Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Шерстюков, Разложение обратной величины целой функции с нулями в полосе в ряд Крейна, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 12, 137–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7771>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 11:29:18

УДК 517.547.2

В. Б. Шерстюков

Разложение обратной величины целой функции с нулями в полосе в ряд Крейна

Для целой функции $L(\lambda)$, имеющей только простые нули, расположенные в некоторой полосе, дано решение задачи о представлении функции $L^{-1}(\lambda)$ рядом простейших дробей.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: целая функция, ряд простейших дробей.

§ 1. Введение

Развитие в первой половине прошлого века теории эрмитовых операторов и проблемы моментов (см., например, [1], [2]) побудило М. Г. Крейна ввести и начать систематическое изучение одного класса целых функций, оказавшегося весьма полезным в приложениях (см. [3]). Будем говорить, что целая функция $L(\lambda)$, имеющая только вещественные простые корни $\lambda_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$, принадлежит классу Крейна, если при некотором целом $p \geq 0$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(\lambda)} &= R(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} + \frac{\lambda}{\lambda_k^2} + \dots + \frac{\lambda^{p-1}}{\lambda_k^p} \right\} \\ &= R(\lambda) + \lambda^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k) \lambda_k^p} \frac{1}{\lambda - \lambda_k}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

в котором

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^p |L'(\lambda_k)|} < \infty, \quad (1.2)$$

а $R(\lambda)$ – некоторый многочлен. Заметим, что если в условии (1.2) заменить p на $p+1$, то оно станет эквивалентным требованию абсолютной и равномерной сходимости ряда (1.1) на любом компакте комплексной плоскости, не содержащем нулей функции $L(\lambda)$.

В работе [3; теорема 4] было доказано, что всякая функция класса Крейна имеет экспоненциальный тип и при этом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |L(x)|}{1+x^2} dx < \infty. \quad (1.3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00255-а), Аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № 2.1.1/6827), в рамках Государственных контрактов Рособразования П 268, П 795, П 943 и Федеральной Целевой Программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (грант № П1109).

Целые функции экспоненциального типа (ЦФЭТ), удовлетворяющие условию (1.3), образуют известный класс Картрайт. Всякая функция класса Картрайт имеет вполне регулярный рост (ВРР) и индикаторную диаграмму в виде отрезка мнимой оси (см. [3], [4; гл. V, § 6]). В [5] замечено, что у функции из класса Крейна этот отрезок содержит точку $\lambda = 0$.

Условие вещественности нулей λ_k , $k = 1, 2, \dots$, в упомянутой выше теореме 4 работы [3] существенно. Продемонстрируем это на простом примере, приведенном в [3; § 4]: если некоторая целая функция $L(\lambda)$ положительного экспоненциального типа допускает разложение (1.1), (1.2) при $p = 0$ и $R(\lambda) \equiv 0$, то также имеет место разложение

$$\frac{1}{L(\lambda^2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{2\sqrt{\lambda_k}} \left\{ \frac{1}{\lambda - \sqrt{\lambda_k}} - \frac{1}{\lambda + \sqrt{\lambda_k}} \right\},$$

но функция $L(\lambda^2)$ уже не будет экспоненциального типа.

Напомним, что классом $\mathcal{A}$ (обозначение Б. Я. Левина) принято называть введенное в 1946 г. Н. И. Ахиезером в [6] множество всех целых функций, нули которых удовлетворяют условию

$$\sum_{\lambda_k \neq 0} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda_k} \right| < \infty.$$

В связи с приведенным выше примером и замечанием к условию (1.2) интересен следующий факт, усиливающий теорему 4 из работы [3] о представлении функций класса $\mathcal{A}$ (см. [3; теорема 5]), другое доказательство которого приведено в книге [4; гл. V, § 6, теорема 13].

ТЕОРЕМА КРЕЙНА. Пусть $L(\lambda)$ – целая функция, имеющая простые нули λ_k , $k = 1, 2, \dots$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda_k} \right| < \infty.$$

Если при этом

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_k}{\lambda_k} \right| < \infty, \quad (1.4)$$

то функция $L(\lambda)$ – экспоненциального типа и для нее выполняется (1.3).

Эта теорема, разумеется, справедлива и для функций, раскладывающихся в ряд вида (1.1), поскольку этот более общий случай сводится к разложению из (1.4) умножением $L(\lambda)$ на подходящий многочлен (подробности см. в [3]).

Различные свойства функций, допускающих представления вида (1.1) или (1.4), изучались и использовались в ряде работ по теории функций и гармоническому анализу, теории операторов и дифференциальных уравнений. Кроме упоминавшихся уже статей [1], [2] и книги [4] отметим еще исследования М. В. Келдыша и И. В. Островского [7; гл. V, § 6, гл. VI, § 2], Л. де Бранжа [8], Ю. Ф. Коробейника [9], [10], А. Боричева и М. Л. Содина [11], Л. С. Маергойза [12; § 6], [13]. Например, в [9] изучались свойства решений дифференциального уравнения бесконечного порядка с символом $a(\lambda) \in [0, 1]$, допускающим

разложение типа (1.4). Работа [11] выявляет роль класса Крейна при изучении множеств ограниченного типа и множеств Ахиезера–Левина, связанных с проблемой С. Н. Бернштейна о весовой аппроксимации на вещественной прямой. Недавние результаты (см. [12]) касаются представления рядом простых дробей обратной величины целой функции специального вида, возникающей в теории аналитических уточненных порядков.

В работе [14] в терминах специальных конформных отображений дано описание множеств вещественных чисел, которые могут служить множествами корней вещественных функций класса Крейна. Надо сказать, что это описание весьма сложно и в силу своей специфики вряд ли может быть использовано при установлении обозримых критериев представимости обратной величины целой функции рядом типа Крейна. Нахождение же такого рода критериев является важной задачей, возникшей в результате как внутренних потребностей теории целых функций, так и выявленных многочисленных приложений функций класса Крейна. Этой задачей интересовались многие математики: Л. де Бранж, П. Кусис, Г. Педерсен, А. Г. Бакан и другие. Мы приведем в этом параграфе некоторые из известных результатов. Так, в 1959 г. де Бранж установил, что если ЦФЭТ $L(\lambda)$, имеющая только простые вещественные нули $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$, принадлежит классу Картрайт и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} |L(iy)| &\rightarrow +\infty, & y &\rightarrow \pm\infty, \\ \sum_{\lambda_k \neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_k)| |\lambda_k|} &< \infty, \end{aligned} \quad (1.5)$$

то

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda \quad (1.6)$$

(см. [15; лемма 2 при $G \equiv 1$]). Кусис [16; с. 204, 205] показал, что в лемме де Бранжа нельзя отбросить (сохраняя остальные условия и ее заключение) требование принадлежности L классу Картрайт. В работе [17; теорема 6.6] Педерсеном было установлено, что функция минимального экспоненциального типа с простыми вещественными нулями, удовлетворяющая (1.5), допускает разложение (1.6). Наиболее полные результаты по обращению теоремы Крейна до появления работ автора [5], [18] принадлежали Бакану [19]–[21] и получены в последнее десятилетие. Для того чтобы их сформулировать, воспользуемся обозначениями этих работ, опуская при этом тривиальную ситуацию, когда множество Λ не более чем конечно.

Для целой функции L с множеством простых нулей $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$ обозначим

$$d_L := \inf \left\{ q \in \mathbb{Z} : \sum_{\lambda_k \neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_k)| |\lambda_k|^{q+1}} < \infty \right\}, \quad \chi_\Lambda(0) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \in \Lambda, \\ 0, & \text{если } 0 \notin \Lambda. \end{cases}$$

Если $d_L < +\infty$, то для всякого целого числа $p \geq \max\{0, d_L\}$ можно ввести целую функцию

$$\Delta_L^p(\lambda) := \frac{1}{L(\lambda)} - \frac{\chi_\Lambda(0)}{L'(0)\lambda} - \sum_{\lambda_k \neq 0} \frac{\lambda^p}{\lambda_k^p L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

В [19; теорема 3.1] и [20; теорема 3.1] Бакан получил новую версию теоремы Крейна, которую мы приведем полностью.

ТЕОРЕМА БАКАНА (I). Пусть L – вещественная целая (отличная от тождественной постоянной) функция, имеющая только простые вещественные нули $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$, такая, что $d_L < +\infty$. Следующие утверждения эквивалентны.

- 1) Существует целое неотрицательное число $p \geq d_L$ такое, что целая функция Δ_L^p есть многочлен.
- 2) L является целой функцией экспоненциального типа, удовлетворяющей условию (1.3) (другими словами, L входит в класс Картрайт).
- 3) Если Λ – полуграниченное множество на вещественной оси, то L имеет нулевой экспоненциальный тип; если же Λ не является ограниченным ни сверху, ни снизу, то L – целая функция положительного экспоненциального типа.

Ясно, что импликация 1) $\implies$ 2) совпадает для вещественнозначных на вещественной оси функций с теоремой Крейна. Доказательство импликации 2) $\implies$ 1) фактически сводится к ссылке на лемму де Бранжа. Импликация же 3) $\implies$ 1) для функции минимального экспоненциального типа доказана в цитированной выше теореме Педерсена. Таким образом, новыми в теореме Бакана (I) по сравнению с предшествующими результатами являются два момента. Во-первых, это дополнение к теореме Крейна в виде импликации 1) $\implies$ 3) в части, где речь идет о функции минимального экспоненциального типа. Во-вторых, это утверждение о том, что обратная величина вещественной ЦФЭТ L с $\Lambda \subset \mathbb{R}$ и $d_L < +\infty$ раскладывается в ряд Крейна. Последнее утверждение является, на наш взгляд, наиболее интересным. Оно доказано на основании теоремы 3.2 из [19] и [20], нашедшей применение в актуальных вопросах компактности семейств целых функций (см. [21]). Условие вещественности L в этом утверждении существенно. В связи с указанным обстоятельством приведем недавно анонсированный в [22; теорема 1] результат, где не предполагается вещественнозначность L на $\mathbb{R}$.

Пусть $q \in \mathbb{Z}$. Будем говорить, что трансцендентная целая функция L с простыми (всеми) нулями $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$ и $d_L < +\infty$ принадлежит классу $\mathcal{H}^q$, если при $q \leq 0$ имеет место равенство (1.6), а при $q \geq 1$ существует многочлен P степени q , который имеет все простые корни $M = (\mu_j)_{j=1}^q$ на $\mathbb{C} \setminus \Lambda$, и при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\Lambda \cup M)$ справедливо разложение

$$\frac{1}{L(\lambda)P(\lambda)} = \sum_{j=1}^q \frac{1}{P'(\mu_j)L(\mu_j)(\lambda - \mu_j)} + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{P(\lambda_k)L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}.$$

ТЕОРЕМА БАКАНА (II). Пусть $q \in \mathbb{Z}$ и $d_L < +\infty$. Функция L принадлежит классу $\mathcal{A} \cap \mathcal{H}^q$ тогда и только тогда, когда L принадлежит классу Картрайт и существуют такое множество E нулевой относительной меры и такое целое число $N \geq 0$, что $|y|^N |L(iy)| \rightarrow +\infty$ при $y \rightarrow \pm\infty$, $|y| \in \mathbb{R}_+ \setminus E$.

Теорема Крейна, результаты де Бранжа, Кусиса и теоремы (I) и (II) Бакана вызывают ощущение, что при описании характеристических свойств целой функции с вещественными нулями (не обязательно вещественной), обратная величина которой раскладывается в ряд простых дробей, не удастся обойтись без использования класса Картрайт и каких-либо оценок снизу роста функции, например, на мнимой оси. Оказалось, однако, что для функции с вещественными нулями (и даже с нулями, расположенными в некоторой полосе; см. [18])

в изучаемом круге вопросов ключевую роль играют лишь наличие экспоненциальной оценки сверху на рост модуля функции и принадлежность точки $\lambda = 0$ ее индикаторной диаграмме (см. [5]).

В работе автора [18] основное внимание уделялось свойствам функции, отвечающим за принципиальную возможность разложения. Точнее говоря, были найдены в определенном смысле минимальные необходимые и достаточные условия того, что обратная величина целой функции с нулями в полосе раскладывается в какой-либо ряд типа Крейна. В настоящей статье для таких функций решается “индивидуальная” задача о разложении в ряд (1.1) при каждом значении $p \geq 0$. Соответствующие утверждения являются новыми, обобщают и уточняют первоначальные результаты автора из [5] и составляют содержание § 2. Методы доказательств отличны от методов, примененных в [19], [20], и основаны на идеях работ [5], [18].

Автор пользуется приятной возможностью выразить свою благодарность А. Ю. Попову за внимание к работе и ценные обсуждения ее результатов.

§ 2. Основной результат

Доказательство центральной теоремы этого параграфа опирается на одно вспомогательное утверждение, близкое к лемме А. М. Седлецкого из [23; гл. 5, § 5.3].

ЛЕММА 2.1. Пусть последовательность $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ с единственной предельной точкой на бесконечности имеет конечную верхнюю плотность, лежит в горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} \lambda| \leq h$ и, наконец, $\mu_k := \operatorname{Re} \lambda_k \neq 0$ для всех k . Тогда бесконечное произведение

$$\pi(\lambda) := \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right)^{-1}$$

удовлетворяет на мнимой оси оценке

$$\inf_{\mu \in \mathbb{R}} |\pi(i\mu)| > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Бесконечное произведение $\pi(\lambda)$ заведомо сходится вне указанной полосы. Полагая $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$, $|\nu_k| \leq h$, $k = 1, 2, \dots$, имеем

$$\begin{aligned} |\pi(i\mu)|^2 &= \prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{i\mu - \lambda_k}{i\mu - \mu_k} \right|^2 \cdot \left| \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right|^2 = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu - \nu_k)^2 + \mu_k^2}{\mu^2 + \mu_k^2} \cdot \frac{\mu_k^2}{\mu_k^2 + \nu_k^2} \\ &\geq \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(|\mu| - h)^2 + \mu_k^2}{\mu^2 + \mu_k^2} \cdot \frac{\mu_k^2}{\mu_k^2 + h^2}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad |\mu| > h. \end{aligned}$$

По условию найдется постоянная $A > 0$ такая, что при всех $t > 0$ выполняется неравенство $n(t) \leq At$, в котором $n(t)$ обозначает считающую функцию последовательности $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$. Поэтому

$$\ln \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 + h^2}{\mu_k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{h^2}{\mu_k^2}\right) \leq \pi Ah,$$

откуда следует, что

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{\mu_k^2 + h^2} \geq e^{-\pi Ah}.$$

Далее, интегрируя дважды по частям, при $|\mu| \geq 2h$ получаем, что

$$\begin{aligned} \ln \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 + \mu^2}{\mu_k^2 + (|\mu| - h)^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\mu^2 - (|\mu| - h)^2}{\mu_k^2 + (|\mu| - h)^2} \right) \\ &\leq h(2|\mu| - h) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 + (|\mu| - h)^2} = h(2|\mu| - h) \int_0^{+\infty} \frac{dn(t)}{t^2 + (|\mu| - h)^2} \\ &= h(2|\mu| - h) \left(\left. \frac{n(t)}{t^2 + (|\mu| - h)^2} \right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2tn(t) dt}{(t^2 + (|\mu| - h)^2)^2} \right) \\ &= h(2|\mu| - h) \int_0^{+\infty} \frac{2tn(t) dt}{(t^2 + (|\mu| - h)^2)^2} \leq Ah(2|\mu| - h) \int_0^{+\infty} \frac{2t^2 dt}{(t^2 + (|\mu| - h)^2)^2} \\ &= Ah(2|\mu| - h) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + (|\mu| - h)^2} = \frac{\pi Ah(2|\mu| - h)}{2(|\mu| - h)} \leq \frac{3\pi Ah}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(|\mu| - h)^2 + \mu_k^2}{\mu^2 + \mu_k^2} \geq e^{-3\pi Ah/2}, \quad |\mu| \geq 2h.$$

Окончательно,

$$|\pi(i\mu)|^2 \geq e^{-5\pi Ah/2}, \quad |\mu| \geq 2h,$$

что приводит к нужной оценке на всей мнимой оси, поскольку на ней бесконечное произведение $\pi(\lambda)$ сходится и не имеет нулей.

Нам понадобится также следующая элементарная лемма.

ЛЕММА 2.2. Пусть целая функция $L(\lambda)$ с множеством простых (всех) нулей $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$, $0 \notin \Lambda$, при некотором целом $p \geq 0$ допускает представление

$$\frac{1}{L(\lambda)} = Q_p(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} + \dots + \frac{\lambda^p}{\lambda_k^{p+1}} \right\}, \quad (2.1)$$

в котором ряд сходится абсолютно на множестве $\mathbb{C} \setminus \Lambda$, а $Q_p(\lambda)$ — многочлен степени, не превосходящей p . Тогда

$$Q_p(\lambda) = \frac{1}{L(0)} - \frac{L'(0)}{L^2(0)} \cdot \lambda + \dots + \frac{1}{p!} \left(\frac{1}{L(\lambda)} \right)^{(p)}(0) \cdot \lambda^p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равномерную сходимость ряда в (2.1) на любом компакте области $\mathbb{C} \setminus \Lambda$, обычным образом находим коэффициенты многочлена $Q_p(\lambda)$, дифференцируя представление (2.1) необходимое число раз.

Основной результат критериального характера по ослаблению известных ранее условий разложимости в ряд Крейна обратной величины целой функции с простыми нулями, заключенными в полосу, содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $L(\lambda)$ – целая функция, множество нулей которой образует последовательность $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$, причем все λ_k просты и расположены в некоторой полосе Π ; $0 \notin \Lambda$. Для того чтобы обратная величина $\frac{1}{L(\lambda)}$ раскладывалась в сходящийся абсолютно и равномерно на каждом компакте в области $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ ряд Крейна

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(\lambda)} = \frac{1}{L(0)} - \frac{L'(0)}{L^2(0)} \cdot \lambda + \dots + \frac{1}{p!} \left(\frac{1}{L(\lambda)} \right)^{(p)}(0) \cdot \lambda^p \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} + \dots + \frac{\lambda^p}{\lambda_k^{p+1}} \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

с каким-либо целым неотрицательным числом p , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись одновременно следующие условия:

- i) $L(\lambda)$ имеет экспоненциальный тип, а ее индикаторная диаграмма представляет собой отрезок, перпендикулярный границе полосы Π и содержащий точку $\lambda = 0$;
- ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_k)| |\lambda_k|^{p+2}} < +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию последовательность Λ укладывается в какой-то полосе. Всегда можно поместить ее в некоторую более широкую полосу, симметричную относительно точки $\lambda = 0$. Поэтому стандартная процедура поворота плоскости на соответствующий угол позволяет без ограничения общности считать, что $\Pi = \Pi_h := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| \leq h\}$, $h > 0$, а в условии i) фигурирует отрезок мнимой оси.

Необходимость. Пусть целая функция $L(\lambda)$ с последовательностью простых нулей $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$, $|\operatorname{Im} \lambda_k| \leq h$, $0 \notin \Lambda$, допускает представление (2.2). Характер сходимости ряда (2.2) влечет условие ii).

Убедимся теперь в том, что $L(\lambda)$ – функция экспоненциального типа. Воспользуемся схемой рассуждений М.Г. Крейна из [3], разработанной им для функции с вещественными нулями. Записав (2.2) в виде

$$\frac{1}{L(\lambda)} = Q_p(\lambda) + \lambda^{p+1} f(\lambda),$$

покажем сначала, что умножаемая на λ^{p+1} в этом представлении функция

$$f(\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_k}{\lambda_k} \right| < \infty,$$

принадлежит классу Неванлинны (классу $\mathcal{N}$) в каждой из полуплоскостей $\Pi_h^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda > h\}$ и $\Pi_h^- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda < -h\}$. Последнее означает, что в каждой из обозначенных полуплоскостей функция $\ln^+ |f(\lambda)|$ имеет гармоническую мажоранту. Проведем доказательство применительно к полуплоскости Π_h^+ . Используемые при этом сведения о структуре классов Неванлинны можно найти в [3].

Функция $f(\lambda)$ очевидным образом представляется в следующей форме:

$$f(\lambda) = f_1(\lambda) - f_2(\lambda) + i f_3(\lambda) - i f_4(\lambda),$$

где каждая из функций $f_m(\lambda)$, отличных от тождественного нуля, имеет вид ряда

$$\sum_{k \in J_m} \frac{\rho_{k,m}}{\lambda - \lambda_k}, \quad \rho_{k,m} > 0, \quad J_m \subset \mathbb{N}, \quad m = 1, 2, 3, 4.$$

Как известно, достаточным условием принадлежности функции, аналитической в некоторой односвязной области $G \subset \mathbb{C}$, классу $\mathcal{N}$ в G является сохранение знака ее мнимой частью в этой области. При $\lambda \in \Pi_h^+$ и $\rho_k > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \sum_{k \in J_m} \frac{\rho_{k,m}}{\lambda - \lambda_k} &= \sum_{k \in J_m} \rho_{k,m} \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda - \lambda_k} = \sum_{k \in J_m} \frac{\rho_{k,m} \operatorname{Im}(\lambda_k - \lambda)}{|\lambda - \lambda_k|^2} \\ &< \sum_{k \in J_m} \frac{\rho_{k,m} \operatorname{Im}(\lambda_k - h)}{|\lambda - \lambda_k|^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функции $f_m(\lambda)$, $m = 1, 2, 3, 4$, а вместе с ними и функция $f(\lambda)$ принадлежат классу $\mathcal{N}$ в Π_h^+ . Отсюда и из представления (2.2) вытекает принадлежность классу $\mathcal{N}$ в Π_h^+ функций $\frac{1}{L(\lambda)}$ и $L(\lambda)$. Аналогично проверяется, что $L(\lambda)$ содержится в классе $\mathcal{N}$ в полуплоскости Π_h^- , поскольку при $\lambda \in \Pi_h^-$ и $\rho_{k,m} > 0$ справедливо

$$\operatorname{Im} \sum_{k \in J_m} \frac{\rho_{k,m}}{\lambda - \lambda_k} > \sum_{k \in J_m} \frac{\rho_{k,m} \operatorname{Im}(\lambda_k + h)}{|\lambda - \lambda_k|^2} \geq 0.$$

Далее, согласно теореме 2 из [3], примененной к полуплоскости Π_h^+ , найдется вещественная константа σ_1 такая, что при каждом $\theta \in (0, \pi)$ выполняется равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |L(ih + re^{i\theta})|}{r} = \sigma_1 \sin \theta$$

равномерно по $\theta \in [\delta, \pi - \delta]$ для любого $\delta \in (0, \pi)$. Пользуясь этим, получаем для $|L(\lambda)|$ предельное соотношение на лучах, исходящих уже из точки $\lambda = 0$. Именно, существует

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |L(re^{i\theta})|}{r} = \sigma_1 \sin \theta, \quad \theta \in (0, \pi).$$

Аналогичное соотношение справедливо и при $\theta \in (-\pi, 0)$ с некоторой (не зависящей от θ) постоянной σ_2 . Отсюда следует, что функция L имеет экспоненциальный тип, а ее индикатор вычисляется по формуле

$$h_L(\theta) = \begin{cases} \sigma_1 \sin \theta, & \text{если } \theta \in [0, \pi], \\ \sigma_2 \sin \theta, & \text{если } \theta \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Поэтому индикаторная диаграмма $D(L)$ функции L является отрезком мнимой оси.

Таким образом, для получения условия i) осталось проверить, что $0 \in D(L)$. С учетом ii) преобразуем (2.2) к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(\lambda)} &= Q_p(\lambda) + \lambda^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k) \lambda_k^{p+1}} \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \\ &= Q_p(\lambda) + \lambda^{p+2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k) \lambda_k^{p+2}} \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_k} - \frac{1}{\lambda} \right) \\ &= Q_p(\lambda) - \lambda^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k) \lambda_k^{p+2}} + \lambda^{p+2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k) \lambda_k^{p+2}} \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \\ &= T_{p+1}(\lambda) + \lambda^{p+2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k) \lambda_k^{p+2}} \frac{1}{\lambda - \lambda_k}, \end{aligned}$$

где $T_{p+1}(\lambda)$ – многочлен степени не выше $p+1$. Оценивая $|L(\lambda)|$ на мнимой оси, находим для любого $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| > h$, что

$$\frac{1}{|L(i\mu)|} \leq |T_{p+1}(i\mu)| + \frac{|\mu|^{p+2}}{|\mu| - h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_k)| |\lambda_k|^{p+2}}.$$

Эта оценка показывает, что $h_L(\pm \frac{\pi}{2}) \geq 0$, откуда $0 \in D(L)$.

Достаточность. Пусть ЦФЭТ $L(\lambda)$ с простыми, расположенными в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| \leq h$ нулями $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$, $0 \notin \Lambda$, удовлетворяет условию ii) и $D(L)$ – отрезок мнимой оси, содержащий нуль. Покажем, что справедливо разложение (2.2). Доказательство проведем индукцией по $p \geq 0$.

При $p = 0$ условие ii) превращается в требование сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_k)| |\lambda_k|^2}.$$

Нужно проверить, что тогда

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \frac{1}{L(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} \right\}.$$

Считая всюду далее, что функция $L(\lambda)$ не имеет чисто мнимых нулей, запишем ее представление Адамара–Вейерштрасса:

$$L(\lambda) = e^{a\lambda+b} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right) e^{\lambda/\lambda_k}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Положив

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \mu_k + i\nu_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad d = a + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\mu_k} \right), \\ \pi(\lambda) &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k} \right)^{-1}, \quad L_1(\lambda) = \pi(\lambda) e^{\lambda \operatorname{Re} d} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k} \right) e^{\lambda/\mu_k}, \end{aligned}$$

имеем

$$L(\lambda) = L_1(\lambda)e^{i\lambda \operatorname{Im} d+b}. \quad (2.3)$$

В нашей ситуации лемма 2.1 нужна для оценки снизу $|\pi(\lambda)|$ на мнимой оси, что вместе с очевидным неравенством

$$\left| \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{i\mu}{\mu_k} \right) e^{i\mu/\mu_k} \right| \geq 1, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

дает следующий результат:

$$\exists D > 0 : \quad |L_1(i\mu)| \geq D, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Учитывая ограничения ii) и $|\nu_k| \leq h$, $k = 1, 2, \dots$, из (2.3) получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'_1(\lambda_k)| |\lambda_k|^2} < +\infty. \quad (2.5)$$

Мы покажем сначала, что

$$\frac{1}{L_1(\lambda)} = \frac{1}{L_1(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'_1(\lambda_k)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} \right\}. \quad (2.6)$$

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(\lambda) := \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{L_1(\lambda)} - \frac{1}{L_1(0)} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'_1(\lambda_k) \lambda_k (\lambda - \lambda_k)}.$$

Функция $\varphi(\lambda)$ является аналитической в области $\mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \Lambda)$, причем ее вычеты в точках $\lambda = 0$ и $\lambda \in \Lambda$ равны нулю. Следовательно, $\varphi(\lambda)$ — целая функция. Убедимся в том, что $\varphi(\lambda)$ имеет экспоненциальный тип. Для этого представим $\varphi(\lambda)$ в виде отношения двух целых функций

$$L_1(0) - L_1(\lambda) - L_1(0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda L_1(\lambda)}{L'_1(\lambda_k) \lambda_k (\lambda - \lambda_k)} \quad \text{и} \quad \lambda L_1(0) L_1(\lambda).$$

Так как $L_1(\lambda)$ — ЦФЭТ, то достаточно доказать, что

$$\psi(\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_1(\lambda)}{L'_1(\lambda_k) \lambda_k (\lambda - \lambda_k)}$$

является ЦФЭТ и применить следствие теоремы о категориях (см. [4; гл. I, § 9]). При выводе подходящей оценки сверху на $|\psi(\lambda)|$ нам понадобятся следующие обозначения для констант (см. (2.5)):

$$A_1 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'_1(\lambda_k)| |\lambda_k|^2}, \quad A_2 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'_1(\lambda_k)| |\lambda_k|^3},$$

$$A_3 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'_1(\lambda_k)| |\lambda_k|^4}.$$

Пусть, кроме того,

$$U := \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k, \quad U_k := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_k| < |\lambda_k|^{-2}\}.$$

Напишем несколько оценок при $\lambda \notin U$. Во-первых,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'_1(\lambda_k) \lambda_k^3 (\lambda - \lambda_k)} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{L'_1(\lambda_k) \lambda_k^4 (\lambda - \lambda_k)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'_1(\lambda_k) \lambda_k^4} \right| \\ &\leq |\lambda| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'_1(\lambda_k)| |\lambda_k|^4 |\lambda - \lambda_k|} + A_3 \leq A_1 |\lambda| + A_3. \end{aligned}$$

Во-вторых,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'_1(\lambda_k) \lambda_k^2 (\lambda - \lambda_k)} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{L'_1(\lambda_k) \lambda_k^3 (\lambda - \lambda_k)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'_1(\lambda_k) \lambda_k^3} \right| \\ &\leq |\lambda| \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'_1(\lambda_k) \lambda_k^3 (\lambda - \lambda_k)} \right| + A_2 \leq A_1 |\lambda|^2 + A_3 |\lambda| + A_2. \end{aligned}$$

Наконец, из предыдущих оценок получим при тех же λ , что

$$\begin{aligned} |\psi(\lambda)| &= |L_1(\lambda)| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{L'_1(\lambda_k) \lambda_k^2 (\lambda - \lambda_k)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'_1(\lambda_k) \lambda_k^2} \right) \\ &\leq |L_1(\lambda)| (A_1 |\lambda|^3 + A_3 |\lambda|^2 + A_2 |\lambda| + A_1). \end{aligned}$$

Таким образом, существует $M > 0$ такое, что

$$|\psi(\lambda)| \leq M |\lambda|^3 |L_1(\lambda)|, \quad \lambda \notin U.$$

Множество U представляет собой объединение кружков с конечной суммой радиусов, так как показатель сходимости последовательности Λ не превосходит порядка функции $L_1(\lambda)$. Согласно основному результату работы [24] U можно покрыть множеством попарно не пересекающихся кружков нулевой линейной плотности. Применяя к $\psi(\lambda)$ в таких кружках принцип максимума модуля, из найденной выше при $\lambda \notin U$ оценки для $|\psi(\lambda)|$ выводим с учетом непрерывности индикатора функции $L_1(\lambda)$, что $\psi(\lambda)$ имеет экспоненциальный тип, а ее индикатор не превосходит $h_{L_1}(\theta)$.

Теперь оценим рост ЦФЭТ $\varphi(\lambda)$ на мнимой оси. В силу (2.5) для произвольно малого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{|L'_1(\lambda_k)| |\lambda_k|^2} < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}},$$

и, кроме того, $|\mu_k| \geq h$, $k > N$. Если теперь $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| > h$, и $k > N$, то

$$|i\mu - \lambda_k| \geq |\mu_k| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{h^2 + \mu_k^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\nu_k^2 + \mu_k^2} = \frac{|\lambda_k|}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда при всех достаточно больших по модулю вещественных μ получаем

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'_1(\lambda_k) \lambda_k (i\mu - \lambda_k)} \right| \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{|L'_1(\lambda_k)| |\lambda_k| |i\mu - \lambda_k|} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{|L'_1(\lambda_k)| |\lambda_k| |i\mu - \lambda_k|} < \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{|L'_1(\lambda_k)| |\lambda_k|^2} < \varepsilon.$$

Принимая еще во внимание (2.4), убеждаемся в том, что при $\mu \rightarrow \pm\infty$

$$\varphi(i\mu) \rightarrow 0.$$

По теореме 11 из [4; гл. V, § 4] $\varphi(\lambda)$ имеет ВРР. Из определения этой функции следует, что

$$\varphi(\lambda) \lambda L_1(\lambda) = 1 - \frac{L_1(\lambda)}{L_1(0)} - \lambda \psi(\lambda). \quad (2.7)$$

Так как индикаторная диаграмма $D(L_1)$ получается из $D(L)$ сдвигом вдоль мнимой оси и выполняется (2.4), то $D(L_1)$ – отрезок мнимой оси, содержащий точку нуль. Из соотношения (2.7) в силу неотрицательности индикатора $h_{L_1}(\theta)$, неравенства $h_{\psi}(\theta) \leq h_{L_1}(\theta)$ и полной регулярности роста $\varphi(\lambda)$ следует, что $\varphi \in [1, 0]$. Но такая функция не может исчезать вдоль мнимой оси, не будучи тождественным нулем. Итак, наличие разложения (2.6) установлено. По теореме Крейна $L_1(\lambda)$ – функция ВРР, а значит, вполне регулярный рост имеет и функция $L(\lambda)$.

Далее нам следует убедиться в том, что и для $L(\lambda)$ справедливо разложение вида (2.6).

Рассмотрим три возможные ситуации, вытекающие из условия i).

Если точка $\lambda = 0$ не является концом отрезка, изображающего индикаторную диаграмму функции $L(\lambda)$, то $|L(i\mu)| \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \pm\infty$. В этом случае $\frac{1}{L(\lambda)}$ представляется рядом Крейна вида (2.6), что можно обосновать, используя все рассуждения, примененные выше к $L_1(\lambda)$.

Пусть теперь одним из концов индикаторной диаграммы $L(\lambda)$ является точка $\lambda = 0$; для определенности считаем эту диаграмму отрезком $[-i\delta, 0]$, $\delta > 0$. Тогда при всяком $\varepsilon \in (0, \delta)$ можно повторить указанные рассуждения применительно к функции $L(\lambda)e^{-i\varepsilon\lambda}$ (оценка производной в точках λ_k сохраняется, так как они находятся в горизонтальной полосе). В результате придем к разложению на простейшие дроби

$$\frac{e^{i\varepsilon\lambda}}{L(\lambda)} = \frac{1}{L(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\varepsilon\lambda_k}}{L'(\lambda_k)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} \right\}. \quad (2.8)$$

Равномерная по ε сходимость ряда в правой части (2.8) при фиксированном λ (снова используются неравенства $|\nu_k| \leq h$, $k = 1, 2, \dots$) позволяет перейти в этом соотношении почленно к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ и установить нужное представление

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \frac{1}{L(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} \right\}.$$

Пусть, наконец, индикаторная диаграмма функции $L(\lambda)$ состоит из единственной точки $\lambda = 0$, т.е. $L(\lambda)$ имеет нулевой экспоненциальный тип. Условия (2.3) и (2.4) показывают, что при $D_1 = De^{\operatorname{Re} b} > 0$ выполняется неравенство

$$|L(i\mu)| \geq D_1 e^{-\mu \operatorname{Im} d}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Но функция нулевого экспоненциального типа может удовлетворять последнему неравенству только при $\operatorname{Im} d = 0$. Значит, $L(\lambda) = e^b L_1(\lambda)$, а для $\frac{1}{L_1(\lambda)}$ разложение (2.6) получено выше. Этим завершается проверка достаточной части теоремы при $p = 0$.

Осталось провести индукционный шаг. Предположим, что при каком-либо $p \in \mathbb{N}$ всякая ЦФЭТ $L(\lambda)$ с простыми нулями

$$\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| \leq h\} \setminus \{0\}, \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{|L'(\lambda_k)| |\lambda_k|^{p+1}} < +\infty,$$

у которой $0 \in D(L) \subset i\mathbb{R}$, допускает представление

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(\lambda)} &= \frac{1}{L(0)} - \frac{L'(0)}{L^2(0)} \cdot \lambda + \dots + \frac{1}{(p-1)!} \left(\frac{1}{L(\lambda)} \right)^{(p-1)}(0) \cdot \lambda^{p-1} \\ &+ \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{L'(\lambda_k)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} + \dots + \frac{\lambda^{p-1}}{\lambda_k^p} \right\}. \end{aligned}$$

Возьмем ЦФЭТ $L(\lambda)$ с теми же требованиями на индикаторную диаграмму и нули с той лишь разницей, что

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{|L'(\lambda_k)| |\lambda_k|^{p+2}} < +\infty.$$

Тогда при фиксированном $\mu \notin \Lambda \cup \{0\}$ функция $L_\mu(\lambda) := L(\lambda)(\lambda - \mu)$ удовлетворяет предположению индукции и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_\mu(\lambda)} &= \frac{1}{L_\mu(0)} - \frac{L'_\mu(0)}{L_\mu^2(0)} \cdot \lambda + \dots + \frac{1}{(p-1)!} \left(\frac{1}{L_\mu(\lambda)} \right)^{(p-1)}(0) \cdot \lambda^{p-1} \\ &+ \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{L'_\mu(\lambda_k)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} + \dots + \frac{\lambda^{p-1}}{\lambda_k^p} \right\} \\ &+ \frac{1}{L(\mu)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \mu} + \frac{1}{\mu} + \dots + \frac{\lambda^{p-1}}{\mu^p} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(\lambda)} &= (\lambda - \mu) \left\{ \frac{1}{L_\mu(0)} - \frac{L'_\mu(0)}{L_\mu^2(0)} \cdot \lambda + \dots + \frac{1}{(p-1)!} \left(\frac{1}{L_\mu(\lambda)} \right)^{(p-1)}(0) \cdot \lambda^{p-1} \right\} \\ &+ \frac{\lambda^p}{\mu^p L(\mu)} + \sum_{k=1}^\infty \frac{(\lambda - \mu) \lambda^p}{L'(\lambda_k) \lambda_k^p (\lambda - \lambda_k) (\lambda_k - \mu)}. \end{aligned}$$

Сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda - \mu)\lambda^p}{L'(\lambda_k)\lambda_k^p(\lambda - \lambda_k)(\lambda_k - \mu)} \\
 &= \lambda^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{L'(\lambda_k)\lambda_k^{p+1}(\lambda - \lambda_k)(\lambda_k - \mu)} - \lambda^p \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)\lambda_k^p(\lambda - \lambda_k)(\lambda_k - \mu)} \\
 &= \lambda^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)\lambda_k^{p+1}(\lambda - \lambda_k)} + \lambda^p \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)\lambda_k^{p+1}(\lambda_k - \mu)}.
 \end{aligned}$$

Введя для многочлена

$$\begin{aligned}
 (\lambda - \mu) \left\{ \frac{1}{L_\mu(0)} - \frac{L'_\mu(0)}{L_\mu^2(0)} \cdot \lambda + \dots + \frac{1}{(p-1)!} \left(\frac{1}{L_\mu(\lambda)} \right)^{(p-1)}(0) \cdot \lambda^{p-1} \right\} \\
 + \lambda^p \left\{ \frac{1}{\mu^p L(\mu)} + \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)\lambda_k^{p+1}(\lambda_k - \mu)} \right\}
 \end{aligned}$$

степени не выше p обозначение $Q_{p,\mu}(\lambda)$, запишем, что

$$\frac{1}{L(\lambda)} = Q_{p,\mu}(\lambda) + \lambda^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)\lambda_k^{p+1}(\lambda - \lambda_k)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_k)| |\lambda_k|^{p+2}} < +\infty.$$

Применяя лемму 2.2 и принцип математической индукции, видим, что достаточная часть теоремы справедлива при любом целом $p \geq 0$. Доказательство завершено.

Совершенно аналогично доказываются две следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $L(\lambda)$ – целая функция с последовательностью простых нулей $\{0\} \cup \Lambda$, $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$, расположенных в некоторой полосе. Для того чтобы функция $\frac{1}{L(\lambda)}$ представлялась абсолютно и равномерно сходящимся на любом компакте из $\mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \Lambda)$ рядом Крейна

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L(\lambda)} = & -\frac{L''(0)}{2(L'(0))^2} + \dots + \frac{1}{(p+1)!} \left(\frac{\lambda}{L(\lambda)} \right)^{(p+1)}(0) \cdot \lambda^p + \frac{1}{L'(0)} \frac{1}{\lambda} \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} + \dots + \frac{\lambda^p}{\lambda_k^{p+1}} \right\},
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $p \geq 0$ – целое число, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия i) и ii) из теоремы 2.1.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $L(\lambda)$ такая же, как в теореме 2.1 (соответственно – в теореме 2.2). Обратная величина $\frac{1}{L(\lambda)}$ раскладывается в ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)} \frac{1}{\lambda - \lambda_k}$$

(соответственно – в ряд

$$\frac{1}{L'(0)} \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)} \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \Big),$$

сходящийся абсолютно и равномерно на любом компакте, не содержащем нулей функции $L(\lambda)$, в том и только том случае, когда одновременно с абсолютной сходимостью ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)\lambda_k}$ выполняется условие i).

Анализ проведенных при доказательстве теоремы 2.1 рассуждений приводит к таким утверждениям.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $L(\lambda)$ имеет нулевой экспоненциальный тип и простые нули, уместающиеся в какой-либо полосе. Для наличия представления (2.2) (если $L(0) \neq 0$) или представления (2.9) (если $L(0) = 0$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие ii).

В работе [22; теорема 2] утверждается, что аналогичный следствию 2.1 результат справедлив и без ограничения на расположение нулей $L(\lambda)$. Схема доказательства этого утверждения, как сообщается в цитированной работе, принадлежит М. Л. Сдину и основывается на формуле выпуклости Карлемана–Цуи–Хейнса.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $L(\lambda)$ – целая функция, все нули λ_k которой простые и расположены в некоторой полосе. Следующие условия равносильны:

1) справедливо представление

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty;$$

2) L имеет экспоненциальный тип, индикаторная диаграмма $D(L)$ есть отрезок, перпендикулярный границе указанной полосы, $0 \in D(L)$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_k)|} < \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть целая функция $L(\lambda)$ является четной, все ее нули

$$\Lambda = (\pm \lambda_k)_{k=1}^{\infty}$$

простые и расположены в некоторой полосе. Абсолютно сходящееся на множестве $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ разложение

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(\lambda)} &= \frac{1}{L(0)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L(\lambda)} \right)''(0) \cdot \lambda^2 + \dots + \frac{1}{(2m)!} \left(\frac{1}{L(\lambda)} \right)^{(2m)}(0) \cdot \lambda^{2m} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k^{2m+2}}{\lambda_k^{2m+1} L'(\lambda_k) (\lambda^2 - \lambda_k^2)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

справедливо тогда и только тогда, когда L имеет экспоненциальный тип и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_k)| |\lambda_k|^{2m+3}} < \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть целая функция $L(\lambda)$ является нечетной, все ее нули

$$\{0\} \cup \Lambda, \Lambda = (\pm \lambda_k)_{k=1}^{\infty}$$

простые и расположены в некоторой полосе. Разложение

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(\lambda)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{L(\lambda)} \right)''(0) \cdot \lambda + \dots + \frac{1}{(2m)!} \left(\frac{\lambda}{L(\lambda)} \right)^{(2m)}(0) \cdot \lambda^{2m-1} \\ &+ \frac{1}{L'(0)} \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda^{2m+1}}{\lambda_k^{2m} L'(\lambda_k) (\lambda^2 - \lambda_k^2)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

в абсолютно сходящийся на $\mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \Lambda)$ ряд справедливо тогда и только тогда, когда L имеет экспоненциальный тип и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_k)| |\lambda_k|^{2m+2}} < \infty.$$

§ 3. Некоторые применения основных теорем

Одно из самых простых и наглядных приложений теорем 2.1–2.3 заключается в существенном упрощении известных процедур разложения конкретных функций на простые дроби, позволяющем фактически сразу выписывать нужные формулы. Так, используя (2.9)–(2.11), мы, например, без труда восстановим следующие хорошо известные представления:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \lambda} &= \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2\lambda}{\lambda^2 - \pi^2 k^2}, & \frac{1}{\cos \lambda} &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)\pi}{\lambda^2 - (2k-1)^2 \pi^2 / 4}, \\ \frac{1}{e^{\lambda} - 1} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 k^2}. \end{aligned}$$

Теоремы о разложении на простейшие дроби находят более глубокое применение в теории полных и представляющих систем экспонент (см., например, работу [18]).

В качестве наглядной иллюстрации к полученным утверждениям рассмотрим вопрос о разложении на простейшие дроби функций из некоторых специальных классов. Установленные ниже утверждения (предложения 3.1 и 3.2) уточняют первоначальные результаты автора из работы [5]. Приведем два известных факта, необходимых нам в дальнейшем. Первый из них получен Б. Я. Левиным в 1949 г. (см., например, [25]), второй принадлежит А. М. Седлецкому (см. [26; лемма 6]).

ТЕОРЕМА А. Пусть

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right), \quad 0 < \lambda_k \uparrow \infty, \quad |\lambda_k - k| \leq d < \infty.$$

Тогда с некоторой постоянной $A > 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$|L(\lambda)| \leq A(1 + |\lambda|^{4d})e^{\pi |\operatorname{Im} \lambda|}.$$

При дополнительном условии $\inf_{k \neq j} |\lambda_k - \lambda_j| > 0$ отделимости нулей найдется постоянная $B > 0$ такая, что при каждом $k \geq 1$ справедлива оценка

$$|L'(\lambda_k)| \geq B|\lambda_k|^{-4d}.$$

ТЕОРЕМА В. Пусть корни канонического произведения

$$L(\lambda) = \lambda \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)$$

удовлетворяют условию

$$\lambda_k = k^\beta + O(1), \quad \beta > 1.$$

Тогда при $k \rightarrow \infty$ выполняется асимптотическое равенство

$$L'(\lambda_k) = \exp\left(\pi k \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\beta} + O(\ln k)\right).$$

В частности, заключение теоремы В верно для бесконечного произведения вида

$$L_0(\lambda) = \lambda \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{k^\beta}\right).$$

Например, при $\beta = 2$ в подтверждение теоремы В имеем

$$L_0(\lambda) = \lambda \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{k^2}\right) = \frac{\sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda}}{\pi}, \quad L'_0(k^2) = \frac{(-1)^k}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При $\beta > 2$ найдутся $a, \gamma > 0$ такие, что

$$|L'(\lambda_k)| = \exp(ak + O(\ln k)) \geq e^{ak} \cdot k^{-\gamma},$$

откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_k)|} < +\infty.$$

Если же $\beta \in (1, 2)$, то, обозначив для краткости

$$\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\beta} =: -a < 0,$$

запишем при $k \geq k_o(a)$ оценку

$$|L'(\lambda_k)| = e^{-ak + O(\ln k)} \leq e^{-bk}$$

с некоторым $b > 0$. Следовательно, условие ii) теоремы 2.1 не выполняется ни при каком $p \geq 0$. Отсюда и из теорем 2.2 и 2.3 получаем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. При $\beta \geq 2$ для функции из условия теоремы В справедливо разложение в ряд

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)} \frac{1}{\lambda - \lambda_k},$$

сходящийся абсолютно и равномерно на любом компакте, не содержащем нулей функции $L(\lambda)$. При $1 < \beta < 2$ обратная величина функции $L(\lambda)$ из теоремы В не может быть разложена в ряд вида (2.9).

Предложение 3.1 демонстрирует невозможность представления рядом Крейна функций с быстро стремящейся к нулю последовательностью $(L'(\lambda_k))_{k=1}^{\infty}$. Другой причиной отсутствия такого разложения может быть условие $0 \notin D(L)$. Здесь уместно привести простой пример, принадлежащий Кусису. Пусть

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{2^k}\right) e^{\lambda/2^k} = e^{\lambda} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{2^k}\right).$$

Эта функция имеет только простые вещественные нули $\lambda_k = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, и экспоненциальный тип, так как $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$. Ясно, что $D(L) = \{1\}$. Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(2^k)|} < \infty,$$

$$|L(iy)| \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow \pm\infty, \quad \frac{1}{L(x)} \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Последнее свойство, несмотря на наличие предыдущих, делает невозможным даже равенство

$$\frac{1}{L(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(2^k)(x - 2^k)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

поскольку его правая часть стремится к нулю при $x \rightarrow -\infty$.

Пусть теперь $L(\lambda)$ – каноническое произведение из теоремы А. Последовательность $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ имеет плотность

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} = 1,$$

а условие отделимости точек этой последовательности влечет регулярность множества нулей $\Lambda = (\pm\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ рассматриваемой функции. Хорошо известно, что $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост, а $D(L)$ изображается отрезком $[-\pi i, \pi i]$ мнимой оси. Кроме того, условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_k)| |\lambda_k|^{2m+3}} < \infty$$

выполняется с $m = 1 + [2d - 1]$. Из следствия 2.4 вытекает такой результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть каноническое произведение $L(\lambda)$ удовлетворяет исходным предположениям теоремы А. Тогда обратная величина $[L(\lambda)]^{-1}$ допускает представление (2.10) с $m = 1 + [2d - 1]$. Если, в частности, $d < \frac{1}{2}$, то это представление можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{L(\lambda)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda^2}{\lambda_k L'(\lambda_k)(\lambda^2 - \lambda_k^2)}.$$

Список литературы

- [1] М. Г. Крейн, “Об одном замечательном классе эрмитовых операторов”, *Докл. АН СССР*, **44**:5 (1944), 191–195; англ. пер.: M. Krein, “On a remarkable class of Hermitian operators”, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, **44** (1944), 175–179.
- [2] H. L. Hamburger, “Hermitian transformations of deficiency-index (1, 1), Jacobi matrices and undetermined moment problems”, *Amer. J. Math.*, **66**:4 (1944), 489–522.
- [3] М. Г. Крейн, “К теории целых функций экспоненциального типа”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **11**:4 (1947), 309–326.
- [4] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956; англ. пер.: B. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.
- [5] В. Б. Шерстюков, “О разложении мероморфных функций специального вида на простейшие дроби”, *Anal. Math.*, **33**:1 (2007), 63–81.
- [6] Н. И. Ахиезер, “О некоторых свойствах целых трансцендентных функций экспоненциального типа”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **10**:5 (1946), 411–428.
- [7] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, М., 1970; англ. пер.: A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii, *Value distribution of meromorphic functions*, Transl. Math. Monogr., **236**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [8] L. de Branges, *Hilbert spaces of entire functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.
- [9] Ю. Ф. Коробейник, “Граничные свойства аналитических решений дифференциальных уравнений бесконечного порядка”, *Матем. сб.*, **115**(157):3(7) (1981), 364–390; англ. пер.: Ju. F. Korobeinik, “Boundary properties of analytic solutions of differential equations of infinite order”, *Math. USSR-Sb.*, **43**:3 (1982), 323–345.
- [10] Ю. Ф. Коробейник, *О разрешимости в комплексной области некоторых общих классов линейных операторных уравнений*, Изд-во РГУ, Ростов-на-Дону, 2005.
- [11] A. Borichev, M. Sodin, “Krein’s entire functions and the Bernstein approximation problem”, *Illinois J. Math.*, **45**:1 (2001), 167–185.
- [12] Л. С. Маергойз, “Индикаторная диаграмма целой функции уточненного порядка и ее обобщенные преобразования Бореля–Лапласа”, *Алгебра и анализ*, **12**:2 (2000), 1–63; англ. пер.: L. S. Maergoiz, “Indicator diagram and generalized Borel–Laplace transforms for entire functions of a given proximate order”, *St. Petersburg Math. J.*, **12**:2 (2001), 191–232.
- [13] L. S. Maergoiz, “On partial fraction expansion for meromorphic functions”, *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, **9**:3 (2002), 487–492.
- [14] А. А. Гольдберг, “Об одном классе целых функций”, *Докл. АН СССР*, **229**:1 (1976), 39–41.
- [15] L. de Branges, “The Bernstein problem”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10**:5 (1959), 825–832.

- [16] P. Koosis, *The logarithmic integral*, v. I, Cambridge Stud. Adv. Math., **12**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
- [17] Ch. Berg, H. L. Pedersen, “Nevanlinna matrices of entire functions”, *Math. Nachr.*, **171**:1 (1995), 29–52.
- [18] В. Б. Шерстюков, “Представление обратной величины целой функции рядом простейших дробей и экспоненциальная аппроксимация”, *Матем. сб.*, **200**:3 (2009), 147–160; англ. пер.: V. B. Sherstyukov, “Representation of the reciprocal of an entire function by series of partial fractions and exponential approximation”, *Sb. Math.*, **200**:3 (2009), 455–469.
- [19] A. G. Bakan, “Polynomial approximation in $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$. I. General results and representation theorem”, *Nats. Akad. Nauk Ukrain. Inst. Mat. Preprint*, **7** (1998), 1–45.
- [20] A. G. Bakan, “Polynomial density in $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ and representation of all measures which generate a determinate Hamburger moment problem”, *Approximation, optimization and mathematical economics* (Guadeloupe, 1999), Physica, Heidelberg, 2001, 37–46.
- [21] А. Г. Бакан, “Полиномиальный вид условий Луи де Бранжа плотности алгебраических многочленов в пространстве C_w^0 ”, *Укр. матем. журн.*, **57**:3 (2005), 305–319; англ. пер.: A. G. Bakan, “Polynomial form of de Branges conditions for the denseness of algebraic polynomials in the space C_w^0 ”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **57**:3 (2005), 364–381.
- [22] А. Г. Бакан, “Разложение обратной величины целой функции на простые дроби”, *Докл. НАН Украины*, 2009, № 2, 11–13.
- [23] А. М. Седлецкий, *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005.
- [24] И. Ф. Красичков-Терновский, “Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона”, *Матем. заметки*, **24**:4 (1978), 531–546; англ. пер.: I. F. Krasichkov-Ternovskii, “A geometric lemma useful in the theory of entire functions and Levinson-type theorems”, *Math. Notes*, **24**:4 (1978), 784–792.
- [25] R. M. Redheffer, “Completeness of sets of complex exponentials”, *Advances in Math.*, **24**:1 (1977), 1–62.
- [26] А. М. Седлецкий, “Об аннулируемых подсистемах тригонометрической системы”, *Матем. заметки*, **34**:2 (1983), 237–248; англ. пер.: A. M. Sedletskii, “Annihilable systems of trigonometric systems”, *Math. Notes*, **34**:2 (1983), 601–608.

В. Б. Шерстюков (V. B. Sherstyukov)
 Московский инженерно-физический институт
 (Национальный исследовательский ядерный университет)
E-mail: shervb73@gmail.com

Поступила в редакцию
 06.07.2010 и 01.11.2010