Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Одномерная проблема
Громова о минимальном заполнении, *Матем. сб.*, 2012,
том 203, номер 5, 65–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7777>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 17:07:40

УДК 514.774.8+515.124.4+519.176

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении

Статья посвящена новому направлению в теории одномерных вариационных задач с разветвленными экстремальями – исследованию одномерных минимальных заполнений, введенных в рассмотрение авторами. Являясь частным случаем обобщения проблемы Громова о минимальных заполнениях на стратифицированные многообразия, рассматриваемая проблема имеет самостоятельный интерес и может быть представлена также как обобщение другой классической задачи, а именно проблемы Штейнера о поиске кратчайшей сети, соединяющей заданные терминалы. Помимо постановки задачи обсуждается ряд свойств минимальных заполнений, а также формулируется несколько гипотез.

Библиография: 38 названий.

Ключевые слова: метрические пространства, минимальные заполнения в смысле Громова, минимальные деревья Штейнера, минимальные остовные деревья, отношение Штейнера.

Введение

Рассматриваемая в настоящей статье проблема возникла в результате синтеза двух классических задач: проблемы Штейнера о кратчайших сетях и проблемы Громова о минимальных заполнениях. Напомним вкратце историю этих задач.

Проблема Штейнера – это задача об оптимальном соединении конечного множества точек метрического пространства. По-видимому, первые формулировки этого типа возникли в трудах Ферма, поставившего вопрос о поиске такого расположения точки на плоскости, что сумма расстояний от нее до вершин заданного треугольника наименьшая из возможных. В течение нескольких столетий был получен полный ответ (Торричелли, Симпсон, Хайнен; подробности см. в [1]), из которого ясно, что, соединяя три точки на плоскости, бывает выгодно добавить четвертую точку-развилку. Важность таких дополнительных точек понимал Гаусс, обсуждавший в переписке с Шумахером задачу о том, как соединить Гамбург, Бремен, Ганновер и Брауншвейг кратчайшей системой дорог. В 1934 г. Ярник и Кесслер (см. [2]) сформулировали общую задачу, которая теперь известна как классическая проблема Штейнера. Фактически их

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00748), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1410.2012.1), Программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (госконтракт 14.740.11.0794) и гранта Правительства РФ по постановлению № 220 (договор № 11.G34.31.0053).

© А. О. Иванов, А. А. Тужилин, 2012

задача представляет собой обобщение задач Ферма и Гаусса о кратчайшем соединении на случай произвольного конечного множества точек плоскости. Что касается самого Штейнера, то он занимался другим обобщением задачи Ферма: найти в пространстве такую точку, для которой сумма расстояний до заданных точек будет наименьшей возможной. Отметим, что недоразумение в вопросе о приоритете возникло благодаря популярной книге Р. Куранта и Г. Роббинса “Что такое математика?” (см. [3]), где задача Ферма была приписана Штейнеру, а задача Ярника и Кесслера была названа просто обобщением проблемы Штейнера.

Существует огромное количество публикаций, посвященных как проблеме Штейнера в классической постановке, так и многочисленным ее обобщениям, например, на нормированные пространства, римановы многообразия и более общие метрические пространства, скажем на пространство слов. Заинтересованного читателя мы отсылаем к работе [1]. Очередной всплеск интереса к проблеме Штейнера связан с гипотезой Гилберта–Поллака (см. [4]) об отношении Штейнера евклидовой плоскости (см. определение ниже). Многочисленные попытки доказать эту гипотезу так и не привели к успеху. Наиболее известная из них принадлежит Ду и Хвангу (см. [5]), однако в их рассуждениях были обнаружены существенные пробелы (см. [1], [6]–[9]). Идеи Ду и Хванга были разрекламированы еще на стадии анонсирующих публикаций (см. [10]), что привело к популяризации их неверной конструкции. Появился ряд работ (например, [11] и [12]), в которых идеи Ду и Хванга адаптировались к рассматриваемому случаю, и в результате ряд необоснованных выводов получил статус теорем. Отметим, что сама справедливость гипотезы Гилберта–Поллака не вызывает сомнений, поэтому вновь и вновь предпринимаются попытки ее доказать. В частности, разные авторы, включая и авторов настоящей статьи, пытались доработать конструкцию Ду и Хванга, но успеха не добились. Возможно, имеет смысл искать принципиально другой подход к этой задаче. Обсуждаемые в настоящей статье минимальные заполнения могут послужить основой для такого подхода.

Понятие минимального заполнения появилось в работах Громова (см., например, [13]) в следующем виде. Пусть M – гладкое замкнутое многообразие, на котором задана функция расстояния ρ . Рассмотрим всевозможные пленки W , натягивающие M , т.е. компактные многообразия с краем, равным M . Рассмотрим на многообразии W функцию расстояния d , не уменьшающую расстояния между точками из M . Такое метрическое пространство $\mathscr{W} = (W, d)$ будем называть *заполнением* метрического пространства $\mathscr{M} = (M, \rho)$. Задача Громова состоит в описании точной нижней грани объемов заполнений, а также тех пространств $\mathscr{W}$, называемых *минимальными заполнениями*, на которых эта нижняя грань достигается.

Интерес к минимальным заполнениям объясняется прежде всего тем, что на этом языке естественно формулируются многие классические неравенства римановой геометрии (см. подробности и точные ссылки в книге [14], а также в диссертации С. В. Иванова [15]). Так, например, неравенство Безиковича, утверждающее, что объем риманова куба не меньше произведения расстояний между его противоположными гранями, вытекает из того, что стандартный куб в евклидовом пространстве является минимальным заполнением своей

границы. Другой пример – неравенство Пу, оценивающее снизу длину кратчайшей нестягиваемой петли на проективной плоскости. Это неравенство следует из того, что стандартная полусфера представляет собой минимальное заполнение своей граничной окружности, наделенной внутренней метрикой. Отметим также, что минимальные заполнения имеют разнообразные применения в теории динамических систем, асимптотической геометрии, математической физике и т.д.

В контексте проблемы Штейнера естественно рассмотреть в качестве M конечное метрическое пространство. Тогда возможные заполнения – метрические пространства, имеющие структуру одномерных стратифицированных многообразий (которые можно рассматривать как реберно взвешенные графы с неотрицательными весовыми функциями), что приводит к следующему частному случаю обобщения проблемы Громова.

Пусть M – произвольное конечное множество и $G = (V, E)$ – некоторый связный граф. Будем говорить, что G *соединяет* M , если $M \subset V$. В этом случае также будем говорить, что M – *граница графа* G . Пусть теперь $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – конечное псевдометрическое пространство (в отличие от метрики, расстояния между разными точками могут быть равны нулю), $G = (V, E)$ – связный граф, соединяющий M , и $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ – некоторое отображение в неотрицательные вещественные числа, называемое обычно *весовой функцией* и порождающее *взвешенный граф* $\mathcal{G} = (G, \omega)$. *Весом* взвешенного графа $\mathcal{G}$ называется величина $\omega(\mathcal{G})$, равная сумме весов всех ребер этого графа. Функция ω задает на V псевдометрику d_ω , а именно *расстоянием между вершинами графа* $\mathcal{G}$ назовем наименьший из весов путей, соединяющих эти вершины. Если для любых точек p и q из M выполняется $\rho(p, q) \leq d_\omega(p, q)$, то взвешенный граф $\mathcal{G}$ называется *заполнением* пространства $\mathcal{M}$, а граф G – *типом* этого заполнения. Число $\text{mf}(\mathcal{M})$, равное $\inf \omega(\mathcal{G})$ по всем заполнениям $\mathcal{G}$ пространства $\mathcal{M}$, назовем *весом минимального заполнения*, а заполнение $\mathcal{G}$, для которого $\omega(\mathcal{G}) = \text{mf}(\mathcal{M})$, назовем *минимальным заполнением*. Если минимизировать вес заполнений фиксированного типа, то получаем *минимальные параметрические заполнения*, вес которых обозначается через $\text{prf}(\mathcal{M}, G)$. Основная задача – научиться вычислять $\text{mf}(\mathcal{M})$, $\text{prf}(\mathcal{M}, G)$ и описывать минимальные (параметрические) заполнения.

Мы надеемся, что теория одномерных минимальных заполнений оживит интерес к проблеме Штейнера и позволит решить ряд давно стоящих задач, таких, как, скажем, вычисление отношения Штейнера, в частности доказательство справедливости гипотезы Гилберта–Поллака об отношении Штейнера евклидовой плоскости.

Отметим, что стратифицированные многообразия естественно возникают как при решении геометрических вариационных задач (см., например, [16]–[18]), так и в таких приложениях, как квантовая физика (см. [19], [20]).

Кратко опишем содержание и основные результаты работы. В § 1 мы определяем основные объекты нашего исследования и обсуждаем некоторые соотношения между ними. Вообще говоря, эти объекты могут иметь очень сложную топологию, однако, как мы покажем, их структуру можно существенно упростить, не меняя при этом суть задачи. Эта редукция описана в § 2. Оказывается, при изучении кратчайших сетей и минимальных заполнений можно

ограничиться рассмотрением деревьев без внутренних вершин степени 2. Более того, если допустить наличие вырожденных ребер (ребер нулевого веса или длины), то оказывается достаточным класс бинарных деревьев, т.е. деревьев, степени вершин которых равны 1 или 3 (см. теорему 2.1). Далее, в §3, показано, что каждое минимальное заполнение может быть представлено как кратчайшее дерево, соединяющее некоторую специальную границу в некотором специальном метрическом пространстве. А именно (см. следствия 3.2 и 3.3), если $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – конечное псевдометрическое пространство, состоящее из n точек, то изометрическое вложение Куратовского $\varphi_M: M \rightarrow \ell_\infty^n$ можно продолжить до изометрического минимального (параметрического) заполнения $\mathcal{G} = (G, \omega)$ так, что образ $\varphi_{\mathcal{M}}(G)$ представляет собой кратчайшее дерево (соответственно минимальное параметрическое дерево), соединяющее границу $\varphi_{\mathcal{M}}(M) \subset \ell_\infty^n$. В §4 обсуждаются взаимосвязи между минимальными заполнениями, кратчайшими деревьями и минимальными остовными деревьями. Показано, что вес минимального заполнения может быть найден как инфимум длин минимальных остовных деревьев по всем так называемым расширениям исходного конечного метрического пространства (см. следствия 4.2 и 4.3). В §5 демонстрируется, что каждое минимальное параметрическое заполнение является решением некоторой задачи линейного программирования. На основе этой идеи доказано, что для любого конечного псевдометрического пространства множество всех его минимальных параметрических заполнений фиксированной топологии G является непустым выпуклым компактным подмножеством конфигурационного пространства всех взвешенных деревьев вида (G, ω) (см. утверждение 5.1).

Возникает естественная задача вычисления веса минимального заполнения данного конечного метрического пространства. Авторы предложили сделать это в терминах так называемых полупериметров метрического пространства. Для произвольного циклического порядка $\pi: M \rightarrow M$ на M *полупериметром* псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ назовем следующую величину:

$$p(\mathcal{M}, \pi) = \frac{1}{2} \sum_{p \in M} \rho(p, \pi(p)).$$

Пусть G – дерево, соединяющее M . Циклический порядок назовем *обходом дерева G* , если он соответствует эйлерову циклу в удвоении графа G . Отметим, что каждый такой цикл представляется в виде объединения путей в дереве G , соединяющих граничные вершины. Такие пути называются *граничными*. Множество всех обходов дерева G обозначим через $\mathcal{O}(G)$. Авторы высказали гипотезу о том, что вес минимального заполнения может быть найден по следующей формуле:

$$\text{mf}(\mathcal{M}) = \min_G \max_{\pi \in \mathcal{O}(G)} p(\mathcal{M}, \pi), \quad (1)$$

где минимум берется по всевозможным бинарным деревьям, соединяющим $\mathcal{M}$.

А. Еремин (см. [21]) установил, что формула (1) становится верной, если вместо обходов рассматривать определенные им в этой же работе мультиобходы. А именно, *мультиобходом кратности k* дерева G , соединяющего M , называется семейство граничных путей, образующих эйлеров цикл в графе, полученном из дерева G заменой каждого ребра на $2k$ кратных ребер. *Полупериметр*

мультиобхода определяется как сумма всех kn расстояний между концевыми вершинами граничных путей, составляющих мультиобход, деленная на $2k$. Таким образом, если через $\mathcal{O}(G)$ обозначить всевозможные мультиобходы, то равенство (1) имеет место.

При изучении веса минимального (параметрического) заполнения авторы ввели понятие точного пути в заполнении (см. § 6), которое оказалось важным также в теории аддитивных и ультраметрических пространств. По определению заполнения для любых двух точек p и q конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ и любого его заполнения $\mathcal{G} = (G, \omega)$ имеет место неравенство $\omega(\gamma_{pq}) \geq \rho(p, q)$, где γ_{pq} – путь в G , соединяющий p и q . Граничный путь γ_{pq} называется *точным*, если $\omega(\gamma_{pq}) = \rho(p, q)$, а произвольный путь (ребро, вершина) называется *точным*, если содержится в некотором точном граничном пути. В § 6 описывается структура множества точных путей в минимальном (параметрическом) заполнении. Первое приложение этой техники описано в § 7. Нетрудно показать (см. следствие 7.1), что для любого заполнения $\mathcal{G} = (G, \omega)$ конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ имеет место неравенство

$$\omega(G) \geq \max_{\pi \in \mathcal{O}(G)} p(\mathcal{M}, \pi).$$

Поэтому если имеет место равенство

$$\omega(G) = \max_{\pi \in \mathcal{O}(G)} p(\mathcal{M}, \pi),$$

то дерево $\mathcal{G}$ является минимальным параметрическим заполнением и

$$\text{mpf}(\mathcal{M}, G) = \max_{\pi \in \mathcal{O}(G)} p(\mathcal{M}, \pi). \quad (2)$$

В утверждении 7.3 мы доказываем, что обход π , для которого достигается этот максимум, является точным, т.е. граничные пути, соединяющие точки из $\mathcal{M}$, последовательные по отношению к π , точны. Обратно, если обход π вокруг G точен, то $\mathcal{G} = (G, \omega)$ представляет собой минимальное параметрическое заполнение и имеет место равенство (2).

В качестве примера рассмотрим аддитивные пространства (см. § 8). Напомним, что псевдометрическое пространство $\mathcal{M} = (M, \rho)$ называется *аддитивным*, если существует взвешенное дерево $\mathcal{G} = (G, \omega)$, соединяющее M , такое, что $d_\omega = \rho$. В этом случае дерево $\mathcal{G}$ называется *порождающим*. Хорошо известно описание аддитивных пространств в терминах так называемого *правила четырех точек*: пространство аддитивно, если и только если для любых его четырех точек p_i, p_j, p_k и p_l величины $\rho(p_i, p_j) + \rho(p_k, p_l)$, $\rho(p_i, p_k) + \rho(p_j, p_l)$ и $\rho(p_i, p_l) + \rho(p_j, p_k)$ представляют собой длины сторон равнобедренного треугольника, основание которого не больше боковых сторон. Также хорошо известен эффективный алгоритм восстановления порождающего дерева. Для аддитивных пространств в работе получено полное описание минимальных заполнений (см. теорему 8.1), а именно показано, что множество минимальных заполнений аддитивного пространства совпадает с множеством его порождающих деревьев. Более того, поскольку невырожденное порождающее дерево аддитивного пространства единственно, невырожденное минимальное заполнение аддитивного

пространства также единственно (см. следствие 8.4). Таким образом, в минимальном заполнении аддитивного пространства все граничные пути точны, в частности точны все его обходы, поэтому формула (1) имеет место, даже если ограничиться рассмотрением обычных обходов.

Далее, *полупериметром псевдометрического пространства* $\mathcal{M} = (M, \rho)$ назовем величину $p(\mathcal{M}) = \min_{\sigma} p(\mathcal{M}, \sigma)$, где минимум берется по всем циклическим порядкам на M . Для аддитивного пространства вес его минимального заполнения равен полупериметру этого пространства, а также равен полупериметру этого пространства по отношению к любому обходу этого заполнения (см. следствие 8.5). Более того, как показала О. В. Рублева (см. [22], а также утверждение 8.4), псевдометрическое пространство аддитивно, если и только если вес его минимального заполнения равен полупериметру этого пространства.

Отметим, что в отличие от формулы (1), формула (2) в общем случае не выполняется даже в классе мультиобходов (несложно построить пример минимального параметрического заполнения с вырожденным неточным ребром, не имеющего точного обхода). Более того, существуют невырожденные минимальные параметрические заполнения, не имеющие точных обходов (см. пример З. Н. Овсянникова в § 7). Тем не менее, как показали недавние результаты нашей группы (см. [23] и [21]), формула (2) становится верной, если дополнительно отказаться от условия неотрицательности весов заполнения. Соответствующий объект определен в [23] и называется *обобщенным заполнением*. Именно в таком виде формула (2) была использована А. Ю. Ереминым (см. [21]) при доказательстве формулы (1), поскольку, как показано в [23], среди минимальных обобщенных заполнений произвольного псевдометрического пространства всегда найдется и обычное минимальное заполнение.

Изучение обобщенных минимальных заполнений привело и к другим интересным результатам. А именно, так как все полупериметры, соответствующие минимальному заполнению аддитивного пространства, равны между собой, авторы поставили задачу описания тех пространств $\mathcal{M} = (M, \rho)$, для которых совпадают полупериметры, соответствующие обходам вокруг некоторого дерева, соединяющего M . Полный ответ на этот вопрос получен недавно З. Н. Овсянниковым (см. [24]), который показал, что функция расстояния такого пространства порождается взвешенным деревом, весовая функция которого может принимать отрицательные значения (такое дерево называется *порождающим*). Овсянников предложил называть такие пространства *обобщенно аддитивными* и показал, что каждое такое пространство обладает указанным свойством. Аналогично аддитивным пространствам обобщенно аддитивные пространства могут быть описаны с помощью так называемого *слабого правила четырех точек*: пространство обобщенно аддитивно, если и только если для любых четырех его точек p_i, p_j, p_k и p_l величины $\rho(p_i, p_j) + \rho(p_k, p_l)$, $\rho(p_i, p_k) + \rho(p_j, p_l)$ и $\rho(p_i, p_l) + \rho(p_j, p_k)$ представляют собой длины сторон равностороннего треугольника (см. [24]). Также существует алгоритм восстановления порождающего дерева, аналогичный классическому.

В § 9 рассматриваются семейства псевдометрических пространств, названные авторами лучами. *Мультипликативный луч*, порожденный псевдометрическим пространством $\mathcal{M} = (M, \rho)$, состоит по определению из пространств

вида $(M, \lambda\rho)$, $\lambda \geq 0$, а *аддитивный луч*, порожденный $\mathcal{M} = (M, \rho)$, – из пространств вида $(M, \rho + a)$, $a \geq a_{\mathcal{M}}$, где $a_{\mathcal{M}}$ – неположительная величина, зависящая от $\mathcal{M}$. Теорема 9.1 описывает минимальные заполнения элементов лучей в терминах минимальных заполнений порождающих пространств. В частности, показано, что все пространства из семейства $(M, \lambda\rho + a)$, $\lambda > 0$, $a > \lambda a_{\mathcal{M}}$, имеют одинаковые множества типов минимальных заполнений.

В § 10 рассматриваются конечные псевдометрические пространства, в которых все ненулевые расстояния линейно независимы над полем рациональных чисел. Такие пространства называются *несоизмеримыми*. Показано, что любое минимальное заполнение несоизмеримого пространства, состоящего более чем из трех точек, не может “сильно вырождаться”, а именно содержит невырожденное внутреннее ребро. Более того, все граничные ребра любого минимального заполнения несоизмеримого пространства также невырождены (см. § 6).

В § 11 мы приводим несколько примеров нахождения минимальных заполнений. В частности, даны полные ответы для случаев трех- и четырехточечных псевдометрических пространств, для правильного симплекса (метрического пространства с постоянной ненулевой функцией расстояния) и т.п.

Параграф 12 появился благодаря исследованиям отношения Штейнера (см. выше). Напомним, что *отношение Штейнера конечного подмножества M метрического пространства $\mathcal{X} = (X, \rho)$* по определению равно

$$\text{sr}(M) = \frac{\text{smt}(M, \rho)}{\text{mst}(M, \rho)},$$

где $\text{mst}(M, \rho)$ и $\text{smt}(M, \rho)$ обозначают длины минимального остовного дерева и минимального дерева Штейнера для $M \subset X$ соответственно. *Отношение Штейнера $\text{sr } \mathcal{X}$ метрического пространства $\mathcal{X}$ и отношение Штейнера $\text{sr}_n \mathcal{X}$ степени n пространства $\mathcal{X}$* определяются так:

$$\text{sr}(\mathcal{X}) = \inf_{n \geq 2} \text{sr}_n \mathcal{X}, \quad \text{sr}_n \mathcal{X} = \inf \{ \text{sr}(M) : M \subset X, |M| \leq n \}.$$

Авторы предложили рассматривать величины

$$\text{sgr}(M) = \frac{\text{mf}(M, \rho)}{\text{mst}(M, \rho)}, \quad \text{ssr}(M) = \frac{\text{mf}(M, \rho)}{\text{smt}(M, \rho)},$$

которые назвали *отношением Штейнера–Громова* и *суботношением Штейнера* для $M \subset X$ соответственно. По аналогии со случаем отношения Штейнера можно также определить величины $\text{sgr}_n \mathcal{X}$, $\text{sgr } \mathcal{X}$, $\text{ssr}_n \mathcal{X}$ и $\text{ssr } \mathcal{X}$. Авторы надеются, что вычисление этих отношений может оказаться проще, чем поиск классического отношения Штейнера, а также что существуют некоторые взаимосвязи между величинами $\text{sgr } \mathcal{X}$, $\text{ssr } \mathcal{X}$ и $\text{sr } \mathcal{X}$. В § 12 приведены некоторые предварительные результаты, касающиеся этих отношений. Показано, что неравенство $1/2 \leq \text{sgr}(\mathcal{X}) \leq 1$ справедливо для любого псевдометрического пространства и что существует метрическое пространство, отношение Штейнера–Громова которого равно $1/2$. Также показано, что если псевдометрическое пространство $\mathcal{X}$ содержит правильный треугольник, то $\text{sgr}_3 \mathcal{X} = 3/4$. Для суботношения Штейнера показано, что $\text{ssr}_3(\mathbb{R}^n) = \sqrt{3}/2$ и $\text{ssr}_4(\mathbb{R}^2) = \sqrt{3}/2$

(см. [25]). Авторы высказали гипотезу, что суботношение Штейнера евклидовой плоскости равно $\sqrt{3}/2$ и поэтому достигается на множестве вершин правильного треугольника (см. гипотезу 12.1).

Отметим в заключение, что в этой активно развивающейся области имеется много интересных нерешенных задач, часть из которых обсуждается в настоящей работе. Здесь мы перечислим лишь некоторые возможные общие направления исследования. Прежде всего, интересно изучить связь между минимальными заполнениями конечных метрических пространств и счетных метрических пространств. Некоторые результаты в этом направлении недавно получены А. Ю. Ереминым и оказались связаны с работой авторов и И. М. Никонова [26]. Также интересно изучить поведение минимальных заполнений как при непрерывных деформациях метрических пространств, так и при элементарных операциях на метрических пространствах, таких, как метрическая склейка, метрическая факторизация и т.д. Наконец, представляется вероятным наличие естественных связей между симметриями метрического пространства и его минимальных заполнений. Аналогичные связи в теории минимальных поверхностей изучались, например, в работах [27]–[30].

Авторы пользуются случаем выразить сердечную признательность А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе, Н. П. Стрелковой за внимательное чтение рукописи и ряд полезных замечаний, а также всем участникам семинара “Минимальные сети”, проходящего на механико-математическом факультете МГУ под руководством авторов, за проявленный интерес и многочисленные плодотворные обсуждения.

§ 1. Необходимые определения и предварительные результаты

В этом параграфе мы упомянем еще несколько оптимизационных задач, тесно связанных с описанием минимальных заполнений, в частности дадим формальное определение кратчайших сетей.

Пусть $\mathcal{X} = (X, d)$ – псевдометрическое пространство и $G = (V, E)$ – произвольный связный граф. Отображение $\Gamma: V \rightarrow X$ назовем *сетью в $\mathcal{X}$, параметризованной графом $G = (V, E)$* или *сетью типа G* . Вершинами и ребрами сети Γ называются ограничения отображения Γ соответственно на вершины и ребра графа G . *Длиной ребра $\Gamma: vw \rightarrow X$* назовем число $d(\Gamma(v), \Gamma(w))$, а *длиной $d(\Gamma)$ сети Γ* – сумму длин всех ее ребер. В дальнейшем мы будем рассматривать граничные задачи на графах, фиксируя во множествах вершин V графов $G = (V, E)$ некоторые, вообще говоря, произвольные подмножества ∂G и называя их *границами*. Говоря о графах, мы будем всегда предполагать, что у них заданы некоторые границы, возможно пустые. *Границей $\partial \Gamma$ сети Γ* назовем ограничение отображения Γ на ∂G . Если $M \subset X$ – конечное множество и $M \subset \Gamma(V)$, то будем говорить, что сеть Γ *соединяет множество M* . Вершины графов и сетей, не являющиеся граничными, будем называть *внутренними*. Число

$$\text{smt}(M) = \inf\{d(\Gamma) \mid \Gamma \text{ – сеть, соединяющая } M\}$$

назовем *длиной кратчайшей сети*. Отметим, что соединяющая M сеть Γ , для которой $d(\Gamma) = \text{smt}(M)$, существует не всегда (см. нетривиальные примеры

в [6] и [31]). Если такая сеть существует, то она называется *кратчайшей сетью, соединяющей M* , или *кратчайшей сетью на M* . Одна из разновидностей проблемы Штейнера состоит в описании кратчайших сетей, соединяющих конечные подмножества псевдометрических пространств¹.

При изучении кратчайших сетей и минимальных заполнений естественно возникает более широкий класс объектов – минимальные параметрические сети (заполнения). Дело в том, что структура параметризующего графа априори не известна, что делает описанные выше задачи комбинаторно сложными. В параметрических аналогах этих задач структура графа задается заранее, что существенно облегчает поиск решения. Например, как мы увидим ниже, задача о минимальном параметрическом заполнении сводится к задаче линейного программирования.

Пусть $G = (V, E)$ – связный граф с границей ∂G и $\varphi: \partial G \rightarrow X$ – некоторое отображение, где $\mathcal{X} = (X, d)$ – псевдометрическое пространство. Обозначим через $[G, \varphi]$ множество всех сетей $\Gamma: V \rightarrow X$ типа G таких, что $\partial \Gamma = \varphi$. Положим

$$\text{mpn}(G, \varphi) = \inf_{\Gamma \in [G, \varphi]} d(\Gamma)$$

и полученное число назовем *длиной минимальной параметрической сети*. Если существует сеть $\Gamma \in [G, \varphi]$, для которой $d(\Gamma) = \text{mpn}(G, \varphi)$, то Γ называется *минимальной параметрической сетью типа G с границей φ* .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Пусть $\mathcal{X} = (X, d)$ – произвольное псевдометрическое пространство и M – конечное непустое подмножество X . Тогда

$$\text{smt}(M) = \inf \{ \text{mpn}(G, \varphi) \mid \varphi(\partial G) = M \}.$$

Таким образом, задача вычисления длины кратчайшей сети сводится к изучению минимальных параметрических сетей.

Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – конечное псевдометрическое пространство и $G = (V, E)$ – произвольный связный граф, соединяющий M . В этом случае мы всегда будем считать, что граница такого графа G фиксирована и равна M . Обозначим через $\Omega(\mathcal{M}, G)$ все весовые функции $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что (G, ω) – заполнение пространства $\mathcal{M}$. Положим

$$\text{mpf}(\mathcal{M}, G) = \inf_{\omega \in \Omega(\mathcal{M}, G)} \omega(G)$$

и назовем полученное число *весом минимального параметрического заполнения типа G пространства $\mathcal{M}$* . Если существует $\omega \in \Omega(\mathcal{M}, G)$, для которого $\omega(G) = \text{mpf}(\mathcal{M}, G)$, то (G, ω) называется *минимальным параметрическим заполнением типа G пространства $\mathcal{M}$* .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – конечное псевдометрическое пространство. Тогда

$$\text{mf}(\mathcal{M}) = \inf \{ \text{mpf}(\mathcal{M}, G) \}.$$

¹Обозначение smt представляют собой аббревиатуру английского термина Steiner Minimal Tree (“минимальное дерево Штейнера”), обычно используемого для кратчайшей сети, все ребра которой невырождены (отличны от отображений в точку) и которая поэтому является деревом.

§ 2. Редукция к деревьям

В этом параграфе мы покажем, что при изучении кратчайших сетей и минимальных заполнений можно ограничиться деревьями с границами специального вида. При изучении минимальных параметрических сетей и заполнений также имеется ряд упрощений структуры соответствующих графов. Мы начнем с того, что дадим определения заполнений и сетей в самых общих терминах мультиграфов. Для понимания остальной части статьи понадобится лишь соглашение, принятое в конце п. 2.3, поэтому при первом чтении этот параграф можно опустить, обращаясь к нему только за некоторыми необходимыми определениями.

2.1. Мультиграфы, заполнения и сети. Напомним, что *мультиграфом* называется тройка $G = (V, E, I)$, где V и E – конечные множества, называемые множествами *вершин* и *ребер* мультиграфа G , а I – отображение из E в множество одно- и двухэлементных подмножеств V . Отображение I называется *инцидентностью*. Если $I(e) = \{v\}$, то e называется *петлей*, инцидентной v . Отметим, что для удобства изложения мы иногда будем обозначать одноэлементное множество $\{v\}$ также через $\{v, v\}$. Кроме того, если для рассматриваемого ребра нам важно лишь то, что оно соединяет вершины x и y , то такое ребро будем обозначать через xy .

Далее, если $I^{-1}(x) \neq \emptyset$, то количество элементов в $I^{-1}(x)$ называется *кратностью* каждого ребра $e \in I^{-1}(x)$. Ребро, кратность которого больше 1, называется *кратным*. Граф без петель и кратных ребер называется *простым*. Для таких графов отображение I действует во множество двухэлементных подмножеств из V (нет петель) и является взаимно однозначным с образом (нет кратных ребер), поэтому E в этом случае отождествляется с $I(E)$, т.е. с семейством двухэлементных подмножеств из V , а само I обычно опускается. Отметим, что выше мы имели дело именно с простыми графами, называя их просто графами. В этом параграфе под *графом* мы, как правило, будем понимать мультиграф.

Понятия путей, циклов, связности, весовой функции, заполнения, сети определяются для мультиграфов точно так же, как и для простых графов. Отметим, что все петли произвольной сети имеют нулевую длину, а длины кратных ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин, одинаковы.

Следующая конструкция будет полезна при изучении сетей. Пусть $G = (V, E, I)$ – произвольный граф, X – некоторое множество и $f: V \rightarrow X$ – любое отображение. Также через f обозначим продолжение f на множество всех подмножеств из V . Определим *образ* $f(G)$ графа G , положив $f(G) = (f(V), E, f \circ I)$. Если M – граница графа G , то *границей графа* $f(G)$ назовем множество $f(M) \subset X$.

Приведем теперь список простейших свойств минимальных заполнений и сетей, рассматриваемых в такой общности. Эти свойства показывают, что такая общность на самом деле избыточна. Начнем с минимальных параметрических заполнений. В дальнейшем ребра нулевого веса будем называть *вырожденными*, а ненулевого – *невыврожденными*. Взвешенный граф без вырожденных ребер называется *невыврожденным*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathcal{G}$ – минимальное параметрическое заполнение типа G некоторого псевдометрического пространства $\mathcal{M}$. Тогда:

- 1) все внутренние вершины степени 1 графа G инцидентны вырожденным ребрам;
- 2) если внутреннюю вершину степени 2, инцидентную двум разным ребрам, удалить из G , склеив при этом входящие в нее ребра в одно ребро и приписав этому ребру вес, равный сумме весов сформировавших его ребер, то полученный взвешенный граф будет минимальным параметрическим заполнением (уже другого типа) пространства $\mathcal{M}$;
- 3) каждая петля графа G вырождена;
- 4) кратные ребра графа G имеют одинаковые веса;
- 5) вес каждого ребра графа G , входящего в цикл, не превосходит суммы весов всех остальных ребер этого цикла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Изменение весов ребер, инцидентных внутренним вершинам степени 1, не изменяет свойство взвешенного графа быть заполнением, поэтому в силу минимальности такие ребра должны иметь нулевой вес.

2) Операция склеивания двух ребер, инцидентных внутренней вершине степени 2, в одно ребро суммарного веса не меняет как свойство графа быть заполнением, так и вес графа, поэтому полученный граф также будет минимальным параметрическим заполнением.

3) Доказательство этого свойства такое же, как и свойства 1).

4) Если кратные ребра имеют разные веса, то уменьшение наибольшего из этих весов до наименьшего не изменит свойство полученного взвешенного графа быть заполнением, но уменьшит при этом вес графа.

5) Если это свойство не выполняется, то вес такого ребра можно уменьшить, не нарушив свойство графа G быть заполнением. Утверждение доказано.

Рассмотрим теперь минимальные заполнения. Так как каждое из них является минимальным параметрическим заполнением, на него распространяются все свойства, описанные в утверждении 2.1. Однако некоторые из них можно усилить, что делается в следующем утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Пусть $\mathcal{G}$ – минимальное заполнение некоторого псевдометрического пространства $\mathcal{M}$. Тогда:

- 1) любое кратное ребро вырождено;
- 2) любое ребро, входящее в цикл, вырождено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из каждого семейства кратных ребер ненулевого веса можно выбросить ребро, не меняя свойство графа быть заполнением, но уменьшая общий вес графа, поэтому в минимальном заполнении веса таких ребер должны равняться нулю.

Для доказательства отсутствия в $\mathcal{G}$ циклов, имеющих ребра ненулевого веса, достаточно заметить, что при выбрасывании любого ребра из цикла так перестроенный граф остается заполнением. Утверждение доказано.

Аналогично случаю заполнений ребра сети, имеющие нулевую длину, будем называть *вырожденными*, а остальные – *невырожденными*. Сеть без вырожденных ребер назовем *невырожденной*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Пусть Γ – минимальная параметрическая сеть типа $G = (V, E, I)$ в псевдометрическом пространстве (X, d) . Тогда:

- 1) все внутренние вершины степени 1 сети Γ инцидентны вырожденным ребрам;
- 2) каждая внутренняя вершина степени 2 сети Γ , инцидентная двум разным ребрам, лежит между смежными с ней вершинами, т.е. если v , vw_1 и vw_2 – соответствующие вершина и ребра параметризующего графа G , то

$$d(\Gamma(w_1), \Gamma(v)) + d(\Gamma(v), \Gamma(w_2)) = d(\Gamma(w_1), \Gamma(w_2)),$$

поэтому если вершину v удалить из G и заменить ребра vw_i на ребро w_1w_2 , то сеть, полученная ограничением Γ на множество вершин $V \setminus \{v\}$ так перестроенного графа G , будет минимальной параметрической сетью с той же границей;

- 3) каждая петля сети Γ (как и любой другой сети) вырождена;
- 4) кратные ребра сети Γ (как и любой другой сети) имеют одинаковые длины.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим противное, т.е. существует внутренняя вершина $\Gamma: v \rightarrow X$ степени 1, инцидентная ребру $\Gamma: vw \rightarrow X$ положительной длины. Тогда, изменив отображение Γ в вершине v , полагая $\Gamma(v) = \Gamma(w)$, мы получим параметрическую сеть того же типа и с той же границей, но меньшей длины. Противоречие.

2) Снова предположим противное, т.е. существует такая внутренняя вершина $\Gamma: v \rightarrow X$ степени 2, что для смежных с ней вершин $\Gamma: w_1 \rightarrow X$ и $\Gamma: w_2 \rightarrow X$ выполнено

$$d(\Gamma(w_1), \Gamma(v)) + d(\Gamma(v), \Gamma(w_2)) \neq d(\Gamma(w_1), \Gamma(w_2)).$$

Тогда в силу неравенства треугольника имеем

$$d(\Gamma(w_1), \Gamma(v)) + d(\Gamma(v), \Gamma(w_2)) > d(\Gamma(w_1), \Gamma(w_2)).$$

Поэтому, изменив отображение Γ в вершине v так, чтобы v переходила в $\Gamma(w_1)$, мы получим параметрическую сеть с той же границей, но меньшей длины. Противоречие.

Свойства 3) и 4) очевидны по определению сети. Утверждение доказано.

Рассмотрим теперь кратчайшие сети. Так как каждая из них является минимальной параметрической сетью, на них распространяются все свойства, описанные в утверждении 2.3. Однако некоторые из них можно усилить, что делается в следующем утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. Пусть Γ – кратчайшая сеть, соединяющая некоторое конечное подмножество M псевдометрического пространства (X, d) . Тогда:

- 1) любое кратное ребро вырождено;
- 2) любое ребро, входящее в цикл, вырождено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из каждого семейства кратных ребер ненулевой длины можно выбросить любое ребро, не меняя свойство параметризующего графа быть связным и свойство сети соединять точки из M . Однако при этом длина сети уменьшается, что противоречит минимальности, поэтому в кратчайшей сети длины таких ребер должны равняться нулю.

Для доказательства отсутствия в $\mathcal{G}$ циклов, имеющих ребра ненулевой длины, достаточно заметить, что выбрасывание любого невырожденного ребра из цикла приводит к сети меньшей длины на том же M . Утверждение доказано.

Из утверждений 2.1 и 2.3 видно, что выбрасывание внутренних вершин степени 2, инцидентных разным ребрам, не влияет на свойство взвешенного графа (сети) быть минимальным параметрическим заполнением (минимальной параметрической сетью). Легко определить и обратную операцию, называемую *подразбиением ребра*, которая состоит в добавлении на ребро внутренней вершины степени 2 и также оставляет заполнения (сети) минимальными параметрическими. Это является мотивацией того, что в данном контексте подвижные вершины степени 2, инцидентные разным ребрам, называют *фиктивными* и, как правило, считают, что рассматриваемые графы (сети) таких вершин не содержат.

Следующий шаг в сторону упрощения типов рассматриваемых сетей – избавление от вырожденных ребер, описанных в предыдущих утверждениях. Чтобы это проделать, определим операцию факторизации графа G по некоторому набору его ребер.

2.2. Факторизация и расщепление. Пусть $G = (V, E, I)$ – произвольный граф с границей M и F – некоторое подмножество E . Обозначим через $G_i = (V_i, F_i, I_i)$ связные компоненты графа (V, F, I) и положим $M_i = M \cap V_i$, $V_F = \{V_i\}$, $M_F = \{M_i\}$. Отметим, что V_F и M_F являются соответственно разбиениями множеств V и M . Пусть $\pi_F: V \rightarrow V_F$ – естественная проекция, однозначно определяемая условием: $v \in \pi_F(v)$ для каждого $v \in V$. Также через π_F будем обозначать ограничение этой проекции на M и продолжение этой проекции на множество всех подмножеств V . Положим $E_F = E \setminus F$ и для каждого $e \in E_F$ определим I_F так: $I_F(e) = \pi_F(I(e))$. Граф (V_F, E_F, I_F) с границей M_F назовем *фактором* графа G по семейству ребер F и будем обозначать через G_F .

Перенесем понятие факторизации на заполнения и сети. Для этого рассмотрим сначала произвольное псевдометрическое пространство $\mathcal{M} = (M, \rho)$, и пусть $P = \{M_i\}$ – некоторое разбиение множества M . Разбиение P назовем *метрическим*, если ограничение расстояния ρ на каждое M_i тождественно равно нулю. Легко видеть, что в этом случае для любых i и j расстояние $\rho(x, y)$ между $x \in M_i$ и $y \in M_j$ не зависит от выбора x и y . Более того, функция $\rho_P(M_i, M_j)$, равная $\rho(x, y)$ для некоторых $x \in M_i$ и $y \in M_j$, задает на P псевдометрику. Будем говорить, что функция ρ_P *индуцирована* метрическим разбиением P . Псевдометрическое пространство $\mathcal{M}_P = (P, \rho_P)$ назовем *фактором* пространства $\mathcal{M}$ по метрическому разбиению P . Отметим, что для метрического разбиения P проекция $\pi_P: M \rightarrow P$, однозначно определяемая условием $x \in \pi_P(x)$, сохраняет расстояния, т.е. $\rho(x, y) = \rho_P(\pi_P(x), \pi_P(y))$ для любых x и y из M .

Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – заполнение типа $G = (V, E, I)$ псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ и $F \subset E$ состоит из вырожденных ребер, возможно не всех. Пусть, как и выше, $G_F = (V_F, E_F, I_F)$ – фактор графа G по семейству F и M_F – его граница. Обозначим через ω_F ограничение ω на $E_F = E \setminus F$, а через $\mathcal{G}_F$ – взвешенный граф (G_F, ω_F) . Так как все ребра каждой связной компоненты $G_i = (V_i, F_i, I_i)$ графа (V, F, I) вырождены, ограничение d_ω на каждое $V_i \in V_F$ равно нулю. Поэтому так как $\mathcal{G}$ – заполнение, ограничение ρ на каждое $M_i \in M_F$ также равно нулю. Тем самым, разбиение M_F множества M метрическое, поэтому определен фактор $\mathcal{M}_F = (M_F, \rho_F)$ по разбиению M_F . Легко проверяется, что $\mathcal{G}_F$ является заполнением $\mathcal{M}_F$. Заполнение $\mathcal{G}_F$ назовем *фактором* заполнения $\mathcal{G}$ по семейству F вырожденных ребер.

Пусть теперь $\Gamma: V \rightarrow X$ – сеть типа $G = (V, E, I)$ с границей $\varphi: N \rightarrow X$ в псевдометрическом пространстве $\mathcal{X} = (X, d)$, соединяющая множество $M = \varphi(N)$, а $F \subset E$ состоит из некоторых вырожденных ребер. Пусть G_F – граф с границей N_F , являющийся фактором G по семейству F . Рассмотрим граф $H = \Gamma(V, F, I)$, и пусть $H_k = (W_k, F_k, J_k)$ – связные компоненты этого графа. Построим разбиение W множества X , дополнив семейство $\{W_k\}$ одноточечными подмножествами X , элементы которых не попали ни в одно из W_k . Легко видеть, что W – метрическое разбиение пространства $\mathcal{X}$. Пусть P – произвольное метрическое разбиение пространства $\mathcal{X}$, являющееся укрупнением W , т.е. W представляет собой подразбиение P . В этом случае будем говорить, что семейство F *согласовано* с метрическим разбиением P пространства $\mathcal{X}$, а пару $D = (F, P)$ назовем *согласованным вырождением* сети Γ . Пусть $\mathcal{X}_P$ – фактор $\mathcal{X}$ по разбиению P и $\pi_P: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_P$ – соответствующая проекция. Так как P является укрупнением W , множество $\pi_P(\Gamma(V_i))$ одноточечно для каждого $V_i \in V_F$. Определим сеть $\Gamma_D: V_F \rightarrow \mathcal{X}_P$ с границей $\varphi_D: N_F \rightarrow \mathcal{X}_P$, параметризованную графом $G_F = (V_F, E_F, I_F)$, положив $\Gamma_D(V_i) = \pi_P(\Gamma(V_i))$ и выбрав в качестве φ_D ограничение Γ_D на N_F . Полученная сеть Γ_D соединяет множество $M_P = \pi_P(M) = \varphi_D(N_F)$.

Отметим, что для заполнений метрических пространств и сетей в метрических пространствах определение факторизации существенно проще, так как нет необходимости факторизовать сами эти пространства. Приведем соответствующие построения.

Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – заполнение типа $G = (V, E, I)$ метрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ и $F \subset E$ состоит из некоторых вырожденных ребер. Так как пространство $\mathcal{M}$ метрическое, разбиение M_F в этом случае состоит из всех одноточечных подмножеств множества M и поэтому M_F естественно отождествляется с M . Таким образом, в случае метрического пространства взвешенный граф $\mathcal{G}_F$, построенный выше, является заполнением исходного пространства $\mathcal{M}$.

Пусть теперь $\Gamma: V \rightarrow X$ – сеть типа $G = (V, E, I)$ с границей $\varphi: N \rightarrow X$ в метрическом пространстве $\mathcal{X} = (X, d)$, а $F \subset E$ состоит из некоторых вырожденных ребер. Отметим, что в этом случае ребро $e \in E$ является вырожденным, если и только если $\Gamma(I(e))$ – одноточечное подмножество X , поэтому множества $\Gamma(V_i)$ для каждого $V_i \in V_F$ также являются одноточечными. Кроме того, у пространства $\mathcal{M}$ имеется единственное метрическое разбиение, а именно разбиение на одноточечные подмножества. Таким образом, факторсеть

$\Gamma_D: V_F \rightarrow X$ с границей $\varphi_D: N_F \rightarrow X$ в этом случае может быть определена так: $\Gamma_D(V_i) = \Gamma(V_i)$ и φ_D – ограничение Γ_D на $N_F \subset V_F$.

Обратная операция к факторизации называется расщеплением. А именно, если граф, взвешенный граф, сеть, а также соответствующие псевдометрические пространства получены факторизацией соответственно из некоторого графа, взвешенного графа, сети или псевдометрического пространства по некоторому множеству ребер или разбиению, то про исходный объект будем говорить, что он получен из результата факторизации *расщеплением* по этому множеству ребер или разбиению.

2.3. База. Пусть $G = (V, E, I)$ – граф, $\mathcal{X} = (X, d)$ – псевдометрическое пространство, $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – взвешенный граф, $\Gamma: V \rightarrow X$ – сеть в $\mathcal{X}$. Обозначим через $\text{degen}(\mathcal{G})$ и $\text{degen}(\Gamma)$ множества всех вырожденных ребер взвешенного графа $\mathcal{G}$ и сети Γ соответственно. Граф $\mathcal{G}_F$ и сеть Γ_F для $F = \text{degen}(\mathcal{G})$ и соответственно $F = \text{degen}(\Gamma)$ называются *предбазами* соответственно графа $\mathcal{G}$ и сети Γ . Предбаза, из которой удалены все фиктивные вершины, называется *базой*. Отметим, что переход к предбазе сохраняет вес графа и длину сети, однако при переходе к базе сохраняется только вес графа, длина же сети может уменьшиться.

Для псевдометрического пространства $\mathcal{X}$ обозначим через $\text{degen}(\mathcal{X})$ единственное метрическое разбиение, из которого получаются все остальные метрические разбиения с помощью перехода к подразбиениям. Элементы разбиения $\text{degen}(\mathcal{X})$ назовем *вырожденными компонентами* пространства $\mathcal{X}$. *Базой* пространства $\mathcal{X}$ назовем факторпространство $\mathcal{X}_P$, где $P = \text{degen}(\mathcal{X})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5. Пусть $\mathcal{M}$ – некоторое псевдометрическое пространство и $\mathcal{G}$ – его минимальное (параметрическое) заполнение.

- 1) Если F – произвольное семейство вырожденных ребер из $\mathcal{G}$, то взвешенный граф $\mathcal{G}_F$ является минимальным заполнением (соответственно минимальным параметрическим заполнением) пространства $\mathcal{M}_F$.
- 2) Если $F = \text{degen}(\mathcal{G})$, то база $\mathcal{G}_F$ минимального (параметрического) заполнения $\mathcal{G}$ пространства $\mathcal{M}$ является минимальным (параметрическим) заполнением пространства $\mathcal{M}_F$ и представляет собой невырожденный граф без петель, граница которого содержит все вершины степени 1 и 2. Кроме того, если $\mathcal{G}$ – минимальное заполнение, то его база $\mathcal{G}_F$ является невырожденным деревом, а пространство $\mathcal{M}_F$ совпадает с базой пространства $\mathcal{M}$ и, в частности, является метрическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из определения графа $\mathcal{G}_F$ вытекает, что он представляет собой заполнение пространства $\mathcal{M}_F$, причем его вес равен весу исходного графа $\mathcal{G}$, поэтому $\mathcal{G}_F$ – минимальное (параметрическое) заполнение $\mathcal{M}_F$.

2) Заметим, что удаление фиктивных вершин не меняет свойства взвешенного графа быть минимальным (параметрическим) заполнением, а наличие у базы невырожденных петель, или невырожденных ребер, инцидентных внутренним вершинам степени 1, противоречит утверждению 2.1.

В силу утверждения 2.2 все ребра, входящие в циклы, а также все кратные ребра являются вырожденными, поэтому минимальное заполнение $\mathcal{G}_F$ – невырожденное дерево. Осталось показать, что $\mathcal{M}_F$ в этом случае совпадает с базой пространства $\mathcal{M}$. Предположим противное, т.е. что пространство $\mathcal{M}_F$

содержит различные точки p и q , для которых $\rho_F(p, q) = 0$, и пусть γ – путь в $\mathcal{G}_F$, соединяющий p и q . Путь γ содержит ребро e веса $\omega > 0$, так как иначе точки p и q были бы отождествлены в M_F . Если $e \neq pq$, то перестроим дерево $\mathcal{G}_F$, выбросив ребро e и добавив ребро pq веса ω . Перестроенный так граф вновь будет минимальным заполнением.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – минимальное параметрическое заполнение псевдометрического пространства (M, ρ) и e – некоторое ребро из G , соединяющее точки p и q из M . Тогда $\rho(p, q) = \omega(e)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $\rho(p, q) \neq \omega(e)$. Так как $\mathcal{G}$ – заполнение, имеем $\rho(p, q) < \omega(e)$. Пусть γ – произвольный путь в $\mathcal{G}$, содержащий e и соединяющий точки из M , скажем p' и q' . Для определенности предположим, что вдоль пути γ рассматриваемые точки расположены в порядке p', p, q, q' . Тогда

$$\rho(p', q') \leq \rho(p', p) + \rho(p, q) + \rho(q, q') < \rho(p', p) + \omega(e) + \rho(q, q') \leq \omega(\gamma),$$

поэтому можно выбрать настолько малое положительное ε , что дерево, полученное из $\mathcal{G}$ уменьшением веса ребра e на ε , останется заполнением. Последнее противоречит минимальности заполнения $\mathcal{G}$. Лемма доказана.

Из леммы 2.1 вытекает, что вес ребра e равен нулю. Это противоречие завершает доказательство утверждения 2.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Для базы минимального параметрического заполнения соответствующий фактор псевдометрического пространства, вообще говоря, не обязательно является метрическим. На рис. 1, слева приведен пример не являющегося метрическим псевдометрического пространства $\mathcal{M}$, порожденного взвешенным графом. В центре изображено невырожденное минимальное параметрическое заполнение $\mathcal{G}$ пространства $\mathcal{M}$. Тем самым, база $\mathcal{G}_F$ этого заполнения совпадает с ним самим, а пространство $\mathcal{M}_F$ не метрическое. Минимальное заполнение $\mathcal{H}$ этого псевдометрического пространства имеет другой тип и изображено на рис. 1, справа. Отметим, что для базы $\mathcal{H}_R$ этого заполнения пространство $\mathcal{M}_R$ метрическое в соответствии с утверждением 2.5.

Рис. 1. Пример псевдометрического пространства, не являющегося метрическим, однако представляющего собой границу базы минимального параметрического заполнения

По аналогии с утверждением 2.5 доказывается следующий его вариант в случае кратчайших сетей.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.6. Пусть $\mathcal{X} = (X, d)$ – некоторое псевдометрическое пространство и Γ – кратчайшая, или минимальная, параметрическая сеть в $\mathcal{X}$, соединяющая $M \subset X$.

- 1) Если $D = (F, P)$ – произвольное согласованное вырождение сети Γ , то Γ_D является кратчайшей (соответственно минимальной параметрической) сетью в пространстве $\mathcal{X}_P$, соединяющей множество M_P .
- 2) Если $F = \text{degen}(\Gamma)$, а $D = (F, P)$ – некоторое согласованное вырождение сети Γ , то база Υ сети Γ является кратчайшей (минимальной параметрической) невырожденной сетью в метрическом пространстве $\mathcal{X}_P$, соединяющей множество M_P . При этом сеть Υ не содержит петель, а ее граница включает все вершины степеней 1 и 2. Кроме того, база Υ кратчайшей сети является невырожденным деревом, а ограничение псевдометрики на $M_P \subset X_P$ – метрикой.

Заметим, что база каждого минимального заполнения и каждой кратчайшей сети может быть получена факторизацией из некоторого дерева T , степени вершин которого равны 1 или 3, а граница совпадает с границей базы и состоит из всех вершин степени 1 дерева T . Такие деревья будем называть *бинарными*. Итак, мы получили следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.7. База минимального заполнения или кратчайшей сети может быть расцеплена до бинарного дерева, являющегося соответственно минимальным заполнением или кратчайшей сетью с той же границей.

Подводя итог, сформулируем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.1. Для любого конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M}$ существует минимальное заполнение, являющееся бинарным деревом. Если же пространство $\mathcal{M}$ метрическое, то для него существует также минимальное заполнение, являющееся невырожденным деревом. Обратно, если для $\mathcal{M}$ существует невырожденное минимальное заполнение, то $\mathcal{M}$ – метрическое пространство.

Для любого конечного подмножества M псевдометрического пространства существует соединяющее M кратчайшее бинарное дерево. Если расстояния между различными точками из M отличны от нуля, то существует соединяющее M кратчайшее невырожденное дерево. Обратно, если для M существует невырожденное кратчайшее дерево, то расстояния между различными точками из M отличны от нуля.

Из утверждений 2.5 и 2.6 вытекает, что при изучении минимальных заполнений и кратчайших сетей всегда можно ограничиться рассмотрением деревьев, у которых все вершины степеней 1 и 2 принадлежат границе. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы всегда будем предполагать это условие выполненным.

§ 3. Минимальная реализация

В этом параграфе мы покажем, что задача о минимальных заполнениях может быть сведена к проблеме Штейнера в специальных метрических пространствах.

Рассмотрим конечное множество $M = \{p_1, \dots, p_n\}$, и пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – псевдометрическое пространство. Положим $\rho_{ij} = \rho(p_i, p_j)$. Через ℓ_∞^n обозначим n -мерное арифметическое пространство с нормой

$$\|(v^1, \dots, v^n)\|_\infty = \max\{|v^1|, \dots, |v^n|\},$$

а через ρ_∞ – порожденную нормой $\|\cdot\|_\infty$ метрику на ℓ_∞^n , т.е. $\rho_\infty(v, w) = \|w - v\|_\infty$. Определим отображение $\varphi_{\mathcal{M}}: M \rightarrow \ell_\infty^n$ по формуле

$$\varphi_{\mathcal{M}}(p_i) = \bar{p}_i = (\rho_{i1}, \dots, \rho_{in}).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Отображение $\varphi_{\mathcal{M}}$ является изометрией с образом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\rho_\infty(\bar{p}_i, \bar{p}_j) = \max\{|\rho_{i1} - \rho_{j1}|, \dots, |\rho_{ij} - \rho_{jj}|, \dots, |\rho_{in} - \rho_{jn}|\} = \rho_{ij} = \rho(p_i, p_j),$$

так как $|\rho_{ik} - \rho_{jk}| \leq \rho_{ij}$ и $\rho_{jj} = 0$. Утверждение доказано.

Построенное выше отображение $\varphi_{\mathcal{M}}$ назовем *изометрией Куратовского*.

Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – заполнение пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$, где $G = (V, E)$, а d_ω – псевдометрика на V , порожденная весовой функцией ω . Рассмотрим мультиграф $\bar{G} = (V, \bar{E}, I)$, где $\bar{E}$ является дизъюнктивным объединением множества E ребер дерева G и ребер E_M полного графа $K_n(M)$ на M , а отображение инцидентности I – объединение отображений инцидентности простых графов G и $K_n(M)$. Пусть $\bar{\omega}$ – весовая функция на $\bar{E}$, совпадающая с ω на E и с псевдометрикой ρ на E_M . Отметим, что ребра из $\bar{G}$, соединяющие точки из M , могут иметь кратность 2, остальные имеют кратность 1. Обозначим через $d_{\bar{\omega}}$ псевдометрику на V , порожденную $\bar{\omega}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Имеем:*

- 1) $d_{\bar{\omega}}(p_i, p_j) = \rho(p_i, p_j) \leq d_\omega(p_i, p_j)$;
- 2) для любых v и w из $V \setminus M$ выполняется

$$d_{\bar{\omega}}(v, w) = \min_{\alpha, \beta} \{d_\omega(v, p_\alpha) + \rho(p_\alpha, p_\beta) + d_\omega(p_\beta, w), d_\omega(v, w)\} \leq d_\omega(v, w),$$

в частности, если $e = vw \in E$, то $d_{\bar{\omega}}(v, w) \leq \omega(e)$;

- 3) для любого $v \in V \setminus M$ выполняется

$$d_{\bar{\omega}}(v, p_i) = \min_{\alpha} \{d_\omega(v, p_\alpha) + \rho(p_\alpha, p_i)\} \leq d_\omega(v, p_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В каждом из трех рассматриваемых случаев обозначим через γ путь в $\bar{G}$, соединяющий изучаемые вершины. Разобьем путь γ на последовательные пути γ_i , $i = 1, \dots, k$, где каждый γ_i является максимальным подпутем в γ , состоящим или только из ребер, лежащих в E_M (путь первого типа), или только из ребер, лежащих в E (путь второго типа). Отметим, что при каждом $i = 2, \dots, k-1$ путь γ_i соединяет некоторые вершины p_α и p_β из M . Если такой γ_i является путем первого типа, то $\bar{\omega}(\gamma_i) \geq \rho(p_\alpha, p_\beta)$ в силу неравенства треугольника. Если же такой γ_i – путь второго типа, то $\bar{\omega}(\gamma_i) \geq \rho(p_\alpha, p_\beta)$

в силу того, что (G, ω) – заполнение. Таким образом, если γ' обозначает объединение путей γ_i по всем $i = 2, \dots, k-1$, а p_α и p_β – его концевые вершины, то $\bar{\omega}(\gamma') \geq \rho(p_\alpha, p_\beta)$ в силу неравенства треугольника.

Рассмотрим теперь п. 1) из формулировки утверждения. В этой ситуации γ_1 и γ_k также соединяют вершины из M , поэтому из аналогичных соображений выводим, что $\bar{\omega}(\gamma) \geq \rho(p_i, p_j)$, откуда $d_{\bar{\omega}}(p_i, p_j) \geq \rho(p_i, p_j)$. Заметим, что среди путей γ в этом случае имеется путь, состоящий из ребра $p_i p_j \in E_M$, вес которого в точности равен $\rho(p_i, p_j)$, поэтому $d_{\bar{\omega}}(p_i, p_j) = \rho(p_i, p_j)$.

В п. 2) или $\gamma = \gamma_1$ и тогда $\bar{\omega}(\gamma) = \omega(\gamma_1) \geq d_\omega(v, w)$, или $k \geq 2$ и $\bar{\omega}(\gamma_1) = \omega(\gamma_1) \geq d_\omega(v, p_\alpha)$, $\bar{\omega}(\gamma_k) = \omega(\gamma_k) \geq d_\omega(p_\beta, w)$. Кроме того, из п. 1) вытекает, что $d_{\bar{\omega}}(p_\alpha, p_\beta) = \rho(p_\alpha, p_\beta)$, поэтому

$$d_{\bar{\omega}}(v, w) = \min_{\gamma} \{\bar{\omega}(\gamma)\} \geq \min_{\alpha, \beta} \{d_\omega(v, p_\alpha) + \rho(p_\alpha, p_\beta) + d_\omega(p_\beta, w), d_\omega(v, w)\}.$$

Если $\min_{\alpha, \beta} \{d_\omega(v, p_\alpha) + \rho(p_\alpha, p_\beta) + d_\omega(p_\beta, w)\} \geq d_\omega(v, w)$, то выберем в качестве γ путь в G , для которого $\omega(\gamma) = d_\omega(v, w)$. Если же имеет место обратное неравенство, то в качестве α и β возьмем те индексы, на которых достигается минимум, а в качестве γ – путь, составленный из γ_1 , γ_2 и γ_3 , где γ_1 и γ_3 – пути в G , для которых $\omega(\gamma_1) = d_\omega(v, p_\alpha)$, $\omega(\gamma_3) = d_\omega(p_\beta, w)$, а путь γ_2 положим равным ребру $p_\alpha p_\beta \in E_M$. В каждом из этих случаев неравенство превращается в искомое равенство.

Пункт 3) разбирается абсолютно так же, как и 2). Утверждение доказано.

Определим сеть $\Gamma_{\mathcal{G}}: V \rightarrow \ell_\infty^n$ типа G , положив

$$\Gamma_{\mathcal{G}}(v) = (d_{\bar{\omega}}(v, p_1), \dots, d_{\bar{\omega}}(v, p_n)).$$

Эту сеть назовем *сетью Куратовского заполнения* $\mathcal{G}$.

Из утверждения 3.2 вытекает следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. *Имеем $\partial \Gamma_{\mathcal{G}} = \varphi_{\mathcal{M}}$.*

Отображение псевдометрических пространств назовем *нерастягивающим*, если оно не увеличивает расстояний между точками. Из утверждения 3.2 получаем еще один результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. *Отображение $\Gamma_{\mathcal{G}}$, действующее из (V, d_ω) в ℓ_∞^n , является нерастягивающим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v и w – произвольные вершины из V . Тогда

$$\begin{aligned} \rho_\infty(\Gamma_{\mathcal{G}}(v), \Gamma_{\mathcal{G}}(w)) &= \max\{|d_{\bar{\omega}}(v, p_1) - d_{\bar{\omega}}(w, p_1)|, \dots, |d_{\bar{\omega}}(v, p_n) - d_{\bar{\omega}}(w, p_n)|\} \\ &\leq d_{\bar{\omega}}(v, w) \leq d_\omega(v, w), \end{aligned}$$

где предпоследнее неравенство выполняется в силу неравенства треугольника, а последнее – по утверждению 3.2, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Аналог утверждения 3.4 имеет место в существенно более общих предположениях (см. [15]).

Для произвольной сети Γ в метрическом пространстве (X, d) обозначим через ω_Γ весовую функцию на G , индуцированную сетью Γ , т.е. $\omega_\Gamma(vw) = d(\Gamma(v), \Gamma(w))$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – минимальное параметрическое заполнение пространства (M, ρ) и $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{G}}$ – соответствующая сеть Куратовского. Тогда $\omega = \omega_{\Gamma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как Γ изометрично отображает пространство (M, ρ) в ℓ_{∞}^n , то взвешенный граф (G, ω_{Γ}) является заполнением пространства (M, ρ) . По утверждению 3.4 для каждого ребра $e \in E$ выполнено $\omega(e) \geq \omega_{\Gamma}(e)$. Поэтому в силу минимальности заполнения (G, ω) все эти неравенства выполнены в форме равенств. Следствие доказано.

Пусть Γ – некоторая сеть в псевдометрическом пространстве $\mathcal{X}$, параметризованная графом G , а $\mathcal{H} = (H, \omega)$ – некоторый взвешенный граф. Мы будем говорить, что Γ и $\mathcal{H}$ *изометричны*, если существует изоморфизм взвешенных графов $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G} = (G, \omega_{\Gamma})$.

Из следствия 3.1 и существования минимальных параметрических сетей, а также кратчайших сетей в конечномерном нормированном пространстве (см. [32]) получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – псевдометрическое пространство, состоящее из n точек, и $\varphi_{\mathcal{M}}: M \rightarrow \ell_{\infty}^n$ – изометрия Куратовского. Для любого связного графа G , соединяющего M , существует минимальное параметрическое заполнение типа G . Каждое минимальное параметрическое заполнение типа G пространства $\mathcal{M}$ изометрично соответствующей сети Куратовского, которая в этом случае является минимальной параметрической сетью типа G с границей $\varphi_{\mathcal{M}}$. Обратно, каждая минимальная параметрическая сеть типа G на $\varphi_{\mathcal{M}}(M)$ изометрична некоторому минимальному параметрическому заполнению типа G пространства $\mathcal{M}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – псевдометрическое пространство, состоящее из n точек, и $\varphi_{\mathcal{M}}: M \rightarrow \ell_{\infty}^n$ – изометрия Куратовского. Тогда для $\mathcal{M}$ существует минимальное заполнение $\mathcal{G}$, а соответствующая сеть Куратовского $\Gamma_{\mathcal{G}}$ является кратчайшей сетью в пространстве ℓ_{∞}^n , соединяющей множество $\varphi_{\mathcal{M}}(M)$. Обратно, каждая кратчайшая сеть на $\varphi_{\mathcal{M}}(M)$ изометрична некоторому минимальному заполнению пространства $\mathcal{M}$.

§ 4. Переформулировка задачи

Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – конечное, а $\mathcal{X} = (X, d)$ – произвольное псевдометрические пространства и $f: M \rightarrow X$ – изометрия с образом. Для таких отображений удобно писать $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}$. Множество всех $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}$ при фиксированном $\mathcal{M}$ и всевозможных $\mathcal{X}$ обозначим через $\mathcal{I}(\mathcal{M})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Имеем $\text{mf}(\mathcal{M}) = \inf_{f \in \mathcal{I}(\mathcal{M})} \text{smt}(f(M))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что каждое минимальное дерево Штейнера на $f(M)$ изометрично некоторому заполнению пространства $\mathcal{M}$. Поэтому

$$\text{mf}(\mathcal{M}) \leq \inf_{f \in \mathcal{I}(\mathcal{M})} \text{smt}(f(M)).$$

Если же в качестве f взять определенное выше отображение $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \ell_{\infty}^n$, то получим $\text{mf}(\mathcal{M}) = \text{smt}(\varphi(M))$, что и завершает доказательство.

Пусть $\mathcal{M} = (V, \rho)$ – произвольное конечное псевдометрическое пространство и $G = (V, E)$ – некоторый граф. Такой граф будем называть *графом на пространстве $\mathcal{M}$* . Длиной $\rho(e)$ ребра $e = vw \in E$ назовем число $\rho(v, w)$, а длиной $\rho(G)$ графа G – сумму длин всех ребер этого графа. Число

$$\text{mst}(\mathcal{M}) = \min\{\rho(G) \mid G \text{ – дерево на } \mathcal{M}\}$$

назовем *длиной минимального остовного дерева* псевдометрического пространства $\mathcal{M}$, а дерево на $\mathcal{M}$, для которого $\rho(G) = \text{mst}(\mathcal{M})$, назовем *минимальным остовным деревом* на псевдометрическом пространстве $\mathcal{M}$.

Непосредственно из определений вытекает следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. Пусть $\mathcal{X} = (X, d)$ – произвольное псевдометрическое пространство и M – конечное подмножество X . Тогда

$$\text{smt}(M, d) = \inf\{\text{mst}(N, d) \mid M \subset N \subset X, \#N < \infty\}.$$

Из утверждений 4.2 и 4.1 получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Для произвольного конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ имеет место следующее равенство:

$$\text{mf}(\mathcal{M}) = \inf_{f, N} \{\text{mst}(N, d) \mid f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{X} = (X, d), f(M) \subset N \subset X\}.$$

Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – конечные псевдометрические пространства, для которых существует изометрия с образом $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, то $\mathcal{N}$ будем называть *расширением $\mathcal{M}$* . Множество всех расширений пространства $\mathcal{M}$ обозначим через $\mathcal{E}(\mathcal{M})$. Легко видеть, что пространства (N, d) из следствия 4.1 пробегают все множество $\mathcal{E}(\mathcal{M})$. Это дает возможность переформулировать следствие 4.1.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Имеет место равенство

$$\text{mf}(\mathcal{M}) = \inf_{\mathcal{N} \in \mathcal{E}(\mathcal{M})} \text{mst}(\mathcal{N}).$$

Отметим, что формулу из следствия 4.2 можно взять в качестве эквивалентного определения веса минимального заполнения.

Пусть $\mathcal{X} = (X, \rho)$ и $\mathcal{Y} = (Y, d)$ – псевдометрические пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ такое, что для любых точек u и v из X выполняется $d(f(u), f(v)) \geq \rho(u, v)$, назовем *несжимающим*. Множество всех конечных псевдометрических пространств $\mathcal{N}$, в которых существует несжимающее отображение из псевдометрического пространства $\mathcal{M}$, обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{M})$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Имеет место равенство

$$\text{mf}(\mathcal{M}) = \inf_{\mathcal{N} \in \mathcal{L}(\mathcal{M})} \text{mst}(\mathcal{N}).$$

Следствие 4.3 можно рассматривать как третье эквивалентное определение веса минимального заполнения.

§ 5. Минимальное параметрическое заполнение и линейное программирование

Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – конечное псевдометрическое пространство, соединенное некоторым (связным) графом $G = (V, E)$. Как и выше, через $\Omega(\mathcal{M}, G)$ обозначим множество, состоящее из всех весовых функций $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}_+$, для которых $\mathcal{G} = (G, \omega)$ является заполнением пространства $\mathcal{M}$, а через $\Omega_m(\mathcal{M}, G)$ обозначим его подмножество, состоящее из весовых функций, для которых $\mathcal{G}$ – минимальное параметрическое заполнение пространства $\mathcal{M}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. *Множество $\Omega(\mathcal{M}, G)$ замкнуто и выпукло в линейном пространстве $\mathbb{R}^E$ всех функций на E , а $\Omega_m(\mathcal{M}, G) \subset \Omega(\mathcal{M}, G)$ – непустой выпуклый компакт.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, условие того, что весовая функция ω определяет заполнение пространства $\mathcal{M}$, может быть записано в виде системы неравенств $\sum_{e \in \gamma} \omega(e) \geq \rho(p, q)$, где γ – путь в G , соединяющий вершины p и q , лежащие в M , а также неравенств $\omega(e) \geq 0$, $e \in E$, гарантирующих неотрицательность весов ребер. Тем самым, соответствующее подмножество $\Omega(\mathcal{M}, G)$ линейного пространства $\mathbb{R}^E$ замкнуто и выпукло.

Далее, минимальные параметрические заполнения соответствуют минимумам функции $\sum_{e \in E} \omega(e)$ на $\Omega(\mathcal{M}, G)$. Так как эта функция непрерывна и ограничена снизу на $\Omega(\mathcal{M}, G)$, то множество $\Omega_m(\mathcal{M}, G)$ минимальных параметрических заполнений непусто и замкнуто. Остается заметить, что множество уровня функции $\sum_{e \in E} \omega(e)$ на положительном ортанте представляет собой симплекс, а на $\Omega(\mathcal{M}, G)$ – пересечение этого симплекса с выпуклым множеством $\Omega(\mathcal{M}, G)$, поэтому $\Omega_m(\mathcal{M}, G)$ выпукло и ограничено. Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Из доказательства утверждения 5.1 видно, что задача о поиске минимального параметрического заполнения в псевдометрическом пространстве сводится к задаче линейного программирования.

§ 6. Точные пути, точные ребра, точные вершины

Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – произвольное конечное псевдометрическое пространство и $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – некоторое его заполнение. Путь, соединяющий граничные вершины дерева $\mathcal{G}$, будем называть *граничным*, а граничный путь, вес которого равен расстоянию между его концевыми вершинами, – *точным*.

Начнем с полезного технического замечания. Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – заполнение, $F = \text{degen}(\mathcal{G})$ – множество всех вырожденных ребер из $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}_F = (G_F, \omega_F)$ – база этого заполнения. Напомним, что через π_F мы обозначали естественную проекцию из множества вершин графа G в множество вершин графа G_F , продолженную на множество всех подмножеств.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. *В сделанных выше предположениях граничный путь γ в $\mathcal{G}$ является точным, если и только если граничный путь $\pi_F(\gamma)$ в $\mathcal{G}_F$ точен.*

6.1. Заполнения общего вида.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.2. *Граничный путь в произвольном заполнении, содержащийся в точном пути, является точным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть δ – граничный путь, входящий в точный путь γ . Обозначим через x и y концевые вершины пути γ , а через z и w – концевые вершины пути δ . Без ограничения общности будем считать, что вершины x, z, w, y последовательны вдоль γ . Обозначим через γ_x и γ_y части пути γ от x до z и от w до y соответственно (отметим, что эти пути могут быть вырожденными, т.е. состоять из одной вершины). Тогда

$$\rho(x, y) = \omega(\gamma) = \omega(\gamma_x) + \omega(\delta) + \omega(\gamma_y) \geq \rho(x, z) + \rho(z, w) + \rho(w, y) \geq \rho(x, y),$$

поэтому неравенства $\omega(\gamma_x) \geq \rho(x, z)$, $\omega(\delta) \geq \rho(z, w)$ и $\omega(\gamma_y) \geq \rho(w, y)$ из определения заполнения должны быть выполнены в виде равенств, в частности, $\rho(z, w) = \omega(\delta)$ и, значит, путь δ точный. Утверждение доказано.

Неграничный путь назовем *точным*, если он содержится в некотором точном граничном пути. Заметим, что в силу утверждения 6.2 предыдущее определение корректно распространяется и на граничные пути. Таким образом, произвольный путь в заполнении назовем *точным*, если он содержится в некотором граничном пути, вес которого равен расстоянию между концевыми точками. Ребро, образующее точный одnoreберный путь, также будем называть *точным*. Вершину заполнения назовем *точной*, если она содержится в некотором точном пути.

Граничный путь, не содержащий внутри себя граничных вершин, назовем *неприводимым*. Из утверждения 6.2 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Ребро заполнения является точным, если и только если оно содержится в некотором неприводимом точном пути.*

6.2. Минимальные параметрические заполнения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.3. *Пусть $\mathcal{G}$ – минимальное параметрическое заполнение псевдометрического пространства (M, ρ) . Тогда каждое невырожденное ребро этого заполнения является точным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если некоторое невырожденное ребро e заполнения $\mathcal{G}$ не является точным, то в силу конечности числа граничных путей, проходящих через e , вес ребра e можно уменьшить, сохранив справедливость неравенств из определения заполнения. Поэтому исходное заполнение в этом случае не минимально, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Вырожденное ребро минимального параметрического заполнения, вообще говоря, не обязательно входит в какой-нибудь точный путь. Чтобы построить пример, выберем в качестве (M, ρ) подпространство евклидовой плоскости, состоящее из вершин какого-нибудь прямоугольника $p_1p_2p_3p_4$. Обозначим через x длину диагонали этого прямоугольника. В качестве G возьмем бинарное дерево с границей M , у которого каждые два ребра, приходящие в вершины диагонали, смежны, а именно, если e_i – граничное ребро дерева G , инцидентное p_i , то ребро e_j смежно с ребром e_{j+2} , $j = 1, 2$. Далее, если $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – произвольное заполнение, то $\omega(e_j) + \omega(e_{j+2}) \geq |p_jp_{j+2}| = x$, поэтому $\omega(\mathcal{G}) \geq 2x$. Отсюда вытекает, что если положить $\omega(e_i) = x/2$, $\omega(f) = 0$, где f – единственное внутреннее ребро дерева G , то получим минимальное параметрическое заполнение $\mathcal{G}$. Ясно, что каждый граничный путь γ в $\mathcal{G}$,

проходящий через f , имеет вес x . С другой стороны, такой путь γ соединяет вершины, расположенные на стороне прямоугольника. Поэтому расстояние между концевыми вершинами пути γ меньше чем x и, следовательно, γ не является точным. Таким образом, f не точное ребро.

СЛЕДСТВИЕ 6.2. *Каждая вершина минимального параметрического заполнения является точной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. некоторая вершина v минимального параметрического заполнения $\mathcal{G}$ не точна. Это означает, что все проходящие через нее граничные пути точными не являются. В частности, $\mathcal{G}$ должно содержать невырожденные ребра.

По утверждению 6.1 все пути в базе $\mathcal{G}_F$ заполнения $\mathcal{G}$, проходящие через $v' = \pi_F(v)$, также не являются точными. Так как $\mathcal{G}$ содержит невырожденные ребра, база $\mathcal{G}_F$ содержит ребро, инцидентное v' . Все проходящие через это ребро граничные пути точными не являются, и так как $\mathcal{G}_F$ – минимальное параметрическое заполнение, получаем противоречие с утверждением 6.3. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 6.3. *Каждый одnoreберный граничный путь минимального параметрического заполнения $\mathcal{G} = (G, \omega)$ псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ точен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ – такой путь и $e = w_1 w_2$ – его единственное ребро. Так как $\mathcal{G}$ – заполнение $\mathcal{M}$, имеем $\omega(e) = \omega(\gamma) \geq \rho(w_1, w_2)$. Поэтому если $\omega(e) = 0$, то и $\rho(w_1, w_2) = 0$, и следствие имеет место.

Пусть теперь e – невырожденное ребро. По утверждению 6.3 ребро e содержится в некотором точном пути, откуда в силу утверждения 6.2 $\omega(\gamma) = \rho(w_1, w_2)$, что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 6.4. *Каждый граничный путь минимального параметрического заполнения $\mathcal{G}$ псевдометрического пространства $\mathcal{M}$, содержащий ровно одно невырожденное ребро, точен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ – такой путь и $F = \text{deg}(\mathcal{G})$. По утверждению 2.5 база $\mathcal{G}_F$ графа $\mathcal{G}$ является минимальным параметрическим заполнением пространства $\mathcal{M}_F$. Соответствующий γ путь $\pi_F(\gamma)$ в $\mathcal{G}_F$ является граничным и одnoreберным. Осталось применить следствие 6.3 и утверждение 6.1. Следствие доказано.

Пусть v – произвольная вершина заполнения $\mathcal{G}$ метрического пространства $\mathcal{M}$. Обозначим через E_v множество всех ребер из $\mathcal{G}$, инцидентных v , а через E_v^n – подмножество E_v , составленное из всех невырожденных ребер. Семейство $N \subset E_v^n$ назовем *неточным*, если любая пара ребер из N не содержится ни в одном точном пути. *Индексом неточности* $\text{neind } v$ вершины v назовем максимальное возможное количество элементов в неточных семействах $N \subset E_v^n$. Напомним, что число элементов в E_v называется *степенью вершины* v и обозначается через $\text{deg } v$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.4. Пусть v – произвольная внутренняя вершина минимального параметрического заполнения. Тогда $2 \operatorname{neind} v \leq \deg v$. Иными словами, в каждом множестве из более чем $(\deg v)/2$ инцидентных v невырожденных ребер имеется по крайней мере два ребра, входящих в точный граничный путь.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. существует внутренняя вершина v , в которой $\operatorname{neind} v > \deg v$. Рассмотрим неточное семейство $N \subset E_v^n$, количество элементов которого равно $\operatorname{neind} v$. Для каждой пары e_p и e_q ребер из N рассмотрим все граничные пути γ , проходящие через e_p и e_q , и обозначим через ε_{pq} минимальную разность между весами путей γ и расстояниями между их концами как точками пространства $\mathcal{M}$. В силу определения N имеем $\varepsilon_{pq} > 0$. Выберем теперь произвольное положительное ε , меньшее всех ε_{pq} и весов ребер из N . Изменим весовую функцию дерева $\mathcal{G}$, уменьшив веса ребер из N на $\varepsilon/2$ и увеличив на $\varepsilon/2$ веса ребер из $E_v \setminus N$. Дерево останется заполнением, однако так как $\operatorname{neind} v > \deg v$, вес дерева уменьшится. Последнее противоречит минимальности $\mathcal{G}$. Утверждение доказано.

Внутреннюю вершину v заполнения назовем *неточной*, если $2 \operatorname{neind} v > \deg v$. Теперь утверждение 6.4 может быть переформулировано так: *минимальное параметрическое заполнение не содержит неточных вершин*.

Пусть $G = (V, E)$ – произвольное дерево. Пусть $v \in V$ – внутренняя вершина степени $k + 1 \geq 3$, смежная с k вершинами $w_1, \dots, w_k$ из ∂G . Тогда множество вершин $\{w_1, \dots, w_k\}$, а также множество ребер $\{vw_1, \dots, vw_k\}$ называются *усами*. Число k назовем *степенью*, а v – *общей вершиной* этих *усов*. Инцидентное v ребро, не входящее в $\{vw_1, \dots, vw_k\}$, назовем *корневым* для рассматриваемых *усов*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.5. Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – минимальное параметрическое заполнение конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$, и пусть $W = \{w_1, \dots, w_k\}$ – усы с общей вершиной v . Тогда некоторые $w_p, w_q \in W$ соединены точным путем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. никакие точки из W не соединены точным путем. Тогда все ребра vw_p невырождены, так как иначе некоторые вершины из W соединяет или вырожденный и, значит, точный путь, или путь, состоящий из одного невырожденного ребра и являющийся точным по следствию 6.4. Но тогда $\operatorname{neind} v \geq k$, поэтому

$$2 \operatorname{neind} v \geq 2k > k + 1 = \deg v,$$

где строгое неравенство имеет место в силу того, что $k \geq 2$ по определению *усов*. Таким образом, вершина v неточная, что противоречит утверждению 6.4. Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 6.5. Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – минимальное параметрическое заполнение псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$. Тогда каждая пара вершин, образующая усы степени 2, соединена точным путем.

СЛЕДСТВИЕ 6.6. Пусть v – внутренняя вершина степени t минимального параметрического заполнения некоторого псевдометрического пространства,

инцидентная только невырожденным ребрам. Тогда каждое множество, составленное более чем из $m/2$ этих ребер, содержит по крайней мере два ребра, через которые проходит точный путь. В частности, если степень вершины v равна 3, то через каждую пару инцидентных ей ребер проходит точный путь.

Аналогично утверждению 6.5 доказывается следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 6.7. Пусть v – внутренняя вершина степени m минимального параметрического заполнения некоторого псевдометрического пространства, инцидентная $m - 1$ невырожденным ребрам. Тогда через некоторую пару невырожденных ребер, инцидентных v , проходит точный граничный путь.

СЛЕДСТВИЕ 6.8. Пусть невырожденное ребро e минимального параметрического заполнения инцидентно двум его внутренним вершинам v и w степени 3. Обозначим через e_1 и e_2 ребра, инцидентные v , а через f_1 и f_2 – ребра, инцидентные w . Предположим, что все эти четыре ребра также невырождены. Тогда существуют две такие непересекающиеся пары ребер (e_i, f_p) и (e_j, f_q) , $\{i, j\} = \{p, q\} = \{1, 2\}$, что через каждую из них проходит точный путь.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу следствия 6.6 через пару ребер (e_1, e) проходит точный путь. Для определенности пусть этот путь проходит также через ребро f_1 . По тому же следствию 6.6 имеется точный путь, проходящий через ребра (f_2, e) . Если этот путь прошел через e_2 , то искомые пары суть (e_1, f_1) и (e_2, f_2) . В противном случае рассмотрим точный путь, проходящий через (e_2, e) . Если он пройдет через f_2 , то подойдут те же две пары, а если через f_1 , то искомые пары суть (e_2, f_1) и (e_1, f_2) . Следствие доказано.

6.3. Минимальные заполнения. Как было отмечено выше, каждое минимальное заполнение является минимальным параметрическим для некоторой параметризации, поэтому все результаты п. 6.2 имеют место и для минимальных заполнений. В настоящем пункте мы приведем некоторые более сильные свойства, имеющие место именно для минимальных заполнений.

Пусть G – произвольное дерево, а e_1 и e_2 – некоторые его ребра. Обозначим через γ единственный путь в G , для которого ребра e_i являются концевыми. Будем говорить, что ребро f *лежит между* e_1 и e_2 , если оно отлично от ребер e_i и лежит на γ . Также будем говорить, что вершина v *лежит между* e_1 и e_2 , если v – неконцевая вершина пути γ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.6. Пусть $\mathcal{G}$ – минимальное заполнение псевдометрического пространства $\mathcal{M}$, а e и f – некоторые ребра из $\mathcal{G}$. Предположим, что все ребра, лежащие между e и f , вырождены. Тогда путь в $\mathcal{G}$, соединяющий e и f , является точным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторый максимальный по включению путь $\bar{\gamma}$, содержащий e и f . В силу принятого соглашения относительно типов рассматриваемых заполнений путь $\bar{\gamma}$ граничный. Если все ребра пути $\bar{\gamma}$ вырождены, то $\bar{\gamma}$ точный, и утверждение доказано.

Пусть теперь $\bar{\gamma}$ содержит невырожденные ребра. Ориентируем $\bar{\gamma}$ так, чтобы e предшествовало f . Предположим сначала, что все ребра пути $\bar{\gamma}$, лежащие

или после e , или до f , вырождены. Без ограничения общности предположим, что реализовалась первая возможность. Обозначим через g последнее невырожденное ребро пути $\bar{\gamma}$, и пусть $\mathcal{G}_F$ – база заполнения $\mathcal{G}$. Тогда $\pi_F(g)$ – граничное ребро в $\mathcal{G}_F$. Из утверждения 6.3 и следствия 6.1 вытекает, что $\pi_F(g)$ содержится в некотором неприводимом точном пути γ' . Пусть w – конечная вершина пути $\bar{\gamma}$. Отметим, что $\pi_F(w)$ – граничная вершина заполнения $\mathcal{G}_F$, инцидентная ребру $\pi_F(g)$. Так как γ' – неприводимый путь, $\pi_F(w)$ является его концевой вершиной. Пусть u' – отличная от $\pi_F(w)$ концевая вершина пути γ' , а u – произвольная граничная вершина из $\mathcal{G}$, для которой $\pi_F(u) = u'$. Ясно, что путь γ в $\mathcal{G}$, соединяющий u и w , содержит e и f и является точным граничным путем в силу точности γ' . Таким образом, утверждение доказано и в этом случае.

Наконец, пусть невырожденные ребра на пути $\bar{\gamma}$ встречаются как после e , так и до f . Обозначим через e_1 последнее невырожденное ребро на $\bar{\gamma}$, расположенное до f , а через e_2 – первое невырожденное ребро, расположенное после e . Предположим, что в этом случае утверждение не выполняется. Обозначим через v произвольную вершину, лежащую между e_1 и e_2 . Положим $e'_i = \pi_F(e_i)$, $v' = \pi_F(v)$. По утверждению 6.1 каждый граничный путь γ' в $\mathcal{G}_F$, проходящий через оба e'_i , не является точным. Обозначим через ε произвольное положительное число, меньшее как обоих $\omega_F(e'_i) = \omega(e_i)$, так и каждой разницы между весом такого пути γ' и расстоянием между его концами (в силу сделанных предположений такое ε существует).

Расщепим вершину v' на внутреннюю вершину w'_1 и вершину w'_2 так, чтобы w'_1 была смежна в точности с e'_1, e'_2 и $w'_1 w'_2$. Определим весовую функцию ω'_F на так полученном дереве следующим образом. Положим $\omega'_F(w'_1 w'_2) = \varepsilon/2$, $\omega'_F(e'_i) = \omega_F(e'_i) - \varepsilon/2$, и пусть $\omega'_F = \omega_F$ на всех остальных ребрах. Ясно, что мы вновь получили заполнение пространства $\mathcal{M}_F$, однако меньшего веса. Последнее противоречит минимальности $\mathcal{G}_F$. Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 6.9. *Каждый путь в минимальном заполнении, состоящий не более чем из двух ребер, является точным. В частности, через каждую пару соседних ребер минимального заполнения проходит точный граничный путь.*

Конечное псевдометрическое пространство (M, ρ) называется *аддитивным*, если существует взвешенное дерево (G, ω) такое, что $\partial G = M \subset V(G)$ и ρ совпадает с псевдометрикой d_ω , порожденной весовой функцией ω . Каждое такое взвешенное дерево (G, ω) будем называть *порождающим* для пространства (M, ρ) .

Из следствия 6.9 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 6.10. *Предположим, что каждый граничный путь минимального заполнения $\mathcal{G} = (G, \omega)$ конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ содержит не более двух невырожденных ребер, т.е. база $\mathcal{G}_F$ этого заполнения имеет не более одной вершины степени больше 1. Тогда $\mathcal{M}$ аддитивно, а $\mathcal{G}$ – порождающее дерево для $\mathcal{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p и q – произвольные вершины из $\mathcal{M}$ такие, что $\rho(p, q) \neq 0$, и γ – путь в $\mathcal{G}$, соединяющий p и q . Путь $\pi_F(\gamma)$ является граничным и по условию состоит не более чем из двух ребер, поэтому в силу следствия 6.9

является точным, откуда γ точный и, значит, $d_\omega(p, q) = \omega(\gamma) = \rho(p, q)$, что и требовалось.

Усилим предыдущее следствие. Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – взвешенный граф с границей ∂G и множеством вершин V . Выберем произвольную вершину $v \in V$. Если граф $\mathcal{G}$ невырожден, то через ∂_v будем обозначать множество, состоящее из всех вершин границы ∂G , смежных с v , в которое добавлена v , если $v \in \partial G$. В общем случае рассмотрим базу $\mathcal{G}_F = (G_F, \omega_F)$ графа $\mathcal{G}$, и пусть $\pi_F: V \rightarrow V_F$ – естественная проекция, а $w = \pi_F(v)$. Тогда положим $\partial_v = \pi_F^{-1}(\partial_w)$. Следующее утверждение доказывается точно так же, как и следствие 6.10.

СЛЕДСТВИЕ 6.11. *Для каждой вершины v минимального заполнения $\mathcal{G}$ псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ подпространство (∂_v, ρ) аддитивно. В частности, каждые усы минимального заполнения $\mathcal{G}$ являются аддитивным подпространством в $\mathcal{M}$.*

В следующем утверждении различные элементы минимального заполнения детально исследуются на точность.

СЛЕДСТВИЕ 6.12. *Пусть $\mathcal{G}$ – минимальное заполнение, состоящее не менее чем из двух ребер, v – его произвольная вершина, а e – его произвольное ребро, вырожденное или невырожденное. Тогда:*

- 1) вершина v и ребро e являются точными;
- 2) если s – степень вершины v и $s \geq 2$, то через v проходит не менее C_s^2 точных граничных путей, где C_s^2 – число сочетаний;
- 3) если t – максимальная степень инцидентных e вершин, то через e проходит не менее $t - 1$ точных граничных путей;
- 4) как через v , так и через e проходит не менее двух точных граничных путей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Точность вершины v дается следствием 6.2, а ребра e – следствием 6.9.

2) По следствию 6.9 через каждую пару ребер, инцидентных v , проходит точный граничный путь. Для разных пар эти пути разные.

3) Пусть $e = vw$ и t – степень вершины v . Тогда v инцидентна помимо e некоторым ребрам $e_1, \dots, e_{t-1}$ и по следствию 6.9 через каждую пару (e, e_i) проходит точный граничный путь, причем все эти пути различны.

4) Начнем с вершины v . Если ее степень s больше 2, то $C_s^2 > 2$ и утверждение вытекает из п. 2). Если же s равно 1 или 2, то в силу принятого соглашения v – граничная вершина.

Пусть сначала v имеет степень 2, а e_1 и e_2 – инцидентные v ребра. По п. 1) оба e_i являются точными. По следствию 6.1 каждое e_i содержится в некотором неприводимом точном граничном пути. Однако так как v – граничная вершина, эти пути различны, тем самым, v содержится по крайней мере в двух различных точных граничных путях.

Пусть теперь v имеет степень 1. Обозначим через w единственную смежную с v вершину. Если степень вершины w больше чем 2, то ребро vw смежно с не менее чем двумя различными ребрами, и требуемое вытекает из следствия 6.9. Если же степень вершины w равна 2, то w граничная, и ребро vw само является

точным граничным путем. Второй точный граничный путь найдем, применив следствие 6.9 к ребру vw и второму инцидентному w ребру².

Рассмотрим теперь ребро e . Заметим, что так как $\mathcal{G}$ содержит не менее двух ребер, то $m \geq 2$. Если $m \geq 3$, то все доказано. Пусть теперь $m = 2$. Обозначим через w инцидентную e вершину степени 2, а через u – оставшуюся вершину ребра e . По определению m степень вершины u также не превосходит 2, поэтому в силу соглашения обе вершины u и w граничные. Как и выше, ребро e само является точным граничным путем. Второй точный граничный путь найдем, снова применив следствие 6.9 к ребру e и к ребру, смежному с e по вершине w . Следствие доказано.

Следствие 6.9 позволяет также усилить следствие 6.8.

СЛЕДСТВИЕ 6.13. Пусть $e = vw$ – внутреннее ребро минимального заполнения $\mathcal{G}$ конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M}$ (по соглашению степени вершин v и w больше 2). Пусть e_1 и e_2 – какие-нибудь отличные от e ребра, инцидентные v , а f_1 и f_2 – какие-нибудь отличные от e ребра, инцидентные w . Тогда существуют две такие непересекающиеся пары ребер (e_i, f_p) и (e_j, f_q) , $\{i, j\} = \{p, q\} = \{1, 2\}$, что через каждую из них проходит точный путь.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу следствия 6.9 через пару ребер (e_1, e) проходит точный путь. Для определенности пусть этот путь проходит также через ребро f_1 . По тому же следствию 6.9 имеется точный путь, проходящий через ребра (f_2, e) . Если этот путь прошел через e_2 , то искомые пары суть (e_1, f_1) и (e_2, f_2) . В противном случае рассмотрим точный путь, проходящий через (e_2, e) . Если он пройдет через f_2 , то искомые – те же две пары, а если через f_1 , то искомые пары суть (e_2, f_1) и (e_1, f_2) . Следствие доказано.

Напомним, что треугольник uvw в псевдометрическом пространстве называется невырожденным, если все три неравенства треугольника для него строгие. В противном случае треугольник называется вырожденным. Точку p конечного псевдометрического пространства (M, ρ) назовем вырожденной, если в этом пространстве существуют точки q и r , отличные от p и такие, что $\rho(q, r) = \rho(q, p) + \rho(p, r)$.

СЛЕДСТВИЕ 6.14. Пусть $\mathcal{G}$ – минимальное заполнение конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M}$, а e и f – некоторые ребра из $\mathcal{G}$. Предположим, что все ребра, лежащие между e и f , вырождены, а также что между e и f лежит граничная вершина v . Тогда v – вырожденная точка пространства $\mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению 6.6 существует точный граничный путь γ , содержащий e и f . Обозначим через v_1 и v_2 концевые вершины пути γ , а через γ_i – часть пути γ между v_i и v . По следствию 6.4 пути γ_i также точны. Поэтому

$$\rho(v_1, v_2) = \omega(\gamma) = \omega(\gamma_1) + \omega(\gamma_2) = \rho(v_1, v) + \rho(v, v_2),$$

что и требовалось.

²Первое доказательство этого нетривиального утверждения было получено студентом механико-математического факультета МГУ И.Л. Лаутом на основе аналогичных соображений.

Псевдометрическое пространство называется *невыврожденным*, если в нем все неравенства треугольника строгие. Отметим, что невыврожденное псевдометрическое пространство необходимо является метрическим.

СЛЕДСТВИЕ 6.15. Пусть $\mathcal{G}$ – минимальное заполнение конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M}$. Тогда каждая граничная вершина степени больше 1 – вырожденная точка пространства $\mathcal{M}$. В частности, если пространство $\mathcal{M}$ невырождено, то степень каждой граничной вершины дерева $\mathcal{G}$ равна 1 и все граничные ребра невырождены.

СЛЕДСТВИЕ 6.16. Минимальное заполнение $\mathcal{G}$ конечного невыврожденного неаддитивного пространства $\mathcal{M}$ содержит невыврожденное внутреннее ребро.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим базу $\mathcal{G}_F$ заполнения $\mathcal{G}$. По следствию 6.15 все граничные вершины заполнения $\mathcal{G}_F$ имеют степень 1. Поэтому если у $\mathcal{G}$ невыврожденные внутренние ребра отсутствуют, граф $\mathcal{G}$ имеет единственную вершину степени больше 1. Тогда в силу следствия 6.10 пространство $\mathcal{M}$ аддитивно, противоречие. Следствие доказано.

Отметим, что множество всех псевдометрических пространств, состоящих из n точек, естественно отождествляется с выпуклым конусом в $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ (достаточно упорядочить множества всех двухточечных подмножеств этих пространств и приписать каждому пространству вектор расстояний между точками из каждой пары). Это отождествление позволяет говорить про топологические свойства семейств метрических пространств, составленных из фиксированного числа точек.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для псевдометрического пространства, *находящегося в общем положении*, если при каждом n оно выполняется для открытого всюду плотного множества n -точечных псевдометрических пространств.

ГИПОТЕЗА 6.1. Минимальное заполнение конечного метрического пространства, находящегося в общем положении, – невыврожденное бинарное дерево.

Пусть $\mathcal{G}$ – минимальное заполнение конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$. Определим на M граф точных путей для $\mathcal{G}$, соединив точки p и q из M ребром, если и только если они соединяются в $\mathcal{G}$ точным граничным путем.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.7. Граф точных путей для минимального заполнения $\mathcal{G}$ связан, т.е. для любого разбиения $\{M_1, M_2\}$ множества M существуют точки $p \in M_1$ и $q \in M_2$, соединенные в $\mathcal{G}$ точным путем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. существует такое разбиение $\{M_1, M_2\}$ множества M , что для любых точек $p \in M_1$ и $q \in M_2$ соединяющих их путь в $\mathcal{G}$ не является точным.

Рассмотрим подграф G_i графа G , порожденный ребрами всех точных граничных путей, соединяющих вершины множества M_i . По предположению каждый точный граничный путь в $\mathcal{G}$ соединяет вершины одного из M_i , поэтому в силу следствия 6.12 имеем $G = G_1 \cup G_2$. Так как $\mathcal{G}$ – связный граф (дерево), подграфы G_i имеют непустое пересечение, которое мы обозначим через H .

Пусть v – вершина из H , степень которой в лесе H не превосходит 1. Обозначим через γ_i некоторый точный граничный путь, соединяющий вершины из M_i и содержащий v . Отметим, что v – внутренняя вершина пути γ_i , поэтому ее степень в γ_i равна 2. Так как степень вершины v в графе H не превосходит 1, в γ_i имеется ребро e_i , инцидентное v и не входящее в граф H , в частности $e_1 \neq e_2$. Более того, через e_1 и e_2 не может проходить точный граничный путь, так как иначе по крайней мере одно из этих ребер лежало бы в H . Однако последнее противоречит следствию 6.9. Утверждение доказано.

§ 7. Обходы, периметры и минимальные заполнения

Пусть $G = (V, E)$ – произвольное дерево с границей M . Напомним, что в силу принятого соглашения M содержит все вершины дерева G степеней 1 и 2. Выбросим из G некоторое ребро e , и пусть G_1 и G_2 – связные компоненты полученного леса. Положим $M_i = M \cap G_i$.

ЛЕММА 7.1. *В принятых обозначениях множества M_i не пусты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если G_i состоит из одной вершины, то эта вершина имеет степень 1 в G и, тем самым, лежит в M_i . Если же дерево G_i содержит хотя бы одно ребро, то G_i имеет по меньшей мере две вершины степени 1, причем только одна из них инцидентна ребру e в дереве G , поэтому остальные имеют степень 1 в G и, значит, лежат в M_i . Лемма доказана.

Полученное разбиение $\{M_1, M_2\}$ множества M обозначим через $\mathcal{P}_G(e)$.

Пусть S – конечное множество. Назовем *циклическим порядком на множестве S* произвольную циклическую перестановку $\pi: S \rightarrow S$. Два элемента из S назовем *соседними* в смысле циклического порядка π , если один из них является π -образом другого. Нумерацию $(s_1, \dots, s_k)$ элементов из S назовем *согласованной* с циклическим порядком π , если элементы $\pi(s_i)$ равны s_{i+1} для каждого i , $i < k$. Ясно, что нумерация $(s_1, \dots, s_k)$, $k = |S|$, согласована с циклическим порядком π , если и только если $s_{i+1} = \pi^i(s_1)$ для всех i , $i < k$. Для каждого циклического порядка на множестве S существует k согласованных с ним нумераций.

Циклический порядок π на M назовем *планарным по отношению к G* или *обходом G* , если для каждого $e \in E$ и $M_i \in \mathcal{P}_G(e)$ существует единственная точка $p \in M_i$, для которой $\pi(p) \notin M_i$. Последнее означает, что имеется такая нумерация множества M , согласованная с π , что в ней элементы множества M_1 предшествуют элементам множества M_2 .

Приведем эквивалентное определение планарного порядка в терминах укладки. Пусть G' – некоторая укладка дерева G на плоскость. Рассмотрим обход дерева G' . Изобразим последовательно встречающиеся при таком обходе точки из M последовательными точками на окружности S^1 . Отметим, что каждая вершина p из M встречается $\deg p$ раз. Для каждой вершины $p \in M$ степени больше 1 из всех соответствующих ей точек окружности оставим одну произвольную. Тем самым, мы построили инъекцию $\nu: M \rightarrow S^1$. Определим циклическую перестановку π , положив $\pi(p) = q$, где $\nu(q)$ следует за $\nu(p)$ на окружности S^1 . Будем говорить, что построенный циклический порядок π

порожден укладкой G' . Ясно, что укладка G' порождает $2 \prod_{p \in M} \deg p$ циклических порядков.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.1. *Циклический порядок, порожденный на M укладкой G' дерева G , является планарным по отношению к G . Обратно, каждый планарный порядок на M по отношению к G порожден некоторой укладкой G' дерева G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно, так как для каждого ребра e дерева G множества $\nu(M_i)$, $M_i \in \mathcal{P}_G(e)$, не перемежаются на окружности S^1 .

Докажем обратное утверждение индукцией по количеству m ребер дерева G . Если $m = 1$, то M состоит из двух точек и единственный циклический порядок на M порожден единственной укладкой однореберного дерева.

Пусть теперь $m > 1$. Так как M включает все вершины степеней 1 и 2, оно состоит не менее чем из трех точек. Рассмотрим произвольный порядок π на M , планарный по отношению к G , и пусть x – произвольная вершина дерева G степени 1. Перестроим дерево G , выбросив из него вершину x и единственное инцидентное ей ребро $e = xy$, и пусть $\tilde{G}$ – полученное в результате дерево.

Обозначим через $\tilde{M}$ множество $M \setminus \{x\}$. Ясно, что множество $\tilde{M}$ состоит из вершин дерева $\tilde{G}$ и содержит все его вершины степени 1. Так как M содержит не менее трех точек, отображение $\tilde{\pi}$ на $\tilde{M}$, для которого $\tilde{\pi}(\pi^{-1}(x)) = \pi(x)$ и $\tilde{\pi} = \pi$ на остальных точках из $\tilde{M}$, является циклическим порядком. Покажем, что порядок $\tilde{\pi}$ планарен относительно $\tilde{G}$.

Заметим, что каждое ребро $\tilde{e}$ дерева $\tilde{G}$ является также и ребром дерева G . Пусть $\{M_1, M_2\} = \mathcal{P}_G(\tilde{e})$ и $(p_1, \dots, p_n)$ – такая согласованная с планарным порядком π нумерация элементов из M , что

$$M_1 = \{p_1, \dots, p_k\}, \quad M_2 = \{p_{k+1}, \dots, p_n\}.$$

Пусть без ограничения общности $x \in M_2$, т.е. $x = p_i$, $i \geq k + 1$. Так как $\tilde{e} \neq xy$, то в этом случае $k \leq n - 2$. Рассмотрим нумерацию множества $\tilde{M}$, которая получается выбрасыванием x , а именно $(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n)$. Тогда $\tilde{\pi}(p_j) = p_{j+1}$ при всех $j \neq i - 1$ и $\tilde{\pi}(p_{i-1}) = \pi(x)$, где $\pi(x) = p_{i+1}$, если $i < n$, и $\pi(x) = p_1$, если $i = n$. Наконец, если $\{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2\} = \mathcal{P}_{\tilde{G}}(\tilde{e})$, то $\tilde{M}_1 = M_1$ и $\tilde{M}_2 = M_2 \setminus \{x\}$. Поэтому построенная нумерация множества $\tilde{M}$ согласована с циклическим порядком $\tilde{\pi}$, причем элементы множества $\tilde{M}_1$ предшествуют элементам множества $\tilde{M}_2$ в этой нумерации. В силу произвольности ребра $\tilde{e}$ отсюда вытекает планарность циклического порядка $\tilde{\pi}$ относительно $\tilde{G}$.

По предположению индукции планарный порядок $\tilde{\pi}$ порожден некоторой укладкой $\tilde{G}'$ дерева $\tilde{G}$. Осталось перестроить укладку $\tilde{G}'$ в укладку G' дерева G , выпустив из образа вершины y отрезок, соответствующий ребру $e = xy$.

Если $y \in \tilde{M}$, выпустим этот отрезок с той стороны, с которой мы обходим дерево $\tilde{G}'$ от $\tilde{\pi}^{-1}(y)$ до $\tilde{\pi}(y)$. Иначе выпустим этот отрезок с той стороны, с которой мы обходим дерево $\tilde{G}'$ от $\pi^{-1}(x)$ до $\pi(x)$. Осталось заметить, что порядок, порожденный на M , построенной только что укладкой G' дерева G , совпадает с π . Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.2. Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – взвешенное дерево с границей M и π – произвольный циклический порядок на M . Тогда

$$\sum_{p \in M} d_\omega(p, \pi(p)) \geq 2\omega(G).$$

Более того, равенство достигается, если и только если π – обход G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через γ_p путь в дереве G , соединяющий p и $\pi(p)$. Тогда $d_\omega(p, \pi(p)) = \omega(\gamma_p)$. Для доказательства неравенства достаточно проверить, что для каждого ребра e графа G существуют такие различные p и q из M , что пути γ_p и γ_q содержат e . Для этого рассмотрим разбиение $\mathcal{P}_G(e) = \{M_1, M_2\}$. Легко видеть, что в каждом M_i существует такая точка p_i , что $\pi(p_i)$ лежит в M_j , $j \neq i$. Точки p_1 и p_2 можно выбрать в качестве p и q . Осталось заметить, что порядок π планарный, если и только если каждое ребро e содержится ровно в двух таких путях γ_p . Утверждение доказано.

Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – конечное псевдометрическое пространство и π – произвольный циклический порядок на M . Периметром пространства $\mathcal{M}$ по отношению к порядку π назовем величину

$$P(\mathcal{M}, \pi) = \sum_{p \in M} \rho(p, \pi(p)),$$

а $\min_\pi P(\mathcal{M}, \pi)$, где минимум берется по всевозможным циклическим порядкам π на M , назовем периметром псевдометрического пространства M и обозначим через $P(\mathcal{M})$. Отметим, что $P(\mathcal{M})$ – длина пути, являющегося решением задачи о коммивояжере (см. [33]).

Далее, полупериметром $p(\mathcal{M}, \pi)$ пространства $\mathcal{M}$ по отношению к порядку π и просто полупериметром $p(\mathcal{M})$ конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M}$ назовем половину соответствующего периметра:

$$p(\mathcal{M}, \pi) = \frac{P(\mathcal{M}, \pi)}{2}, \quad p(\mathcal{M}) = \frac{P(\mathcal{M})}{2}.$$

Кроме того, в дальнейшем нам понадобится следующее обозначение. Если $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – некоторое заполнение конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$, то множество всех циклических порядков на M , планарных по отношению к дереву G , т.е. всех обходов G , будем обозначать через $\mathcal{O}(G)$ или через $\mathcal{O}(\mathcal{G})$. Будем также говорить, что каждый такой обход (порядок) определен на $\mathcal{M}$.

Из утверждения 7.2 и определения заполнения получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – произвольное заполнение конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ и $\pi \in \mathcal{O}(G)$. Тогда $\omega(G) \geq p(\mathcal{M}, \pi)$, иными словами,

$$\omega(G) \geq \max_{\pi \in \mathcal{O}(G)} p(\mathcal{M}, \pi)$$

и, значит,

$$\text{mf}(\mathcal{M}) \geq \min_G \max_{\pi \in \mathcal{O}(G)} p(\mathcal{M}, \pi) \geq p(\mathcal{M}),$$

где минимум можно брать как по всем деревьям с границей M , так и лишь по бинарным деревьям с границей M .

Далее, если

$$\omega(G) = \max_{\pi \in \mathcal{O}(G)} p(\mathcal{M}, \pi),$$

то $\mathcal{G}$ – минимальное параметрическое заполнение и

$$\text{mpf}(\mathcal{M}, G) = \max_{\pi \in \mathcal{O}(G)} p(\mathcal{M}, \pi).$$

Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – заполнение конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$. Обход $\pi \in \mathcal{O}(G)$ назовем *точным*, если для каждой точки $p \in M$ имеет место равенство $\rho(p, \pi(p)) = d_\omega(p, \pi(p))$, другими словами, если каждый граничный путь, соединяющий последовательные относительно π граничные точки, является точным.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.3. Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – заполнение конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ и $\pi \in \mathcal{O}(G)$ – обход дерева G . Тогда обход π является точным, если и только если $\omega(G) = p(\mathcal{M}, \pi)$. Таким образом, если π – точный обход дерева G , то $\mathcal{G}$ является минимальным параметрическим заполнением и $\text{mpf}(\mathcal{M}, G) = p(\mathcal{M}, \pi) = \max_{\sigma \in \mathcal{O}(G)} p(\mathcal{M}, \sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π – точный обход, тогда по утверждению 7.2 имеем

$$2\omega(G) = \sum_{p \in M} d_\omega(p, \pi(p)) = \sum_{p \in M} \rho(p, \pi(p)) = 2p(\mathcal{M}, \pi).$$

Обратно, пусть $\omega(G) = p(\mathcal{M}, \pi)$. По определению заполнения и обхода

$$2\omega(G) = \sum_{p \in M} d_\omega(p, \pi(p)) \geq \sum_{p \in M} \rho(p, \pi(p)) = 2p(\mathcal{M}, \pi) = 2\omega(G),$$

откуда $\rho(p, \pi(p)) = d_\omega(p, \pi(p))$ для всех $p \in M$ и, значит, обход π точный.

Оставшаяся часть утверждения вытекает из следствия 7.1. Утверждение доказано.

Итак, утверждение 7.3 позволяет вычислить вес минимального параметрического заполнения как максимум полупериметров всех обходов этого заполнения, однако лишь в предположении существования точного обхода. Если точного обхода нет, то, комбинируя утверждение 7.3 и следствие 7.1, заключаем, что $\text{mpf}(\mathcal{M}, G) > \max_{\sigma \in \mathcal{O}(G)} p(\mathcal{M}, \sigma)$.

Выясним, всегда ли у минимального параметрического заполнения существует точный обход. Как было отмечено в доказательстве утверждения 7.2, для каждого ребра e дерева G и любого циклического порядка π на ∂G существует проходящий через e путь, соединяющий последовательные относительно π граничные вершины. Это наблюдение приводит к следующему результату.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Если заполнение содержит неточное ребро, то ни один обход не является точным.

Напомним, что в замечании 6.1 мы привели пример минимального параметрического заполнения $\mathcal{G}$ четырехточечного метрического пространства и

выяснили, что $\mathcal{G}$ содержит неточное ребро нулевого веса. Таким образом, из следствия 7.2 вытекает, что для этого заполнения не существует точных обходов. Итак, формула $\text{prf}(\mathcal{M}, G) = \max_{\sigma \in \mathcal{O}(G)} p(\mathcal{M}, \sigma)$ в общем случае не верна.

ЗАДАЧА 7.1. Выяснить, для каких заполнений существует точный обход.

Выше в качестве препятствия к существованию точного обхода мы привели условие наличия неточного ребра. Однако существуют минимальные параметрические заполнения, все ребра которых точны, но точные обходы отсутствуют.

ПРИМЕР 7.1. Рассмотрим³ метрическое пространство $\mathcal{M} = (M, \rho)$, где $M = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ и функция расстояния ρ задана матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 6 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 0 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это пространство условно изображено на рис. 2 в виде полного графа, причем сплошными линиями соединены те пары точек, расстояние между которыми равно 6, а пунктирными – находящиеся на расстоянии 4. В качестве топологии минимального параметрического заполнения $\mathcal{G} = (G, \omega)$ выберем бинарное дерево с усами $\{p_1, p_2\}$ и $\{p_3, p_5\}$.

Рис. 2. Метрическое пространство и бинарное дерево из примера 7.1

Обозначим через x_i вес граничного ребра дерева $\mathcal{G}$, инцидентного p_i , а через y_1 и y_2 – веса внутренних ребер, первое из которых является корневым для усов $\{p_1, p_2\}$, а второе – для усов $\{p_3, p_5\}$. Тогда из определения заполнения и следствия 6.5 вытекает, что веса минимального заполнения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4, & x_3 + x_5 &= 6, \\ x_1 + y_1 + x_4 &\geq 6, & x_2 + y_1 + x_4 &\geq 6, \end{aligned}$$

откуда, исключая из второго неравенства $x_2 = 4 - x_1$, получаем

$$x_1 + y_1 + x_4 \geq 6, \quad -x_1 + y_1 + x_4 \geq 2.$$

³Этот пример был построен студентом механико-математического факультета МГУ З. Н. Овсянниковым с помощью пакета *Mathematica*.

Складывая последние неравенства, заключаем, что $y_1 + x_4 \geq 4$. С другой стороны, вес заполнения G равен

$$\sum_i x_i + y_1 + y_2 = 10 + (x_4 + y_1) + y_2 \geq 14 + y_2 \geq 14.$$

Наконец, нетрудно проверить, что весовая функция ω , определенная так:

$$x_5 = 4, \quad y_2 = 0, \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = y_1 = 2,$$

задает заполнение $\mathcal{G} = (G, \omega)$ пространства M , причем $\omega(G) = 14$. Следовательно, $\mathcal{G}$ является минимальным параметрическим заполнением.

Заметим, что все ребра из $\mathcal{G}$ являются точными. Действительно, ребра, инцидентные усам, точные автоматически. Далее, вес пути γ_{34} , соединяющего p_3 и p_4 , равен 4, значит γ_{34} является точным. Поэтому ребро, инцидентное p_4 , а также корневое ребро усов $\{p_3, p_5\}$ точны. Наконец, вес пути γ_{24} , соединяющего p_2 и p_4 , равен 6, поэтому γ_{24} является точным и корневое ребро усов $\{p_1, p_2\}$ точное.

Множество $\mathcal{O}(G)$ с точностью до взятия обратных состоит из четырех планарных порядков

$$\pi_1 = (1, 2, 3, 5, 4), \quad \pi_2 = (1, 2, 5, 3, 4), \quad \pi_3 = (2, 1, 3, 5, 4), \quad \pi_4 = (2, 1, 5, 3, 4).$$

Соответствующие полупериметры суть

$$p(\mathcal{M}, \pi_1) = 12, \quad p(\mathcal{M}, \pi_2) = 13, \quad p(\mathcal{M}, \pi_3) = 13, \quad p(\mathcal{M}, \pi_4) = 12,$$

поэтому в построенном примере максимальный полупериметр меньше веса минимального заполнения и отсутствует точный обход.

Отметим, что все предыдущие примеры минимальных параметрических заполнений без точных обходов содержали вырожденные ребра. Оказывается, можно также привести соответствующий пример, в котором заполнение будет невырожденным.

ПРИМЕР 7.2. В примере 7.1 перейдем к базе $\mathcal{G}_F$, где F состоит из единственного вырожденного ребра заполнения $\mathcal{G}$. Так как это ребро внутреннее, база $\mathcal{M}_F$ пространства $\mathcal{M}$ совпадает с $\mathcal{M}$. В результате получится невырожденное минимальное параметрическое заполнение $\mathcal{G}_F = (G_F, \omega_F)$ пространства $\mathcal{M}$ того же веса 14. Все ребра $\mathcal{G}_F$ будут точны, так как веса путей сохраняются при проекции на базу. Количество обходов возрастет, так как три граничных ребра, инцидентных вершине степени 4, можно упорядочить как угодно. А именно, множество $\mathcal{O}(G_F)$ с точностью до взятия обратных состоит из шести обходов

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (1, 2, 3, 4, 5), & \pi_2 &= (1, 2, 3, 5, 4), & \pi_3 &= (1, 2, 4, 3, 5), \\ \pi_4 &= (1, 2, 4, 5, 3), & \pi_5 &= (1, 2, 5, 3, 4), & \pi_6 &= (1, 2, 5, 4, 3). \end{aligned}$$

Соответствующие полупериметры суть

$$\begin{aligned} p(\mathcal{M}, \pi_1) &= 10, & p(\mathcal{M}, \pi_2) &= 12, & p(\mathcal{M}, \pi_3) &= 12, \\ p(\mathcal{M}, \pi_4) &= 13, & p(\mathcal{M}, \pi_5) &= 13, & p(\mathcal{M}, \pi_6) &= 12, \end{aligned}$$

поэтому в построенном примере максимальный полупериметр снова меньше веса минимального заполнения и отсутствует точный обход.

Назовем минимальное параметрическое заполнение $\mathcal{G} = (G, \omega)$ конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M}$ *неустойчивым*, если существует такое минимальное параметрическое заполнение $\mathcal{G}' = (G', \omega')$ того же пространства $\mathcal{M}$, что G' получается из G расщеплением, а $\omega'(G') < \omega(G)$. В противном случае заполнение $\mathcal{G}$ будем называть *устойчивым*.

Далее, заметим, что если дерево G' получено из дерева G с границей M некоторым расщеплением, то $\mathcal{O}(G') \subset \mathcal{O}(G)$, при этом для любого собственного расщепления имеем $\mathcal{O}(G') \neq \mathcal{O}(G)$. Пусть S – некоторое множество расщеплений дерева G с границей M . Для каждого $s \in S$ обозначим через G_s результат этого расщепления. Положим $\mathcal{O}_S(G)$ равным $\bigcup_{s \in S} \mathcal{O}(G_s)$. Если $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – минимальное параметрическое заполнение, а S – все его расщепления, уменьшающие вес, то $\mathcal{O}_S(G)$ обозначим через $\mathcal{O}_d(\mathcal{G})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.4. *Если минимальное параметрическое заполнение $\mathcal{G}$ конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M}$ неустойчиво, то любой обход из $\mathcal{O}_d(\mathcal{G})$ не является точным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. существуют неустойчивое минимальное параметрическое заполнение $\mathcal{G}$ некоторого псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ и некоторый обход $\pi \in \mathcal{O}_d(\mathcal{G})$, являющийся точным. Обозначим через $\mathcal{G}'$ минимальное параметрическое заполнение веса меньше $\mathcal{G}$, полученное из $\mathcal{G}$ расщеплением, для которого $\pi \in \mathcal{O}(\mathcal{G}')$. По утверждению 7.3 и следствию 7.1 $\omega(\mathcal{G}) = p(\mathcal{M}, \pi) > \omega(\mathcal{G}') \geq p(\mathcal{M}, \pi)$, противоречие. Утверждение доказано.

ПРИМЕР 7.3. Невырожденное минимальное параметрическое заполнение из примера 7.2 неустойчиво. Его расщепление до минимального заполнения и топология самого минимального заполнения вместе с весовой функцией изображены на рис. 3. Отметим, что у этого минимального заполнения есть точный обход, скажем $(1, 2, 5, 3, 4)$.

Рис. 3. Расщепление неустойчивого минимального параметрического заполнения

Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – взвешенное дерево с границей M . Разрежем $\mathcal{G}$ по всем граничным вершинам степени больше 1. Полученные в результате взвешенные

деревья $\mathcal{G}_i = (G_i, \omega)$ с границами $M_i = M \cap G_i$ назовем *неприводимыми компонентами* дерева $\mathcal{G}$. Мы покажем, что наличие точного обхода наследуется неприводимыми компонентами заполнения.

Если $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – заполнение конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$, то неприводимые компоненты $\mathcal{G}_i$ дерева $\mathcal{G}$ также являются заполнениями псевдометрических пространств $\mathcal{M}_i = (M \cap G_i, \rho)$, причем если заполнение $\mathcal{G}$ минимальное параметрическое, то такие же и все $\mathcal{G}_i$ (заметим, что обратное, вообще говоря, не верно).

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.5. Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – заполнение, для которого существует некоторый точный обход. Тогда для каждой неприводимой компоненты $\mathcal{G}_i$ дерева $\mathcal{G}$ также существует точный обход.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по количеству неприводимых компонент. Пусть π – точный обход заполнения $\mathcal{G}$, состоящего из нескольких неприводимых компонент. По определению обход π порожден укладкой G' дерева G . Пусть y – некоторая граничная вершина дерева G степени больше 1 и $e_1, \dots, e_m$, $m \geq 2$, – инцидентные y граничные ребра. Обозначим через $G_1, \dots, G_m$ компоненты, полученные из G разрезанием по y . Каждая из них состоит из меньшего чем G количества неприводимых компонент. С другой стороны, вершины дерева G_i не перемежаются при обходе π дерева G с вершинами других компонент. Это означает, что в некоторой согласованной с π нумерации граничные вершины компоненты G_i , за исключением y , имеют вид $(p_j, \dots, p_{j+s})$. Поэтому все пути, соединяющие последовательные вершины p_k, p_{k+1} , где $k = j, \dots, j + s - 1$, являются также путями из обхода π . Поэтому они являются точными. Остались пути, соединяющие y и p_j , а также p_{j+s} и y . Каждый из этих путей или также входит в обход π , или является подпутем граничного пути из обхода π . В обоих случаях он точный и, таким образом, у G_i существует точный обход, а значит, по предположению индукции точный обход существует у каждой неприводимой компоненты дерева G_i . Осталось заметить, что каждая неприводимая компонента исходного дерева может быть получена таким образом, что и завершает доказательство.

§ 8. Аддитивные пространства

Аддитивные пространства особенно часто используются в биоинформатике. Они играют важную роль при изучении эволюции. Напомним, что конечное псевдометрическое пространство $\mathcal{M} = (M, \rho)$ называется *аддитивным*, если M можно соединить взвешенным деревом $\mathcal{G} = (G, \omega)$, для которого ρ совпадает с ограничением d_ω на M . Дерево $\mathcal{G}$ называется *порождающим* для пространства $\mathcal{M}$.

Не всякое псевдометрическое пространство является аддитивным. Оказывается, критерием аддитивности пространства является *правило четырех точек*: для любых четырех точек p_i, p_j, p_k, p_l величины $\rho(p_i, p_j) + \rho(p_k, p_l)$, $\rho(p_i, p_k) + \rho(p_j, p_l)$, $\rho(p_i, p_l) + \rho(p_j, p_k)$ являются длинами сторон равнобедренного треугольника с основанием, не превосходящим боковой стороны.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.1 (см. [34], [35]). Псевдометрическое пространство аддитивно, если и только если для него выполняется правило четырех точек.

Следующее утверждение посвящено вопросу единственности порождающего дерева.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.2 (см. [36], [37]). *Если ограничиться рассмотрением невырожденных деревьев, то порождающее дерево аддитивного метрического пространства единственно.*

Следующий критерий полностью решает задачу о минимальных заполнениях для аддитивных псевдометрических пространств.

ТЕОРЕМА 8.1. *Минимальными заполнениями аддитивного псевдометрического пространства являются его порождающие деревья и только они.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – некоторое порождающее дерево аддитивного псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$. Покажем, что $\mathcal{G}$ – минимальное заполнение для $\mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{G}' = (G', \omega')$ – некоторое минимальное заполнение для $\mathcal{M}$ и π' – планарный порядок на M по отношению к G' . Тогда в силу утверждения 7.2

$$\sum_{p \in M} d_{\omega'}(p, \pi'(p)) = 2\omega'(G').$$

С другой стороны, для любых p и q из M имеем $d_{\omega'}(p, q) \geq \rho(p, q) = d_{\omega}(p, q)$, где неравенство следует из определения заполнения, а равенство выполнено в силу того, что $\mathcal{G}$ – порождающее дерево аддитивного пространства $\mathcal{M}$. Поэтому

$$\sum_{p \in M} d_{\omega}(p, \pi'(p)) \leq \sum_{p \in M} d_{\omega'}(p, \pi'(p)) = 2\omega'(G').$$

Снова по утверждению 7.2 имеем

$$2\omega(G) \leq \sum_{p \in M} d_{\omega}(p, \pi'(p)),$$

откуда $\omega(G) \leq \omega(G')$ и, значит, $\mathcal{G}$ – тоже минимальное заполнение пространства $\mathcal{M}$, что и требовалось.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – аддитивное пространство и $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – произвольное минимальное заполнение для $\mathcal{M}$. Покажем, что $\mathcal{G}$ – порождающее дерево для $\mathcal{M}$.

Пусть $\tilde{\mathcal{G}} = (\tilde{G}, \tilde{\omega})$ – некоторое порождающее дерево для $\mathcal{M}$. В силу уже доказанного прямого утверждения теоремы дерево $\tilde{\mathcal{G}}$ является минимальным заполнением для $\mathcal{M}$, откуда $\omega(G) \leq \tilde{\omega}(\tilde{G})$. Пусть π – некоторый обход дерева G . Тогда по утверждению 7.2

$$2\tilde{\omega}(\tilde{G}) \leq \sum_{p \in M} d_{\tilde{\omega}}(p, \pi(p)), \quad \sum_{p \in M} d_{\omega}(p, \pi(p)) = 2\omega(G),$$

откуда в силу условия $\rho(p, \pi(p)) = d_{\tilde{\omega}}(p, \pi(p)) \leq d_{\omega}(p, \pi(p))$ и равенства $\omega(G) = \tilde{\omega}(\tilde{G})$ заключаем, что $\rho(p, \pi(p)) = d_{\omega}(p, \pi(p))$ для каждой точки $p \in M$. С другой стороны, для каждой пары p и q вершин из M существует обход дерева G , для которого эти точки последовательные, поэтому $\rho(p, q) = d_{\omega}(p, q)$ для любых p и q из M , т.е. $\mathcal{G}$ тоже порождает $\mathcal{M}$. Теорема доказана.

Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – произвольное взвешенное дерево с границей M . Тогда, очевидно, дерево $\mathcal{G}$ является заполнением псевдометрического пространства (M, d_ω) , а значит (по теореме 8.1) – минимальным заполнением этого пространства. С другой стороны, каждое минимальное заполнение имеет такой вид в силу следующего результата.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.3. Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – минимальное заполнение псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$. Тогда $\mathcal{G}$ также является минимальным заполнением для пространства (M, d_ω) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\mathcal{G}$ является порождающим деревом аддитивного пространства (M, d_ω) . Осталось применить теорему 8.1. Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 8.1. Множество всех минимальных заполнений совпадает с множеством всевозможных взвешенных деревьев.

СЛЕДСТВИЕ 8.2. Пусть Γ – некоторая сеть, параметризованная деревом G и соединяющая конечное подмножество M псевдометрического пространства $\mathcal{X}$. Обозначим через ω_Γ весовую функцию на G , порожденную сетью Γ . Тогда (G, ω_Γ) – минимальное заполнение пространства (M, d_{ω_Γ}) .

Теорему 8.1 можно переформулировать в виде описания порождающих деревьев аддитивного псевдометрического пространства следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 8.3. Взвешенное дерево $\mathcal{G}$, соединяющее точки аддитивного пространства $\mathcal{M}$, является порождающим для $\mathcal{M}$, если и только если $\mathcal{G}$ – минимальное заполнение пространства $\mathcal{M}$.

Напомним, что в римановой геометрии задача о граничной жесткости метрики – это задача об однозначности восстановления ее по внутренней метрике, индуцированной на краю исходного многообразия. В контексте данной статьи задача о граничной жесткости – это задача о единственности невырожденно-го минимального заполнения данного конечного псевдометрического пространства. Более строго, метрика ρ на конечном множестве M называется *гранично жесткой*, если минимальное заполнение в классе невырожденных связных графов единственно.

Из утверждения 8.2 и следствия 8.3 непосредственно получается следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 8.4. Каждая аддитивная метрика ρ на конечном множестве M является гранично жесткой.

Приведем еще несколько результатов, касающихся аддитивных пространств и их минимальных заполнений.

СЛЕДСТВИЕ 8.5. Вес минимального заполнения аддитивного пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ равен полупериметру пространства $\mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π – произвольный обход порождающего дерева (G, ω) пространства $\mathcal{M}$ и σ – произвольный циклический порядок на M . Так как $\mathcal{M}$ – аддитивное пространство, обход π является точным, поэтому $\omega(G) = p(\mathcal{M}, \pi)$ в силу утверждения 7.3. Так как $\rho = d_\omega$, из утверждения 7.2 вытекает,

что $\omega(G) \leq p(\mathcal{M}, \sigma)$. Поэтому $p(\mathcal{M}, \pi) = \min_{\sigma} p(\mathcal{M}, \sigma)$, где минимум берется по всем циклическим порядкам σ на M . Таким образом, $p(\mathcal{M}, \pi) = p(\mathcal{M})$. Остается воспользоваться теоремой 8.1, в силу которой $\omega(G) = \text{mf}(\mathcal{M})$. Следствие доказано.

Приведем критерий аддитивности⁴.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.4 (О.В. Рублева). *Вес минимального заполнения псевдометрического пространства равен полупериметру этого пространства тогда и только тогда, когда пространство аддитивно.*

Пусть (M, ρ) – произвольное псевдометрическое пространство. Будем говорить, что его минимальное заполнение (G, ω) наследуемо, если для произвольного непустого $S \subset M$ поддерево (G_S, ω) в (G, ω) , составленное из всех путей в G , соединяющих вершины из S , является минимальным заполнением метрического пространства (S, ρ) , где ограничения метрики ρ на S и весовой функции ω на G_S обозначены теми же буквами.

СЛЕДСТВИЕ 8.6. *Если псевдометрическое пространство $\mathcal{M}$ аддитивно, то любое его минимальное заполнение является наследуемым. Обратно, если некоторое минимальное заполнение пространства $\mathcal{M}$ является наследуемым, то пространство $\mathcal{M}$ аддитивно и, значит, любое его минимальное заполнение наследуемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ аддитивно и S – произвольное непустое подмножество M . В этом случае в силу теоремы 8.1 произвольное минимальное заполнение (G, ω) пространства $\mathcal{M}$ является порождающим деревом, поэтому для любых точек x и y из S и соединяющего их в G_S пути γ выполняется $\rho(x, y) = \omega(\gamma)$, откуда (S, ρ) – аддитивное пространство с порождающим деревом (G_S, ω) . По теореме 8.1 это дерево представляет собой минимальное заполнение для (S, ρ) .

Обратно, пусть некоторое минимальное заполнение $\mathcal{G} = (G, \omega)$ пространства $\mathcal{M}$ является наследуемым. Тогда для любых двух точек x и y из M рассмотрим множество $S = \{x, y\}$. Поддерево G_S , затягивающее S , совпадает с соединяющим x и y путем γ_{xy} в G и по условию является минимальным заполнением для пространства (S, ρ) , откуда вес пути γ_{xy} равен $\rho(x, y)$. Последнее означает, что дерево $\mathcal{G}$ является порождающим для пространства $\mathcal{M}$, т.е. $\mathcal{M}$ аддитивно. Следствие доказано.

§ 9. Лучи псевдометрических пространств и минимальные заполнения

Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – псевдометрическое пространство и λ – положительное вещественное число. Обозначим через $\lambda\rho$ функцию на парах точек из M , определенную так: $(\lambda\rho)(x, y) = \lambda\rho(x, y)$. Ясно, что $\lambda\rho$ является псевдометрикой при всех λ , причем все пространства $(M, \lambda\rho)$ одновременно или вырождены, или

⁴Критерий получен студенткой механико-математического факультета МГУ О.В. Рублевой (см. [22]).

нет. Ясно также, что (G, ω) представляет собой минимальное (параметрическое) заполнение пространства (M, ρ) , если и только если $(G, \lambda\omega)$ является минимальным (параметрическим) заполнением пространства $(M, \lambda\rho)$. Множество всех метрических пространств $(M, \lambda\rho)$, $\lambda > 0$, назовем *открытым мультипликативным лучом*, проходящим через $\mathcal{M}$. *Замкнутый мультипликативный луч* получается добавлением к открытому тривиального псевдометрического пространства, в котором все расстояния равны нулю.

Обозначим через $\rho + a$ функцию на парах точек из M , определенную так: $(\rho + a)(x, y) = \rho(x, y) + a$. Легко видеть, что существует такое $a_{\mathcal{M}} \leq 0$, для которого при $a \geq a_{\mathcal{M}}$ функция $\rho + a$ – псевдометрика, а при $a < a_{\mathcal{M}}$ – нет. Множество всех псевдометрических пространств $\mathcal{M} + a$, $a \geq a_{\mathcal{M}}$, назовем *аддитивным лучом с вершиной в $\mathcal{M} + a_{\mathcal{M}}$, проходящим через $\mathcal{M}$* , и будем обозначать через $[\mathcal{M})$. Аддитивный луч без своей вершины назовем *открытым*. Заметим, что псевдометрическое пространство не является вершиной аддитивного луча, если и только если оно невырожденное. В частности, таковы все пространства из произвольного открытого аддитивного луча.

Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – взвешенное дерево, соединяющее точки псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$, причем M совпадает с множеством вершин степени 1 дерева G и состоит из n точек. Обозначим через b наименьший вес граничных ребер дерева $\mathcal{G}$. Пусть $a \geq a_{\mathcal{M}}$ таково, что $b + a/2 \geq 0$. Определим на G весовую функцию ω_a , добавив к весам всех граничных ребер дерева $\mathcal{G}$ величину $a/2$, и пусть $\mathcal{G}_a = (G, \omega_a)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9.1. *В принятых обозначениях предположим дополнительно, что $a \leq 0$ и $\mathcal{G}$ – минимальное заполнение пространства $\mathcal{M}$. Тогда $\mathcal{G}_a$ – минимальное заполнение пространства $\mathcal{M} + a$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}_a$ одновременно или являются, или не являются заполнениями пространств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M} + a$ соответственно. Кроме того, $\omega_a(G) = \omega(G) + an/2$.

Предположим противное, т.е. заполнение $\mathcal{G}_a$ не является минимальным. Рассмотрим минимальное заполнение $\mathcal{G}' = (G', \omega')$ пространства $\mathcal{M} + a$, являющееся бинарным деревом (оно существует в силу теоремы 2.1). Тогда $\omega'(G') < \omega_a(G) = \omega(G) + an/2$. Положим $c = -a$. Так как $a \leq 0$, то $c \geq 0$. Поэтому если к ω' -весам граничных ребер дерева G' прибавить $c/2$, мы получим весовую функцию ω'_c на G' , причем $\mathcal{G}'_c = (G', \omega'_c)$ будет заполнением пространства $\mathcal{M}$. Но вес полученного заполнения равен $\omega'(G') + cn/2 < \omega(G) + an/2 + cn/2 = \omega(G)$, что противоречит минимальности заполнения $\mathcal{G}$. Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9.2. *В принятых обозначениях предположим дополнительно, что $\mathcal{G}$ – минимальное заполнение пространства $\mathcal{M}$. Тогда $-2b \leq a_{\mathcal{M}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть это не так, т.е. $-2b > a_{\mathcal{M}}$. Тогда функция $\rho - 2b$ является невырожденной метрикой на M , т.е. $\mathcal{M} - 2b$ – невырожденное метрическое пространство. Так как $-2b \leq 0$, то по утверждению 9.1 взвешенное дерево $\mathcal{G}_{-2b} = (G, \omega_{-2b})$ представляет собой минимальное заполнение невырожденного пространства $\mathcal{M} - 2b$. Но $\mathcal{G}_{-2b}$ содержит вырожденное граничное ребро, что противоречит следствию 6.15. Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9.3. В принятых обозначениях предположим дополнительно, что $a > 0$ и $\mathcal{G}$ – минимальное заполнение пространства $\mathcal{M}$. Тогда $\mathcal{G}_a$ – минимальное заполнение пространства $\mathcal{M} + a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. заполнение $\mathcal{G}_a$ не является минимальным, и пусть $\mathcal{G}' = (G', \omega')$ – минимальное заполнение пространства $\mathcal{M} + a$, являющееся бинарным деревом (оно существует в силу теоремы 2.1). Тогда $\omega'(G') < \omega_a(G) = \omega(G) + an/2$. Обозначим через b' наименьший из весов граничных ребер дерева $\mathcal{G}'$. По утверждению 9.2 имеем $-2b' \leq a_{\mathcal{M}} + a$, поэтому $-2b' \leq a$ и функция ω'_{-a} по-прежнему является весовой на G' , причем взвешенное дерево $\mathcal{G}'_{-a}$ будет заполнением исходного пространства $\mathcal{M}$. Но тогда $\omega'_{-a}(G') = \omega'(G') - an/2 < \omega(G) + an/2 - an/2 = \omega(G)$, что противоречит минимальности заполнения $\mathcal{G}$. Утверждение доказано.

Подведем итог, собрав предыдущие утверждения вместе в следующий результат.

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – минимальное заполнение псевдометрического пространства $\mathcal{M}$, причем M совпадает с множеством вершин степени 1 дерева G . Пусть b – наименьший из весов граничных ребер заполнения $\mathcal{G}$. Тогда $-2b < a_{\mathcal{M}}$, поэтому для любого $a \geq a_{\mathcal{M}}$ функция ω_a , полученная из ω добавлением $a/2$ к весам граничных ребер, является весовой. Более того, при каждом таком a взвешенное дерево $\mathcal{G}_a = (G, \omega_a)$ представляет собой минимальное заполнение пространства $\mathcal{M} + a$. В частности, у всех пространств вида $(M, \lambda r + a)$, $\lambda > 0$, $a > \lambda a_{\mathcal{M}}$, типы минимальных заполнений одинаковы, и все эти типы реализуются среди минимальных заполнений пространств $(M, \lambda r + \lambda a_{\mathcal{M}})$, $\lambda \geq 0$.

§ 10. Несоизмеримые пространства

Конечное метрическое пространство, в котором все ненулевые расстояния линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, назовем *несоизмеримым*. Отметим, что каждое несоизмеримое метрическое пространство невырождено.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10.1. Аддитивное пространство, состоящее из $n > 3$ точек, не может быть несоизмеримым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В аддитивном пространстве расстояния между его точками лежат в векторном пространстве над $\mathbb{Q}$, натянутом на веса ребер порождающего дерева. Это пространство имеет размерность не больше $2n - 3$. С другой стороны, если это пространство несоизмеримо, то размерность линейной оболочки над $\mathbb{Q}$ всех его попарных расстояний равна $n(n - 1)/2$, что больше $2n - 3$ при $n > 3$. Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 10.1. Минимальное заполнение несоизмеримого метрического пространства, состоящего более чем из трех точек, содержит невырожденное внутреннее ребро.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если это не так, то в силу невырожденности нашего пространства и следствия 6.15 минимальное заполнение представляет собой звезду

внутренней вершины. Поэтому по следствию 6.10 пространство аддитивно, что противоречит утверждению 10.1. Следствие доказано.

§ 11. Примеры минимальных заполнений

Приведем некоторые примеры минимальных заполнений. Заодно покажем, как работает разработанная выше техника.

11.1. Треугольник. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ состоит из трех точек p_1, p_2 и p_3 . Положим $\rho_{ij} = \rho(p_i, p_j)$. Рассмотрим дерево $G = (V, E)$, у которого $V = M \cup \{v\}$ и $E = \{vp_i\}_{i=1}^3$. Определим весовую функцию ω на E по формуле

$$\omega(e_i) = \frac{\rho_{ij} + \rho_{ik} - \rho_{jk}}{2},$$

где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Заметим, что d_ω , ограниченная на M , совпадает с ρ . Поэтому $\mathcal{M}$ – аддитивное пространство, $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – порождающее дерево для $\mathcal{M}$ и по теореме 8.1 $\mathcal{G}$ – минимальное заполнение для $\mathcal{M}$.

Отметим, что в этом случае $\omega(G) = p(\mathcal{M})$, каждый обход является точным и дерево $\mathcal{G}$ невырождено, если и только если $\mathcal{M}$ – невырожденный треугольник.

Напомним, что величина $(\rho_{ij} + \rho_{ik} - \rho_{jk})/2$ называется *произведением Громова* $(p_j, p_k)_{p_i}$ точек p_j и p_k пространства $\mathcal{M}$ относительно точки p_i (см. [38]). Следующий результат будет полезен нам для конкретных вычислений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.1. *Имеет место тождество $\rho_{ik} = (p_j, p_k)_{p_i} + (p_i, p_j)_{p_k}$.*

Для дальнейшего нам понадобится следующее техническое утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.2. *Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – заполнение псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$, состоящего не менее чем из трех точек. Пусть $e = p_1v$ – ребро из G , причем $p_1 \in M$, $v \notin M$. Рассмотрим какие-нибудь два граничных пути γ_{1i} , $i = 2, 3$, выходящих из p_1 и содержащих e . Обозначим через p_i граничную вершину, в которую приходит путь γ_{1i} . Путь, соединяющий p_2 и p_3 , обозначим через γ_{23} , а расстояние между p_i и p_j – через ρ_{ij} . Тогда:*

- 1) *если пути γ_{12} и γ_{13} точны, то $\omega(e) \leq (p_2, p_3)_{p_1}$;*
- 2) *если же точны пути γ_{23} и один из γ_{1i} , причем пути γ_{12} и γ_{13} имеют ровно одно общее ребро, то $\omega(e) \geq (p_2, p_3)_{p_1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае 1) ребро e содержится в пересечении путей γ_{12} и γ_{13} , а путь γ_{23} равен их симметрической разности, поэтому

$$\omega(e) \leq \frac{\omega(\gamma_{12}) + \omega(\gamma_{13}) - \omega(\gamma_{23})}{2} = \frac{\rho_{12} + \rho_{13} - \omega(\gamma_{23})}{2} \leq (p_2, p_3)_{p_1},$$

где равенство имеет место в силу наших предположений о точности, а второе неравенство – по определению заполнения.

В случае 2) ребро e равно пересечению путей γ_{12} и γ_{13} , откуда

$$\omega(e) = \frac{\omega(\gamma_{12}) + \omega(\gamma_{13}) - \omega(\gamma_{23})}{2} = \frac{\rho_{1i} + \omega(\gamma_{1j}) - \rho_{23}}{2} \geq (p_2, p_3)_{p_1},$$

где $\{i, j\} = \{2, 3\}$, второе равенство имеет место в силу наших предположений о точности, а неравенство – по определению заполнения. Утверждение доказано.

11.2. Правильный симплекс. Пусть все расстояния в метрическом пространстве $\mathcal{M}$ одинаковы и равны d , т.е. $\mathcal{M}$ – правильный симплекс. Тогда взвешенное дерево $\mathcal{G} = (G, \omega)$, $G = (V, E)$, с множеством вершин $V = M \cup \{v\}$ и ребрами vt , $t \in M$, веса которых равны $d/2$, является порождающим для $\mathcal{M}$. Поэтому пространство $\mathcal{M}$ аддитивно и по теореме 8.1 $\mathcal{G}$ – его единственное невырожденное минимальное заполнение. Если n – число точек в M , то вес заполнения $\mathcal{G}$ равен $dn/2$.

11.3. Звезда. Если минимальное заполнение $\mathcal{G} = (G, \omega)$ пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ представляет собой звезду, в которой внутренняя вершина v соединена со всеми точками $p_i \in M$, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 3$, то по следствию 6.10 псевдометрическое пространство $\mathcal{M}$ аддитивно. В этом случае веса всех ребер легко считаются. Действительно, положим $e_i = vp_i$. Так как подпространство аддитивного пространства само аддитивно, то можно воспользоваться результатами для трехточечного аддитивного пространства (см. выше). Имеем $\omega(e_i) = (p_j, p_k)_{p_i}$, где i, j и k – произвольные различные номера граничных вершин, а ρ_{ij} – расстояние между соответствующими вершинами.

Отметим, что по следствию 8.5 и в этом случае $\omega(G) = p(\mathcal{M})$, каждый обход является точным, а дерево $\mathcal{G}$ невырождено, если и только если $\mathcal{M}$ – невырожденное пространство.

11.4. Усы степени больше 2. По следствию 6.11 каждые усы минимального заполнения псевдометрического пространства образуют аддитивное подпространство. Если степень таких усов больше 2, то тем же способом, что и в примере звезды, можно вычислить веса всех ребер, входящих в эти усы. Отметим, что все ребра усов в рассматриваемом случае невырождены, если и только если порожжденное ими аддитивное пространство невырождено.

11.5. Две звезды. Предположим теперь, что минимальное заполнение $\mathcal{G}$ пространства $\mathcal{M}$ имеет две соседних внутренних вершины v_1 и v_2 , каждая из которых смежна с тремя или более вершинами степени 1. Тогда веса всех ребер, инцидентных граничным вершинам, могут быть вычислены так, как описано выше. Обозначим вес ребра, соединяющего i -ю граничную вершину p_i с v_j , через ω_{ij} . Тогда вес ребра v_1v_2 должен быть наименьшим среди всех удовлетворяющих неравенствам вида $\omega_{i1} + \omega(v_1v_2) + \omega_{j2} \geq \rho_{ij}$, где, как и выше, $\rho_{ij} = \rho(p_i, p_j)$. Поэтому $\omega(v_1v_2) = \max_{i,j}(\rho_{ij} - \omega_{i1} - \omega_{j2})$, где максимум берется по всем таким парам вершин (p_i, p_j) , что p_i смежна с v_1 , а p_j – с v_2 .

11.6. Четырехточечные пространства. Получим полное описание минимальных заполнений четырехточечных пространств. Начнем с результата, вытекающего из следствия 6.9 и следствия 6.13.

СЛЕДСТВИЕ 11.1. Для четырехточечных псевдометрических пространств каждое минимальное заполнение имеет точный обход.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.3. Пусть $M = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ и ρ – произвольная псевдометрика на M . Положим $\rho_{ij} = \rho(p_i, p_j)$. Тогда минимальное заполнение $\mathcal{G} = (G, \omega)$ пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ имеет вес

$$\frac{1}{2}(\min\{\rho_{12} + \rho_{34}, \rho_{13} + \rho_{24}, \rho_{14} + \rho_{23}\} + \max\{\rho_{12} + \rho_{34}, \rho_{13} + \rho_{24}, \rho_{14} + \rho_{23}\}).$$

Если минимум в этой формуле равен $\rho_{ij} + \rho_{rs}$, то тип минимального заполнения – бинарное дерево, усы которого суть $\{p_i, p_j\}$ и $\{p_r, p_s\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ – минимальное заполнение пространства $\mathcal{M}$, являющееся бинарным деревом. Обозначим через λ_i вес инцидентного вершине p_i ребра, а через λ_5 – вес оставшегося ребра дерева $\mathcal{G}$. Без ограничения общности предположим, что $\{p_1, p_2\}$ – усы дерева G .

По следствию 6.9 $\lambda_1 + \lambda_2 = \rho_{12}$ и $\lambda_3 + \lambda_4 = \rho_{34}$.

По следствию 6.13 для некоторых i и j , $\{i, j\} = \{3, 4\}$, точки p_1 и p_i , а также точки p_2 и p_j соединены точными путями. Пусть без ограничения общности точными путями соединены p_1 и p_3 , а также p_2 и p_4 . Тогда $\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5 = \rho_{13}$ и $\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_5 = \rho_{24}$, откуда, складывая два последних равенства и вычитая два первых, получаем

$$\lambda_5 = \frac{\rho_{13} + \rho_{24} - \rho_{12} - \rho_{34}}{2}.$$

В частности, так как $\lambda_5 \geq 0$, имеем $\rho_{13} + \rho_{24} \geq \rho_{12} + \rho_{34}$. Кроме того,

$$\omega(G) = \frac{\rho_{13} + \rho_{24} + \rho_{12} + \rho_{34}}{2}.$$

Далее, $\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_4 \geq \rho_{14}$ и $\lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_3 \geq \rho_{23}$, откуда, складывая эти неравенства и подставляя выражение для λ_5 , заключаем, что

$$\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 = \rho_{12} + \rho_{34} + (\rho_{13} + \rho_{24} - \rho_{12} - \rho_{34}) \geq \rho_{14} + \rho_{23},$$

т.е. получаем условие

$$\rho_{13} + \rho_{24} = \max\{\rho_{12} + \rho_{34}, \rho_{13} + \rho_{24}, \rho_{14} + \rho_{23}\}. \quad (*)$$

Положим $\lambda_1 = x$; тогда по утверждению 11.2 имеем $(p_2, p_4)_{p_1} \leq x \leq (p_2, p_3)_{p_1}$. Таким образом, в сделанных предположениях веса ребер минимального заполнения $\mathcal{G}$ подчиняются следующей системе:

$$\begin{aligned} (p_2, p_4)_{p_1} &\leq \lambda_1 = x \leq (p_2, p_3)_{p_1}, \\ \lambda_2 &= \rho_{12} - x, \quad \lambda_3 = \frac{\rho_{13} - \rho_{24} + \rho_{12} + \rho_{34}}{2} - x, \\ \lambda_4 &= \frac{-\rho_{13} + \rho_{24} - \rho_{12} + \rho_{34}}{2} + x, \quad \lambda_5 = \frac{\rho_{13} + \rho_{24} - \rho_{12} - \rho_{34}}{2}. \end{aligned} \quad (**)$$

Покажем, что каждое решение этой системы в предположении условия $(*)$ дает некоторое заполнение пространства $\mathcal{M}$. Для этого достаточно проверить, что $(p_2, p_4)_{p_1} \leq (p_2, p_3)_{p_1}$, все λ_i , $1 \leq i \leq 4$, неотрицательны, а также что $\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_4 \geq \rho_{14}$ и $\lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_3 \geq \rho_{23}$.

Неравенство $(p_2, p_4)_{p_1} \leq (p_2, p_3)_{p_1}$ вытекает из условия $(*)$. Далее,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\geq (p_2, p_4)_{p_1} \geq 0, \quad \lambda_2 \geq \rho_{12} - (p_2, p_3)_{p_1} = (p_1, p_3)_{p_2} \geq 0, \\ \lambda_3 &\geq \frac{\rho_{13} - \rho_{24} + \rho_{12} + \rho_{34}}{2} - (p_2, p_3)_{p_1} = (p_3, p_4)_{p_2} \geq 0, \\ \lambda_4 &\geq \frac{-\rho_{13} + \rho_{24} - \rho_{12} + \rho_{34}}{2} + (p_2, p_4)_{p_1} = (p_1, p_3)_{p_4} \geq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_4 &= \rho_{24} - \rho_{12} + 2x \geq \rho_{24} - \rho_{12} + 2(p_2, p_4)_{p_1} = \rho_{14}, \\ \lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_3 &= \rho_{12} + \rho_{13} - 2x \geq \rho_{12} + \rho_{13} - 2(p_2, p_3)_{p_1} = \rho_{23}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Для завершения доказательства утверждения осталось проанализировать полученные соотношения.

ЛЕММА 11.1. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – четырехточечное метрическое пространство, для которого выполняется условие (*), и G – бинарное дерево с границей M , причем p_1, p_2 – усы дерева G . Определим числа λ_i по формулам из системы (**). Тогда все λ_i неотрицательны, т.е. определяют весовую функцию ω , и взвешенное дерево $\mathcal{G} = (G, \omega)$ является минимальным параметрическим заполнением веса $(\rho_{12} + \rho_{24} + \rho_{43} + \rho_{31})/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка неотрицательности всех λ_i проделывается так же, как это было сделано при исследовании минимального заполнения. Далее, аналогично проделанному выше показывается, что $\mathcal{G}$ – заполнение пространства $\mathcal{M}$, причем для него обход, одна из точных нумераций которого есть (p_1, p_2, p_4, p_3) , является точным. По утверждению 7.3 дерево $\mathcal{G}$ – минимальное параметрическое заполнение. Вес этого заполнения вычисляется непосредственно. Лемма доказана.

Аналогичные формулы имеют место в предположении, что усами G является пара $\{p_2, p_3\}$, а для $\mathcal{M}$ вновь выполнено условие (*). В этом случае мы тоже получаем минимальное параметрическое заполнение. Вес этого заполнения равен $(\rho_{23} + \rho_{31} + \rho_{14} + \rho_{42})/2$.

Наконец, если пара $\{p_1, p_3\}$ является усами G , то вес соответствующего минимального параметрического заполнения больше или равен $\rho_{13} + \rho_{24}$. Однако эта величина в предположении условия (*) больше или равна весам минимальных параметрических заполнений двух предыдущих топологий, поэтому среди этих двух заполнений и содержится минимальное заполнение. Сравнивая веса этих двух заполнений, убеждаемся, что минимальность заполнения с усами $\{p_1, p_2\}$ равносильна условию $\rho_{12} + \rho_{43} \leq \rho_{23} + \rho_{14}$. С учетом условия (*), последнее неравенство эквивалентно $\rho_{12} + \rho_{34} = \min\{\rho_{12} + \rho_{34}, \rho_{13} + \rho_{24}, \rho_{14} + \rho_{23}\}$, откуда и получаем требуемую формулу из условия утверждения. Доказательство утверждения 11.3 закончено.

Применим полученный результат к множеству вершин выпуклого четырехугольника на плоскости.

СЛЕДСТВИЕ 11.2. Пусть M – множество вершин выпуклого четырехугольника $p_1 p_2 p_3 p_4 \subset \mathbb{R}^2$ и $\rho(p_i, p_j) = \|p_i - p_j\|$. Минимальное заполнение пространства (M, ρ) имеет вес

$$\frac{1}{2} \min(\rho_{12} + \rho_{34}, \rho_{14} + \rho_{23}) + \frac{\rho_{13} + \rho_{24}}{2}$$

и представляет собой бинарное дерево с усами, опирающимися на противоположные стороны меньшей суммарной длины. Если это стороны $p_1 p_2$ и $p_3 p_4$, то веса ребер описываются системой (**).

Рассмотрим несколько конкретных примеров. Пусть M – множество вершин ромба, составленного из двух правильных треугольников со стороной 1 и с меньшей диагональю $p_2 p_4$. Тогда $\rho_{12} = \rho_{23} = \rho_{34} = \rho_{14} = \rho_{24} = 1$ и $\rho_{13} = \sqrt{3}$.

В этом случае согласно утверждению 11.2 имеется два симметричных минимальных заполнения, вес каждого из которых равен $(3 + \sqrt{3})/2$. Веса ребер для заполнения с усами, скажем $\{p_1, p_2\}$, имеют вид

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \lambda_3, \quad \lambda_2 = \lambda_3 - \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq \lambda_3 \leq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\lambda_4 = 1 - \lambda_3, \quad \lambda_5 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Пусть теперь четырехугольник $p_1p_2p_3p_4$ — это прямоугольник со сторонами a и b , и пусть $a \leq b$. Обозначим через $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ длину диагонали. Тогда вес минимального заполнения равен $a + d$, минимальное заполнение представляет собой бинарное дерево с усами — парами вершин меньших сторон, а веса ребер имеют вид

$$\lambda_1 = a - \lambda_3, \quad \lambda_2 = \lambda_3, \quad \frac{a+b-d}{2} \leq \lambda_3 \leq \frac{a-b+d}{2},$$

$$\lambda_4 = a - \lambda_3, \quad \lambda_5 = d - a.$$

11.7. Выпуклые многоугольники. Интересно изучить минимальные заполнения метрических пространств, представляющих собой множества вершин плоских выпуклых многоугольников. Здесь удастся найти максимальные полупериметры для выпуклого пяти- и шестиугольника и для правильного многоугольника⁵. Последнее в предположении наличия точного обхода у минимального заполнения позволяет вычислить длину минимального заполнения для этих пространств. Отметим, что для пятиточечного пространства справедливость этого предположения можно проверить непосредственно, что приводит к следующему результату.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.4 (О. Д. Колчева). Пусть M — множество вершин выпуклого пятиугольника $p_1p_2p_3p_4p_5 \subset \mathbb{R}^2$ и $\rho(p_i, p_j) = \|p_i - p_j\| = \rho_{ij}$. Минимальное заполнение пространства (M, ρ) имеет вес

$$\frac{1}{2} \min_{\pi} (\rho_{\pi(1)\pi(2)} + \rho_{\pi(2)\pi(4)} + \rho_{\pi(4)\pi(5)} + \rho_{\pi(3)\pi(5)} + \rho_{\pi(1)\pi(3)}),$$

где минимум берется по всем циклическим перестановкам $\pi \in S_5$. При этом если минимум достигается на перестановке σ , то минимальное заполнение представляет собой бинарное дерево с усами, опирающимися на стороны $p_{\sigma(1)}p_{\sigma(2)}$ и $p_{\sigma(4)}p_{\sigma(5)}$.

Для случая правильных многоугольников пока получена только следующая оценка.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.5 (Е. Е. Завальнюк). Вес минимального заполнения метрического пространства, представляющего собой множество вершин правильного n -угольника на плоскости, $n \geq 4$, не превосходит

$$2 \sin \frac{\pi}{n} + (n-2) \sin \frac{2\pi}{n}.$$

⁵Эти вопросы изучали студенты механико-математического факультета МГУ О. Д. Колчева и Е. Е. Завальнюк.

§ 12. Отношения

В теории минимальных сетей Штейнера важной характеристикой является отношение Штейнера. Напомним, что *отношением Штейнера конечного неодноточечного подмножества M метрического пространства $\mathcal{X}$* называется отношение длин построенных на M минимального дерева Штейнера и минимального остовного дерева, т.е. величина $\text{sr}(M) = \text{smt}(M)/\text{mst}(M)$. Точная нижняя грань чисел $\text{sr}(M)$ по всем таким подмножествам M пространства $\mathcal{X}$ называется *отношением Штейнера пространства $\mathcal{X}$* и обозначается через $\text{sr}(\mathcal{X})$ (см. [4]).

Отметим, что конкретные значения для отношения Штейнера известны лишь для достаточно узкого класса пространств (см. обзор в [6] или в [1]). Ниже, основываясь на минимальных заполнениях, мы определим еще два отношения, которые могут оказаться более доступными для конкретных вычислений и через которые, как мы надеемся, можно выразить само отношение Штейнера.

В настоящем параграфе мы приведем лишь “начальный отрезок” теории этих отношений. В последующих публикациях мы надеемся развить теорию этих отношений, начав с перенесения на них известных результатов об отношении Штейнера.

12.1. Отношение Штейнера–Громова. Для удобства изложения множества, состоящие более чем из одной точки, будем называть *нетривиальными*. Пусть $\mathcal{X} = (X, \rho)$ – произвольное метрическое пространство и $M \subset X$ – некоторое конечное подмножество. Напомним, что через $\text{mst}(M, \rho)$ мы обозначали длину минимального остовного дерева метрического пространства (M, ρ) . Далее, для нетривиальных M определим число $\text{sgr}(M) = \text{mf}(M, \rho)/\text{mst}(M, \rho)$ и назовем его *отношением Штейнера–Громова подмножества M* ; величину $\inf \text{sgr}(M)$, где инфимум берется по всем нетривиальным конечным подмножествам из $\mathcal{X}$ с не более чем $n > 1$ вершинами, обозначим через $\text{sgr}_n(\mathcal{X})$ и назовем *отношением Штейнера–Громова степени n пространства $\mathcal{X}$* ; наконец, величину $\inf \text{sgr}_n(\mathcal{X})$, где инфимум берется по всем натуральным $n > 1$, назовем *отношением Штейнера–Громова пространства $\mathcal{X}$* и обозначим через $\text{sgr}(\mathcal{X})$ или $\text{sgr}(X)$, когда понятно, о какой метрике на X идет речь. Отметим, что $\text{sgr}_n(\mathcal{X})$ является невозрастающей функцией от n . Кроме того, легко видеть, что $\text{sgr}_2(\mathcal{X}) = 1$ для любого нетривиального метрического пространства $\mathcal{X}$.

ПРИМЕР 12.1. Пусть $\mathcal{X} = (X, \rho)$ – метрическое пространство, в котором существует хотя бы один правильный треугольник. Вычислим $\text{sgr}_3(\mathcal{X})$. Рассмотрим произвольный треугольник $M = \{p_1, p_2, p_3\} \subset X$ и положим $d_i = \rho(p_j, p_k)$, где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Из п. 11.1 вытекает, что $\text{mf}(M, \rho) = (d_1 + d_2 + d_3)/2$. Далее, без ограничения общности предположим, что $d_1 \leq d_2 \leq d_3$; тогда $\text{mst}(M, \rho) = d_1 + d_2 \leq 2d_3$, поэтому

$$\text{sgr}_3(\mathcal{X}) = \inf_M \frac{d_1 + d_2 + d_3}{2(d_1 + d_2)} \geq \frac{d_1 + d_2 + (d_1 + d_2)/2}{2(d_1 + d_2)} = \frac{3}{4}.$$

С другой стороны, на правильном треугольнике $M \subset X$ имеем $\text{sgr}(M) = 3/4$, поэтому $\text{sgr}_3(\mathcal{X}) = 3/4$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12.1. *Отношение Штейнера–Громова произвольного метрического пространства не меньше $1/2$. Существуют метрические пространства, у которых отношение Штейнера–Громова равно $1/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что $\text{sgr}(\mathcal{X}) \geq 1/2$ для произвольного метрического пространства $\mathcal{X} = (X, \rho)$. Пусть M – конечное подмножество в $\mathcal{X}$. По следствию 7.1 имеем

$$\text{mf}(M, \rho) \geq p(M, \rho) > \frac{1}{2} \text{mst}(M, \rho),$$

откуда $\text{sgr}(\mathcal{X}) = \inf_M \text{mf}(M, \rho) / \text{mst}(M, \rho) \geq 1/2$, где инфимум берется по всевозможным конечным нетривиальным $M \subset X$.

Построим теперь метрическое пространство, для которого отношение Штейнера–Громова равно $1/2$. В качестве него можно взять счетное множество X с функцией ρ , равной 1 на всех парах различных точек.

Пусть M_n – произвольное подмножество $\mathcal{X}$, состоящее из n точек. Пространство (M_n, ρ) является правильным симплексом, поэтому из результатов п. 11.2 вытекает, что $\text{mf}(M_n, \rho) = n/2$. С другой стороны, $\text{mst}(M_n, \rho) = n - 1$, поэтому

$$\text{sgr}(M_n) = \frac{1}{2} \frac{n}{n-1}.$$

При $n \rightarrow \infty$ величина $\text{sgr}(M_n)$ стремится к $1/2$, поэтому $\text{sgr}(\mathcal{X}) \leq 1/2$. Учитывая доказанное выше неравенство, получаем $\text{sgr}(\mathcal{X}) = 1/2$. Утверждение доказано.

12.2. Суботношение Штейнера. Пусть $\mathcal{X} = (X, \rho)$ – произвольное метрическое пространство и $M \subset \mathcal{X}$ – некоторое конечное подмножество. Напомним, что через $\text{smt}(M, \rho)$ мы обозначили длину минимального дерева Штейнера с границей M . Далее, для нетривиальных M определим число $\text{ssr}(M) = \text{mf}(M, \rho) / \text{smt}(M, \rho)$ и назовем *суботношением Штейнера* подмножества M ; величину $\inf \text{ssr}(M)$, где инфимум берется по всем нетривиальным конечным подмножествам из $\mathcal{X}$ с не более чем $n > 1$ вершинами, обозначим через $\text{ssr}_n(\mathcal{X})$ и назовем *суботношением Штейнера степени n пространства $\mathcal{X}$* ; наконец, величину $\inf \text{ssr}_n(\mathcal{X})$, где инфимум берется по всем натуральным $n > 1$, назовем *суботношением Штейнера пространства $\mathcal{X}$* и обозначим через $\text{ssr}(\mathcal{X})$ или $\text{ssr}(X)$, когда понятно, о какой метрике на X идет речь. Отметим, что $\text{ssr}_n(\mathcal{X})$ является невозрастающей функцией от n . Кроме того, легко видеть, что $\text{ssr}_2(\mathcal{X}) = 1$ для любого нетривиального метрического пространства $\mathcal{X}$.

ПРИМЕР 12.2. Покажем, что суботношение Штейнера $\text{ssr}_3(\mathbb{R}^n, \rho) = \text{ssr}_3(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, где ρ – стандартная евклидова метрика, равно $\sqrt{3}/2$. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ – треугольник со сторонами $a \leq b \leq c$. Тогда в соответствии с результатами п. 11.1 $\text{mf}(M, \rho) = (a + b + c)/2$. Для треугольника с углом, большим или равным 120° , имеем $\text{smt}(M) = a + b$, поэтому

$$\begin{aligned} \text{ssr}_3(M) &= \frac{a + b + c}{2(a + b)} \geq \frac{a + b + \sqrt{a^2 + b^2 + ab}}{2(a + b)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{(a + b)^2 - ab}}{2(a + b)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{(\sqrt{a/b} + \sqrt{b/a})^2}} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} > \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Пусть теперь все углы треугольника M меньше 120° . Тогда кратчайшая сеть имеет дополнительную точку s , смежную со всеми точками из M , причем в s ребра встречаются под углами в 120° . Пусть $M = \{p_1, p_2, p_3\}$, а x, y и z — длины отрезков sm_1, sm_2 и sm_3 соответственно. Положим $f(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2 + uv}$; тогда периметр треугольника M равен $P(x, y, z) = f(x, y) + f(x, z) + f(y, z)$. Так как величина $\text{ssr}_3(\mathbb{R}^n)$ не меняется при преобразовании подобия, имеем

$$\text{ssr}_3(\mathbb{R}^n) = \inf \frac{P(x, y, z)/2}{x + y + z},$$

где инфимум будем брать по всем положительным x, y и z , для которых $x + y + z$ постоянно, скажем равно 1. Тем самым, для вычисления $\text{ssr}_3(\mathbb{R}^n)$ достаточно найти точную нижнюю грань функции $P(x, y, z)$ при сделанных ограничениях и сравнить результат с оценками, полученными выше.

Продолжив по непрерывности функцию $P(x, y, z)$ на нулевые значения переменных, получим функцию на замкнутом треугольнике, поэтому при таких ограничениях функция $P(x, y, z)$ имеет минимум. Покажем, что этот минимум достигается ровно в одной точке, а именно в точке $(1/3, 1/3, 1/3)$, т.е. на правильном треугольнике.

Действительно, рассмотрим какую-нибудь точку (x, y, z) из области определения функции $P(x, y, z)$, и пусть в этой точке не все координаты равны друг другу. Без ограничения общности будем считать, что $x \neq y$. Рассмотрим новую точку с координатами $((x + y)/2, (x + y)/2, z)$, для которой сумма координат также равна 1. Покажем, что в этой точке функция P имеет меньшее значение, чем в исходной (это и завершит доказательство того, что P достигает минимума на правильном треугольнике M). Имеем

$$P\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y) + \sqrt{(x+y)^2 + 4z^2 + 2xz + 2yz}.$$

Покажем, что

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y) < f(x, y), \quad \sqrt{(x+y)^2 + 4z^2 + 2xz + 2yz} \leq f(x, z) + f(y, z).$$

Первое неравенство равносильно

$$0 < f^2(x, y) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)\right)^2 = x^2 + y^2 + xy - \frac{3}{4}(x+y)^2 = \frac{1}{4}(x-y)^2,$$

что верно, так как $x \neq y$. Докажем теперь второе неравенство. Оно равносильно

$$\begin{aligned} 0 &\leq (f(x, z) + f(y, z))^2 - ((x+y)^2 + 4z^2 + 2xz + 2yz) \\ &= 2f(x, z)f(y, z) - 2xy - xz - yz - 2z^2, \end{aligned}$$

что в свою очередь равносильно

$$0 \leq 4f^2(x, z)f^2(y, z) - (2xy + xz + yz + 2z^2)^2 = 3(x-y)^2z^2,$$

что также верно.

Таким образом, мы показали, что в классе треугольников с углами, не превосходящими 120° , минимум функции $P(x, y, z)$ на симплексе $x + y + z = 1$ (все координаты неотрицательны) достигается при $x = y = z = 1/3$. Таким образом, $\text{ssr}_3(\mathbb{R}^n) \geq \sqrt{3}/2$, причем эта оценка достигается на правильном треугольнике. Сравнивая полученную оценку с точной нижней гранью, взятой по треугольникам, один угол которых больше или равен 120° , заключаем, что на правильном треугольнике реализуется инфимум по всем треугольникам. Таким образом, $\text{ssr}_3(\mathbb{R}^n) = \sqrt{3}/2$.

Пусть $\mathcal{F}$ – произвольное семейство нетривиальных конечных подмножеств метрического пространства $\mathcal{X}$. Определим *суботношение Штейнера* $\text{ssr}(\mathcal{F})$ семейства $\mathcal{F}$ как $\inf_{M \in \mathcal{F}} \text{ssr}(M)$. Имеет место следующий результат⁶.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12.2 (Е. И. Филоненко). *Пусть $\mathcal{F}$ – множество всех выпуклых четырехугольников на евклидовой плоскости. Тогда $\text{ssr}(\mathcal{F}) = \sqrt{3}/2$.*

ГИПОТЕЗА 12.1. Суботношение Штейнера евклидовой плоскости достигается на правильном треугольнике и, значит, равно $\sqrt{3}/2$.

Список литературы

- [1] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2003.
- [2] V. Jarník, M. Kössler, “Sur les graphes minima, contenant n points donnés”, *Časopis*, **63** (1934), 223–235.
- [3] Р. Курант, Г. Роббинс, *Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов*, МЦНМО, М., 2001; пер. с англ.: R. Courant, H. Robbins, *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*, Oxford Univ. Press, New York, 1996.
- [4] E. N. Gilbert, H. O. Pollak, “Steiner minimal trees”, *SIAM J. Appl. Math.*, **16**:1 (1968), 1–29.
- [5] D.-Z. Du, F. K. Hwang, “A proof of the Gilbert–Pollak conjecture on the Steiner ratio”, *Algorithmica*, **7**:2–3 (1992), 121–135.
- [6] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Отношение Штейнера: современное состояние”, *Матем. вопросы киберн.*, **11** (2002), 27–48.
- [7] P. de Wet, “The Euclidean Steiner ratio: some recent results”, *Proceedings of the 5th Asian mathematical conference* (Kuala Lumpur, Malaysia, 2009), Universiti Sains Malaysia, Penang, 2009, 442–446.
- [8] P. O. De Wet, *Geometric Steiner minimal trees*, PhD thesis, Univ. of South Africa, Pretoria, 2008.
- [9] N. Innami, B. H. Kim, Y. Mashiko, K. Shiohama, “The Steiner ratio conjecture of Gilbert–Pollak may still be open”, *Algorithmica*, **57**:4 (2010), 869–872.
- [10] G. Kolata, “Solution to old puzzle: how short a shortcut?”, *The New York Times*, October 30, 1990.
- [11] J. H. Rubinstein, J. F. Weng, “Compression theorems and Steiner ratios on spheres”, *J. Comb. Optim.*, **1**:1 (1997), 67–78.
- [12] D. T. Lee, C. F. Shen, “The Steiner minimal tree problem in the λ -geometry plane”, *Algorithms and computation*, Lecture Notes in Comput. Sci., **1178**, Springer-Verlag, Berlin, 1996, 247–255.

⁶Он получен студенткой механико-математического факультета МГУ Е. И. Филоненко (см. [25]).

- [13] M. Gromov, “Filling Riemannian manifolds”, *J. Differential Geom.*, **18**:1 (1983), 1–147.
- [14] Д. Ю. Бурого, Ю. Д. Бурого, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, Институт компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2004; пер. с англ.: D. Burago, Yu. Burago, S. Ivanov, *A course in metric geometry*, Grad. Stud. Math., **33**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [15] С. В. Иванов, *Объемы и площади в метрической геометрии*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, СПбГУ, С.-Петербург, 2009.
- [16] А. Т. Фоменко, “Минимальные компакты в римановых многообразиях и гипотеза Райфенберга”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:5 (1972), 1049–1079; англ. пер.: A. T. Fomenko, “Minimal compacta in Riemannian manifolds and Reifenberg’s conjecture”, *Math. USSR-Izv.*, **6**:5 (1972), 1037–1066.
- [17] А. Т. Фоменко, “Многомерная задача Плато в римановых многообразиях”, *Матем. сб.*, **89(131)**:3(11) (1972), 475–519; англ. пер.: A. T. Fomenko, “The multidimensional Plateau problem in Riemannian manifolds”, *Math. USSR-Sb.*, **18**:3 (1972), 487–527.
- [18] Н. С. Гусев, “Каноническое разложение кусочно-аффинных функций, многогранники-следы и геометрические вариационные задачи”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:1 (2006), 57–94; англ. пер.: N. S. Gusev, “Canonical decompositions of piecewise affine mappings, polyhedra-traces, and geometrical variational problems”, *J. Math. Sci.*, **149**:1 (2008), 896–921.
- [19] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “О деформации многообразия, уменьшающей объемом с максимальной скоростью”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1989, №3, 14–18; англ. пер.: A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, “Deformation of a manifold that reduces its volume with maximal velocity”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **44**:3 (1989), 16–20.
- [20] В. Л. Чернышев, А. И. Шафаревич, “Квазиклассический спектр оператора Шрёдингера на геометрическом графе”, *Матем. заметки*, **82**:4 (2007), 606–620; англ. пер.: V. L. Chernyshev, A. I. Shafarevich, “Semiclassical spectrum of the Schrödinger operator on a geometric graph”, *Math. Notes*, **82**:3–4 (2007), 542–554.
- [21] А. Ю. Еремин, “Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства”, *Матем. сборник* (в печати).
- [22] О. В. Рублева, “Критерий аддитивности конечного метрического пространства и минимальные заполнения”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2012, №2 (в печати).
- [23] А. О. Иванов, З. Н. Овсянников, Н. П. Стрелкова, А. А. Тужилин, “Одномерные минимальные заполнения с ребрами отрицательного веса”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* (в печати).
- [24] З. Н. Овсянников, “Обобщенно аддитивные пространства и их основные свойства”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* (в печати).
- [25] Е. И. Филоненко, “Суботношение Штейнера степени 4 евклидовой плоскости”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* (в печати).
- [26] А. О. Иванов, И. М. Никонов, А. А. Тужилин, “Множества, допускающие соединение графами конечной длины”, *Матем. сб.*, **196**:6 (2005), 71–110; англ. пер.: A. O. Ivanov, I. M. Nikonov, A. A. Tuzhilin, “Sets admitting connection by graphs of finite length”, *Sb. Math.*, **196**:6 (2005), 845–884.
- [27] А. Т. Фоменко, “О минимальных объемах топологических глобально минимальных поверхностей в кобордизмах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:1 (1981), 187–213; англ. пер.: A. T. Fomenko, “On minimal volumes of topological globally minimal surfaces in cobordisms”, *Math. USSR-Izv.*, **18**:1 (1982), 163–183.

- [28] А. Т. Фоменко, “Многомерные вариационные методы в топологии экстремалей”, *УМН*, **36**:6 (1981), 105–135; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “Multi-dimensional variational methods in the topology of extremals”, *Russian Math. Surveys*, **36**:6 (1981), 127–165.
- [29] А. Т. Фоменко, “Многомерная задача Плато на римановых многообразиях”, *Матем. заметки*, **13**:1 (1973), 159–167; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “The multidimensional Plateau problem in Riemannian varieties”, *Math. Notes*, **13**:1 (1973), 94–97.
- [30] Ле Хонг Ван, А. Т. Фоменко, “Критерий минимальности лагранжевых подмногообразий в кэлеровых многообразиях”, *Матем. заметки*, **42**:4 (1987), 559–571; англ. пер.: Le Khong Van, A. T. Fomenko, “Test for minimality of lagrangian submanifolds in Kählerian ones”, *Math. Notes*, **42**:4 (1987), 810–816.
- [31] П. А. Бородин, “Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве”, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 514–518; англ. пер.: P. A. Borodin, “An example of nonexistence of a Steiner point in a Banach space”, *Math. Notes*, **87**:4 (2010), 485–488.
- [32] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Minimal networks. The Steiner problem and its generalizations*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.
- [33] Ф. Препарата, М. Шеймос, *Вычислительная геометрия. Введение*, Мир, М., 1989; пер. с англ.: F. P. Preparata, M. I. Shamos, *Computational geometry. An introduction*, Texts Monogr. Comput. Sci., Springer-Verlag, New York, 1985.
- [34] К. А. Зарецкий, “Построение дерева по набору расстояний между висячими вершинами”, *УМН*, **20**:6 (1965), 90–92.
- [35] J. M. S. Simões-Pereira, “A note on the tree realizability of a distance matrix”, *J. Combinatorial Theory*, **6** (1969), 303–310.
- [36] Е. А. Смоленский, “Об одном способе линейной записи графов”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **2**:2 (1962), 371–372; англ. пер.: E. Smolenskii, “A method for the linear recording of graphs”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **2**:2 (1963), 396–397.
- [37] S. L. Hakimi, S. S. Yau, “Distance matrix of a graph and its realizability”, *Quart. Appl. Math.*, **22** (1965), 305–317.
- [38] М. Громов, *Гиперболические группы*, Ин-т компьютерных исследований, М., 2002; пер. с англ.: M. Gromov, “Hyperbolic groups”, *Essays in group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **8**, Springer-Verlag, New York, 1987, 75–265.

А. О. Иванов (А. О. Ivanov)

Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова;
 Лаборатория дискретной и вычислительной геометрии
 им. Б. Н. Делоне ЯрГУ им. П. Г. Демидова
E-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию

04.08.2010 и 08.04.2011

А. А. Тужилин (А. А. Tuzhilin)

Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова;
 Лаборатория дискретной и вычислительной геометрии
 им. Б. Делоне ЯрГУ им. П. Г. Демидова
E-mail: tuz@mech.math.msu.su