Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. П. Семёнов, Автоморфизмы полугрупп обратимых матриц с неотрицательными целыми элементами, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 9, 117–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7776>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:33:49

УДК 512.643+512.555

П. П. Семёнов**Автоморфизмы полугрупп обратимых матриц
с неотрицательными целыми элементами**

Пусть $G_n(\mathbb{Z})$ – подполугруппа группы $GL_n(\mathbb{Z})$, состоящая из матриц с неотрицательными целыми коэффициентами. В работе описаны автоморфизмы данной полугруппы при $n \geq 2$.

Библиография: 5 названий.

Ключевые слова: матрицы с неотрицательными коэффициентами, автоморфизмы, целые числа.

§ 1. Введение

Пусть R – упорядоченное кольцо, $G_n(R)$ – подполугруппа в $GL_n(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными коэффициентами.

В работе [1] А. В. Михалёв и М. А. Шаталова описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является линейно упорядоченным телом и $n \geq 2$. В работе [2] Е. И. Бунина и А. В. Михалёв описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$, если R – произвольное линейно упорядоченное ассоциативное кольцо с $1/2$, $n \geq 3$. В работе [3] Е. И. Бунина и А. В. Михалёв нашли необходимые и достаточные условия для того, чтобы эти полугруппы были элементарно эквивалентны. В работе [4] Е. И. Бунина и П. П. Семёнов описали автоморфизмы полугруппы обратимых неотрицательных матриц порядка > 2 над коммутативными частично упорядоченными кольцами с обратимой двойкой, а в работе [5] нашли необходимые и достаточные условия для их элементарной эквивалентности. Во всех работах [2]–[5] было существенно, что в кольце R обратима двойка либо хотя бы какое-то целое число > 1 .

В настоящей работе мы описываем автоморфизмы полугруппы $G_n(\mathbb{Z})$ при $n \geq 2$. Оказывается, что при $n = 2$ существуют автоморфизмы нестандартного вида (случай $n = 2$ разобран отдельно в § 3), а при $n \geq 3$ все автоморфизмы полугруппы $G_n(\mathbb{Z})$ стандартны, т.е. для данного случая просто являются внутренними (сопряжениями с помощью некоторой матрицы подстановки). Таким образом, любой автоморфизм полугруппы $G_n(\mathbb{Z})$ продолжается до автоморфизма всей группы $GL_n(\mathbb{Z})$, сохраняющего порядок.

§ 2. Совпадение полугрупп $GE_n^+(\mathbb{Z})$ и $G_n(\mathbb{Z})$

Пусть $E = E_n$ – единичная матрица порядка n , $G_n(\mathbb{Z})$ – полугруппа, состоящая из всех обратимых (в $GL_n(\mathbb{Z})$) целочисленных матриц порядка n с неотрицательными коэффициентами, Σ_n – симметрическая группа порядка n ,

S_σ – матрица перестановки $\sigma \in \Sigma_n$ (т.е. матрица $(\delta_{i\sigma(j)})$, где $\delta_{i\sigma(j)}$ – символ Кронекера), $S_n = \{S_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_n\}$ (группа S_n в точности совпадает с обратимыми элементами полугруппы $G_n(\mathbb{Z})$). Пусть E_{ij} – матричная единица.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Через $B_{ij}(x)$ обозначим матрицу $E + xE_{ij}$, где E_{ij} – матрица из нулей и одной единицы, стоящей на месте (i, j) . Пусть $\mathbf{P}$ обозначает подполугруппу в $G_n(\mathbb{Z})$, порожденную всеми матрицами S_σ , $\sigma \in \Sigma_n$, и $B_{ij}(x)$, $x \geq 0$, $i \neq j$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Две матрицы $A, B \in G_n(\mathbb{Z})$ называются $\mathcal{P}$ -эквивалентными (см. [1]), если существуют матрицы $A_j \in G_n(\mathbb{Z})$, $j = 0, \dots, k$, $A = A_0$, $B = A_k$ и матрицы $P_i, \tilde{P}_i, Q_i, \tilde{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, \dots, k-1$, такие, что $P_i A_i \tilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \tilde{Q}_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Через $\text{GE}_n^+(\mathbb{Z})$ обозначим подполугруппу в $G_n(\mathbb{Z})$, порожденную всеми матрицами, $\mathcal{P}$ -эквивалентными матрицам из $\mathbf{P}$.

ЛЕММА 1. Полугруппы $G_n(\mathbb{Z})$ и $\text{GE}_n^+(\mathbb{Z})$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала приведем произвольную матрицу $M \in G_n(\mathbb{Z})$ с целыми неотрицательными коэффициентами к единичной следующими элементарными преобразованиями:

1) вычитанием одной строки из другой (т.е. умножением слева на матрицу, обратную к матрице из $\mathcal{P}$);

2) прибавлением одного столбца к другому (т.е. умножением справа на матрицу из $\mathcal{P}$);

3) меняя строки или столбцы местами (т.е. умножением справа или слева на обратимую матрицу из $\mathcal{P}$).

Таким образом, мы хотим показать, что $E_n = A_1 A_2 \cdots A_k M C_1 C_2 \cdots C_m$, где $M \in G_n(\mathbb{Z})$, $C_p = B_{ij}(x)$, $x \in \mathbb{Z}_+$, или $C_p = S_\sigma$, $p = 1, \dots, m$; $A_q = B_{i,j}(-x)$, $x \in \mathbb{Z}_+$, или $A_q = S_\sigma$, $q = 1, \dots, k$. Другими словами, $A_k^{-1} \cdots A_1^{-1} = M C_1 \cdots C_m$, где $A_i^{-1}, C_j \in \mathbf{P}$. Понятно, что это будет означать $M \in \text{GE}_n^+(\mathbb{Z})$.

Докажем утверждение индукцией по размеру матрицы n . При $n = 1$ утверждение очевидно.

Рассмотрим некоторую i -ю строку матрицы. Назовем элемент $a_{i,j}$ *хорошим*, если существует $k \neq i$ такое, что $a_{i,j} > a_{k,j}$, $a_{k,j} \neq 0$; такую k -ю строку назовем *подходящей*.

Если i -ю строку матрицы можно вычесть из какой-то другой строки так, чтобы полученная матрица снова была неотрицательной, то сделаем это. Далее будем считать, что нельзя ни из какой строки вычесть i -ю, чтобы результат был неотрицательным.

Рассмотрим множество всех максимальных элементов i -й строки. Пусть среди них есть хороший элемент $a_{i,j}$. Тогда вычтем из i -й строки подходящую k -ю строку. Заметим, что элемент $a_{i,j}$ останется положительным (но уменьшится), другие элементы строки могут стать отрицательными, а элементы других строк не изменятся. Затем прибавим ко всем столбцам j -й столбец такое (минимальное) количество раз, чтобы все элементы матрицы стали неотрицательными.

После этой процедуры количество максимальных элементов (или сам максимальный элемент) уменьшится. Будем продолжать такую процедуру до тех пор, пока это возможно.

Пусть ни один максимальный элемент не является хорошим. Тогда в любом столбце, в котором стоит максимальный элемент i -й строки (например, $a_{i,j}$), все элементы либо не меньше него, либо равны нулю. Если в j -м столбце существует элемент, не меньший $a_{i,j}$ (например, $a_{k,j}$), то вычтем из i -й строки k -ю. После вычитания в i -й строке будет хоть один положительный элемент $a_{i,l}$, поскольку иначе можно было бы вычесть из k -й строки i -ю и осталась бы неотрицательная матрица. Тогда, как и в предыдущем случае, прибавим l -й столбец минимальное количество раз, чтобы матрица стала неотрицательной. Заметим, что ни один из максимальных элементов не увеличится, а элемент $a_{i,j}$ строго уменьшится. Пусть теперь в столбце с каждым максимальным элементом строки все элементы нулевые, тогда максимальный элемент всего лишь один (иначе матрица была бы вырождена) и он равен 1 (иначе определитель был бы по модулю не равен 1). А значит, переставим i -ю строку на первое место, поставим 1 на первое место и вычтем из всех строк первую, чтобы занулить первый столбец.

Задача сведена к матрице меньшего размера.

Благодаря доказанной лемме произвольный автоморфизм будет полностью определяться его значениями на элементах S_σ , $\sigma \in \Sigma$, и $B_{1,2}(1)$.

§ 3. Автоморфизмы полугруппы $G_2(\mathbb{Z})$

В этом параграфе ввиду отсутствия других матриц подстановок будем обозначать матрицу $S_{(1,2)}$ просто через S .

ЛЕММА 2. *Полугруппа $G_2(\mathbb{Z})$ порождается элементами S и $B_{1,2}(1)$.*¹

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матрицу $M \in G_2(\mathbb{Z})$. Докажем лемму индукцией по максимальному элементу матрицы M . Если ее максимальный элемент равен 1, то она равна одной из следующих матриц: $E_2, S, S^{\delta_1} B_{1,2}(1) S^{\delta_2}$, $\delta_i \in \{0, 1\}$. Таким образом, база индукции проверена.

Докажем теперь индукционный переход. Можно считать, что максимальный элемент M стоял в нижнем правом углу (иначе можно домножить матрицу соответствующим образом на S) и он больше 1. Пусть $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Поскольку определитель нашей матрицы равен ± 1 и максимальный элемент больше 1, то он является наибольшим, a – минимальный элемент и $c \neq 0$. А значит, $M = M' B_{1,2}(1)$, где $M' = \begin{pmatrix} a & b-a \\ c & d-c \end{pmatrix}$ – матрица из $G_2(\mathbb{Z})$ с наибольшим элементом, строго меньшим d . По предположению индукции M' порождается матрицами S и $B_{1,2}(1)$, а значит M – тоже.

Рассмотрим произвольный автоморфизм $\Phi \in \text{Aut}(G_2(\mathbb{Z}))$. Ясно, что $\Phi(S)$ – это элемент второго порядка в рассматриваемой полугруппе, т.е. $\Phi(S) = S$.

Теперь рассмотрим $\Phi(B_{1,2}(1))$.

¹Это известный факт, но мы приведем его доказательство.

ЛЕММА 3. *Необратимая в $G_2(\mathbb{Z})$ матрица A не раскладывается в произведение $A = A_1 A_2$, где $A_1, A_2 \in G_2(\mathbb{Z})$, A_1, A_2 необратимы (в $G_2(\mathbb{Z})$), тогда и только тогда, когда $A = B_{1,2}(1)$ или $A = B_{2,1}(1) = S B_{1,2}(1) S$, или $A = S B_{1,2}$, или $A = B_{1,2}(1) S$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В матрице A не может быть больше двух нулевых элементов. Если в ней ровно два ненулевых элемента, то они должны стоять по диагонали. Из того, что матрица A принадлежит $GL_2(\mathbb{Z})$, следует, что $|\det A| = 1$, поэтому оба эти элемента являются единицами, т.е. это либо E , либо S .

Если в матрице A есть ровно один нулевой элемент, то с помощью домножения слева и справа на S мы можем добиться того, чтобы он стоял в левом нижнем углу. Тогда на главной диагонали у матрицы оказываются единицы, а в верхнем правом углу стоит число $n \geq 1$:

$$A = S^{\delta_1} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{\delta_2}, \quad \delta_1, \delta_2 = 0, 1.$$

Если $n > 1$, то

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому матрица A раскладывается в искомое произведение. Если $n = 1$, то матрица A является одной из матриц из условия леммы.

Покажем, что ее нельзя разложить в произведение двух необратимых матриц из $G_2(\mathbb{Z})$. Ясно, что мы можем считать, что $A = B_{1,2}(1)$. Если

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

то $a'c + c'd = 0$, откуда $a'c = c'd = 0$, т.е. каждая из матриц в произведении имеет по одному нулю. Мы уже знаем, как устроены такие матрицы; непосредственно легко убедиться, что никакие их произведения не могут быть равны $B_{1,2}(1)$.

Теперь предположим, что в матрице A нет ни одного нулевого элемента. Рассмотрим ее максимальный элемент. С помощью домножений справа и слева на матрицу S мы можем добиться того, чтобы этот элемент стоял в правом верхнем углу. Так как этот элемент больше единицы, а определитель матрицы по модулю единичен, то в левом верхнем и правом нижнем углах рассматриваемой матрицы стоят меньшие элементы. Получим матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad b \geq c \geq 1, \quad b > a \geq 1, \quad b > d \geq 1.$$

Если при этом $c > a$ или $c > d$, то

$$|\det A'| = bc - ad \geq (a+1)(d+1) - ad = a + d + 1 > 1,$$

поскольку a, d – ненулевые элементы. Значит, $c \leq a$ и $c \leq d$. Тогда

$$A' = A'_1 A'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix},$$

при этом в матрице A'_2 только левый верхний элемент может быть нулем. Значит, A'_2 необратима. Лемма полностью доказана.

Из доказанной леммы, очевидно, следует, что $\Phi(B_{1,2}(1)) = S^{\delta_1} B_{1,2}(1) S^{\delta_2}$, $\delta_1, \delta_2 = 0, 1$. Так как любая матрица из $G_2(\mathbb{Z})$ порождается матрицами $S_{(1,2)}$ и $B_{1,2}(1)$, то образом матрицы $B_{1,2}(1)$ автоморфизм Φ задается полностью. Если $\delta_1 = \delta_2 = 0$, то это тождественный автоморфизм, если $\delta_1 = \delta_2 = 1$, то это сопряжение матрицей S . В остальных двух случаях возникает отображение, для которое нужно доказать, что оно является автоморфизмом. Для этого докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4. *Полугруппа $G_2(\mathbb{Z})$ – это полугруппа с единицей E , порожденная двумя образующими S и $B = B_{1,2}(1)$ с единственным соотношением $S^2 = E$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже знаем из леммы 2, что полугруппа $G_2(\mathbb{Z})$ порождается образующими S и B . Осталось только показать, что в ней нет никаких соотношений, не следующих из $S^2 = E$. Для этого предположим, что соотношение есть. Тогда можно считать, что оно имеет (после всех сокращений) вид

$$A = SB^{k_1} SB^{k_2} S \dots SB^{k_i} S = B^{l_1} SB^{l_2} S \dots SB^{l_j}, \quad i, j \geq 1.$$

Тогда матрица A , с одной стороны, представляется в виде $A = BA_1$, где $A_1 \in G_2(\mathbb{Z})$ (откуда следует, что ее верхняя строка больше или равна нижней), а с другой стороны – в виде $A = SBA_2$, $A_2 \in G_2(\mathbb{Z})$ (откуда следует, что нижняя строка больше или равна верхней). Таким образом, строки равны, что невозможно. Значит, единственным соотношением в полугруппе $G_2(\mathbb{Z})$ является $S^2 = E$.

ТЕОРЕМА 1. *Полугруппа $G_2(\mathbb{Z})$ имеет четыре автоморфизма:*

- 1) *тождественный* (Φ_1);
- 2) *сопряжение матрицей $S = S_{(1,2)}$* (Φ_2);
- 3) *автоморфизм Φ_3 , при котором $\Phi_3(S) = S$, $\Phi_3(B_{1,2}(1)) = SB_{1,2}(1)$;*
- 4) *автоморфизм $\Phi_4 = \Phi_2 \circ \Phi_3$.*

Автоморфизмы 3), 4) не продолжаются на всю группу $GL_2(\mathbb{Z})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображения 1), 2) являются автоморфизмами. Докажем, что Φ_3 тоже автоморфизм. Из леммы 2 следует, что S и $SB_{1,2}$ являются порождающими. А из леммы 4 следует, что между ними нет соотношений, не следующих из $S^2 = E$. А значит, Φ_3 – автоморфизм; Φ_4 – тоже автоморфизм, поскольку $\Phi_4 = \Phi_3 \circ \Phi_2$. То, что других автоморфизмов нет, следует из леммы 3.

Покажем, что автоморфизм Φ_3 не продолжается на группу $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Действительно, предположим, что мы можем его продолжить. Тогда

$$\Phi_3(B_{2,1}(-1)) = \Phi_3(B_{2,1}(1))^{-1} = \Phi_3(SB_{1,2}(1)S)^{-1} = (B_{1,2}(1)S)^{-1} = SB_{1,2}(-1).$$

Значит,

$$\begin{aligned} \Phi_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \Phi_3(B_{1,2}(1)B_{2,1}(-1)B_{1,2}(1)) \\ &= SB_{1,2}(1)SB_{1,2}(-1)SB_{1,2}(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, элемент порядка четыре при автоморфизме переходит в элемент порядка два, что невозможно.

§ 4. Сопряжение матрицами подстановок

Так как подгруппа обратимых элементов в полугруппе $G_n(\mathbb{Z})$ изоморфна группе подстановок Σ_n , то любой автоморфизм Φ полугруппы $G_n(\mathbb{Z})$ индуцирует некоторый автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Sigma_n)$. При $n \neq 6$ любой автоморфизм группы Σ_n внутренний. Например, пусть автоморфизм φ – это сопряжение подстановкой $\sigma \in \Sigma_n$ (обозначим это сопряжение через i_σ). Тогда $\Phi_1 = i_{\sigma^{-1}} \circ \Phi$ – это также автоморфизм полугруппы $G_n(\mathbb{Z})$, тождественно действующий на всех матрицах S_ρ , $\rho \in \Sigma_n$.

Заметим, что для группы Σ_6 существует внешний автоморфизм.

ЛЕММА 5. *Ни один внешний автоморфизм группы Σ_6 не продолжается на полугруппу $G_6(\mathbb{Z})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все внешние автоморфизмы группы S_6 получаются из одного фиксированного внешнего автоморфизма φ композицией с каким-то внутренним автоморфизмом. Поэтому либо все внешние автоморфизмы продолжаются до автоморфизмов полугруппы $G_6(\mathbb{Z})$, либо не продолжается ни один. Рассмотрим автоморфизм φ такой, что

$$\varphi((12)) = (12)(34)(56), \quad \varphi((123456)) = (23)(456).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi((23)) &= (13)(25)(46), & \varphi((34)) &= (12)(36)(45), & \varphi((45)) &= (13)(24)(56), \\ \varphi((56)) &= (12)(35)(46), & \varphi((24)) &= (14)(26)(35). \end{aligned}$$

Пусть мы смогли продолжить наш автоморфизм φ до автоморфизма Φ полугруппы $G_6(\mathbb{Z})$. Пусть $\Phi(B_{1,2}(1)) = B_{1,2} = (b_{i,j})$. Матрица $B_{1,2}$ должна коммутировать с

$$\Phi(S_{(34)}) = S_{(12)(36)(45)}, \quad \Phi(S_{(45)}) = S_{(13)(24)(56)}, \quad \Phi(S_{(56)}) = S_{(12)(35)(46)}.$$

Из этого условия получаем, что матрица $B_{1,2}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b & c & c & c & c \\ b & a & c & c & c & c \\ c & c & a & b & c & c \\ c & c & b & a & c & c \\ c & c & c & c & a & b \\ c & c & c & c & b & a \end{pmatrix}.$$

Но тогда

$$\Phi(B_{1,3}(1)) = \Phi(S_{(23)}B_{1,2}(1)S_{(23)}) = \begin{pmatrix} a & c & c & c & c & b \\ c & a & c & b & c & c \\ c & c & a & c & b & c \\ c & b & c & a & c & c \\ c & c & b & c & a & c \\ b & c & c & c & c & a \end{pmatrix}.$$

Эти две матрицы должны коммутировать. После подсчета, приравнявая элементы, стоящие на месте $(1, 4)$, получаем $c^2 + b^2 - 2bc = 0$, т.е. $b = c$. Таким образом,

$$\Phi(B_{1,2}(1)) = B_{1,2} = \begin{pmatrix} a & c & c & c & c & c \\ c & a & c & c & c & c \\ c & c & a & c & c & c \\ c & c & c & a & c & c \\ c & c & c & c & a & c \\ c & c & c & c & c & a \end{pmatrix} = \Phi(B_{1,3}(1)).$$

Значит, Φ не автоморфизм.

Таким образом, с помощью сопряжения обратимой матрицей (матрицей подстановки) мы перешли от автоморфизма Φ к автоморфизму Φ_1 , тождественно действующему на все матрицы подстановок. Мы хотим теперь показать, что автоморфизм Φ тождественный.

Понятно, что для этого достаточно доказать, что $\Phi_1(B_{1,2}(1)) = B_{1,2}(1)$.

Пусть $\Phi(B_{i,j}(1)) = B_{i,j}$.

§ 5. Автоморфизмы группы $G_n(\mathbb{Z})$ при $n = 3$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если автоморфизм Φ_1 полугруппы $G_3(\mathbb{Z})$ таков, что для любого $\sigma \in \Sigma_3$ $\Phi_1(S_\sigma) = S_\sigma$, то Φ_1 – тождественный автоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi_1(B_{1,2}(1)) = (a_{i,j})$.

Из соотношения $B_{1,2}B_{1,3} = B_{1,3}B_{1,2}$ появляется система уравнений

$$\begin{cases} a_{1,1}a_{1,2} + a_{1,2}a_{3,2} + a_{1,3}a_{2,2} = a_{1,1}a_{1,3} + a_{1,2}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,3}, & (11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{2,1}a_{1,2} + a_{2,2}a_{3,2} + a_{2,3}a_{2,2} = a_{3,1}a_{1,3} + a_{3,2}a_{3,3} + a_{3,3}a_{2,3}, & (12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{3,1}a_{1,1} + a_{3,2}a_{3,1} + a_{3,3}a_{2,1} = a_{2,1}a_{1,1} + a_{2,2}a_{3,1} + a_{2,3}a_{2,1}, & (13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{3,1}a_{1,3} + a_{3,2}a_{3,3} + a_{3,3}a_{2,3} = a_{2,1}a_{1,2} + a_{2,2}a_{3,2} + a_{2,3}a_{2,2}, & (14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{1,2}a_{3,1} + a_{3,2}^2 = a_{1,3}a_{2,1} + a_{2,3}^2, & (15) \end{cases}$$

а из соотношения $B_{1,2}B_{2,3} = B_{1,3}B_{2,3}B_{1,2}$ получим систему

$$\begin{cases} a_{1,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{1,3} + a_{1,3}a_{2,3} = a_{1,1}^2a_{3,3} + a_{1,1}a_{1,3}^2 + a_{1,1}a_{1,2}a_{2,3} + a_{2,1}a_{3,1}a_{1,1} \\ + a_{2,1}a_{1,1}a_{1,3} + a_{2,1}^2a_{1,2} + a_{3,1}a_{1,1}a_{3,2} + a_{3,1}a_{1,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{2,2}a_{1,2}, & (21) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{3,1}a_{1,1} + a_{1,1}a_{1,2} + a_{1,3}a_{2,1} = a_{1,2}a_{1,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{1,3}^2 + a_{1,2}^2a_{2,3} + a_{2,2}a_{3,1}a_{1,1} \\ + a_{2,2}a_{1,1}a_{1,3} + a_{2,2}a_{2,1}a_{1,2} + a_{1,1}a_{3,2}^2 + a_{3,2}a_{1,2}a_{1,3} + a_{3,2}a_{2,2}a_{1,2}, & (22) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{1,1}a_{3,2} + a_{1,2}^2 + a_{1,3}a_{2,2} = a_{1,3}a_{1,1}a_{3,3} + a_{1,3}^3 + a_{1,3}a_{1,2}a_{2,3} + a_{2,3}a_{3,1}a_{1,1} \\ + a_{2,3}a_{1,1}a_{1,3} + a_{2,3}a_{2,1}a_{1,2} + a_{3,3}a_{1,1}a_{3,2} + a_{3,3}a_{1,2}a_{1,3} + a_{3,3}a_{2,2}a_{1,2}, & (23) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{3,3}a_{2,1} + a_{1,3}a_{2,2} + a_{2,3}^2 = a_{1,1}a_{3,1}a_{3,3} + a_{1,3}a_{1,1}a_{3,3} + a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} + a_{2,1}a_{3,1}^2 \\ + a_{1,1}a_{3,3}a_{2,1} + a_{2,1}^2a_{3,2} + a_{3,2}a_{3,1}^2 + a_{1,2}a_{3,1}a_{3,3} + a_{3,1}a_{2,2}a_{3,2}, & (24) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{2,1}a_{3,1} + a_{2,2}a_{1,1} + a_{2,3}a_{2,1} = a_{1,2}a_{3,1}a_{3,3} + a_{3,3}a_{1,2}a_{1,3} + a_{3,2}a_{1,2}a_{2,3} + a_{2,2}a_{3,1}^2 \\ + a_{2,2}a_{1,1}a_{3,3} + a_{2,2}a_{2,1}a_{3,2} + a_{3,2}^2a_{3,1} + a_{3,2}a_{1,2}a_{3,3} + a_{2,2}a_{3,2}^2, & (25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{2,1}a_{3,2} + a_{2,2}a_{1,2} + a_{2,3}a_{2,2} = a_{1,3}a_{3,1}a_{3,3} + a_{3,3}a_{1,3}^2 + a_{1,3}a_{3,2}a_{2,3} + a_{2,3}a_{3,1}^2 \\ + a_{2,3}a_{1,1}a_{3,3} + a_{2,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{3,3}a_{3,2}a_{3,1} + a_{1,2}a_{3,3}^2 + a_{3,3}a_{2,2}a_{3,2}, & (26) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{3,1}a_{3,3} + a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,3}a_{2,3} = a_{1,1}a_{3,3}a_{2,1} + a_{2,3}a_{1,1}a_{1,3} + a_{2,2}a_{2,3}a_{1,1} + a_{2,1}^2a_{3,1} \\ + a_{2,1}a_{2,3}a_{1,1} + a_{2,2}a_{2,1}^2 + a_{3,1}a_{2,1}a_{3,2} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} + a_{3,1}a_{2,2}^2, & (27) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{3,1}^2 + a_{1,1}a_{3,2} + a_{3,3}a_{2,1} = a_{1,2}a_{3,3}a_{2,1} + a_{1,3}a_{1,2}a_{2,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{2,2} + a_{2,2}a_{2,1}a_{3,1} \\ + a_{2,2}a_{2,3}a_{1,1} + a_{2,2}^2a_{2,1} + a_{2,1}a_{3,2}^2 + a_{3,2}a_{1,2}a_{2,3} + a_{3,2}a_{2,2}^2, & (28) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{3,2}a_{3,1} + a_{1,2}a_{3,2} + a_{2,2}a_{3,3} = a_{1,3}a_{3,3}a_{2,1} + a_{1,3}^2a_{2,3} + a_{1,3}a_{2,3}a_{2,2} + a_{2,3}a_{2,1}a_{3,1} \\ + a_{2,3}^2a_{1,1} + a_{2,3}a_{2,2}a_{2,1} + a_{3,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{3,3}a_{1,2}a_{2,3} + a_{3,3}a_{2,2}^2. & (29) \end{cases}$$

Всегда имеет место $a_{1,1}^2a_{3,1} \geq a_{1,1}a_{3,1}$, а если $a_{3,1} \neq 0$, то $a_{3,1}a_{1,2}a_{1,3} \geq a_{1,2}a_{1,3}$. Значит, в предположении $a_{3,1} \neq 0$ из (21) следует, что

$$\begin{aligned} a_{1,3}a_{2,3} &\geq a_{1,1}a_{1,3}^2 + a_{1,1}a_{1,2}a_{2,3} + a_{2,1}a_{3,1}a_{1,1} \\ &+ a_{2,1}a_{1,1}a_{1,3} + a_{2,1}^2a_{1,2} + a_{3,1}a_{1,1}a_{3,2} + a_{3,1}a_{2,2}a_{1,2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Если $a_{2,2} \neq 0$, то $a_{3,1}a_{1,1}a_{2,2} \geq a_{3,1}a_{1,1}$. Если $a_{3,3} \neq 0$, то $a_{1,1}a_{1,2}a_{3,3} \geq a_{1,1}a_{1,2}$. В этом случае из (22) следует, что

$$\begin{aligned} a_{1,3}a_{2,1} &\geq a_{1,2}a_{1,3}^2 + a_{1,2}^2a_{2,3} + a_{2,2}a_{1,1}a_{1,3} + a_{2,2}a_{2,1}a_{1,2} \\ &+ a_{1,1}a_{3,2}^2 + a_{3,2}a_{1,2}a_{1,3} + a_{3,2}a_{2,2}a_{1,2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив теперь неравенства (3) и (4) в правую часть равенства (29), мы получим

$$\begin{aligned} a_{3,2}a_{3,1} + a_{1,2}a_{3,2} + a_{2,2}a_{3,3} \geq & a_{3,3}(a_{1,2}a_{1,3}^2 + a_{1,2}^2a_{2,3} + a_{2,2}a_{1,1}a_{1,3} \\ & + a_{2,2}a_{2,1}a_{1,2} + a_{1,1}a_{3,2}^2 + a_{3,2}a_{1,2}a_{1,3} + a_{3,2}a_{2,2}a_{1,2}) \\ & + a_{1,3}(a_{1,1}a_{1,3}^2 + a_{1,1}a_{1,2}a_{2,3} + a_{2,1}a_{3,1}a_{1,1} + a_{2,1}a_{1,1}a_{1,3} + a_{2,1}^2a_{1,2} \\ & + a_{3,1}a_{1,1}a_{3,2} + a_{3,1}a_{2,2}a_{1,2}) + a_{1,3}a_{2,3}a_{2,2} + a_{2,3}a_{2,1}a_{3,1} + a_{2,3}^2a_{1,1} \\ & + a_{2,3}a_{2,2}a_{2,1} + a_{3,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{3,3}a_{1,2}a_{2,3} + a_{3,3}a_{2,2}^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Ясно, что если $a_{1,1}a_{1,3} \neq 0$, то $a_{1,1}a_{1,3}a_{3,1}a_{3,2} \geq a_{3,1}a_{3,2}$; если $a_{3,3}a_{1,3} \neq 0$, то $a_{1,2}a_{3,2}a_{3,3}a_{1,3} \geq a_{1,2}a_{3,2}$; всегда $a_{2,2}^2a_{3,3} \geq a_{2,2}a_{3,3}$. Однако в наших предположениях $a_{2,2}a_{1,1}a_{1,3}a_{3,3} \neq 0$, откуда в силу неравенства (5) получаем противоречие.

Таким образом, один из элементов $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,3}$, $a_{1,3}$, $a_{3,1}$ равен нулю. Разберем по отдельности все случаи.

Случай 1. $a_{1,1} = 0$, $a_{2,2} \neq 0$.

В этом случае равенства (22), (23), (28), (21), (25) превращаются в систему

$$\left\{ \begin{aligned} a_{1,3}a_{2,1} &= a_{1,2}a_{1,3}^2 + a_{1,2}^2a_{2,3} + a_{2,2}a_{2,1}a_{1,2} + a_{3,2}a_{1,2}a_{1,3} + a_{3,2}a_{2,2}a_{1,2}, \end{aligned} \right. \quad (61)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_{1,2}^2 + a_{1,3}a_{2,2} &= a_{1,3}^3 + a_{1,3}a_{1,2}a_{2,3} + a_{2,3}a_{2,1}a_{1,2} \\ &+ a_{3,3}a_{1,2}a_{1,3} + a_{3,3}a_{2,2}a_{1,2}, \end{aligned} \right. \quad (62)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_{3,1}^2 + a_{3,3}a_{2,1} &= a_{1,2}a_{3,3}a_{2,1} + a_{1,3}a_{1,2}a_{2,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{2,2} + a_{2,2}a_{2,1}a_{3,1} \\ &+ a_{2,2}^2a_{2,1} + a_{2,1}a_{3,2}^2 + a_{3,2}a_{1,2}a_{2,3} + a_{3,2}a_{2,2}^2, \end{aligned} \right. \quad (63)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_{1,2}a_{1,3} + a_{1,3}a_{2,3} &= a_{2,1}^2a_{1,2} + a_{3,1}a_{1,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{2,2}a_{1,2}, \end{aligned} \right. \quad (64)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_{2,1}a_{3,1} + a_{2,3}a_{2,1} &= a_{1,2}a_{3,1}a_{3,3} + a_{3,3}a_{1,2}a_{1,3} + a_{3,2}a_{1,2}a_{2,3} \\ &+ a_{2,2}a_{3,1}^2 + a_{2,2}a_{2,1}a_{3,2} + a_{3,2}^2a_{3,1} + a_{3,2}a_{1,2}a_{3,3} + a_{2,2}a_{3,2}^2. \end{aligned} \right. \quad (65)$$

Если $a_{1,2} > a_{1,3}$ и при этом $a_{2,2} \neq 0$, то из равенства (61) следует $a_{3,2} = 0$, $a_{1,3} = 0$, $a_{2,3} = 0$, поскольку $a_{1,3}a_{2,1} \leq a_{2,2}a_{2,1}a_{1,2}$, откуда $a_{3,3} = 1$, $a_{1,2} = 1$, $a_{2,1}a_{2,2} = 0$. В этом случае к противоречию приводит равенство (11). Значит, $a_{1,2} \leq a_{1,3}$, откуда $a_{1,3} \neq 0$, иначе матрица получилась бы с нулевой первой строчкой. Таким образом, из (62) следует, что $a_{1,3}a_{2,2} \geq a_{1,3}(a_{1,2}a_{2,3} + a_{1,2}a_{3,3})$, т.е. $a_{2,2} \geq a_{1,2}(a_{2,3} + a_{3,3})$. Если $a_{1,2} = 0$, то $a_{1,3}a_{2,1} = 0$, откуда $a_{2,1} = 0$; после этого из (64), поскольку $a_{3,1} \neq 0$ (из обратимости матрицы), следует $a_{2,3} = 0$, что невозможно в силу (65). Значит, обязательно $a_{1,2} \neq 0$, поэтому $a_{1,3} \geq a_{2,2}$ (это следует из (61), так как ясно, что $a_{2,1} \neq 0$). После этого видим, что $a_{1,3}a_{2,2} \leq a_{1,3}^3$, а из (62) следует, что

$$a_{1,2} \geq a_{1,3}a_{2,3} + a_{2,3}a_{2,1} + a_{3,3}a_{1,3} + a_{3,3}a_{2,2}.$$

Это означает $a_{2,3} = a_{3,3} = 0$, поэтому $a_{1,3} = 1$, $a_{2,2} = 1$, что снова вступает в противоречие с равенством (62).

Следовательно, в любом случае мы получаем противоречие, поэтому этот случай невозможен.

Случай 2. $a_{2,2} = 0$.

В этом случае равенство (26) превращается в

$$\begin{aligned} a_{2,1}a_{3,2} = & a_{1,3}a_{3,1}a_{3,3} + a_{3,3}a_{1,3}^2 + a_{1,3}a_{3,2}a_{2,3} + a_{2,3}a_{3,1}^2 + a_{2,3}a_{1,1}a_{3,3} \\ & + a_{2,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{3,3}a_{3,2}a_{3,1} + a_{1,2}a_{3,3}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Если $a_{2,3} > 1$, то $a_{2,3}a_{2,1}a_{3,2} \geq a_{2,1}a_{3,2}$, причем неравенство строгое при $a_{2,1}a_{3,2} \neq 0$. Заметим, что $a_{2,1} \neq 0$, иначе определитель нашей матрицы делится на $a_{2,3} > 1$. Тогда $a_{3,2} = 0$. Поскольку матрица была обратимой над $\mathbb{Z}$, то $a_{1,2} = 1$. Поскольку последнее слагаемое в правой части (7) равно нулю, то $a_{3,3} = 0$. Поэтому $a_{3,1} = 1$, а значит, определитель нашей матрицы равен $a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} = a_{2,3} > 1$. Противоречие.

Если $a_{2,3} = 1$, то $a_{2,3}a_{2,1}a_{3,2} = a_{2,1}a_{3,2}$, поэтому $a_{3,3}a_{1,3} = 0$, $a_{1,3}a_{3,2} = 0$, $a_{3,1} = 0$, $a_{1,1}a_{3,3} = 0$, $a_{2,1}a_{3,2} = 0$, $a_{1,2}a_{3,3} = 0$. Выпишем определитель нашей матрицы:

$$-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} = -a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}.$$

Значит, $a_{1,1} = a_{3,2} = a_{2,3} = 1$, а из предыдущих равенств и условия (11) получаем, что $\Phi_1(B_{1,2}(1)) = S_{(2,3)}$, что невозможно хотя бы в силу биективности.

Осталось рассмотреть случай $a_{2,3} = 0$ (так как $a_{2,2} = 0$, то $a_{2,1} = 1$). Равенство (7) в этом случае даст

$$a_{3,2} = a_{1,3}a_{3,1}a_{3,3} + a_{3,3}a_{1,3}^2 + a_{3,3}a_{3,2}a_{3,1} + a_{1,2}a_{3,3}^2. \quad (8)$$

Если $a_{3,3}a_{3,1} > 1$, то $a_{3,2} = 0$. Но тогда, чтобы определитель не занулился, должно быть выполнено $a_{1,2} = 1$, $a_{1,2}a_{3,3}^2 \geq 1$; противоречие с (8). Если $a_{3,3} = a_{3,1} = 1$, то $a_{1,3} = a_{1,2} = 0$. В этом случае $a_{1,1} = 1$; получаем, что первая и вторая строки равны, что невозможно. Значит, остается случай $a_{3,1}a_{3,3} = 0$. Если при этом $a_{3,3} = 0$, то из (8) получаем $a_{3,2} = 0$, а поскольку нет нулевых столбцов, имеем $a_{1,3} = a_{1,2} = 1$, а значит, второй третий столбцы равны. Получили $a_{3,1} = 0$. Согласно предыдущим рассуждениям можем считать, что $a_{3,3} \neq 0$. Равенство (12) принимает вид $a_{1,2} = a_{3,3}a_{3,2}$; подставив его в (8), получим $a_{3,2} = a_{3,3}a_{1,3}^2 + a_{3,2}a_{3,3}^3$. Заметим, что если $a_{3,2} = 0$, то $a_{2,1} = 0$, определитель зануляется. Значит, $a_{3,3} = 1$, $a_{1,3} = 0$. Подставив все полученные равенства в (15), получим $a_{3,2}^2 = 0$, что невозможно, как мы только что установили. Таким образом, случай 2 тоже не имеет места, т.е. $a_{2,2} \neq 0$.

Случай 3. $a_{3,3} = 0$. Заметим, что мы уже показали, что обязательно $a_{1,1}, a_{2,2} > 0$.

Равенство (27) в этом случае превратится в

$$\begin{aligned} a_{3,2}a_{1,3} = & a_{2,3}a_{1,1}a_{1,3} + a_{2,2}a_{2,3}a_{1,1} + a_{2,1}^2a_{3,1} + a_{2,1}a_{2,3}a_{1,1} \\ & + a_{2,2}a_{2,1}^2 + a_{3,1}a_{2,1}a_{3,2} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} + a_{3,1}a_{2,2}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Если $a_{1,3} = 0$, то $a_{2,3} = 0$, чего не может быть (так как $a_{3,3} = 0$). Значит, $a_{1,3} \neq 0$, $a_{3,2} \geq a_{2,3}$. Равенство (24) имеет вид

$$a_{1,3}a_{2,2} + a_{2,3}^2 = a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} + a_{2,1}a_{3,1}^2 + a_{2,1}^2a_{3,2} + a_{3,2}a_{3,1}^2 + a_{3,1}a_{2,2}a_{3,2}, \quad (10)$$

и так как $a_{1,1} \neq 0$, $a_{3,2} \geq a_{2,3}$, то $a_{1,3}a_{2,2} \geq a_{3,1}a_{3,2}a_{2,2}$. Так как $a_{2,2} \neq 0$, то $a_{1,3} \geq a_{3,1}a_{3,2}$, причем неравенство будет строгим при условии $a_{3,1}a_{3,2} \neq 0$.

Пусть $a_{3,1} = 0$. Так как $a_{3,3} = 0$, то $a_{3,2} = 1$. Тогда равенство (14) превращается в $a_{2,1}a_{1,2} + a_{2,2} + a_{2,3}a_{2,2} = 0$, что невозможно, так как $a_{2,2} \neq 0$. Значит, $a_{3,1} \neq 0$. Если $a_{3,2} = 0$, то из равенства (9) получаем $a_{3,1} = 0$, что невозможно. Значит, $a_{1,3} > a_{3,1}a_{3,2} > 0$.

Равенство (21) в этом случае превращается в

$$a_{1,2}a_{1,3} + a_{1,3}a_{2,3} = a_{1,1}a_{1,3}^2 + a_{1,1}a_{1,2}a_{2,3} + a_{2,1}a_{3,1}a_{1,1} + a_{2,1}a_{1,1}a_{1,3} + a_{2,1}^2a_{1,2} + a_{3,1}a_{1,1}a_{3,2} + a_{3,1}a_{1,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{2,2}a_{1,2}, \quad (11)$$

и так как мы уже знаем, что $a_{3,1}a_{1,2}a_{1,3} \geq a_{1,2}a_{1,3}$, то $a_{1,3}a_{2,3} \geq a_{1,1}a_{1,3}^2$, откуда $a_{2,3} \geq a_{1,3}$. Таким образом, мы получили противоречивые неравенства

$$a_{1,3} > a_{3,2} \geq a_{2,3} \geq a_{1,3}.$$

Значит, $a_{3,3} \neq 0$.

Случай 4. $a_{3,1} = 0$.

Будем считать, что $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3} \neq 0$. В этом случае равенство (13) превратится в

$$a_{2,1}(a_{1,1} + a_{2,3} - a_{3,3}) = 0. \quad (12)$$

Предположим сначала, что $a_{2,1} = 0$. Так как $a_{3,1} = 0$, то тогда $a_{1,1} = 1$. В этом случае из (15) получаем $a_{2,3} = a_{3,2}$. При этом (22) переписывается как

$$a_{1,2} = a_{1,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{1,3}^2 + a_{1,2}^2a_{2,3} + a_{1,3}a_{2,2} + a_{2,3}^2 + a_{1,3}a_{1,2}a_{2,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{2,2}. \quad (13)$$

Так как $a_{3,3} \neq 0$, то $a_{3,3}a_{1,2} \geq a_{1,2}$, поэтому $a_{1,3} = 0$, $a_{2,3} = a_{3,2} = 0$, $a_{3,3} = 1$, $a_{2,2} = 1$. Подставив все значения в (23), получим $a_{1,2} = 0$ или $a_{1,2} = 1$. В первом случае образ неединичной матрицы получается единичным, чего не может быть. Получаем, что матрица $B_{1,2}(1)$ переходит сама в себя.

Теперь предположим, что $a_{2,1} \neq 0$. Тогда $a_{3,3} = a_{1,1} + a_{2,3}$. Из (15) следует

$$a_{1,3}a_{2,1} + a_{2,3}^2 = a_{3,2}^2,$$

откуда $a_{3,2} \geq a_{2,3}$, а равенство (25) преобразуется в

$$a_{2,2}a_{1,1} + a_{2,3}a_{2,1} = a_{1,2}a_{1,3}a_{1,1} + a_{1,3}a_{1,2}a_{2,3} + 2a_{3,2}a_{1,2}a_{2,3} + a_{2,2}a_{1,1}^2 + a_{2,2}a_{2,3}a_{1,1} + a_{2,2}a_{2,1}a_{3,2} + a_{3,2}a_{1,1}a_{1,2} + a_{2,2}a_{3,2}^2,$$

и так как $a_{2,2}a_{1,1} \leq a_{2,2}a_{1,1}^2$, $a_{2,3}a_{2,1} \leq a_{2,2}a_{3,2}a_{2,1}$ (в силу $a_{2,2} \neq 0$, $a_{1,1} \neq 0$, $a_{3,2} \geq a_{2,3}$), то верно $a_{1,1} = 1$, $a_{3,2} = 0$. А значит, $a_{2,3} = 0$, отсюда $a_{1,3}a_{2,1} = 0$, поэтому $a_{1,3} = 0$. Далее, воспользовавшись (27), получим $a_{3,3}a_{2,1}a_{1,1} = 0$, что приводит к противоречию.

Случай 5. $a_{1,3} = 0$.

Теперь мы можем предположить, что $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, a_{3,1} \neq 0$.

В этом случае соотношение (1₁) переписывается как

$$a_{1,2}(a_{3,3} - a_{1,1} - a_{3,2}) = 0.$$

Снова сначала предположим $a_{1,2} = 0$. Тогда $a_{1,1} = 1$. Из равенства (1₅) получим $a_{3,2} = a_{2,3}$. В этом случае равенство (2₃) переписывается как

$$a_{2,3} = a_{2,3}(a_{3,1} + a_{3,3}),$$

и так как по предположению $a_{3,1} \neq 0$, $a_{3,3} \neq 0$, то $a_{3,2} = a_{2,3} = 0$. Тогда, поскольку $a_{3,1} \neq 0$, из (2₁) имеем $a_{2,1} = 0$, что приводит нас к противоречию с (2₈).

Значит, $a_{1,2} \neq 0$, $a_{3,3} = a_{1,1} + a_{3,2}$. Тогда из равенства (2₁) получим

$$\begin{aligned} a_{1,1}^2 + a_{1,1}a_{3,2} &= a_{1,1}^3 + a_{1,1}^2a_{3,2} + a_{1,1}a_{1,2}a_{2,3} \\ &\quad + a_{2,1}a_{3,1}a_{1,1} + a_{2,1}^2a_{1,2} + a_{3,1}a_{1,1}a_{3,2} + a_{3,1}a_{2,2}a_{1,2}. \end{aligned}$$

Так как $a_{1,1}^3 \geq a_{1,1}^2$, $a_{1,1}^2a_{3,2} \geq a_{1,1}a_{3,2}$, то $a_{1,1} = 1$, $a_{2,1} = 0$, $a_{3,2} = 0$, $a_{1,2} = 0$, что невозможно; случай $a_{1,2} = 0$ мы уже рассмотрели.

Таким образом, рассмотрены все случаи; мы получили, что $\Phi_1(B_{1,2}(1)) = B_{1,2}(1)$, откуда следует, что автоморфизм Φ_1 тождествен.

§ 6. Автоморфизмы группы $G_n(\mathbb{Z})$ при $n \geq 4$

Напомним, что здесь и везде далее $B_{i,j} = \Phi(B_{i,j}(1))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если автоморфизм Φ_1 полугруппы $G_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 4$, таков, что для любого $\sigma \in \Sigma_n$ $\Phi_1(S_\sigma) = S_\sigma$, то Φ_1 – тождественный автоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы знаем, что $B_{1,2}$ коммутирует со всеми матрицами подстановок, не сдвигающих первые два элемента. Из этого получим, что

$$B_{1,2} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix},$$

матрица A_2 имеет размер $2 \times (n-2)$, первая ее строка состоит из чисел $a_{1,3}$, а вторая – из чисел $a_{2,3}$; матрица A_3 имеет размер $(n-2) \times 2$, первый ее столбец состоит из чисел $a_{3,1}$, второй – из чисел $a_{3,2}$; матрица A_4 имеет размер $(n-2) \times (n-2)$, на ее диагонали стоят числа $a_{3,3}$, вне диагонали – числа $a_{3,4}$. Таким образом, для любого $n \geq 4$ в матрице $B_{1,2}$ имеется всего десять неизвестных.

Воспользуемся теми же двумя соотношениями, что и в § 5:

$$B_{1,2}B_{1,3} = B_{1,3}B_{1,2}, \quad B_{1,2}B_{2,3} = B_{1,3}B_{2,3}B_{1,2}.$$

Самая правая нижняя позиция второго соотношения $B_{1,2}B_{2,3} = B_{1,3}B_{2,3}B_{1,2}$ для $n = 4$ даст

$$\begin{aligned} & a_{3,1}a_{3,4} + a_{3,2}a_{1,3} + a_{2,3}a_{3,4} + a_{3,3}^2 \\ &= a_{1,3}a_{3,1}a_{3,3} + a_{1,3}^2a_{3,4} + a_{1,3}a_{3,2}a_{2,3} + 2a_{1,3}a_{3,4}a_{3,3} + a_{2,3}a_{3,1}^2 \\ & \quad + a_{2,3}a_{1,1}a_{3,4} + a_{2,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{2,3}a_{3,1}a_{3,3} + a_{3,4}a_{3,2}a_{3,1} + a_{1,2}a_{3,4}^2 \\ & \quad + a_{3,4}a_{2,2}a_{3,2} + a_{3,3}a_{3,2}a_{3,4} + a_{3,3}a_{3,1}a_{3,4} + a_{3,3}a_{3,2}a_{2,3} + a_{3,3}^3. \end{aligned} \quad (14)$$

Если $n > 4$, то к левой части равенства (14) прибавится $(n-4)a_{3,4}^2$, а к правой прибавится

$$\begin{aligned} & 2(n-4)a_{1,3}a_{3,4}^2 + (n-4)a_{3,4}^2a_{3,2} + 3(n-4)a_{3,3}a_{3,4}^2 \\ & \quad + (n-4)a_{3,4}^2a_{3,1} + (n-4)a_{2,3}a_{3,4}a_{3,1} + (n-4)a_{3,4}a_{2,3}a_{3,2} + \Delta, \end{aligned}$$

где $\Delta \geq 0$. Если хотя бы одно из чисел $a_{3,1}$, $a_{3,2}$, $a_{3,3}$, $a_{1,3}$ отлично от нуля, то мы получаем, что справа добавляется не меньшее число, чем слева. Если все эти числа нулевые, то $a_{3,4} = 1$. В этой ситуации подматрица A_3 нулевая, а подматрица A_4 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A_4 в таком случае делится на $n-3$, так как, сложив все строчки этой матрицы, мы получим строку, состоящую из чисел $n-3$. Значит, определитель всей матрицы $B_{1,2}$ делится на $n-3$, что невозможно при $n > 4$. Таким образом, мы получаем, что добавка справа при $n > 4$ всегда не меньше добавки слева. Значит, мы можем рассматривать равенство (14) для всех $n \geq 4$, заменив в нем знак $=$ на $\geq$.

Предположим теперь, что все числа $a_{1,1}$, $a_{3,2}$, $a_{2,3}$ отличны от нуля. В этом случае $a_{3,1}a_{3,4} \leq a_{3,2}a_{3,1}a_{3,4}$, $a_{3,2}a_{1,3} \leq a_{3,2}a_{1,3}a_{2,3}$, $a_{2,3}a_{3,4} \leq a_{2,3}a_{1,1}a_{3,4}$ и $a_{3,3}^2 \leq a_{3,3}^3$. Отсюда следует, что все слагаемые правой части неравенства (14), не задействованные в выписанных только что неравенствах, должны быть равны нулю. Таким образом, $a_{3,3} = 0$, $a_{3,1} = 0$, $a_{2,1} = 0$. Поскольку $a_{3,3} = 0$, то не может быть $a_{3,4} = 0$ (иначе в матрице $B_{1,2}$ были бы две одинаковые строчки). Значит, $a_{1,3} = a_{2,2} = a_{1,2} = 0$. Тогда мы имеем дело с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a_{3,4} & \dots & a_{3,4} \\ 0 & 1 & a_{3,4} & 0 & \dots & a_{3,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a_{3,4} & a_{3,4} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

определитель которой должен делиться на $n - 2$, так как из последних $n - 1$ строк можно получить строку, в которой первым стоит нуль, а все остальные элементы равны $n - 2$ (если сложить все строки, начиная с третьей, а потом нужное количество раз вычесть вторую). Значит, такая матрица нам не подходит, изначальное предположение о том, что все $a_{1,1}, a_{3,2}, a_{2,3}$ отличны от нуля, неверно. Снова, как и в § 5, рассмотрим три случая.

Случай 1. $a_{1,1} = 0$.

В этом случае позиция $(1, 4)$ второго соотношения переписывается как

$$a_{1,3}(a_{1,2} + a_{2,3} + a_{3,3}) = a_{1,3}(a_{1,2}a_{2,3} + a_{1,3}a_{3,4} + a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,2}a_{3,4} + a_{3,4}a_{3,2} + a_{1,3}a_{3,3} + a_{3,3}^2 + a_{1,3}^2) + a_{2,3}a_{2,1}a_{1,2} + a_{3,4}a_{2,2}a_{1,2} + a_{1,2}a_{3,3}a_{2,3} \quad (15)$$

при $n = 4$; в случае $n \geq 5$ к левой части равенства (15) прибавляется $(n - 4)a_{1,3}a_{3,4}$, а к правой добавляется $(n - 4)a_{1,3}^2a_{3,4} + \Delta$, $\Delta \geq 0$. Благодаря тому, что к правой части всегда прибавится не меньше, чем к левой, мы можем рассматривать равенство (15) сразу для всех $n \geq 4$, заменив знак $=$ на $\geq$.

Предположим сначала, что $a_{1,3} = 0$. Тогда $a_{1,2} = 1$ (так как $a_{1,1} = 0$). При этом позиция $(1, 1)$ второго соотношения даст $a_{2,1} = a_{3,1}a_{2,2} = a_{3,1}a_{2,3} = 0$. Так как $a_{2,1} = a_{1,1} = 0$, то $a_{3,1} = 1$. Значит, $a_{2,2} = a_{2,3} = 0$, что невозможно.

Таким образом, $a_{1,3} \neq 0$.

В этом случае из (15) следует, что

$$a_{1,2} + a_{2,3} + a_{3,3} \geq a_{1,2}a_{2,3} + a_{1,3}a_{3,4} + a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,2}a_{3,4} + a_{3,4}a_{3,2} + a_{1,3}a_{3,3} + a_{3,3}^2 + a_{1,3}^2.$$

Поскольку $a_{1,3} > 0$, то $a_{3,3} < a_{1,3}a_{3,4} + a_{1,3}a_{3,3} + a_{3,3}^2 + a_{1,3}^2$. Значит,

$$a_{1,2} + a_{2,3} > a_{1,2}a_{2,3} + a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,2}a_{3,4} + a_{3,4}a_{3,2}.$$

Если $a_{2,3}, a_{3,1} \neq 0$, то это невозможно. Если $a_{3,1}, a_{3,4} \neq 0$, это невозможно. Если $a_{1,2}, a_{3,4} \neq 0$, это невозможно. Значит, в каждой из перечисленных пар есть по нулю, т.е. или $a_{2,3} = a_{3,1} = a_{1,2} = 0$ (это сразу же оказывается невозможно, так как неравенство строгое), или $a_{2,3} = a_{3,4} = 0$, или $a_{3,1} = a_{3,4} = 0$, или $a_{3,1} = a_{1,2} = 0$. Разберем все три случая.

Если $a_{2,3} = a_{3,4} = 0$, то нетрудно проверить (разложение по первой строке), что определитель матрицы будет делиться на $a_{3,3}$, а значит $a_{3,3} = 1$; из позиции $(2, 4)$ первого соотношения получаем $a_{2,1} = a_{3,1}$, откуда оба они равны единице. После этого позиция $(1, 1)$ левой части второго тождества обнуляется, а соответствующая позиция в правой части содержит элемент $a_{1,3}$, который по предположению отличен от нуля.

Если $a_{3,1} = a_{3,4} = 0$, то снова $a_{3,3} = 1$. Тогда позиция $(4, 3)$ первого соотношения сразу же дает $a_{3,2}^2 = 0$, откуда $a_{3,2} = 0$. Отсюда $a_{1,2} = a_{2,1} = 1$. Позиция $(2, 2)$ первого соотношения даст $a_{1,3} = 0$, а мы уже знаем, что это не так.

Остался вариант $a_{3,1} = a_{1,2} = 0$. Тогда обязательно $a_{2,1} = a_{1,3} = 1$. Позиция $(2, 1)$ первого соотношения тогда дает $a_{3,3} = a_{2,3}$, после чего позиция $(1, 1)$

второго соотношения дает $a_{2,3} + a_{3,4} = 0$, т.е. $a_{2,3} = a_{3,4} = 0$, чего не может быть.

Таким образом, мы во всех случаях пришли к противоречию, т.е. $a_{1,1} \neq 0$.

Случай 2. $a_{2,3} = 0$, $a_{1,1} \neq 0$.

В данном случае позиция $(1, 1)$ второго соотношения принимает вид (выпишем ее для $n = 4$)

$$\begin{aligned} a_{1,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{1,3} + a_{1,3}a_{3,4} &= a_{1,1}^2a_{3,3} + a_{1,1}a_{1,3}^2 + a_{1,1}a_{1,3}a_{3,4} + a_{2,1}a_{3,1}a_{1,1} \\ &+ a_{1,1}a_{2,1}a_{1,3} + a_{2,1}^2a_{1,2} + a_{2,1}a_{3,1}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,1}a_{3,2} + a_{3,1}a_{1,2}a_{1,3} \\ &+ a_{3,1}a_{2,2}a_{1,2} + a_{3,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,1}a_{3,4} + a_{3,1}a_{1,3}^2 + a_{1,3}a_{3,1}a_{3,3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Если $n > 4$, то к левой части равенства (16) прибавляется $(n - 4)a_{1,3}a_{3,4}$, а к правой прибавляем $(n - 4)a_{1,1}a_{1,3}a_{3,4} + \Delta$, $\Delta \geq 0$, поэтому мы можем рассматривать равенство (16) для всех $n \geq 4$, поменяв знак $=$ на $\geq$.

Мы знаем, что $a_{1,1}a_{3,3} \leq a_{1,1}^2a_{3,3}$, $a_{1,3}a_{3,4} \leq a_{1,1}a_{1,3}a_{3,4}$, а если $a_{3,1} \neq 0$, то $a_{1,2}a_{1,3} \leq a_{3,1}a_{1,2}a_{1,3}$.

Сначала предположим, что $a_{3,1} \neq 0$. Тогда из неравенства (16) получим $a_{1,3} = 0$, $a_{2,1} = 0$, $a_{3,2} = 0$, $a_{3,4} = 0$, а поскольку $a_{2,2} \neq 0$, то $a_{1,2} = 0$. А если рассмотреть позицию $(2, 2)$ второго тождества, то получим $a_{3,3} = 0$, что противоречит невырожденности матрицы.

Значит, $a_{3,1} = 0$. В этом случае позиция $(2, 2)$ второго соотношения даст

$$\begin{aligned} a_{2,2}a_{1,1} &\geq a_{3,3}a_{2,2}a_{1,1} + a_{3,3}a_{1,2}a_{1,3} + a_{1,2}a_{3,4}^2 + a_{2,2}a_{2,1}a_{3,2} \\ &+ a_{3,2}a_{1,2}a_{3,3} + a_{2,2}a_{3,2}^2 + a_{3,4}a_{3,2}^2 + a_{3,3}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,4}a_{3,2}a_{3,3}, \end{aligned}$$

и если $a_{3,3} \neq 0$, то $a_{1,2}a_{1,3} = 0$, $a_{1,2}a_{3,4} = 0$, $a_{1,2}a_{3,2} = 0$, $a_{2,2}a_{3,2} = 0$, $a_{3,2}a_{3,4} = 0$, $a_{3,2}a_{1,3} = 0$. Если $a_{1,2} \neq 0$, то мы видим, что $a_{1,3} = a_{3,4} = a_{3,2} = 0$, поэтому $a_{3,3} = 1$, матрицу $B_{1,2}$ можно считать матрицей 3×3 , т.е. воспользоваться результатами §5 и получить $B_{1,2} = B_{1,2}(1)$, что нам и требуется. Если же $a_{1,2} = 0$, рассмотрим два случая. Пусть $a_{3,2} \neq 0$; тогда позиция $(2, 2)$ даст $a_{2,2} = 0$, $a_{3,4} = 0$, $a_{1,3}a_{3,3} = 0$. Но если $a_{3,3} = 0$, то последние два столбца матрицы одинаковые, а если $a_{1,3} = 0$, то одинаковые первые две строчки, и матрица вырождена. Теперь пусть $a_{3,2} = 0$. Тогда чтобы определитель был по модулю единичным, должно выполняться $a_{1,1} = a_{2,2} = 1$. Из позиции $(1, 1)$ второго соотношения будет следовать, что $a_{1,3} = 0$. Но тогда из позиции $(1, 3)$ получаем $a_{3,4} = 0$, из позиции $(2, 2)$ имеем $a_{3,3} = 1$, из позиции $(3, 1)$ получаем $a_{2,1} = 0$. Таким образом, получаем единичную матрицу.

Пусть теперь $a_{3,3} = 0$. Тогда сразу же из первого соотношения (позиция $(2, 1)$) получаем $a_{2,1} = a_{3,2} = a_{2,2} = 0$, что невозможно.

Таким образом, случай 2 возможен только при $B_{1,2} = B_{1,2}(1)$.

Случай 3. $a_{3,2} = 0$.

Теперь мы можем считать, что $a_{1,1}, a_{2,3} \neq 0$. Неравенство (14) тогда превращается в

$$\begin{aligned} a_{3,1}a_{3,4} + a_{2,3}a_{3,4} + a_{3,3}^2 &\geq a_{1,3}a_{3,1}a_{3,3} + a_{1,3}^2a_{3,4} + 2a_{1,3}a_{3,4}a_{3,3} + a_{2,3}a_{3,1}^2 \\ &+ a_{2,3}a_{1,1}a_{3,4} + a_{2,3}a_{3,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{3,4}^2 + a_{3,3}a_{3,1}a_{3,4} + a_{3,3}^3. \end{aligned} \quad (17)$$

Если $a_{3,3} \neq 0$, то $a_{3,1} = 0$, $a_{1,3}a_{3,4} = 0$, $a_{1,2}a_{3,4} = 0$. Тогда если $a_{3,4} = 0$, то $a_{3,3} = 1$, первое соотношение (позиция (3,4)) дает $a_{2,3} = 0$, что противоречит нашему предположению. Если $a_{3,4} \neq 0$, то видим, что $a_{1,2} = a_{1,3} = 0$. В этом случае снова первое соотношение (позиция (2,2)) дает $a_{2,3} = 0$.

Следовательно, мы можем предполагать, что $a_{3,3} = 0$, а значит, $a_{3,4} = 1$, поскольку определитель матрицы по модулю равен единице. Из позиции (2,2) первого соотношения и предположения $a_{2,3} \neq 0$ получаем $a_{1,2}, a_{3,1} \neq 0$, что противоречит неравенству (17).

Таким образом, все случаи полностью разобраны, предложение доказано.

Из предложений 1 и 2, очевидно, следует основная

ТЕОРЕМА 2. *Любой автоморфизм полугруппы $G_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$, является сопряжением с помощью некоторой матрицы S_σ , $\sigma \in \Sigma_n$.*

Автор выражает благодарность Е.И. Буниной и А.В. Михалёву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

- [1] А. В. Михалёв, М. А. Шаталова, “Аutomorphisms и антиавтоморфизмы, полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами”, *Матем. сб.*, **81(123)**:4 (1970), 600–609; англ. пер.: A. V. Mikhalev, M. A. Šatalova, “Automorphisms and anti-automorphisms of a semigroup of invertible matrices with nonnegative elements”, *Math. USSR-Sb.*, **10**:4 (1970), 547–555.
- [2] Е. И. Бунина, А. В. Михалёв, “Аutomorphisms полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:2 (2005), 3–23; англ. пер.: E. I. Bunina, A. V. Mikhalev, “Automorphisms of the semigroup of invertible matrices with nonnegative elements”, *J. Math. Sci.*, **142**:2 (2007), 1867–1882.
- [3] Е. И. Бунина, А. В. Михалёв, “Элементарная эквивалентность полугрупп обратимых матриц с неотрицательными элементами”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:2 (2006), 39–53; англ. пер.: E. I. Bunina, A. V. Mikhalev, “Elementary equivalence of the semigroup of invertible matrices with nonnegative elements”, *J. Math. Sci.*, **149**:2 (2008), 1063–1073.
- [4] Е. И. Бунина, П. П. Семёнов, “Аutomorphisms полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над коммутативными частично упорядоченными кольцами”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **14**:2 (2008), 69–100; англ. пер.: E. I. Bunina, P. P. Semenov, “Automorphisms of the semigroup of invertible matrices with nonnegative elements over commutative partially ordered rings”, *J. Math. Sci.*, **162**:5 (2009), 633–655.
- [5] Е. И. Бунина, П. П. Семёнов, “Элементарная эквивалентность полугрупп обратимых матриц с неотрицательными элементами над коммутативными частично упорядоченными кольцами”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **14**:4 (2008), 75–85; англ. пер.: E. I. Bunina, P. P. Semenov, “Elementary equivalence of semigroups of invertible matrices with nonnegative elements over commutative partially ordered rings”, *J. Math. Sci.*, **163**:5 (2009), 493–499.

П. П. Семёнов (P. P. Semenov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: pamenov@yandex.ru

Поступила в редакцию

02.08.2010 и 08.04.2012