu_n 2^{k_n}} \right\}_{\nu \in \mathbb{N}^n}. \quad (24)$$

Так как $1/p < 1/h < \alpha$, то $\|r^{-\alpha}\|_{l_{hh'}} < \infty$ и, более того, имеет место оценка:

$$\|r^{-\alpha}\|_{l_{hh'}} \leq c_4 \frac{1}{(\alpha - 1/h)^{n/h'}} \leq c_4 \frac{1}{(\alpha - 1/h)^{n/p'}}, \quad (25)$$

здесь константа не зависит от h .

Пусть A_m – оператор, сопоставляющий каждой функции $\psi \sim \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} b_r e^{2\pi i r x}$ таблицу чисел (24). Согласно теореме В данный оператор удовлетворяет условиям леммы 5, т.е.

$$\begin{aligned} \|A_m \psi\|_{n_{h',h}} &\leq c_1 h^n m^{n-1} \|\psi\|_{L_h}, \\ \|A_m \psi\|_{n_{22}} &\leq \|A_m \psi\|_{L_{22}} \leq m^{(n-1)/2} \|\psi\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Поэтому, используя лемму 5 и соотношения (23), (25), оценим выражение (22) через

$$c_2 \frac{1}{(\alpha - 1/h)^{n/p'}} m^{(n-1)/h'} (\log_2 m)^{n(1/h' - 1/h)} \|f\|_{W_h^\alpha}.$$

Таким образом, применяя неравенство Гёльдера ($h < p$), получаем

$$J_m \leq c_3 \frac{1}{(\alpha - 1/h)^{n/p'}} \frac{m^{(n-1)/h'} (\log_2 m)^{n(1/h' - 1/h)}}{2^{\alpha(m-n)}} \|f\|_{W_{pq}^\alpha}.$$

Аналогично получаются оценки для слагаемого $J_{s\nu}$:

$$J_{s\nu} \leq c_4 \frac{1}{(\alpha - 1/h)^{n/p'}} \frac{s^{(n-1)/h'} (\log_2 s)^{n(1/h' - 1/h)}}{2^{\alpha(s-\nu)}} \|f\|_{W_{pq}^\alpha}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} J_{s\nu} &\leq c_5 \frac{1}{(\alpha - 1/h)^{n/p'}} \|f\|_{W_{pq}^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{s^{(n-1)/h'} (\log_2 s)^{n(1/h' - 1/h)}}{2^{\alpha(s-\nu)}} \\ &\leq c_6 \frac{1}{(\alpha - 1/h)^{n/p'}} \frac{m^{(n-1)/h'} (\log_2 m)^{n(1/h' - 1/h)}}{2^{\alpha(m-n)}} \|f\|_{W_{pq}^\alpha}. \end{aligned}$$

Так как f – произвольный тригонометрический многочлен, то неравенство

$$|I(f) - T_{2^m}(f; x)| \leq c_7 \frac{m^{(n-1)/h'} (\log_2 m)^{n(1/h' - 1/h)}}{(\alpha - 1/h)^{n/p'} 2^{\alpha m}} \|f\|_{W_{pq}^\alpha}$$

верно для любой функции $f \in W_{pq}^\alpha[0, 1]^n$ и произвольного h такого, что $1/p < 1/h < \alpha$. Тем самым доказано соотношение:

$$\frac{2^{\alpha m} (\log_2 m)^{n(2\alpha-1)} |I(f) - T_{2^m}(f; x)|}{m^{(n-1)(1-\alpha)} \|f\|_{W_{pq}^\alpha}} \leq c_7 \frac{[m^{(n-1)} (\log_2 m)^{2n}]^{\alpha-1/h}}{(\alpha-1/h)^{n/p'}}. \quad (26)$$

Левая часть выражения (26) не зависит от параметра h . Функция $F(t) = B^t/t^\beta$, $t > 0$, $B > 1$, $\beta > 0$, достигает своего минимума в точке $t = \beta/\ln B$. Поэтому из (26) получим

$$|I(f) - T_{2^m}(f; x)| \leq c \frac{m^{(n-1)(1-\alpha)} (\log_2 m)^{n(1/p'+1-2\alpha)}}{2^{\alpha m}} \|f\|_{W_{pq}^\alpha},$$

откуда с учетом замечания 1 следует (19).

Докажем соотношения (20) и (21).

Будем считать, что f – тригонометрический полином. По теореме 1 имеем

$$\begin{aligned} & |I(f) - T_{2^m}(f; x)| \\ & \leq \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} \left| \sum_{r \in D_k} a_r e^{2\pi i r x} \right| + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} \sum_{\substack{k_\nu+\dots+k_{n-1}=s \\ k_j \in \mathbb{Z}_+}} \left| \sum_{r \in D_{k_\nu}} a_r e^{2\pi i r x} \right| \\ & = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} J_k(x) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} \sum_{\substack{k_\nu+\dots+k_{n-1}=s \\ k_j \in \mathbb{Z}_+}} J_{\nu k}(x). \end{aligned}$$

Как и выше, пусть $b_{r_1 \dots r_n} = \bar{r}_1^\alpha \dots \bar{r}_n^\alpha a_{r_1 \dots r_n} e^{2\pi i r x}$, $r \in \mathbb{Z}^n$, $x \in [0, 1]^n$, тогда слагаемое $J_k(x)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} J_k(x) &= 2^{-\alpha(m-n+1)} \left| \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} \sum_{r_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|r_n|^\alpha \prod_{j=1}^{n-1} |2r_j + 1|^\alpha} \right. \\ & \quad \left. \times b_{2^{k_1-1}(2r_1+\text{sgn } k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\text{sgn } k_{n-1}), r_n} 2^{k_n} \right|. \end{aligned}$$

Чтобы получить оценку J_k , достаточно рассмотреть выражение вида

$$\left| \sum_{r_1=1}^N \dots \sum_{r_n=1}^N \frac{1}{\prod_{j=1}^n r_j^\alpha} b_{2^{k_1-1}(2r_1+\text{sgn } k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\text{sgn } k_{n-1}), r_n} 2^{k_n} \right|.$$

Так же как и при доказательстве первого утверждения теоремы, применим преобразование Абеля (9):

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{r_1=1}^N \dots \sum_{r_n=1}^N \frac{1}{\prod_{j=1}^n r_j^\alpha} b_{2^{k_1-1}(2r_1+\text{sgn } k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\text{sgn } k_{n-1}), r_n} 2^{k_n} \right| \\ & \leq c_1 \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{r_n=(1-\varepsilon_n)N+\varepsilon_n}^{N-\varepsilon_n} \dots \sum_{r_1=(1-\varepsilon_1)N+\varepsilon_1}^{N-\varepsilon_1} \frac{1}{\prod_{j=1}^n r_j^{\alpha+\varepsilon_j}} \\ & \quad \times \left| \sum_{l_1=1}^{r_1} \dots \sum_{l_n=1}^{r_n} b_{2^{k_1-1}(2l_1+\text{sgn } k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2l_{n-1}+\text{sgn } k_{n-1}), l_n} 2^{k_n} \right|. \quad (27) \end{aligned}$$

Применяем неравенство Гёльдера (5), учитывая, что $\alpha > 1/p$, $\{r^{-\alpha}\}_{r \in \mathbb{N}^n} \in l_{pq}$, и теорему В:

$$\begin{aligned} J_k &\leq c_2 \|\{r^{-\alpha}\}\|_{l_{p\infty}} \sum_{\varepsilon \in E} \|b_k\|_{n_{p', \varepsilon-1}} \\ &\leq 2^n c_3 \|b_k\|_{n_{p', q}} \leq c_4 \|\psi_k\|_{L_{p, q}} = c_4 \|f_k\|_{W_{pq}^\alpha} \leq c_5 E_{Y_k}(f)_{W_{pq}^\alpha}, \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned} B_k &= \{(2^{k_1-1}(2l_1 + \operatorname{sgn} k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2l_{n-1} + \operatorname{sgn} k_{n-1}), l_n 2^{k_n}) : \\ &\quad l \in \mathbb{N}^n, l_n \neq 0\}, \\ b_k &= \{\overline{m}^\alpha a_m : m \in B_k\}, \quad \psi_k \sim \sum_{m \in B_k} \overline{m}^\alpha a_m e^{2\pi i m y}, \quad f_k \sim \sum_{m \in B_k} a_m e^{2\pi i m y}. \end{aligned}$$

Для доказательства (21) при $\alpha = 1/p$ из (27) получаем

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{r_1=1}^N \cdots \sum_{r_n=1}^N \frac{1}{\prod_{j=1}^n r_j^\alpha} b_{2^{k_1-1}(2r_1 + \operatorname{sgn} k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1} + \operatorname{sgn} k_{n-1}), r_n 2^{k_n}} \right| \\ &\leq c_6 \|\{r^{-\alpha}\}\|_{l_{p\infty}} \sum_{\varepsilon \in E} \|b_k\|_{n_{p', 1}} \leq 2^n c_7 \|b_k\|_{n_{p', 1}} \leq c_8 \|\psi_k\|_{L_{p, 1}} \\ &= c_8 \|f_k\|_{W_{p1}^\alpha} \leq c_9 E_{Y_k}(f)_{W_{p1}^\alpha}. \end{aligned}$$

Слагаемое $J_{k\nu}$ оценивается аналогично. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $M \in \mathbb{N}$, тогда при $1/p < \alpha \leq 1/2$

$$\delta_M(W_p^\alpha) \leq c M^{-\alpha} (\log_2 M)^{(n-1)} (\log_2 \log_2 M)^{2-2\alpha-1/p},$$

а при $\alpha > 1/r = \max\{1/2, 1/p\}$

$$\delta_M(W_p^\alpha) \leq c M^{-\alpha} (\log_2 M)^{(\alpha+1/r)(n-1)}.$$

Доказательство следует из теорем 3 и 4.

§ 6. Дисперсионные соотношения для семейства квадратурных формул $\{T_{2^m}(f; x)\}_{x \in [0,1]^n}$ и приближенное вычисление интеграла Лебега

Как уже отмечалось во введении, квадратурные формулы для пространств $W_p^\alpha[0,1]^n$, $E_p^\alpha[0,1]^n = E_{pp}^\alpha[0,1]^n$ имеют смысл лишь при $\alpha > 1/p$, т.е. как минимум функции должны быть определены всюду на $[0,1]^n$. В то же время, для f из $W_p^\alpha[0,1]^n$, $E_p^\alpha[0,1]^n$ ($\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$) функция $T_{2^m}(f; x)$, задающая семейство квадратурных формул $\{T_{2^m}(f; x)\}_{x \in [0,1]^n}$, определена почти всюду на $[0,1]^n$ и может рассматриваться как элемент пространства Лебега $L_q[0,1]^n$.

В этом параграфе для функций f из классов $W_p^\alpha[0, 1]^n$ и $E_p^\alpha[0, 1]^n$ будут изучаться “отклонения” семейства квадратурных формул $\{T_{2^m}(f; x)\}_{x \in [0, 1]^n}$ от интеграла Лебега $I(f) = \int_{[0, 1]^n} f(y) dy$ в метрике $L_q[0, 1]^n$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $1 < p < q < \infty$, $h = \max\{q, 2\}$, $\alpha = 1/p - 1/h$, $T_{2^m}(f; x)$ – функция, определенная равенством (11). Тогда для $f \in E_p^\alpha[0, 1]^n$ имеет место неравенство

$$\|I(f) - T_{2^m}(f; \cdot)\|_{L_q} \leq c \frac{m^{(n-1)\alpha}}{2^{\alpha m}} E_{G_m}(f)_{E_p^\alpha[0, 1]^n}. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $2 \leq q < \infty$, $\alpha = 1/p - 1/q$, $f \in E_p^\alpha[0, 1]^n$, $f \sim \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} a_r e^{2\pi i r x}$, $b_r(x) = \bar{r}^\alpha a_r e^{2\pi i r x}$, $r \in \mathbb{Z}^n$, $x \in [0, 1]^n$.

Из теоремы 1 и неравенства Минковского имеем

$$\begin{aligned} \|I(f) - T_{2^m}(f; \cdot)\|_{L_q[0, 1]^n} &\leq 2^{-\alpha(m-n)} \|J_m\|_{L_q[0, 1]^n} \\ &+ \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} 2^{-\alpha(s-\nu)} \|J_{s\nu}\|_{L_q[0, 1]^n}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} \sum_{r_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \frac{1}{|r_n|^\alpha \prod_{j=1}^{n-1} |2r_j + 1|^\alpha} \right| \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \text{sgn } k_j} \\ &\times b_{2^{k_1-1}(2r_1 + \text{sgn } k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1} + \text{sgn } k_{n-1}), r_n} 2^{k_n}(x), \\ J_{s\nu}(x) &= \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-\nu}} \left| \frac{1}{\prod_{j=\nu}^{n-1} (2r_j - 1)^\alpha} \right| \sum_{\substack{k_\nu + \dots + k_{n-1} = s \\ k \in \mathbb{Z}_+^{n-\nu}}} (-1)^{\sum_{j=\nu}^{n-1} \text{sgn } k_j} \\ &\times b_{2^{k_1-1}(2r_1 + \text{sgn } k_1), \dots, 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1} + \text{sgn } k_{n-1}), r_n} 2^{k_n}(x). \end{aligned}$$

Применяя теорему Б, получаем

$$\|I(f) - T_{2^m}(f; \cdot)\|_{L_q} \leq 2^{-\alpha(m-n)} \|b_m\|_{l_{q'q}} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} 2^{-\alpha(s-\nu)} \|b_{s\nu}\|_{l_{q'q}},$$

где $b_m, b_{s\nu}$ – соответственно коэффициенты Фурье функций $J_m(x), J_{s\nu}(x)$. Далее, применяя неравенство Гёльдера (5), получаем

$$\begin{aligned} \|I(f) - T_{2^m}(f; \cdot)\|_{L_q} &\leq c_1 \left[2^{-\alpha m} \|g_m\|_{l_{\frac{1}{\alpha}\infty}} \|f\|_{E_p^\alpha} \right. \\ &\left. + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} 2^{-\alpha s} \|g_{s\nu}\|_{l_{\frac{1}{\alpha}\infty}} \|f\|_{E_p^\alpha} \right], \end{aligned}$$

здесь $g_m = \{g_t^m\}_{t \in \mathbb{Z}^n}$ и $g_{\nu s} = \{g_t^{\nu s}\}_{t \in \mathbb{Z}^n}$,

$$g_t^m = \begin{cases} |\bar{r}_1 \cdots \bar{r}_n|^{-\alpha}, & t = (2^{k_1-1}(2r_1 + \operatorname{sgn} k_1), \dots, \\ & 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1} + \operatorname{sgn} k_{n-1}), 2^{k_n} r_n), \\ & s = k_1 + \dots + k_n, k \in \mathbb{Z}_+^n, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$g_t^{\nu s} = \begin{cases} |\bar{r}_\nu \cdots \bar{r}_{n-1}|^{-\alpha}, & t = (0, \dots, 2^{k_\nu-1}(2r_\nu + \operatorname{sgn} k_\nu), \dots, \\ & 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1} + \operatorname{sgn} k_{n-1}), 0), \\ & s = k_\nu + \dots + k_{n-1}, k \in \mathbb{Z}_+^{n-\nu}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отметим, что $\|g_m\|_{l_{\frac{1}{\alpha}}^\infty} \sim m^{(n-1)\alpha}$, $\|g_{\nu s}\|_{l_{\frac{1}{\alpha}}^\infty} \sim s^{(n-\nu)\alpha}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|I(f) - T_2^m(f; \cdot)\|_{L_q} &\leq c_2 \left[2^{-\alpha m} m^{\alpha(n-1)} + \sum_{s=m+1}^{\infty} 2^{-\alpha s} s^{(n-1)/p} \right] \|f\|_{E_p^\alpha} \\ &\leq c(2^{-\alpha m} m^{\alpha(n-1)}) \|f\|_{E_p^\alpha}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует (28) для $q > 2$.

Пусть теперь $1 \leq p < q \leq 2$, $\alpha = 1/p - 1/2$. Тогда, используя неравенство Гёльдера и уже доказанное выше неравенство, получаем

$$\|I(f) - T_2^m(f; \cdot)\|_{L_q} \leq \|I(f) - T_2^m(f; \cdot)\|_{L_2} \leq c 2^{-\alpha m} m^{\alpha(n-1)} \|f\|_{E_p^\alpha}.$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $2 \leq p < q < \infty$, $\alpha = 1/p - 1/q$, $T_2^m(f; x)$ — функция, определенная равенством (11). Если $f \in W_p^\alpha[0, 1]^n$, то имеет место неравенство

$$\|I(f) - T_2^m(f; \cdot)\|_{L_q} \leq c \frac{m^{(n-1)\alpha}}{2^{\alpha m}} E_{G_m}(f)_{W_p^\alpha[0, 1]^n}.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $1 < p < q < \infty$, $\alpha = 1/p - 1/q$. Если $f \in W_p^\alpha[0, 1]^n$, то имеет место неравенство

$$\|I(f) - T_2^m(f; \cdot)\|_{L_q} \leq c \frac{1}{2^{\alpha m}} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} E_{Y_k}(f)_{W_p^\alpha[0, 1]^n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in W_p^\alpha[0, 1]^n$, $f \sim \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} a_r e^{2\pi i r x}$. Из теоремы 1 и неравенства Минковского имеем

$$\begin{aligned} \|I(f) - T_2^m(f; \cdot)\|_{L_q[0, 1]^n} &\leq 2^{-\alpha(m-n)} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k_j \in \mathbb{Z}_+^n}} \|A(f^\alpha; \alpha, u_k, v_k)\|_{L_q[0, 1]^n} \\ &+ \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} 2^{-\alpha(s-\nu)} \sum_{\substack{k_\nu + \dots + k_{n-1} = s \\ k_j \in \mathbb{Z}_+}} \|A(f^\alpha; \alpha, u_{k,\nu}, v_{k,\nu})\|_{L_q[0, 1]^n}. \end{aligned}$$

Здесь $f^\alpha \sim \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} \bar{r}^\alpha a_r e^{2\pi i r x}$, операторы $A(f; \alpha, u_k, v_k)$ и $A(f; \alpha, u_{k,\nu}, v_{k,\nu})$ определяются равенством (8) из теоремы А, где

$$\begin{aligned} v_k &= (2^{k_1}, \dots, 2^{k_n}), \quad u_k = (2^{k_1-1} \operatorname{sgn} k_1, \dots, 2^{k_{n-1}-1} \operatorname{sgn} k_{n-1}, 0), \\ v_{k,\nu} &= (0, \dots, 2^{k_\nu}, \dots, 2^{k_{n-1}}, 0), \\ u_{k,\nu} &= (0, \dots, 2^{k_\nu-1} \operatorname{sgn} k_\nu, \dots, 2^{k_{n-1}-1} \operatorname{sgn} k_{n-1}, 0). \end{aligned}$$

Применяя теорему А, учитывая при этом, что

$$\begin{aligned} A(f^\alpha; \alpha, u_k, v_k) &= A((f - P_k)^\alpha; \alpha, u_k, v_k), \\ A(f^\alpha; \alpha, u_{k,\nu}, v_{k,\nu}) &= A((f - P_k)^\alpha; \alpha, u_{k,\nu}, v_{k,\nu}) \end{aligned}$$

для произвольного полинома $P_k(x) = \sum_{r \in Y_k} c_r e^{2\pi i r x}$, получаем требуемое утверждение.

Пусть e – произвольный компакт из $[0, 1]^n$ положительной меры $|e| > 0$; для интегрируемой на торе $[0, 1]^n$ функции f рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} T_2^m(f; e) &= \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ 0 \leq k_j \leq m}} \frac{1}{2^m} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \dots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} (r_j + \operatorname{sgn} k_j)} \\ &\times \frac{1}{|e|} \int_e f\left(x_1 + \frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, x_n + \frac{r_n}{2^{k_n}}\right) dx. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, e – произвольный компакт положительной меры $|e|$ из $[0, 1]^n$, $\alpha \neq 1/p$, $(x)_+ = \max\{x, 0\}$, тогда

$$|I(f) - T_2^m(f; e)| \leq c \frac{1}{2^{\alpha m} |e|^{(1/p-\alpha)_+}} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ 0 \leq k_j \leq m}} E_{Y_k}(f)_{W_p^\alpha[0, 1]^n}. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 6 с учетом того, что $L_q \hookrightarrow L_{q\infty}$ и

$$\|f\|_{L_{q\infty}} \sim \sup_{|e|>0} \frac{1}{|e|^{1-1/q}} \left| \int_e f(x) dx \right|$$

(см. [26]).

В (29) при $\alpha > 1/p$ правая часть не зависит от выбора компакта e . Поэтому, взяв в качестве e шар с центром в точке $x \in [0, 1]^n$ радиуса r и перейдя к пределу при $r \rightarrow 0$, получим оценку погрешности квадратурной формулы классического вида:

$$|I(f) - T_{2^m}(f; x)| \leq c \frac{1}{2^{\alpha m}} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ 0 \leq k_j \leq m}} E_{Y_k}(f)_{W_p^\alpha[0,1]^n}.$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, e — компакт из $[0, 1]^n$ положительной меры. Тогда для любой функции $f \in W_p^{1/p}[0, 1]^n$ имеет место неравенство

$$|I(f) - T_{2^m}(f; e)| \leq c \frac{|\log_2 |e||^n}{2^{\alpha m}} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ 0 \leq k_j \leq m}} E_{Y_k}(f)_{W_p^{1/p}[0,1]^n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно заметить, что константа c в неравенстве (29) оценивается через $c_1(\alpha - 1/p)^{-n}$, где c_1 не зависит от p и α . Тогда при $1/q > 1/p$ имеем

$$\begin{aligned} |I(f) - T_{2^m}(f; e)| &\leq c_1 \frac{1}{(1/q - 1/p)^n |e|^{(1/q - 1/p)2^m/p}} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ 0 \leq k_j \leq m}} E_{Y_k}(f)_{W_q^{1/p}[0,1]^n} \\ &\leq c_2 \frac{1}{(1/q - 1/p)^n |e|^{(1/q - 1/p)2^m/p}} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ 0 \leq k_j \leq m}} E_{Y_k}(f)_{W_p^{1/p}[0,1]^n}. \end{aligned}$$

Минимизируя по параметру q ($q > 1/p$), получаем требуемое утверждение.

Список литературы

1. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
2. Hlawka E. Zur angendherten Berechnung mehrfacher Integrale // Monatsh. Math. 1962. V. 66. P. 140–151.
3. Базвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1959. № 4. С. 3–18.
4. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
5. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.
6. Wang Y. Number theoretic method in numerical analysis // Contemp. Math. 1988. V. 77. P. 63–82.

7. *Темиргалиев Н. Т.* Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа, теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестн. Евразийского ун-та. 1997. №3. С. 86–140.
8. *Темиргалиев Н. Т.* Об эффективности алгоритмов численного интегрирования, связанных с теорией дивизоров в круговых полях // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №2. С. 297–301.
9. *Воронин С. М., Темиргалиев Н. Т.* О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел // Матем. заметки. 1989. Т. 46. №2. С. 34–41.
10. *Темляков В. Н.* О восстановлении периодических функций нескольких переменных по значениям в узлах теоретико-числовых сеток // Anal. Math. 1986. V. 12. №4. Р. 287–305.
11. *Темляков В. Н.* Об одном приеме получения оценок снизу погрешностей квадратурных формул // Матем. сб. 1990. Т. 181. №10. С. 1403–1413.
12. *Быковский В. А.* Оценки отклонений оптимальных сеток в L_p -норме и теория квадратурных формул // Anal. Math. 1996. Т. 22. С. 81–97.
13. *Фролов К. К.* Квадратурные формулы на классах функций // Дис. . . канд. физ.-матем. наук: ВЦ АН СССР, 1979.
14. *Skriganov M. M.* Construction of uniform distributions in terms of geometry of numbers // St. Petersburg. Math. J. 1995. V. 6. №3. Р. 635–664.
15. *Смоляк С. А.* Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. №5. С. 1042–1045.
16. *Темляков В. Н.* Приближенное восстановление периодических функций нескольких переменных // Матем. сб. 1985. Т. 128. №2. С. 256–268.
17. *Темляков В. Н.* О приближенном восстановлении периодических функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. №6. С. 1310–1313.
18. *Blozinski A. P.* Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 263. №1. Р. 149–167.
19. *Нурсултанов Е. Д.* О мультипликаторах рядов Фурье по тригонометрической системе // Матем. заметки. 1998. Т. 63. №2. С. 235–248.
20. *O’Neil R. O.* Convolution operators and L_{pq} spaces // Duke Math. J. 1963. V. 30. Р. 129–142.
21. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН. 1986. Т. 178. С. 1–112.
22. *Nursultanov E. D.* Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy–Littlewood type inequalities // East J. Approx. 1998. V. 4. №2. Р. 277–290.
23. *Шарыгин И. Ф.* Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3. С. 370–376.
24. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
25. *Нурсултанов Е. Д.* Интерполяционные свойства сетевых пространств // Актуальные вопросы математики и методики преподавания математики. Алматы, 1995. С. 38–44.
26. *Нурсултанов Е. Д.* Сетевые пространства и неравенства типа Харди–Литтлвуда // Матем. сб. 1998. Т. 189. №3. С. 83–102.

Казахстанский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова,
г. Астана, Казахстан;
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилёва,
г. Астана, Казахстан
E-mail: er-nurs@yandex.ru, tleukhanova@yandex.ru

Поступила в редакцию
11.02.2002 и 12.05.2003