Общероссийский математический портал

Ю. А. Браилов, Геометрия сдвигов инвариантов на полупростых алгебрах Ли,
Матем. сб., 2003, том 194, номер 11, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm778>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:15:04

УДК 513.944

Ю. А. Браилов

Геометрия сдвигов инвариантов на полупростых алгебрах Ли

На орбитах коприсоединенного представления полупростых алгебр Ли существует полный коммутативный набор полиномов, полученный методом сдвига аргумента в работах А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко. Этот коммутативный набор и соответствующие ему уравнения Эйлера играют важную роль в теории конечномерных интегрируемых систем. Для таких уравнений Эйлера существует естественное представление Лакса со спектральным параметром.

В работе доказано полное совпадение дискриминанта спектральной кривой и бифуркационной диаграммы отображения момента для алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Для компактных полупростых алгебр Ли описаны в терминах корневой структуры точки максимального вырождения отображения момента. Также доказана связность множества его регулярных точек и тот факт, что прообраз каждой регулярной точки состоит ровно из одного тора Лиувилля.

Библиография: 8 названий.

§1. Введение

Орбиты коприсоединенного представления алгебр Ли обладают канонической симплектической структурой Кириллова–Костанта и допускают построение различных интегрируемых гамильтоновых систем. Один из самых простых методов построения таких систем – метод сдвига аргумента, предложенный в работе [1] А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко.

Набор гладких функций на орбитах коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$, коммутирующих относительно скобки Ли–Пуассона, порожден функциями вида $I(X + \lambda a)$, где I – элемент кольца инвариантов коприсоединенного представления $I(\mathfrak{g}^*)$, а a – фиксированный ковектор. Будем называть такие функции *сдвигами инвариантов*. Коммутативность этого набора и его полнота для полупростых алгебр Ли доказана в работе [1]. При этом под *полнотой коммутативного набора* мы понимаем то, что в этом наборе можно выделить функционально-независимые образующие, удовлетворяющие теореме Лиувилля о полной интегрируемости гамильтоновой системы [2].

Сдвиги инвариантов также позволяют построить ряд производных интегрируемых систем, таких как геодезические потоки левоинвариантных метрик на группах Ли, на симметрических и однородных пространствах [1], [3]–[5].

Для нахождения топологических и геометрических свойств рассматриваемых систем необходимо исследовать вырождения отображения момента. В терминах отображения момента и его бифуркационной диаграммы исследованы многие классические интегрируемые системы, такие как случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской в динамике твердого тела, геодезический поток на n -мерном эллипсоиде, а также многие их обобщения [6].

Приведенные ниже результаты позволяют ответить на важные геометрические вопросы в терминах алгебраической структуры исследуемых систем, минуя классические вычисления, связанные с рангом матрицы Якоби. Основной целью данной работы является исследование связи между вырождениями отображения момента и поведением спектральной кривой.

Причина этой связи заключается в том, что гамильтоновы уравнения, имеющие рассматриваемый коммутативный набор функций в качестве набора первых интегралов, можно представить в форме Лакса со спектральным параметром λ :

$$\dot{L}_\lambda = [L_\lambda, M_\lambda], \quad (1)$$

где L_λ и M_λ – некоторые матричные полиномы от элементов матрицы X и от λ , причем $L_\lambda = X + \lambda a$.

Коэффициенты спектральной кривой как полиномы от X являются рассматриваемым базисом коммутативного набора. В линейном пространстве значений этих полиномов мы имеем два множества: бифуркационную диаграмму Σ , состоящую из особых точек отображения момента, и дискриминант D , состоящий из коэффициентов особых кривых. Основная теорема 6 данной работы утверждает, что для алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ эти два множества совпадают, т.е. $\Sigma = D$.

Аналогичный факт, по-видимому, имеет место для всех полупростых алгебр Ли, а также и для их компактных форм, если рассмотреть вместо дискриминанта D его пересечение с образом отображения момента. Несмотря на то, что такая гипотеза остается пока недоказанной, исследования в этой области привели к следующему результату (теорема 7): в том случае, если $\mathfrak{g}$ – компактная полупростая алгебра Ли, множество регулярных значений отображения момента связно. Таким образом, все его регулярные совместные поверхности уровня диффеоморфны.

Более того, теорема 8 утверждает, что они состоят ровно из одного тора Лиувилля. Ее доказательство опирается на результаты первой части статьи, в которой рассматривается структура точек максимального вырождения сдвигов инвариантов. Для компактных полупростых алгебр Ли удастся полностью описать такие точки, в которых ранг отображения момента, ограниченного на регулярную орбиту, равен 0 или 1 (см. теоремы 3 и 4). Эти точки соответствуют вершинам и ребрам бифуркационной диаграммы.

§ 2. Точки сильного вырождения сдвигов инвариантов

2.1. Подалгебры, состоящие из критических точек. Рассмотрим сдвиги инвариантов на двойственном пространстве к некоторой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Оказывается, что в алгебре $\mathfrak{g}$ существуют целые подалгебры, состоящие из особых точек отображения момента F . Ниже мы опишем их строение в зависимости от вектора сдвига a .

Напомним, что для любого элемента a двойственного к алгебре пространства $\mathfrak{g}^*$ его аннулятор определяется как

$$\text{Ann } a = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall \xi \in \mathfrak{g}, \langle a, [x, \xi] \rangle = 0\}. \quad (2)$$

Индексом алгебры $\mathfrak{g}$ по определению называется размерность ковектора общего положения в $\mathfrak{g}^*$.

Напомним также простую и полезную лемму.

ЛЕММА 1 [4]. *Предположим, что x – регулярный элемент коалгебры $\mathfrak{g}^*$. Тогда линейная оболочка дифференциалов локальных инвариантов коприсоединенного представления в точке x совпадает с аннулятором $\text{Ann}(x)$.*

ТЕОРЕМА 1 [7]. *Рассмотрим произвольную алгебру $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и регулярные элементы $a \in \mathfrak{g}^*$ и $x_0 \in \mathfrak{g}^*$. Пусть $\mathfrak{l}$ – подалгебра $\mathfrak{g}$. Обозначим ограничения линейных функций a и x_0 на подалгебру $\mathfrak{l}$ через b и y_0 . Предположим, что справедливо следующее:*

- 1) $\text{ind } \mathfrak{l} = \text{ind } \mathfrak{g}$;
- 2) *функциональная размерность кольца инвариантов коприсоединенного представления на $\mathfrak{g}^*$ и на $\mathfrak{l}^*$ совпадает с индексом $\mathfrak{g}$;*
- 3) *существуют такие λ, μ , что $\mu x_0 + \lambda a$ – регулярный элемент $\mathfrak{g}^*$ и $\mu y_0 + \lambda b$ – регулярный элемент $\mathfrak{l}^*$;*
- 4) *для любого регулярного элемента $z = \mu x_0 + \lambda a$ $\text{Ann}(z) \subset \mathfrak{l}$.*

Тогда линейные пространства, порожденные дифференциалами сдвигов инвариантов $\mathfrak{g}^$ на ковектор a и порожденные сдвигами инвариантов $\mathfrak{l}^*$ на ковектор b , совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = x_0 + \lambda a$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Ann}^{\mathfrak{g}}(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall g \in \mathfrak{g}, z([x, g]) = 0\} \\ &\stackrel{4)}{=} \{x \in \mathfrak{l} \mid \forall g \in \mathfrak{g}, z([x, g]) = 0\} \\ &\in \{x \in \mathfrak{l} \mid \forall g \in \mathfrak{l}, z([x, g]) = 0\} = \text{Ann}(z|_{\mathfrak{l}}). \end{aligned} \quad (3)$$

С другой стороны, по предположению теоремы индекс $\mathfrak{l}$ и индекс $\mathfrak{g}$ совпадают. Следовательно, $\dim \text{Ann}^{\mathfrak{g}}(z) = \dim \text{Ann}^{\mathfrak{l}}(z|_{\mathfrak{l}})$.

Заметим, что дифференциалы инвариантов являются непрерывными функциями. Сингулярные точки прямой $x_0 + \lambda a$ образуют на ней множество нулевой меры и поэтому не влияют на рассматриваемую линейную оболочку. Применение леммы 1 завершает доказательство:

$$\begin{aligned} \left\langle \bigcup_{\substack{I \in I(\mathfrak{g}^*) \\ x_0 + \lambda a \in \text{Reg}(\mathfrak{g}^*)}} dI(x_0 + \lambda a) \right\rangle &= \left\langle \bigcup_{x_0 + \lambda a \in \text{Reg}(\mathfrak{g}^*)} \text{Ann}^{\mathfrak{g}}(x_0 + \lambda a) \right\rangle \\ &= \left\langle \bigcup_{y_0 + \lambda b \in \text{Reg}(\mathfrak{l}^*)} \text{Ann}^{\mathfrak{l}}(x_0 + \lambda a) \right\rangle = \left\langle \bigcup_{\substack{J \in I(\mathfrak{l}^*) \\ y_0 + \lambda b \in \text{Reg}(\mathfrak{l}^*)}} dJ(y_0 + \lambda b) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Предположим, что в условиях теоремы 1 элементы x_0 и y_0 регулярны. Тогда пространства, порожденные дифференциалами ограничений рассматриваемого инволютивного набора на орбиты $\mathcal{O}(x_0) \in \mathfrak{g}^*$ и $\mathcal{O}(y_0) \in \mathfrak{l}^*$, совпадают:*

$$\left\langle \bigcup_{I \in I(\mathfrak{g}^*), \forall \lambda} dI|_{\mathcal{O}(x_0)}(x_0 + \lambda a) \right\rangle = \left\langle \bigcup_{J \in I(\mathfrak{l}^*), \forall \lambda} dJ|_{\mathcal{O}(y_0)}(y_0 + \lambda b) \right\rangle. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя доказательство теоремы 1, мы видим, что теперь $\text{Ann } x_0 = \text{Ann } y_0$. Это подпространство принадлежит обеим частям (4). Касательное пространство к орбите коприсоединенного представления канонически отождествляется с факторпространством алгебры по аннулятору рассматриваемой точки. Поэтому, факторизуя (4) по $\text{Ann } x_0$, мы получаем (5).

Рассмотрим класс редуктивных алгебр. Инвариантная метрика позволяет отождествить присоединенное и коприсоединенное представления, а также аннуляторы и централизаторы элементов алгебры.

ТЕОРЕМА 2 [7]. Пусть $\mathfrak{g}$ – компактная полупростая алгебра Ли ранга r , $\mathfrak{l}$ – редуктивная алгебраическая подалгебра индекса r . Предположим, что a, x_0 – регулярные элементы $\mathfrak{g}$, принадлежащие также подалгебре $\mathfrak{l}$. Обозначим линейную оболочку дифференциалов функций сдвигов инвариантов на $\mathfrak{g}$, ограниченных на орбиту $\mathcal{O}^{\mathfrak{g}}(x_0)$ в точке x_0 , через $dF_a^{\mathfrak{g}}|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{g}}(x_0)}$. Дифференциалы сдвигов инвариантов подалгебры $\mathfrak{l}$ на тот же вектор a , ограниченных на меньшую орбиту $\mathcal{O}^{\mathfrak{l}}(x_0)$, обозначим через $dF_a^{\mathfrak{l}}|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{l}}(x_0)}$. Эти пространства совпадают:

$$dF_a^{\mathfrak{g}}|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{g}}(x_0)} = dF_a^{\mathfrak{l}}|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{l}}(x_0)}, \quad (6)$$

и, в частности, их размерности совпадают.

Таким образом, алгебраические подалгебры максимального индекса, содержащие вектор сдвига a , состоят целиком из критических точек коммутативного набора на $\mathfrak{g}$. Ранг отображения момента падает в этих точках до ранга коммутативного набора сдвигов инвариантов полупростой части подалгебры $\mathfrak{l}$.

Нетрудно построить пример описываемой ситуации. Для этого рассмотрим $\mathfrak{g} = \text{su}(n)$ в стандартном матричном представлении. Регулярный элемент a возьмем диагональным. Теперь любая блочно-диагональная подалгебра

$$\mathfrak{l} = \text{su}(n_1) \times \text{su}(n_2) \times \cdots \times \text{su}(n_k), \quad n_1 + \cdots + n_k = n,$$

удовлетворяет условиям теоремы.

2.2. Вершины и ребра бифуркационной диаграммы. Теорема 2 позволяет найти большое количество критических точек отображения момента F_a . Не все критические точки могут быть описаны подобным образом, однако для точек максимального вырождения мы получаем полную классификацию.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. До конца этого параграфа будем рассматривать коммутативный набор сдвигов инвариантов в ограничении на некоторую регулярную орбиту присоединенного представления компактной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Будем называть *рангом критической точки* x ранг дифференциала отображения момента dF_a , вычисленный в этой точке. Для точек ранга 0 и 1 утверждение теоремы 2 может быть доказано в обратную сторону.

ТЕОРЕМА 3 [7]. Пусть $\mathfrak{h}_a \subset \mathfrak{g}$ – подалгебра Картана, содержащая вектор сдвига a . Тогда точками ранга 0 на регулярной орбите $\mathcal{O}$ являются точки ее пересечения с подалгеброй $\mathfrak{h}_a$:

$$\text{rank } dF(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{h}_a.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему 1 к подалгебре $\mathfrak{l} = \mathfrak{h}_a \subset \mathfrak{g}$. Так как $\mathfrak{h}_a$ коммутативна, то орбиты присоединенного представления являются точками и ранг набора сдвигов инвариантов падает до 0. Следовательно, ранг сдвигов инвариантов на $\mathfrak{g}$ также равен нулю в любой точке $x_0 \in (\mathfrak{h}_a \cap \mathcal{O})$.

Обратно. Предположим, что $x_0 \notin \mathfrak{h}_a$. Так как x_0 и a – регулярные элементы, существует такое $\lambda \neq 0$, что $z_0 = x_0 + \lambda a$ – также регулярный элемент. Рассмотрим подалгебру Картана $\mathfrak{h}_{z_0}$, содержащую z_0 . Известно (лемма 3), что векторы $\text{grad } I_k(z)|_{z=z_0}$ образуют базис этой подалгебры, и поэтому можно выбрать такие константы $c_1, \dots, c_r$, что $h = \sum_k c_k (\text{grad } I_k(z)|_{z=z_0})$ регулярен. Положим $f(x) = \sum_k c_k I_k(x + \lambda a)$. По условию теоремы градиент этой функции ортогонален любому вектору $v = [x_0, g]$, касающемуся орбиты в точке x_0 :

$$\forall g \in \mathfrak{g} \quad 0 = \langle \text{grad } f|_{x_0}, [x_0, g] \rangle = \langle [h, x_0], g \rangle \Rightarrow [h, x_0] = 0. \quad (7)$$

Так как элемент h регулярен по построению, $x_0 \in \mathfrak{h}_{z_0}$. Окончательно имеем $a = 1/\lambda(z_0 - x_0) \in \mathfrak{h}_{z_0}$, что означает $\mathfrak{h}_{z_0} = \mathfrak{h}_a$ и $x_0 \in \mathfrak{h}_a$.

Рассмотрим систему корней Δ на подалгебре $\mathfrak{h}_a$. Обозначим соответствующие двумерные вещественные подпространства через V_α , где $\alpha \in \Delta$.

ЛЕММА 2. Пусть a и g – регулярные элементы компактной полупростой алгебры $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}_a$, $\mathfrak{h}_g$ – содержащие их картановские подалгебры. Если $\mathfrak{h}_g \subset \mathfrak{h}_a + \langle g \rangle$, то существует корень $\alpha \in \Delta(\mathfrak{h}_a)$ такой, что $g \in \mathfrak{h}_a + V_\alpha$, где V_α – двумерное вещественное $\text{ad}_{\mathfrak{h}_a}$ -инвариантное подпространство, соответствующее этому корню α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коразмерность $\mathfrak{h}_g$ в $\mathfrak{h}_a + \langle g \rangle$ равна 1, и централизатор любого элемента из $\mathfrak{h}_g \cap \mathfrak{h}_a$ содержит по крайней мере пространство $\mathfrak{h}_g + \mathfrak{h}_a$, размерность которого превосходит ранг алгебры $\mathfrak{g}$. Следовательно, гиперплоскость $\mathfrak{h}_g \cap \mathfrak{h}_a$ состоит из сингулярных элементов и существует корень $\alpha \in \Delta$ такой, что $\mathfrak{h}_g \cap \mathfrak{h}_a = \ker \alpha|_{\mathfrak{h}_a}$. Соответственно существует такой вектор h_α , что $\forall h \in \mathfrak{h}_a$ $[h, g] = \alpha(h)[h_\alpha, g]$. Это означает, что образ элемента g под действием $\text{ad}_{\mathfrak{h}_a}$ имеет размерность 1.

Предположим, что $g \notin \mathfrak{h}_a + V_\alpha$. Рассмотрим корневое разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_a + V_\alpha + V_\beta + \dots + V_\gamma. \quad (8)$$

Соответствующее разложение элемента g имеет вид:

$$g = h^0 + v_\alpha^1 + v_\alpha^2 + v_\beta^1 + v_\beta^2 + \dots, \quad (9)$$

где

$$h^0 \in \mathfrak{h}_a, \quad v_\alpha^1, v_\alpha^2 \in V_\alpha, \quad v_\beta^1, v_\beta^2 \in V_\beta, \quad \dots \quad (10)$$

Возьмем такие $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}_a$, что выполняются следующие условия:

$$h_1 \in \ker \alpha, \quad h_1 \notin \ker \beta, \quad h_2 \in \ker \beta, \quad h_2 \notin \ker \alpha. \quad (11)$$

Таким образом, $[h_1, g]|_{V_\alpha + V_\beta} \in V_\beta \setminus 0$ и $[h_2, g]|_{V_\alpha + V_\beta} \in V_\alpha \setminus 0$, что противоречит тому факту, что размерность образа элемента g под действием $\text{ad}_{\mathfrak{h}_a}$ равна 1.

ЛЕММА 3. Рассмотрим инвариант $I(x)$ полупростой компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и некоторый регулярный элемент x_0 . Тогда $\text{grad } I(x)|_{x=x_0} \in \mathfrak{h}_{x_0}$. Более того, градиенты инвариантов порождают всю картановскую подалгебру $\mathfrak{h}_{x_0}$.

ТЕОРЕМА 4 [7]. Точки ранга 1 являются пересечениями орбиты и подалгебры вида $\mathfrak{h}_a + V_\alpha$:

$$\text{rank } dF(x_0) \leq 1 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \Delta(\mathfrak{h}_a), x_0 \in \mathcal{O} \cap (\mathfrak{h}_a + V_\alpha).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что x_0 принадлежит подпространству $\mathfrak{l} = \mathfrak{h}_a + V_\alpha$. Подпространство $\mathfrak{l}$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$ и изоморфно $\mathbb{R}^{r-1} \oplus \mathfrak{su}(2)$, $r = \text{rank } \mathfrak{g}$. Очевидно, что $\text{ind } \mathfrak{l} = r$, и теорема 2 может быть применена к этой подалгебре. Так как $\mathfrak{h}_a$ – коммутативная алгебра, то максимальная размерность орбит присоединенного представления в $\mathfrak{l}$ равняется 2 и ранг коммутативного набора на этих орбитах равен 0 или 1. Следовательно, ранг исходного коммутативного набора на $\mathfrak{g}$ также равен 0 или 1.

Обратно. Случай точек нулевого ранга уже рассмотрен в теореме 3. Теперь предположим, что $\text{rank } dF(x_0) = 1$. Это означает, что существует такой вектор v , что $\langle \text{sgrad } f|_{x_0} \rangle \subset \langle v \rangle$, и $x_0 \notin \mathfrak{h}_a + V_\alpha$ для некоторых $\alpha \in \Delta$. Также рассмотрим такое λ , что $g_1 = x_0 + \lambda a$ – регулярный элемент. Обозначим его централизатор через $\mathfrak{h}_{g_1}$. По лемме 2

$$\mathfrak{h}_{g_1} \not\subset \mathfrak{h}_a + \langle g_1 \rangle \Rightarrow \exists g_2 \in \mathfrak{h}_{g_1}, g_2 \notin \mathfrak{h}_a + \langle g_1 \rangle. \quad (12)$$

Заметим, что $\forall g_i \in \mathfrak{h}_{g_1}$, $i = 1, 2$, существуют (см. лемму 3) соответствующие функции f_i вида $I(x + \lambda a)$ такие, что $[x_0, g_i] = \text{sgrad } f_i|_{x_0}$, $i = 1, 2$. Следовательно,

$$\exists k \quad [x_0, g_1 + kg_2] = 0, \quad g_1 + kg_2 \notin \mathfrak{h}_a. \quad (13)$$

Получаем противоречие, так как, с одной стороны, $g_1 + kg_2 \notin \mathfrak{h}_a$, но, с другой стороны,

$$\begin{aligned} [a, g_1 + kg_2] &= \frac{1}{\lambda} ([\lambda a, g_1 + kg_2] + [x_0, g_1 + kg_2]) \\ &= \frac{1}{\lambda} [x_0 + \lambda a, g_1 + kg_2] = [g_1, g_1 + kg_2] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теоремы 3 следует, что точки полного вырождения коммутативного набора на орбите инвариантны относительно действия группы Вейля $W(\mathfrak{g})$. Так как это действие свободно и транзитивно, то число точек ранга 0 равно порядку группы $W(\mathfrak{g})$.

§ 3. Спектральная кривая алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$

Рассмотрим простую алгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ в стандартном матричном представлении. Отождествим двойственное пространство $\mathfrak{g}^*$ с самой алгеброй $\mathfrak{g}$ при помощи метрики Киллинга $\langle \cdot, \cdot \rangle$. При этом мы получаем на алгебре $\mathfrak{g}$ стандартную пуассонову структуру

$$\{f, g\}(X) = \langle X, [df(X), dg(X)] \rangle, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}). \quad (15)$$

Заметим, что эта пуассонова структура имеет центр, состоящий из инвариантов присоединенного представления соответствующей группы Ли, причем совместные поверхности уровня этих инвариантов являются многообразиями, на которых данная пуассонова структура невырождена.

В кольце инвариантов присоединенного представления $I(\mathfrak{g})$ можно выбрать систему порождающих элементов $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$, взяв нетривиальные коэффициенты характеристического многочлена матрицы X :

$$L(\mu) = \det(X - \mu E), \quad X \in \mathfrak{g}, \quad E - \text{единичная матрица}. \quad (16)$$

Рассмотрим некоторый фиксированный регулярный полупростой элемент $a \in \mathfrak{g}$ и кольцо B_a , порожденное всеми функциями вида

$$f(X) = I(X + \lambda a), \quad X \in \mathfrak{g}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad f \in I(\mathfrak{g}). \quad (17)$$

Это кольцо B_a замечательно тем, что по теореме Мищенко и Фоменко [1] оно является коммутативным относительно рассматриваемой скобки Пуассона. Кроме того, для регулярных элементов a в кольце B_a содержится максимально возможное количество попарно коммутирующих и функционально независимых функций. Это число $N = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{ind } \mathfrak{g}) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Спектральной кривой элемента $X \in \mathfrak{g}$ называется алгебраическая кривая Γ_X , заданная в $\mathbb{C}^2$ с координатами (λ, μ) уравнением*

$$\Gamma_X: R_X(\lambda, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \det(X + \lambda a - \mu E) = 0. \quad (18)$$

Коэффициентами старшей части многочлена R_X являются постоянные величины $c_1 = I_1(a), \dots, c_{n-1} = I_{n-1}(a)$. Остальные коэффициенты многочлена R_X — это полиномиальные функции $f_1(X), \dots, f_N(X)$, образующие в совокупности базис Φ_a коммутативного набора, среди которых первые $n-1$ функций — это инварианты орбиты

$$I_1(X) = f_1(X), \dots, I_{n-1}(X) = f_{n-1}(X).$$

ПРИМЕР 1. Алгебра $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$:

$$R(\lambda, \mu) = (\mu^3 + c_1\mu\lambda^2 + c_2\lambda^3) + I_1 + I_2\mu + f_3\lambda\mu + f_4\lambda + f_5\lambda^2.$$

В случае регулярного элемента a и регулярной орбиты O_I коммутативный набор $(f_1, f_2, \dots, f_N)$ содержит квадратичные функции, которые называются *гамильтонианами обобщенной задачи о вращении n -мерного твердого тела, закрепленного в центре масс*. Построенные функции обеспечивают полную

интегрируемость этих гамильтоновых систем в смысле классической теоремы Лиувилля.

Для топологического анализа таких систем мы исследуем вырождения отображения момента

$$F_a : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}^N, \quad X \mapsto (f_1(X), \dots, f_N(X)). \quad (19)$$

Для этого определим его бифуркационную диаграмму:

$$\Sigma = \{\xi \in \mathbb{C}^N \mid \exists X \in \mathfrak{g}, \text{rank } dF_a(X) < N, \xi = F_a(X)\}. \quad (20)$$

Заметим теперь, что спектральная кривая Γ_X полностью определяется вектором ξ и, следовательно, ее можно доопределить для любого элемента линейного пространства $\mathbb{C}^N$. Обозначим такую кривую через Γ_ξ .

Будем говорить, что кривая $\Gamma_\xi : R(\lambda, \mu) = 0$ имеет *особую точку* $P = (\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{C}^2$, если

$$R(P) = \frac{\partial R}{\partial \lambda}(P) = \frac{\partial R}{\partial \mu}(P) = 0. \quad (21)$$

Назовем следующее множество *дискриминантом*:

$$D = \{\xi \in \mathbb{C}^N \mid \exists P \in \Gamma_\xi, P \text{ — особая точка}\}. \quad (22)$$

Следующая лемма составляет первую часть теоремы о совпадении дискриминанта и бифуркационной диаграммы отображения момента.

ЛЕММА 4. Пусть $X, a \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ и существуют неколлинеарные собственные векторы v, w матрицы X с собственным значением μ_0 . Тогда спектральный многочлен $R(\lambda, \mu) = \det(X + \lambda a - \mu E)$ вырождается в точке $P = (0, \mu_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как спектральный многочлен инвариантен относительно замены базиса в пространстве $\mathbb{C}^n$, то мы можем считать, что векторы v и w входят в этот базис как первые векторы. Тогда матрица $X - \mu_0 E$ имеет два первых нулевых столбца, а матрица $X - \mu_0 a + \lambda a - (\mu - \mu_0)E$ в этих же столбцах имеет элементы вида $c\lambda + d(\mu - \mu_0)$. Разлагая определитель по двум первым столбцам, получаем, что каждое слагаемое начинается с некоторой квадратичной функции $(c_1\lambda + d_1(\mu - \mu_0))(c_2\lambda + d_2(\mu - \mu_0))$ и удовлетворяет условию (21) как многочлен от λ и μ . Следовательно, весь определитель, являясь суммой таких слагаемых, также удовлетворяет условию (21).

Будем говорить, что коммутативный набор функций является *полным в некоторой точке алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, если ранг соответствующего отображения момента максимален и равен $N = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{rank } \mathfrak{g})$. Коммутативный набор B_a , рассматриваемый в этой работе, происходит из пары согласованных скобок Пуассона — скобки (15) из скобки Ли–Пуассона на $\mathfrak{g}^*$ и постоянной скобки

$$\{f, g\}_a(X) = \langle a, [df(X), dg(X)] \rangle, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}). \quad (23)$$

Для согласованных скобок Пуассона имеется общий критерий полноты коммутативного набора, полученный Болсиновым [8]. В нашем случае этот критерий имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathfrak{g}$ – комплексная полупростая алгебра Ли. Коммутативный набор B_a является полным в точке X тогда и только тогда, когда a и X не пропорциональны и плоскость $\{\lambda a + \delta X \mid \lambda, \delta \in \mathbb{C}\}$ не содержит ненулевых сингулярных элементов алгебры $\mathfrak{g}$.

ТЕОРЕМА 6. Бифуркационная диаграмма Σ совпадает с дискриминантом D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $\Sigma \in D$, т.е. проверим следующий факт: если отображение момента вырождено в точке $X \in \mathfrak{g}$, то спектральная кривая Γ_X имеет особую точку. Действительно, по критерию Болсинова (теорема 5) существует такое λ_0 , что $x + \lambda_0 a$ – сингулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$. В силу леммы 4 существует такое значение μ_0 , что многочлен $P(\lambda, \mu) = \det(X + \lambda a - \mu E)$ имеет особую точку (λ_0, μ_0) .

Обратное утверждение является более трудным, и его доказательство состоит в построении отображения $S: \Sigma \rightarrow \mathfrak{g}$ такого, что $F_a \circ S = \text{Id}|_{\Sigma}$, и обладающего следующим свойством: $\xi \in D \Rightarrow \text{corank } dF|_{S(\xi)} \geq 1$.

Пусть вектор сдвига диагонален $a = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ и мы нашли такие b и Y , что $I_1(Y) = \xi_1, \dots, I_{n-1}(Y) = \xi_{n-1}$, элемент b сопряжен элементу a в $\text{SL}(n, \mathbb{C})$: $b = PaP^{-1}$, и $\det(Y + \lambda b - \mu E) = R_{\xi}$, причем если (λ_0, μ_0) – особая точка кривой Γ_{ξ} , то $Y_0 = Y + \lambda_0 b \in \text{Sign}(\mathfrak{g})$. Тогда $P^{-1}YP + \lambda_0 a \in \text{Sign}(\mathfrak{g})$ и $S(\xi) = P^{-1}YP$ является искомым решением. Элементы b и Y_0 удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} \det(Y_0 + \lambda b - \mu E) &= \det(Y_0 + (\lambda_0 + \lambda)b - \mu E) \\ &= R_{\xi}(\lambda_0 + \lambda, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{\lambda_0} R_{\xi}(\lambda, \mu). \end{aligned} \quad (24)$$

Преобразование сдвига ϕ_{λ_0} линейно, обратимо и сохраняет старшую часть многочлена R_{ξ} . Если ξ_{ij} – коэффициент при мономе $\lambda^i \mu^j$, а ξ_{ij}^* – соответствующий базисный вектор в $\mathbb{C}^N$, то

$$\phi_{\lambda_0} \xi_{ij}^* = \sum_{k=0}^i C_i^k \lambda_0^{i-k} \xi_{kj}^*. \quad (25)$$

Будем искать элементы b и Y_0 в следующем виде:

$$b = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Диагональная часть матрицы b должна совпадать с вектором сдвига a с точностью до перестановки ее элементов. Это обеспечивает требуемый вид старшей части многочлена R_{ξ} . Так как элемент a регулярен, то из этого следует также, что b и a сопряжены. Диагональные элементы Y_0 являются корнями уравнения

$$(\phi_{\lambda_0} R_{\xi})(0, \mu) = R_{\xi}(\lambda_0, \mu) = 0, \quad (26)$$

и среди них по предположению есть кратное значение μ_0 . Теперь нам остается определить значения внедиагональных элементов a_{ij} матрицы b .

Обозначим стандартный базис из матричных единиц в $\text{gl}(n, \mathbb{C})$ через $\{e_{ij}\}$. Пространство V , в котором мы ищем матрицу b , обладает следующей фильтрацией:

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-2}, \quad (27)$$

где V_0 является диагональной подалгеброй, а V_i , $i = 1, \dots, n-2$, определено как линейная оболочка: $V_i = \langle e_{2+i,1}, e_{2+i,2}, e_{3+i,3}, \dots, e_{n,n-i} \rangle$. Соответствующее разложение b обозначим $b = A_0 + A_1 + \cdots + A_{n-2}$. Сделаем замену переменной $\lambda \mapsto \lambda + \lambda_0$. Тогда особая точка кривой Γ_ξ будет иметь координаты $(0, \mu_0)$, а коэффициенты многочлена R_ξ , т.е. координаты вектора ξ , преобразуются под действием невырожденного линейного преобразования ϕ_{λ_0} , зависящего только от λ_0 .

ЛЕММА 5. Пусть $i + j = k$, $i \geq 1$, $k \geq 1$. Тогда коэффициент f_{ij} при мономе $\lambda^i \mu^j$ многочлена $\det(Y_0 + \lambda b - \mu E)$ имеет вид:

$$f_{ij}(b) = \Lambda_{ij}(A_{n-k}) + F_{ij}(A_{n-k-1}, A_{n-k-2}, \dots, A_1), \quad (28)$$

где $\Lambda_{ij}(A_{n-k})$ — линейные функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ψ_{ij} — базис коалгебры $\text{gl}(n, \mathbb{C})^*$, двойственный базису матричных единиц. Назовем *высотой базисной функции* ψ_{ij} число

$$\text{ht}(\psi_{ij}) = j - i. \quad (29)$$

Соответственно *высотой монома от переменных* ψ_{ij} назовем сумму высот его сомножителей. Коэффициенты характеристического многочлена матрицы являются суммами ее главных миноров, т.е. одночленов высоты 0. Заметим, что матрица $Y_0 + \lambda b$ содержит только один (ненулевой) элемент высоты 2 и $n-2$ элемента высоты 1; остальные ее элементы имеют неположительную высоту. Следовательно, разлагая главный минор порядка k , не содержащий первой строки матрицы, мы получаем единственный моном высоты $(-k)$:

$$\pm a_{ij} \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1. \quad (30)$$

В том случае, если моном содержит ψ_{13} , он также должен содержать недиагональный элемент первого столбца, который имеет высоту -1 или меньше. Пусть это единственный элемент отрицательной высоты в рассматриваемом мономе. Тогда этим элементом является $a_{k+2,1}$, принадлежащий подпространству V_k . В противном случае этот моном содержит не менее двух элементов отрицательной высоты, каждый из которых должен лежать в подпространстве меньшей градуировки. Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что f_{ij} является линейной комбинацией главных миноров матрицы $b - A_0$, каждый из которых линейно зависит от A_{n-k} .

ЛЕММА 6. Функции $\Lambda_{ij}(A_k)$ линейно независимы и их число равно размерности подпространства V_k . Определитель D_n^k , образованный их коэффициентами, вычисляется по формуле

$$D_n^k = \prod_{(i,j) \in M} (a_i - a_j), \quad (31)$$

где множество индексов M имеет вид:

$$M = \{(i, j) \mid i - j \geq k\} \cup (1, 2) \setminus (1 + k, 1). \quad (32)$$

После того, как из этой матрицы вычеркивается строка с номером i , ее определитель легко вычисляется. Для этого нужно заметить, что, производя элементарные

преобразования над строками матрицы, мы можем привести ее к такому виду, в котором первые $i - 1$ строк совпадают с первыми $i - 1$ строками в первом слагаемом разложения (36), а последние $k - i$ строк совпадают с последними $k - i$ строками второго слагаемого. Вынося из последних $k - i$ строк множитель a^{k-i} , мы завершаем доказательство индукционного перехода. Лемма доказана.

Доказательство основной теоремы теперь завершено, так как по вектору ξ можно, двигаясь по градуировке, вычислить все элементы искомой матрицы b .

§ 4. Регулярные точки отображения момента на компактных алгебрах Ли

Рассмотрим инволютивный набор функций $(f_1, \dots, f_N)$, полученный методом сдвига инвариантов на компактной полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В силу полноты данного набора функций его неособые совместные поверхности уровня являются объединениями торов. Докажем следующие утверждения о строении множества особых точек.

ТЕОРЕМА 7. *Для почти всех регулярных векторов сдвига a множество неособых точек отображения момента F_a связно.*

ТЕОРЕМА 8. *Любая неособая совместная поверхность уровня состоит ровно из одного тора.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{Sign}(\mathfrak{g})$ обозначает множество сингулярных элементов алгебры. Определим множества

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1(a) &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, x + \lambda a \in \text{Sign}(\mathfrak{g})\}, \\ \mathfrak{g}_2(a) &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, x + \lambda a \in \text{Sign}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Критерий Болсинова (теорема 5) для компактной алгебры Ли имеет такой же вид, но сингулярные элементы надо рассматривать не только в алгебре $\mathfrak{g}$, но и в ее комплексификации $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Поэтому множество $\mathfrak{g}_1(a) \cup \mathfrak{g}_2(a)$ есть в точности множество сингулярных точек отображения момента F_a . Коразмерности множеств $\mathfrak{g}_1(a)$ и $\mathfrak{g}_2(a)$ равняются соответственно 2 и 4 для почти всех a . Это следует из того, что для полупростой алгебры $\text{codim Sign}(\mathfrak{g}) = 3$.

Для почти всех a коразмерность множества $\mathfrak{g}_2(a)$ не меньше 4. Действительно, пусть это не так. Множество ненулевых вещественных чисел обозначим через $\mathbb{R}^*$. Имеем $\text{codim } \mathfrak{g}_2(a) \leq 3$. Тогда коразмерность множества

$$S(a) = \text{Sign}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \cap (\mathfrak{g} + i\mathbb{R}^*a) \quad (38)$$

в $\mathfrak{g} + i\mathbb{R}^*a$ равна 5 или меньше для почти всех a в силу того, что

$$\mathfrak{g}_2(a) = \text{Pr}_{\mathfrak{g}} \left(\bigcup_{\mu \in \mathbb{R}^*} S(\mu a) \right) + \mathbb{R}a. \quad (39)$$

Противоречие, так как вещественная коразмерность $\text{Sign}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ равна 6.

ЛЕММА 7. Если x_1 принадлежит $\mathfrak{g}_1(a)$ и $F_a(x_2) = F_a(x_1)$, то x_2 также принадлежит $\mathfrak{g}_1(a)$, т.е. $F_a(\mathfrak{g}_1(a))$ не разделяет множества регулярных значений.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для почти всех векторов сдвига a регулярные точки отображения момента F_a образуют открытое связное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию существует такое $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, что $y_1 = x_1 + \lambda_0 a \in \text{Sign}(\mathfrak{g})$. Рассмотрим элемент $y_2 = x_2 + \lambda_0 a$. Инварианты алгебры принимают на нем те же значения, что и на y_1 . Так как значения инвариантов однозначно определяют орбиту в компактной алгебре, то y_1 и y_2 лежат на одной и той же орбите и, следовательно, сингулярны одновременно.

Пусть a таково, что $\text{codim } \mathfrak{g}_2(a) \geq 4$. Рассмотрим два регулярных значения $\xi_1 = F_a(x_1)$ и $\xi_2 = F_a(x_2)$. Точки x_1 и x_2 можно соединить непрерывным путем $\gamma(t)$, проходящим только через регулярные точки. Путь $F_a(\gamma(t))$ соединяет ξ_1 и ξ_2 . При этом он не может пересекать $F_a(\mathfrak{g}_1(a))$ в силу леммы 7. Также можно считать, что этот путь не пересекает $F_a(\mathfrak{g}_2(a))$, так как в точках $\mathfrak{g}_2(a)$ ранг отображения момента падает не менее чем на 2, и соответственно $\text{codim } F_a(\mathfrak{g}_2(a)) \geq 2$. Следствие 2 доказано.

Продолжим доказательство теоремы 8. Так как для почти всех a у нас уже есть связность множества регулярных значений, то остается проверить утверждение теоремы 8 хотя бы в одной точке. В качестве такой точки мы возьмем точку максимального падения ранга инволютивного набора Φ_a на регулярной орбите и докажем ее невырожденность в смысле теории интегрируемых систем (см. [9]). Окончательное доказательство утверждения теоремы следует из леммы 8 и соображений непрерывности.

Зафиксируем некоторую картановскую подалгебру H и соответствующее разложение алгебры в прямую сумму $\mathfrak{g} = H \oplus V$. Для вектора сдвига $a \in H$ любой регулярный элемент $x_0 \in H$ является точкой максимального вырождения коммутативного набора Φ_a на регулярной орбите $O(x_0)$ (см. теорему 3).

ЛЕММА 8. Для почти всех $a \in H$ инволютивный набор Φ_a имеет в точке x_0 невырожденную особенность типа “центр-центр-...-центр”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим элемент алгебры в прямую сумму

$$x = h + v, \quad h \in H, \quad v \in V.$$

Каждая компонента h принадлежит кольцу B_a , порожденному набором Φ_a . Поэтому функция $\|v\|^2 = \|x\|^2 - \|h\|^2$ также принадлежит этому кольцу. Так как она положительно определена, то мы получаем минимаксную особенность. Теперь нам остается проверить невырожденность этой особенности.

Как известно [4], квадратичные функции вида $(x, \varphi_{ab}(x)) = (v, \varphi_{ab}(v))$ также лежат в B_a . Нам достаточно предъявить такие $a, b \in H$, что оператор φ_{ab} , ограниченный на V , имеет N рационально независимых собственных чисел.

Собственные числа оператора φ_{ab} известны [4] – все они имеют вид:

$$\lambda_i = \frac{\alpha_i(b)}{\alpha_i(a)}, \quad \alpha_i \in \Delta_+,$$

где Δ_+ – множество положительных корней на картановской подалгебре H .

Пусть элемент b зафиксирован так, что для любого корня α числа $\alpha(b)$ отличны от нуля, т.е. b регулярен. Тогда для любого ненулевого вектора $(c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{Q}^N$ условие

$$\sum_{i=1}^N c_i \frac{\alpha_i(b)}{\alpha_i(a)} \neq 0$$

определяет некоторую гиперповерхность в H . Так как таких гиперповерхностей счетное число, то утверждение доказано. Заметим, что мы использовали линейную независимость рациональных функций $1/\alpha_i(a)$, которая вытекает из независимости множеств, на которых они обращаются в ∞ .

Для завершения доказательства теоремы 8 рассмотрим поверхность уровня M_ξ . Она является компактным подмножеством некоторой орбиты O . Рассмотрим сходящуюся последовательность $\{a_i\} \rightarrow a$ такую, что для любого i поверхность уровня $F_{a_i}^{-1}(\xi)$ – регулярный тор.

Если M_ξ имеет хотя бы две компоненты связности M_1 и M_2 , то они имеют пересекающиеся открытые ε -окрестности $U_\varepsilon(M_1)$ и $U_\varepsilon(M_2)$. Так как все $F_{a_i}^{-1}(\xi)$ связны, то они имеют непустое пересечение с замкнутым множеством $O \setminus (U_\varepsilon(M_1) \cup U_\varepsilon(M_2))$. Следовательно, существует последовательность $\{x_i\}$, $x_i \in F_{a_i}^{-1}(\xi)$, из которой нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к M_ξ . Это противоречит непрерывной зависимости компонент отображения F_a от a . Теорема доказана.

Список литературы

1. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Т. 19. М.: Изд-во МГУ, 1979. С. 3–94.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
3. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Об интегрируемости уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. №3. С. 536–538.
4. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. №2. С. 396–415.
5. Brailov Yu. A., Fomenko A. T. Lie groups and integrable Hamiltonian systems // Recent advances in Lie theory. Selected contributions to the 1st colloquium on Lie theory and applications, Vido, Spain, July 17–22, 2000 / ed. I. Bajo et al. Lemgo: Heldermann, 2002. P. 45–76.
6. Харламов М. П. Топологический анализ классических интегрируемых случаев динамики твердого тела // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. №6. С. 1322–1325.
7. Браилов Ю. А. Топология бифуркационных диаграмм интегрируемых систем на полупростых алгебрах Ли // Докл. РАН. 2000. Т. 375. №2. С. 151–153.
8. Болсинов А. В. Критерий полноты семейства функций в инволюции, построенного методом сдвига аргумента // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. №5. С. 1037–1040.
9. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: Удмуртский университет, 1999.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
10.06.2003