Общероссийский математический портал

Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 11, 17–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm779>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:28:18

УДК 517.5

Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов

Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах

В работе формулируются и доказываются многомерные тауберовы теоремы для стандартных усреднений обобщенных функций медленного роста со значениями в банаховых пространствах. Эти теоремы позволяют по асимптотическому поведению усреднений судить об асимптотическом поведении самой усредняемой функции. Асимптотической шкалой в этих теоремах служит класс правильно меняющихся функций. Особое внимание уделено ядрам усреднения, некоторые из моментов которых или их линейные комбинации обращаются в нуль. Существенную роль в этих теоремах играет структура нуля преобразований Фурье рассматриваемых ядер.

Доказанные теоремы применяются для изучения асимптотических свойств решений задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе медленно растущих обобщенных функций, к задаче о диффузии многокомпонентного газа и к задаче о некомпенсации особенностей для голоморфных функций в трубчатых областях над острыми конусами.

Библиография: 6 названий.

Введение

В предыдущих статьях [1], [2] мы исследовали условия, при которых обобщенная функция одного переменного, принимающая а priori значения в локально выпуклом пространстве, на самом деле, принимает значения в более узком банаховом пространстве. Эти условия формулировались в терминах свойств стандартных усреднений обобщенных функций с невырожденными ядрами. В настоящей работе мы рассматриваем аналогичные вопросы в случае обобщенных функций многих переменных. При этом если рассматривать ядра усреднений, нулевой момент которых отличен от нуля, то ситуация здесь принципиально не отличается от одномерной, а возникающие дополнительные трудности носят чисто технический характер. В многомерном случае большой интерес представляют ядра усреднений, некоторые из моментов которых или их линейных комбинаций обращаются в нуль. Тогда ситуация становится существенно сложнее и, вместе с тем, значительно богаче. Это, в частности, связано со сложной структурой нулей многочленов нескольких переменных.

В §1 мы вводим основные определения и обозначения и напомним некоторые факты из теории обобщенных функций и смежных областей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00076) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1542.2003.1).

Целью §2 является доказательство общего утверждения, состоящего в том, что если некоторое усреднение заданной обобщенной функции f , принимающей значения в некотором широком банаховом пространстве $\mathcal{L}$, принимает значения в более узком банаховом пространстве $\mathbb{B}$ и удовлетворяет там стандартной “оценке класса”, то и сама f принимает значения в $\mathbb{B}$ на некотором замкнутом подпространстве $\mathcal{S}_1$ пространства основных функций $\mathcal{S}$. Это подпространство строится с помощью некоторых идеалов кольца всех многочленов n переменных, которые, в свою очередь, определяются ядром усреднения. Доказательство этого утверждения опирается на несколько лемм, некоторые из которых представляют и самостоятельный интерес.

В §3 это общее утверждение применяется в конкретных, но важных случаях, связанных с квазиасимптотическим поведением обобщенных функций. При этом возникают новые интересные эффекты, существенно уточняющие общие результаты. В частности, оказалось, что обобщенная функция, которая согласно общему утверждению обладает квазиасимптотикой лишь на замкнутом подпространстве основных функций, будет обладать квазиасимптотикой на всем $\mathcal{S}$, если из нее предельно вычесты контрчлены специального вида.

В §4 мы применяем полученные результаты для изучения асимптотических свойств решений задачи Коши для уравнения теплопроводности, задачи Коши для диффузии многокомпонентных веществ и некомпенсации граничных особенностей голоморфных функций в трубчатых областях.

В приложение мы отнесли несколько лемм, одна из которых является некоторым вариантом классической теоремы Карлесона о короне. Доказательство этих лемм в основном тексте сильно перегрузило бы изложение и затруднило восприятие основных результатов.

§1. Основные обозначения и определения

Через $\mathcal{S}$ обозначаем пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, быстроубывающих вместе со всеми производными, с топологией, задаваемой счетной системой полуноrm

$$\mathcal{P}_N[\varphi] = \max_{0 \leq |j| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{N/2} |\varphi^{(j)}(x)|, \quad N = 0, 1, \dots$$

Здесь j – мультииндекс. Как обычно,

$$j = (j_1, \dots, j_n), \quad |j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n, \quad x^j = x_1^{j_1} \cdot \dots \cdot x_n^{j_n}, \\ \partial x^j = \partial x_1^{j_1} \cdot \partial x_2^{j_2} \cdot \dots \cdot \partial x_n^{j_n}, \quad j! = j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_n!, \quad \varphi^{(j)}(x) = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x^j} \varphi(x).$$

Через $\mathcal{S}_N$ будем обозначать банахово пространство с нормой $\mathcal{P}_N$, так что $\mathcal{S} = \bigcap_{N \geq 0} \mathcal{S}_N$.

Пространство $\mathcal{S}'$ – сопряженное к пространству $\mathcal{S}$ (пространство обобщенных функций медленного роста).

Всюду далее волной обозначается преобразование Фурье основной (обобщенной) функции, так что если $\varphi(x) \in \mathcal{S}$, то

$$F[\varphi] = \tilde{\varphi}(t) = \int e^{ixt} \varphi(x) dx.$$

Напомним, что $F[\mathcal{S}] = \mathcal{S}$. Для обобщенных функций по определению $(\tilde{f}, \tilde{\varphi}) = (f, \varphi)$.

Как обычно, через $[x]$ обозначаем целую часть числа x .

Тейлоровское разложение в начале координат функции $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ до порядка ℓ включительно обозначаем $T_\varphi^\ell(x)$, так что

$$T_\varphi^\ell(x) = \sum_{|j|=0}^{\ell} \frac{1}{j!} \varphi^{(j)}(0) x^j.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что функция $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ *не вырождена в нуле*, если существует число m такое, что ее тейлоровское разложение порядка m в начале координат удовлетворяет следующему условию:

для любого вектора $\bar{e} \in \mathbb{R}^n$, $|\bar{e}| = 1$,

$$T_\varphi^m(\lambda \bar{e}) \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda > 0. \quad (1.1)$$

Через $\mathbb{P}$ обозначаем кольцо всех многочленов от n переменных. Пусть ℓ — целое неотрицательное число. Через $\mathbb{P}^\ell$ обозначим кольцо (идеал в $\mathbb{P}$) всех многочленов вида $\sum_{|j|=\ell+1}^q C_j x^j$, здесь q — любое целое число, $\ell + 1 \leq q < \infty$.

Пусть $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_N(x)\}$ — множество многочленов, где P_k — однородный многочлен степени k . Через $\mathbb{P}[P_0, P_1, \dots, P_N]$ обозначаем идеал (в $\mathbb{P}$), натянутый на многочлены $P_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, N$. Другими словами, многочлен $T^\ell(t)$ степени ℓ принадлежит идеалу $\mathbb{P}[P_0, P_1, \dots, P_N]$, если

$$T^\ell(t) = \sum_{k=0}^N P_k(t) Q_k(t), \quad (1.2)$$

где без ограничения общности можно считать, что $Q_k(t)$ — многочлены степени не выше $\ell - k$, в частности, $N \leq \ell$. Отметим, что представление (1.2) неоднозначно. Однако, пользуясь стандартными методами линейной алгебры, можно доказать следующее утверждение.

Обозначим через $\bar{Q}$ вектор, имеющий своими компонентами все коэффициенты многочленов $Q_k(t)$, $k = 0, \dots, N$, а через $\bar{T}$ — вектор, имеющий своими компонентами все коэффициенты многочлена $T^M(t)$. Тогда существует постоянная A , зависящая только от ℓ и многочленов $P_k(t)$, $k = 0, \dots, N$, такая, что многочлены $Q_k(t)$ в (1.2) могут быть выбраны таким образом, чтобы выполнялась оценка

$$\|\bar{Q}\| \leq A \|\bar{T}\|. \quad (1.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть M — целое число и $\{P_k(x), k = 0, 1, \dots, N\}$ — множество, где $P_k(x)$ — однородный многочлен степени k или тождественный нуль. Через $\mathcal{S}_{[M; P_0, \dots, P_N]}$ обозначим подпространство пространства $\mathcal{S}$, состоящее из основных функций, тейлоровское разложение которых в начале координат порядка M принадлежит идеалу $\mathbb{P}[P_0, P_1, \dots, P_N]$. Другими словами,

$$\mathcal{S}_{[M; P_0, \dots, P_N]} = \{\varphi \in \mathcal{S} : T_\varphi^M \in \mathbb{P}[P_0, P_1, \dots, P_N]\}. \quad (1.4)$$

При этом условимся считать, что при $M < 0$ справедливо $\mathcal{S}_{[M;P_0,\dots,P_N]} = \mathcal{S}$. Заметим, что если $N > M$, то

$$\mathcal{S}_{[M;P_0,\dots,P_N]} = \mathcal{S}_{[M;P_0,\dots,P_M]}. \quad (1.5)$$

Положим далее

$$\tilde{\mathcal{S}}_{[M;P_0,\dots,P_N]} = \{\varphi \in \mathcal{S} : \tilde{\varphi} \in \mathcal{S}_{[M;P_0,\dots,P_N]}\}. \quad (1.6)$$

Отметим, что если $P_0 \neq 0$, то $\mathcal{S}_{[M;P_0,\dots,P_N]} = \mathcal{S}$.

Можно дать другое эквивалентное описание пространства $\tilde{\mathcal{S}}_{[M;P_0,\dots,P_N]}$ (см. лемму П.5), а именно: $\tilde{\mathcal{S}}_{[M;P_0,\dots,P_M]}$ состоит из тех и только тех основных функций $\varphi(x) \in \mathcal{S}$, для которых $\int Q(x)\varphi(x) dx = 0$, где $Q(x)$ – любой многочлен степени не выше M такой, что

$$P_q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)Q(x) = 0, \quad q = 0, 1, \dots, M. \quad (1.7)$$

Отсюда, в частности, следует, что $\tilde{\mathcal{S}}_{[M;P_0,\dots,P_M]}$ (а, следовательно, и $\mathcal{S}_{[M;P_0,\dots,P_M]}$) – замкнутое подпространство пространства $\mathcal{S}$.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ – произвольные локально выпуклые топологические пространства. Через $\mathbb{L}(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L})$ обозначаем пространство всех линейных непрерывных отображений из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{L}$. Таким образом, $\mathcal{S}'$ есть не что иное как $\mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C})$. Пространство $\mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$ можно трактовать как пространство обобщенных функций медленного роста над $\mathcal{S}$ со значениями в $\mathcal{L}$. Для $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$ и $\varphi \in \mathcal{S}$ положим

$$L_f^\varphi(x, y) = \left(f(\xi), \frac{1}{y^n}\varphi\left(\frac{x-\xi}{y}\right)\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times (0, 1], \quad (1.8)$$

$L_f^\varphi(x, y)$ – это стандартное усреднение обобщенной функции f с ядром φ . Отметим его связь с обычным преобразованием Лапласа. Пусть Γ – острый выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат и $C = \text{int } \Gamma^*$, где Γ^* – сопряженный конус (см., например, [3]). Пусть $\text{supp } f \subset \Gamma$. Преобразование Лапласа f определяется формулой

$$L[\tilde{f}](z) = (\tilde{f}(t), e^{i(z,t)}), \quad \text{Im } z \in \mathbb{C}.$$

Нетрудно видеть, что если $\tilde{\omega}(t) \in \mathcal{S}$ и $\tilde{\omega}(t) = e^{-(h,t)}$ при $h \in C$ и $t \in \Gamma$, то

$$L[\tilde{f}](x + iyh) = L_f^\omega(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0.$$

Таким образом, $L_f^\omega(x, y)$ при произвольном $\omega \in \mathcal{S}$ можно считать *обобщенным преобразованием Лапласа* от $\tilde{f} \in \mathcal{S}'$.

Если $\mathbb{B}$ – банахово пространство, следующее утверждение является прямым следствием непрерывности отображения f на пространстве $\mathcal{S}$.

Пусть $f(\xi) \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$. Тогда существуют C, N, a и b такие, что

$$\|L_f^\varphi(x, y)\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{C}{y^b}(1 + |x|)^a P_N[\varphi], \quad 0 < y \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (1.9)$$

Пусть функция $g(x)$ определена на некотором открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и принимает значения в некотором банаховом пространстве $\mathbb{B}$. Мы говорим, что $g(x)$ *измерима*, если она измерима по Бохнеру, т.е. если она является пределом почти всюду по $x \in \Omega$ последовательности непрерывных в Ω функций со значениями в $\mathbb{B}$.

Пусть $\rho(k)$ – положительная и непрерывная функция при $k \geq k_0$, где k_0 – некоторое положительное число. Говорят, что $\rho(k)$ – *автомодельная (правильно меняющаяся) функция*, если существует предел

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\rho(k\xi)}{\rho(k)} = \psi(\xi),$$

причем сходимость равномерна по ξ на каждом компакте полуоси $(0, \infty)$. Легко видеть, что $\psi(\xi) = \xi^\alpha$ при некотором α . В этом случае функцию $\rho(k)$ называют *автомодельной порядка α* .

Ясно, что автомодельную функцию можно доопределить на отрезке $[0, k_0]$ так, чтобы она стала непрерывной и положительной на всей замкнутой положительной полуоси. В дальнейшем мы полагаем, что любая автомодельная функция определена, непрерывна и положительна на $[0, +\infty)$. При этом для любого $\varepsilon > 0$ существует C_ε такая, что

$$\frac{\rho(\varkappa k)}{\rho(k)} \leq C_\varepsilon \begin{cases} (1 + \varkappa^{\alpha+\varepsilon}), & k > 1, \alpha > 0; \\ \varkappa^{\alpha \pm \varepsilon}, & k > 1, \alpha \leq 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

где верхний знак берется при $\varkappa \geq 1$ и нижний – при $\varkappa < 1$. Подробнее см. [3], [4]. Кроме того, для автомодельных функций при $k \rightarrow +\infty$ справедливы соотношения

$$k\rho(k) \sim \begin{cases} \int_1^k \rho(\varkappa) d\varkappa, & \alpha > -1; \\ \int_k^\infty \rho(\varkappa) d\varkappa, & \alpha < -1. \end{cases} \quad (1.11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$, $\rho(k)$ – автомодельная функция и E – некоторое множество основных функций из $\mathcal{S}$. Будем говорить, что f *квазиасимптотически ограничена (обладает квазиасимптотикой) в нуле относительно $\rho(k)$ на множестве $E \subset \mathcal{S}$* , если

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| \left(f\left(\frac{x}{k}\right), \varphi(x) \right) \right\|_{\mathbb{B}} < \infty \quad \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \left(f\left(\frac{x}{k}\right), \varphi(x) \right) = C_\varphi \right) \quad (1.12)$$

для любой $\varphi \in E$. Аналогично, будем говорить, что f *квазиасимптотически ограничена (обладает квазиасимптотикой) на бесконечности относительно $\rho(k)$ на множестве $E \subset \mathcal{S}$* , если

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \|(f(kx), \varphi(x))\|_{\mathbb{B}} < \infty \quad \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(kx), \varphi(x)) = C_\varphi \right) \quad (1.13)$$

для любой $\varphi \in E$.

§ 2. Основные леммы и утверждения

Основная цель этого параграфа – доказать теорему 2.1. Этому доказательству мы предпошлим несколько лемм, касающихся стандартных усреднений обобщенных функций над $\mathcal{S}$ со значениями в локально выпуклом пространстве $\mathcal{L}$. Напомним, что усреднение функции $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$ с ядром $\omega \in \mathcal{S}$ задается формулой

$$L_f^\omega(x, y) = \left(f(\xi), \frac{1}{y^n} \omega\left(\frac{x - \xi}{y}\right) \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times (0, 1]. \quad (2.1)$$

Очевидно, что $L_f^\omega(x, y)$ – непрерывная функция в $\mathbb{R}^n \times (0, 1]$ со значениями в $\mathcal{L}$. Далее в этом параграфе будет типична следующая ситуация.

Пусть $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$ и $\mathbb{B}$ – банахово пространство, причем, $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$. Будем говорить, что для некоторого ядра $\omega(x) \in \mathcal{S}$ усреднение $L_f^\omega(x, y)$ удовлетворяет условиям а) и б) соответственно, если:

- а) при каждом $y \in (0, 1]$ функция $L_f^\omega(x, y)$ принимает значение в $\mathbb{B}$ при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ и измерима по x как функция со значениями в $\mathbb{B}$;
- б) существуют постоянные C , a и b такие, что при $0 < y \leq 1$ имеет место неравенство

$$\|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}} \leq C \frac{(1 + |x|)^a}{y^b} \quad \text{при п.в. } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово и $\mathcal{L}$ – локально выпуклое пространства, причем $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$ линейно и непрерывно. Пусть еще $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$ и $\omega(x) \in \mathcal{S}$ такова, что ее преобразование Фурье $\tilde{\omega}(t) = P(t)\tilde{\omega}_1(t)$, где $\tilde{\omega}_1(t) \in \mathcal{S}$, $\tilde{\omega}_1(0) \neq 0$, а $P(t) = \sum_{k=0}^N P_k(t)$, где $P_k(t)$ – однородный многочлен n переменных степени k либо тождественный нуль. Предположим также, что для функции $L_f^\omega(x, y)$ выполнены условия а) и б). Тогда

$$(f(x), \varphi(x)) \in \mathbb{B} \quad (2.3)$$

для всех основных функций $\varphi \in \mathcal{S}$ таких, что $\tilde{\varphi}(t) = P_k(t)\tilde{\psi}(t)$ для некоторого $k = 0, 1, \dots, N$ и $\tilde{\psi}(t) \in \mathcal{S}$. Более того,

$$P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x) \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B}), \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

В частности, существуют постоянные c и M такие, что

$$\left\| \left(P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x), \varphi(x) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq c \mathcal{P}_M[\varphi], \quad k = 0, \dots, N, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что существуют постоянные C_1, a_1 и N_1 такие, что $\forall k = 0, 1, \dots, N$ и $\forall \tilde{\psi}(t) \in \mathcal{S}$, $\text{supp } \tilde{\psi} \subset \{|t| < A\}$, $A > 1$, имеет место включение $(\tilde{f}(t), P_k(t)\tilde{\psi}(t)) \in \mathbb{B}$ и выполнена оценка

$$\|(\tilde{f}(t), P_k(t)\tilde{\psi}(t))\|_{\mathbb{B}} \leq C_1 A^{a_1} \mathcal{P}_{N_1}[\tilde{\psi}]. \quad (2.5)$$

Действительно, пусть $\text{supp } \tilde{\psi} \subset \{|t| < A\}$ и $|\tilde{\omega}_1(t)| \geq \varepsilon$ при $|t| \leq \delta < A$. Согласно лемме П.3 для любой $\tilde{\chi}(t) \in \mathcal{S}$ имеем

$$\left\| \left(\tilde{f}(t), \tilde{\chi}(t) y^b \tilde{\omega}_1(yt) \sum_{k=0}^N y^k P_k(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq C \int (1 + |x|)^a |F^{-1}[\tilde{\chi}(t)](x)| dx.$$

Полагаем здесь $\tilde{\chi}(t) = (1/\tilde{\omega}_1(yt))\tilde{\psi}(t)$ и считаем, что $\delta/(2A) \leq y \leq \delta/A$. Тогда $\tilde{\chi} \in \mathcal{S}$, так как на носителе $\tilde{\psi}$ при таком выборе y справедливо $|\tilde{\omega}_1(yt)| \geq \varepsilon$. Имеем

$$\begin{aligned} \left\| \left(\tilde{f}(t), \sum_{k=0}^N y^k \tilde{\psi}(t) P_k(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}} &\leq \frac{C}{y^b} \int (1 + |x|)^a \left| F^{-1} \left[\frac{1}{\tilde{\omega}_1(yt)} \tilde{\psi}(t) \right] (x) \right| dx \\ &\leq \text{const} A^b \mathcal{P}_{N_1}[\tilde{\psi}]. \end{aligned}$$

Мы учли, что $1/y \leq 2A/\delta$ и

$$\int (1 + |x|)^a \left| F^{-1} \left[\frac{1}{\tilde{\omega}_1(yt)} \tilde{\psi}(t) \right] (x) \right| dx \leq C_2 \mathcal{P}_{N_1} \left[\frac{1}{\tilde{\omega}_1(yt)} \tilde{\psi}(t) \right] \leq C_3 \mathcal{P}_{N_1}[\tilde{\psi}(t)].$$

Откуда имеем

$$\sum_{k=0}^N (\tilde{f}(t), P_k(t)\tilde{\psi}(t)) y^k = C_y, \quad \|C_y\|_{\mathbb{B}} \leq C_4 A^b \mathcal{P}_{N_1}[\tilde{\psi}]. \quad (2.6)$$

Положим в (2.6) $y_i = \delta(1 + i/N)/(2A)$, $i = 0, 1, \dots, N$. Получим систему $N + 1$ уравнения с $N + 1$ неизвестным. Определитель этой системы есть определитель Вандермонда

$$W[y_0, \dots, y_N] = \left(\frac{\delta}{2A} \right)^\sigma W \left[1, 1 + \frac{1}{N}, \dots, 2 \right] \neq 0, \quad \sigma = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Решая эту систему, для любого $k = 0, 1, \dots, N$ выводим соотношение (2.5).

Продолжим доказательство леммы. Возьмем “шапочку” $\Omega(t) \in \mathcal{S}$ такую, что $\text{supp } \Omega \subset \{|t| < 1\}$ и $\Omega(0) = 1$. По уже доказанному (см. (2.5)) для любой $\tilde{\chi} \in \mathcal{S}$, учитывая, что $\text{supp } \Omega(yt) \subset \{|t| < 1/y\}$, имеем

$$\|(\tilde{f}(t), P_k(t)\Omega(yt)\tilde{\chi}(t))\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{C_1}{y^{a_1}} \mathcal{P}_{N_1}[\Omega(yt)\tilde{\chi}(t)], \quad 0 < y \leq 1.$$

Откуда

$$\|(\tilde{f}(t), y^{a_1} P_k(t)\Omega(yt)\tilde{\chi}(t))\|_{\mathbb{B}} \leq C_1 \mathcal{P}_{N_1}[\Omega(yt)\tilde{\chi}(t)] \leq \text{const} \mathcal{P}_{N_1}[\tilde{\chi}(t)]. \quad (2.7)$$

Заметим, что семейство функций $\{\eta_\beta(t) = \beta^{a_1} \Omega(\beta t), 0 < \beta \leq 1\}$ удовлетворяет всем условиям леммы П.1.

Действительно, оценка (П.1) очевидна, проверим оценку (П.2). Так как $\Omega(0) = 1$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $|\Omega(t)| \geq \frac{1}{2}$ при $|t| \leq \varepsilon$. Поэтому

$$\sup_{0 < \beta \leq 1} |\beta^{a_1} \Omega(\beta t)| \geq \beta_0^{a_1} |\Omega(\beta_0 t)|, \quad 0 < \beta_0 \leq 1.$$

Выбирая теперь $\beta_0 = \varepsilon/|t|$ при $|t| > \varepsilon$ и $\beta_0 = 1$ при $|t| \leq \varepsilon$, получаем

$$\beta_0^{a_1} |\Omega(\beta_0 t)| \geq \begin{cases} \left(\frac{\varepsilon}{|t|}\right)^{a_1} \left|\Omega\left(\varepsilon \frac{t}{|t|}\right)\right| \geq \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^{a_1}}{|t|^{a_1}}, & |t| > \varepsilon; \\ |\Omega(t)| \geq \frac{1}{2}, & |t| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Следовательно, существуют счетное множество чисел $y_i \in (0, 1]$, числа $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$, и семейство функций $g_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, со свойствами (П.3) такие, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i g_i(t) y_i^{a_1} \Omega(y_i t) = 1.$$

Пусть теперь ψ любая функция из $\mathcal{S}$. Для любого $k = 0, \dots, N$ получим

$$P_k(t) \tilde{\psi}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i g_i(t) \tilde{\psi}(t) y_i^{a_1} P_k(t) \Omega(y_i t). \quad (2.8)$$

Отсюда

$$(\tilde{f}(t), P_k(t) \tilde{\psi}(t)) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (\tilde{f}(t), g_i(t) \tilde{\psi}(t) y_i^{a_1} P_k(t) \Omega(y_i t)). \quad (2.9)$$

Это равенство справедливо в $\mathcal{L}$ (поскольку ряд (2.8) сходится в $\mathcal{S}$). Покажем, что ряд в (2.9) сходится в $\mathbb{B}$. Для этого оценим каждый член этого ряда. Из (2.7) имеем

$$\|(\tilde{f}(t), g_i(t) \tilde{\psi}(t) y_i^{a_1} P_k(t) \Omega(y_i t))\|_{\mathbb{B}} \leq C_5 \mathcal{P}_{N_1}[g_i(t) \tilde{\psi}(t)] \leq \text{const } \mathcal{P}_{N_2}[\tilde{\psi}(t)]$$

(в последнем неравенстве мы пользовались оценками (П.3)). Так как $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i = 1$, то ряд (2.9) сходится в $\mathbb{B}$ и имеет место оценка

$$\|(\tilde{f}(t), P_k(t) \tilde{\psi}(t))\|_{\mathbb{B}} \leq \text{const } \mathcal{P}_{N_2}[\psi]. \quad (2.10)$$

Отсюда в силу непрерывности вложения $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$ и вытекают соотношения (2.3) и (2.4). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово и $\mathcal{L}$ – локально выпуклое пространства, причем $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$. Пусть $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$ и $\omega(x) \in \mathcal{S}$ такова, что $\tilde{\omega}$ не вырождена в нуле. Предположим еще, что функция $L_f^\omega(x, y)$ удовлетворяет условиям а) и б). Тогда для любого $0 < \delta < 1$ и для любой $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ такой, что $\text{supp } \tilde{\varphi} \subset \{t : |t| \geq 2\delta\}$,

$$(f, \varphi) \in \mathbb{B}, \quad \text{причем} \quad \|(f, \varphi)\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{C_1}{\delta^d} \mathcal{P}_{N_1}[\varphi] \quad (2.11)$$

для некоторых C_1 , N_1 и d , зависящих только от ω и постоянных C , a , b в (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{supp } \tilde{\varphi} \subset \{t : |t| \geq 2\delta\}$ и заданы числа $\frac{1}{2} < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m < 1$. Тогда по лемме П.2 существует c такая, что выполнена оценка (П.21). Далее положим $\tilde{\omega}(t) = T_{\tilde{\omega}}^m(t) + \gamma(t)$, где m определяется условием невырожденности $\tilde{\omega}$ (см. (1.1)). Подберем δ_1 таким образом, чтобы $|\gamma(t)| < c|t|^m/2$ при $|t| < \delta_1$, что возможно, так как $\gamma(t) = O(|t|^{m+1})$ при $|t| \rightarrow 0$. Далее будем считать, что $\delta < \delta_1 < 1$. По лемме П.3 для любой $\chi \in \mathcal{S}$ имеем

$$\|(\tilde{f}(t), \tilde{\chi}(t)y^b\tilde{\omega}(yt))\|_{\mathbb{B}} \leq C \int (1 + |x|)^a |\chi(x)| dx. \quad (2.12)$$

Проверим, что семейство $\{y^b\tilde{\omega}(yt), 0 < y < 1\}$ удовлетворяет всем требованиям леммы П.1 при $|t| > \delta$. Условие (П.1) выполняется в силу оценки

$$\left| \frac{\partial^{|j|}}{\partial t^j} y^b \tilde{\omega}(yt) \right| \leq y^{b+|j|} |\tilde{\omega}^{(j)}(yt)| \leq \sup_t |\tilde{\omega}^{(j)}(yt)| \leq C_j.$$

Проверим выполнение условия (П.2) при $|t| > \delta$, имеем

$$\sup_{0 < y < 1} y^b |\tilde{\omega}(yt)| \geq y_t^b |\tilde{\omega}(y_t t)|, \quad (2.13)$$

где y_t выбирается следующим образом. По t строим $\bar{e} = t/|t|$. Из (П.21), где $\varepsilon = \delta$, а $N = m$, заключаем, что существует такое i_t , $i_t = 0, 1, \dots, m$, для которого выполняется неравенство

$$\left| T_{\tilde{\omega}}^m \left(\delta \lambda_{i_t} \frac{t}{|t|} \right) \right| \geq c \delta^m.$$

Полагая теперь $y_t = \delta \lambda_{i_t} / |t|$ и продолжая оценку (2.13), имеем

$$\begin{aligned} \sup_{0 < y < 1} y^b |\tilde{\omega}(yt)| &\geq y_t^b |T_{\tilde{\omega}}^m(y_t t) + \gamma(y_t t)| = \left(\delta \lambda_{i_t} \frac{1}{|t|} \right)^b \left| T_{\tilde{\omega}}^m \left(\delta \lambda_{i_t} \frac{t}{|t|} \right) + \gamma \left(\delta \lambda_{i_t} \frac{t}{|t|} \right) \right| \\ &\geq \left(\delta \lambda_{i_t} \frac{1}{|t|} \right)^b \left[c \delta^m - \frac{c}{2} (\delta \lambda_{i_t})^m \right] \geq \frac{1}{2} \frac{\delta^m}{|t|^b} \frac{c}{2} \delta^m \geq \frac{c}{4} \frac{\delta^{b+m}}{(1 + |t|)^b}, \quad |t| > \delta. \end{aligned}$$

Тем самым условие (П.2) проверено.

Согласно замечанию 2 к лемме П.1 существуют числа $y_i, \lambda_i, i = 1, 2, \dots$, $\sum_i \lambda_i = 1$, и функции $g_i(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что для любого мультииндекса j найдутся постоянные A_j, B_j и P_j , не зависящие от δ , такие, что

$$|g_i^{(j)}(t)| \leq \frac{A_j}{\delta^{P_j}} (1 + |t|)^{B_j},$$

причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i g_i(t) y_i^b \tilde{\omega}(y_i t) = 1, \quad |t| > 2\delta.$$

Отсюда

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \tilde{\varphi}(t) g_i(t) y_i^b \tilde{\omega}(y_i t), \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

так как $\text{supp } \tilde{\varphi} \subset \{|t| > 2\delta\}$. Теперь, пользуясь соотношением (2.12), получаем

$$\begin{aligned} \|(f, \varphi)\|_{\mathbb{B}} &= \|(\tilde{f}(t), \tilde{\varphi}(t))\|_{\mathbb{B}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \|(\tilde{f}(t), \tilde{\varphi}(t) g_i(t) y_i^b \tilde{\omega}(y_i t))\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i C \int (1 + |x|)^a |F^{-1}[\tilde{\varphi}(t) g_i(t)](x)| dx \leq \frac{C_1}{\delta^d} \mathcal{P}_{N_1}[\varphi] \end{aligned}$$

для некоторых C_1, d и N_1 . Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в условиях леммы 2.1 многочлен $P(t)$ такой, что для любого вектора $\bar{e}$

$$|\bar{e}| = 1, \quad P(\lambda \bar{e}) \neq 0, \quad \lambda > 0. \quad (2.14)$$

Тогда

$$(f(x), \varphi(x)) \in \mathbb{B} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \quad (2.15)$$

такой, что

$$\tilde{\varphi}(t) = P_k(t) \tilde{\psi}(t), \quad |t| < \delta, \quad (2.16)$$

$\delta > 0$, $k = 0, 1, \dots, N$ и $\tilde{\psi}(t) \in \mathcal{S}$.

Действительно, пусть $h_1(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $h_2(t)$ таковы, что

$$h_1(t) + h_2(t) = 1, \quad h_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \delta; \\ 0, & |t| > 2\delta. \end{cases}$$

Пусть теперь $\tilde{\varphi}(t)$ удовлетворяет условию (2.16), имеем

$$(\tilde{f}, \tilde{\varphi}) = (\tilde{f}, h_1 \tilde{\varphi}) + (\tilde{f}, h_2 \tilde{\varphi}) = (\tilde{f}(t), h_1(t) P_k(t) \tilde{\psi}(t)) + (\tilde{f}(t), h_2(t) \tilde{\varphi}(t)). \quad (2.17)$$

Первое слагаемое справа в равенстве (2.17) по лемме 2.1 принадлежит $\mathbb{B}$ (и выполнена соответствующая оценка), с другой стороны, $h_2(t) \tilde{\varphi}(t) = 0$ при $|t| < \delta$ и мы можем воспользоваться леммой 2.2.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\mathbb{B}$ и $\mathcal{L}$ – банаховы пространства, причем $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$, $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$ и $\omega(x) \in \mathcal{S}$ такова, что $\tilde{\omega}(t)$ не вырождена в нуле. Предположим еще, что функция $L_f^\omega(x, y)$ удовлетворяет условиям а) и б).

Тогда существует число ℓ такое, что

$$(f(x), \varphi(x)) \in \mathbb{B}, \quad \varphi \in \mathcal{S}, \quad T_{\tilde{\varphi}}^\ell(t) \equiv 0. \quad (2.18)$$

Более того, для таких φ справедлива оценка

$$\|(f, \varphi)\|_{\mathbb{B}} \leq C_2 \mathcal{P}_{N_2}[\varphi] \quad (2.19)$$

при некоторых C_2 и N_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ такова, что

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 1; \\ > 0, & 1 < \xi < 2; \\ 0, & \xi > 2, \end{cases} \quad \int_0^\infty \chi\left(\frac{1}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi} = 1.$$

Ясно, что

$$\int_0^\infty \chi\left(\frac{|t|^2}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Покажем, что для любого $M \geq 0$ существует m_1 такое, что

$$\int_{1/A}^A \chi\left(\frac{|t|^2}{\xi}\right) \tilde{\varphi}(t) \frac{d\xi}{\xi} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \chi\left(\frac{|t|^2}{\xi}\right) \tilde{\varphi}(t) \frac{d\xi}{\xi} = \tilde{\varphi}(t) \quad \text{в } \mathcal{S}_M \quad (2.20)$$

для любой $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}$ такой, что $\tilde{\varphi}^{(j)}(0) = 0$, $|j| \leq m_1$.

Действительно, для любого M имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_M \left[\int_A^\infty \chi \left(\frac{|t|^2}{\xi} \right) \tilde{\varphi}(t) \frac{d\xi}{\xi} \right] &= \max_{|\ell| \leq M} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (1 + |t|)^M \left| \frac{\partial^{|\ell|}}{\partial t^\ell} \int_A^\infty \chi \left(\frac{|t|^2}{\xi} \right) \tilde{\varphi}(t) \frac{d\xi}{\xi} \right| \\ &\leq \max_{|\ell| \leq M} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (1 + |t|)^{M_1} \sum_{i,j} C_{ij} \int_A^\infty \left| \chi^{(i)} \left(\frac{|t|^2}{\xi} \right) \right| |\tilde{\varphi}^{(j)}(t)| \frac{1}{\xi^{|i|}} \frac{d\xi}{\xi}. \end{aligned}$$

Оценим типичный член последней суммы. Учитывая, что в области интегрирования $\text{supp } \chi \subset [1, 2]$, а потому $1 < |t|^2/\xi < 2$, и, следовательно, $A < \xi < |t|^2 < 2\xi$, имеем

$$\begin{aligned} &\sup_{|t|^2 > A} (1 + |t|)^{M_1} \int_A^\infty \left| \chi^{(i)} \left(\frac{|t|^2}{\xi} \right) \right| |\tilde{\varphi}^{(j)}(t)| \frac{1}{\xi^{|i|}} \frac{d\xi}{\xi} \\ &\leq \text{const} \sup_{|t|^2 > A} \frac{|\tilde{\varphi}^{(j)}(t)| (1 + |t|)^{M_2}}{|t|^{2|i|}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\tilde{\varphi}^{(j)}(t) \in \mathcal{S}$ и, следовательно, стремится к нулю быстрее любой степени $1/|t|$. Отсюда вытекает, что

$$\mathcal{P}_M \left[\int_A^\infty \chi \left(\frac{|t|^2}{\xi} \right) \tilde{\varphi}(t) \frac{d\xi}{\xi} \right] \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0. \quad (2.21)$$

Оценим теперь $\mathcal{P}_M \left[\int_0^{1/A} \chi(|t|^2/\xi) \tilde{\varphi}(t)/\xi d\xi \right]$. После раскрытия производной по формуле Лейбница для типичного слагаемого в выражении для нормы $\mathcal{P}_M$ с учетом того, что $1 < |t|^2/\xi < 2$, а следовательно, $|t|^2 < 2\xi < 2/A$, получим

$$\begin{aligned} &\sup_{|t|^2 < 2/A} (1 + |t|)^{M_1} \int_0^{1/A} \left| \chi^{(i)} \left(\frac{|t|^2}{\xi} \right) \right| |\tilde{\varphi}^{(j)}(t)| \frac{1}{\xi^{|i|}} \frac{d\xi}{\xi} \\ &\leq \text{const} \sup_{|t|^2 < \frac{1}{A}} \frac{|\tilde{\varphi}^{(j)}(t)| (1 + |t|)^{M_1}}{|t|^{2|i|}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

если $\tilde{\varphi}(t)$ имеет достаточно высокий порядок нуля в начале координат. Предполагая это, получаем, что

$$\mathcal{P}_M \left[\int_0^{1/A} \chi \left(\frac{|t|^2}{\xi} \right) \tilde{\varphi}(t) \frac{d\xi}{\xi} \right] \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0.$$

Отсюда и из (2.21) вытекает (2.20).

Продолжим доказательство леммы. Заметим, что так как $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$ и $\mathcal{L}$ банахово, то функционал f имеет конечный порядок, скажем, M_0 , т.е.

$$\|(f(x), \varphi(x))\|_{\mathcal{L}} = \|(\tilde{f}(t), \tilde{\varphi}(t))\|_{\mathcal{L}} \leq \text{const } \mathcal{P}_{M_0}[\tilde{\varphi}].$$

Считая $M > M_0$, для любой $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}$, у которой порядок нуля в начале координат достаточно велик, используя (2.20), имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{f}(t), \tilde{\varphi}(t)) &= \left(\tilde{f}(t), \int_0^\infty \chi \left(\frac{|t|^2}{\xi} \right) \tilde{\varphi}(t) \frac{d\xi}{\xi} \right) = \left(\tilde{f}(t), \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{1/A}^A \chi \left(\frac{|t|^2}{\xi} \right) \tilde{\varphi}(t) \frac{d\xi}{\xi} \right) \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\tilde{f}(t), \int_{1/A}^A \chi \left(\frac{|t|^2}{\xi} \right) \tilde{\varphi}(t) \frac{d\xi}{\xi} \right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где последний предел понимается как предел в $\mathcal{L}$. Подынтегральная функция в последнем равенстве (2.22) непрерывна по параметру ξ в $\mathcal{S}$, и стандартными рассуждениями с суммами Римана можно показать, что интеграл по параметру можно вынести за знак функционала. Продолжая равенства (2.22), имеем

$$(\tilde{f}(t), \tilde{\varphi}(t)) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{1/A}^A \left(\tilde{f}(t), \chi\left(\frac{|t|^2}{\xi}\right) \tilde{\varphi}(t) \right) \frac{d\xi}{\xi}, \quad (2.23)$$

где интеграл понимается как интеграл Фреше в $\mathcal{L}$.

Согласно лемме 2.2 функция $(\tilde{f}(t), \chi(|t|^2/\xi) \tilde{\varphi}(t)) \in \mathbb{B}$, так как носитель функции $\chi(|t|^2/\xi) \tilde{\varphi}(t)$ лежит в шаровом слое $1/A < |t|^2 < 2A$. Интеграл в (2.23), понимаемый как интеграл Фреше в $\mathcal{L}$, можно считать интегралом Фреше в $\mathbb{B}$, поскольку подынтегральная функция непрерывна в $\mathbb{B}$. Покажем, что он не только принадлежит $\mathbb{B}$, но и при $A \rightarrow +\infty$ сходится в $\mathbb{B}$, если порядок нуля у $\tilde{\varphi}$ в начале координат достаточно высок. Для этого достаточно показать, что норма подынтегральной функции в $\mathbb{B}$ интегрируема на $(0, +\infty)$. При $\xi > 1$ из леммы 2.2 имеем

$$\frac{1}{\xi} \left\| \left(\tilde{f}(t), \chi\left(\frac{|t|^2}{\xi}\right) \tilde{\varphi}(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq \text{const } \mathcal{P}_{N_1} \left[\chi\left(\frac{|t|^2}{\xi}\right) \tilde{\varphi}(t) \right]. \quad (2.24)$$

Последнее выражение убывает быстрее любой степени $1/\xi$ при $\xi \rightarrow +\infty$, так как $\text{supp } \chi(|t|^2/\xi)$ лежит на отрезке $[\sqrt{\xi}, \sqrt{2\xi}]$.

Далее, при $\xi < 1$ по той же лемме имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \left\| \left(\tilde{f}(t), \chi\left(\frac{|t|^2}{\xi}\right) \tilde{\varphi}(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}} &\leq \frac{C_1}{\xi^{d/2+1}} \mathcal{P}_{N_1} \left[\chi\left(\frac{|t|^2}{\xi}\right) \tilde{\varphi}(t) \right] \\ &= \frac{C_1}{\xi^{d/2+1}} \max_{|j| \leq N_1} \sup_{\sqrt{\xi} < |t| < \sqrt{2\xi}} (1 + |t|)^{N_1} \left| \frac{\partial^{|j|}}{\partial t^j} \chi\left(\frac{|t|^2}{\xi}\right) \tilde{\varphi}(t) \right|. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ясно, что это выражение ограничено при $\xi \rightarrow +0$, если только $\tilde{\varphi}(t)$ имеет в начале координат нуль достаточно высокого порядка. Тем самым норма в $\mathbb{B}$ подынтегральной функции в (2.24) действительно интегрируема. Следовательно, $(f, \varphi) \in \mathbb{B}$ для таких φ . Оценка (2.19) легко следует из оценок (2.24) и (2.25). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\mathbb{B}$ и $\mathcal{L}$ – банаховы пространства, $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$, $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$ и $\omega(x) \in \mathcal{S}$, причем $\tilde{\omega}(t)$ не вырождена в нуле, а ее тейлоровское разложение имеет вид:

$$T_{\tilde{\omega}}^N(t) = \sum_{k=0}^N P_k(t), \quad N = 0, 1, \dots,$$

где $P_k(t)$ – однородный многочлен степени k (либо тождественный нуль). Предположим еще, что функция $L_f^\omega(x, y)$ удовлетворяет условиям а) и б). Тогда для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ такой, что $\tilde{\varphi}(t) = P_k(t) \tilde{\psi}(t)$, где $\tilde{\psi}(t) \in \mathcal{S}$, имеем

$$(f, \varphi) \in \mathbb{B}, \quad \|(\tilde{f}, \tilde{\varphi})\|_{\mathbb{B}} \leq C_1 \mathcal{P}_N[\tilde{\varphi}] \quad (2.26)$$

для некоторых C_1 и N . Другими словами,

$$P_k \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что согласно лемме 2.3 существует ℓ такое, что выполнены соотношения (2.18) и (2.19). Без ограничения общности можно считать, что $\ell > m$, где m берется из условия невырожденности (см. (1.1)). Пусть $\omega_1 \in \mathcal{S}$, $\tilde{\omega}_1(0) \neq 0$ и $\omega_2(x)$ такова, что $\tilde{\omega}_2(t) = T_{\tilde{\omega}}^\ell(t)\tilde{\omega}_1(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} L_f^{\omega_2}(x, y) &= (\tilde{f}(t), T_{\tilde{\omega}(t)}^\ell(yt)\tilde{\omega}_1(yt)e^{ixt}) \\ &= (\tilde{f}(t), \tilde{\omega}(yt)\tilde{\omega}_1(yt)e^{ixt}) - (\tilde{f}(t), (\tilde{\omega}(yt) - T_{\tilde{\omega}(yt)}^\ell(t))\tilde{\omega}_1(yt)e^{ixt}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Мы учли, что $T_{\tilde{\omega}(yt)}^\ell(t) = T_{\tilde{\omega}(t)}^\ell(yt)$. Согласно лемме П.3 (см. также замечание к ней) первое слагаемое справа в (2.28) принадлежит $\mathbb{B}$ и

$$\begin{aligned} \|(\tilde{f}(t), \tilde{\omega}(yt)\tilde{\omega}_1(yt)e^{ixt})\|_{\mathbb{B}} &\leq \frac{\text{const}}{y^b} \mathcal{P}_N[\tilde{\omega}_1(yt)e^{ixt}] \\ &\leq \frac{\text{const}}{y^{b_1}} (1 + |x|)^N \mathcal{P}_N[\tilde{\omega}_1], \end{aligned} \quad (2.29)$$

где b_1 и N – некоторые постоянные. Из той же леммы П.3 следует, что левая часть (2.28) непрерывна по x со значениями в $\mathbb{B}$. Второе слагаемое справа в (2.28) согласно лемме 2.3 также принадлежит $\mathbb{B}$ и

$$\begin{aligned} \|(\tilde{f}(t), (\tilde{\omega}(yt) - T_{\tilde{\omega}(yt)}^\ell(t))\tilde{\omega}_1(t)e^{ixt})\|_{\mathbb{B}} &\leq C_2 \mathcal{P}_{N_1}[(\tilde{\omega}(yt) - T_{\tilde{\omega}(yt)}^\ell(t))\tilde{\omega}_1(t)e^{ixt}] \\ &\leq C_3 \frac{(1 + |x|)^{a_2}}{y^{b_2}} \mathcal{P}_{N_3}[\tilde{\omega}_1(t)], \end{aligned} \quad (2.30)$$

где a_2 , C_3 , b_2 и N_3 – некоторые постоянные. Из той же леммы 2.3 следует, что левая часть (2.28) непрерывна по x со значениями в $\mathbb{B}$. Следовательно, $L_f^{\omega_2}(x, y)$ – непрерывная функция по x со значениями в $\mathbb{B}$ и справедлива оценка

$$\|L_f^{\omega_2}(x, y)\|_{\mathbb{B}} \leq C_4 \frac{(1 + |x|)^{a_3}}{y^{b_3}},$$

для некоторых C_4 , a_3 и b_3 . Отсюда из леммы 2.1 и будут следовать соотношения (2.26) и (2.27). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathbb{B}, \mathcal{L}$ – банаховы пространства, $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$, $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$ и $\omega(x) \in \mathcal{S}$, причем $\tilde{\omega}(t)$ не вырождена в нуле. Пусть, кроме того, стандартное усреднение $L_f^\omega(x, y)$ удовлетворяет условиям а) и б). Обозначим через $P_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$, однородные многочлены степени k такие, что

$$T_{\tilde{\omega}}^N(t) = \sum_{k=0}^N P_k(t), \quad N = 0, 1, \dots$$

Тогда существует число ℓ такое, что

$$f \in \mathbb{L}(\tilde{\mathcal{S}}_{[\ell; P_0, P_1, \dots, P_\ell]} \rightarrow \mathbb{B}). \quad (2.31)$$

Другими словами, для любой $\varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[\ell; P_0, \dots, P_\ell]}$

$$(f, \varphi) \in \mathbb{B}, \quad \|(f, \varphi)\|_{\mathbb{B}} = \|(\tilde{f}, \tilde{\varphi})\|_{\mathbb{B}} \leq C_1 \mathcal{P}_N[\tilde{\varphi}] \quad (2.32)$$

для некоторых C_1 и N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\eta(t) \in \mathcal{S}, \quad \eta(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1; \\ 0, & |t| > 2. \end{cases}$$

Заметим, что по лемме 2.3 существует ℓ такое, что выполнены соотношения (2.18) и (2.19). При этом без нарушения общности можно считать, что $\ell > m$, где m берется из условия невырожденности (см. (1.1)). Пусть теперь $\varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[\ell, P_0, P_1, \dots, P_\ell]}$, имеем

$$\begin{aligned} (f(x), \varphi(x)) &= (\tilde{f}(t), \tilde{\varphi}(t)) = (\tilde{f}(t), \eta(t)\tilde{\varphi}(t)) + (\tilde{f}(t), (1 - \eta(t))\tilde{\varphi}(t)) \\ &= (\tilde{f}(t), \eta(t)(\tilde{\varphi}(t) - T_{\tilde{\varphi}}^\ell(t))) + (\tilde{f}(t), (1 - \eta(t))\tilde{\varphi}(t)) + (\tilde{f}(t), \eta(t)T_{\tilde{\varphi}}^\ell(t)). \end{aligned}$$

Первое и второе слагаемые справа по леммам 2.3 и 2.2 соответственно принадлежат $\mathbb{B}$ и оцениваются должным образом. Рассмотрим третье слагаемое. По условию

$$T_{\tilde{\varphi}}^\ell(t) = \sum_{k=0}^{\ell} P_k(t)Q_k(t),$$

где без ограничения общности можно считать, что $Q_k(t)$ являются многочленами степени не выше $\ell - k$ и выполняется оценка (1.3). Имеем

$$(\tilde{f}(t), \eta(t)T_{\tilde{\varphi}}^\ell(t)) = \sum_{k=0}^{\ell} (\tilde{f}(t), P_k(t)Q_k(t)\eta(t)).$$

Применяя теперь лемму 2.4, в которой $\tilde{\psi}(t) = Q_k(t)\eta(t)$, $k = 0, \dots, \ell$, и пользуясь оценкой (1.3), завершаем доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 2.1 как, впрочем, и леммы 2.1–2.4, останутся справедливыми, если условие а) в них заменить на следующее условие а₁).

Пусть $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$, $\mathbb{B}$ – банахово пространство и $\{\mathbb{B}_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ – семейство банаховых пространств такое, что $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_\varepsilon \subset \mathcal{L}$, причем

$$\mathbb{B} = \left\{ \eta \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathbb{B}_\varepsilon : \sup_{\varepsilon > 0} \|\eta\|_{\mathbb{B}_\varepsilon} < \infty \right\}, \quad \|\eta\|_{\mathbb{B}_\varepsilon} \nearrow \|\eta\|_{\mathbb{B}}, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Будем говорить, что для некоторого ядра $\omega \in \mathcal{S}$ усреднение $L_f^\omega(x, y)$ удовлетворяет условию а₁), если при каждом $y \in (0, 1]$ функция $L_f^\omega(x, y) \in \mathbb{B}$ при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ и измерима как функция со значениями в $\mathbb{B}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Действительно, просматривая доказательство лемм 2.1–2.4, нетрудно видеть, что постоянные C_1 и N в (2.32) зависят только от ω и постоянных C , a и b из условия б), а число ℓ зависит еще и от порядка сингулярности отображения $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L}$. В частности, они не зависят от “конкретного вида” банахова пространства $\mathbb{B}$. Поэтому, пользуясь теоремой 2.1 для пространства $\mathbb{B}_\varepsilon$, получаем $(f, \varphi) \in \mathbb{B}_\varepsilon$, причем

$$\|(f, \varphi)\|_{\mathbb{B}_\varepsilon} \leq C_1 \mathcal{P}_N[\varphi] \quad \forall \varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[\ell, P_0, \dots, P_\ell]},$$

где C_1 и N не зависят от ε . Отсюда и следует наше утверждение.

Отметим, что конкретные применения теоремы 2.1 затруднены тем, что число ℓ , фигурирующее в этом утверждении, вообще говоря, зависит от обобщенной функции f (точнее, от ее порядка сингулярности в $\mathcal{L}$) и, как правило, заранее не известно. Поясним это следующим примером.

ПРИМЕР 2.1. Пусть $n = 2$ и $\tilde{\omega}(t_1, t_2) = (t_1^2 + t_2^2)\tilde{\omega}_1(t_1, t_2)$, где $\tilde{\omega}_1(0, 0) \neq 0$. Банахово пространство $\mathbb{B} = \{0\}$, а $\mathcal{L} = \mathbb{C}$. Пусть $f_k(x_1, x_2)$ – гармонический многочлен степени k (например, можно положить $f_k(x_1, x_2) = \operatorname{Re} P_k(x_1 + ix_2)$, где $P_k(z)$ – многочлен степени k). Имеем

$$\begin{aligned} L_{f_k}^\omega(x, y) &= \left(f_k(\xi), \frac{1}{y^2} \omega\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) = \left(f_k(\xi), -\Delta_\xi \omega_1\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) \\ &= \left(\Delta f_k(\xi), \omega_1\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

В последнем равенстве (2.33) учтено, что f_k – гармоническая функция. Таким образом, все условия леммы 2.3 выполнены, однако

$$(f_k(x), \varphi(x)) = (\tilde{f}_k(t), \tilde{\varphi}(t)) = \sum_{|j|=0}^k (C_j \delta^{(j)}(t), \tilde{\varphi}(t)).$$

Поскольку хотя бы один из старших коэффициентов C_j , $|j| = k$, отличен от нуля, скажем C_{j_0} , то, взяв функцию $\tilde{\varphi}(t) \in \mathcal{S}$, у которой все производные до порядка k в нуле равны нулю кроме $\tilde{\varphi}^{(j_0)}(0) \neq 0$, получим $(f_k, \varphi) = (-1)^k C_{j_0} \tilde{\varphi}^{(j_0)}(0) \neq 0$. Следовательно, ℓ в лемме 2.3 должно быть больше или равно k , т.е. может быть как угодно велико.

Однако в некоторых случаях эту трудность удастся обойти. Один из примеров такой ситуации приводится в следующей теореме 2.2. Другие примеры будут рассмотрены далее в следующем параграфе (см. следствие к теоремам 3.2 и 3.3).

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть выполнены все условия теоремы 2.1 и, кроме того, существуют числа M и N такие, что

$$\mathbb{P}^M \subset \mathbb{P}[P_0, \dots, P_N]. \quad (2.34)$$

Тогда в теореме 2.1 можно считать, что $\ell = M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T_{\tilde{\varphi}}^M(t) = \sum_{k=0}^N P_k(t) Q_k(t)$, где Q_k – многочлены, и ℓ – число, фигурирующее в теореме 2.1 (без ограничения общности можно считать $\ell \geq M$). Тогда

$$T_{\tilde{\varphi}}^\ell(t) = \sum_{k=0}^M P_k(t) Q_k(t) + \hat{P}(t),$$

где $\hat{P} \in \mathbb{P}^M$ (т.е. все младшие члены его до порядка M включительно равны нулю). По условию $\hat{P}(t) = \sum_{k=0}^N P_k(t) \hat{Q}_k(t)$, где $\hat{Q}_k(t)$ – некоторые многочлены. Таким образом,

$$T_{\tilde{\varphi}}^\ell(t) = \sum_{k=0}^N P_k(t) (Q_k(t) + \hat{Q}_k(t)).$$

Следовательно, $T_{\tilde{\varphi}}^\ell(t) \in \mathbb{P}[P_0, \dots, P_N]$. Пользуясь теперь теоремой 2.1, завершаем доказательство.

ПРИМЕР 2.2. Пусть выполнены все условия теоремы 2.1 с функцией $\omega \in \mathcal{S}$ такой, что $\tilde{\omega}(t_1, t_2) = t_1 + t_2^2 + o(|t|^2)$ при $t \rightarrow 0$ ($t \in \mathbb{R}^2$). Легко видеть, что выполнены все условия теоремы 2.2 с $M = 1$. Тем самым соотношение (2.32) будет выполняться для всех $\varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[1;0,t_1]}$ или согласно лемме П.5 для всех $\varphi \in \mathcal{S}$, для которых

$$\int \varphi(x) dx = 0, \quad \int x_2 \varphi(x) dx = 0.$$

§3. Абелевы и тауберовы теоремы

В этом параграфе мы доказываем абелевы и тауберовы теоремы для стандартного усреднения обобщенных функций медленного роста со значениями в банаховом пространстве и связанные с их квазиасимптотикой. Следующая теорема, по сути, является теоремой абелева типа и вытекает из общих теорем функционального анализа.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$, $\rho(k)$ – автомодельная функция, M – неотрицательное целое число, $\{P_k(t), k = 0, 1, \dots, m\}$ – семейство многочленов, причем $P_k(t)$ – либо однородный многочлен степени k , либо тождественный нуль. Предположим, что

$$\sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| \left(f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi) \right) \right\|_{\mathbb{B}} < \infty \quad \forall \varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[M;P_0,P_1,\dots,P_m]}. \quad (3.1)$$

Тогда существуют постоянные C и N такие, что

$$\sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| \left(f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq C \mathcal{P}_N[\varphi] \quad \forall \varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[M;P_0,P_1,\dots,P_m]}. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим семейство полунорм на $\mathcal{S}$

$$Q_{\varkappa}[\varphi] = \sup_{1 \leq k \leq \varkappa} \frac{1}{\rho(k)} \left\| \left(f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi) \right) \right\|_{\mathbb{B}}, \quad \varkappa > 1.$$

Они непрерывны на $\mathcal{S}$, монотонно по $\varkappa$ возрастают и по условию

$$Q[\varphi] = \sup_{\varkappa} Q_{\varkappa}[\varphi] < \infty \quad \forall \varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[M;P_0,\dots,P_m]}.$$

Таким образом, функционал $Q[\varphi]$ полунепрерывен снизу на $\mathcal{S}$ и ограничен на $\tilde{\mathcal{S}}_{[M;P_0,\dots,P_m]}$. Так как $\tilde{\mathcal{S}}_{[M;P_0,\dots,P_m]}$ – замкнутое подпространство пространства Фреше (см. §1), оно само – пространство Фреше, в частности, бочечно. А потому $Q[\varphi]$ – непрерывная полунорма на $\tilde{\mathcal{S}}_{[M;P_0,\dots,m]}$, что и доказывает (3.2). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда существуют постоянные A , b , N и a такие, что

$$\sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| L_f^{\varphi} \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k} \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{A(1+|x|)^a}{y^b} \mathcal{P}_N[\varphi], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in (0, 1), \quad (3.3)$$

для всех $\varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[M;P_0,\dots,P_m]}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что если $\varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[M;P_0,P_1,\dots,P_m]}$, т.е. $\tilde{\varphi}(t) \in \mathcal{S}_{[M;P_0,P_1,\dots,P_m]}$, то также $(1/y^n)\varphi((x-\xi)/y) \in \tilde{\mathcal{S}}_{[M;P_0,P_1,\dots,P_m]}$, так как

$$F_\xi \left[\frac{1}{y^n} \varphi \left(\frac{x-\xi}{y} \right) \right] = e^{ixt} \tilde{\varphi}(yt) \in \mathcal{S}_{[M;P_0,\dots,P_m]}.$$

Пользуясь теперь оценкой (3.2), в которую вместо φ подставлена функция $(1/y^n)\varphi((x-\xi)/y)$, получаем

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| \left(f \left(\frac{\xi}{k} \right), \frac{1}{y^n} \varphi \left(\frac{x-\xi}{y} \right) \right) \right\|_{\mathbb{B}} &\leq C \mathcal{P}_N \left[\frac{1}{y^n} \varphi \left(\frac{x-\xi}{y} \right) \right] \\ &\leq A \frac{(1+|x|)^{N+1}}{y^{n+N}} \mathcal{P}_N[\varphi], \end{aligned}$$

что и требовалось. Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 3.1'. Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и f обладает квазиасимптотикой в нуле относительно $\rho(k)$ на $\tilde{\mathcal{S}}_{[M;P_0,P_1,\dots,P_m]}$, т.е. существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \left(f \left(\frac{\xi}{k} \right), \varphi(\xi) \right) = C_\varphi \quad \forall \varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[M;P_0,P_1,\dots,P_m]}. \quad (3.4)$$

Тогда существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} L_f^\varphi \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k} \right) = C_\varphi(x, y) \quad \forall \varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[M;P_0,P_1,\dots,P_m]} \quad (3.5)$$

и выполнена оценка (3.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО тривиально следует из теоремы 3.1 и формулы

$$L_f^\varphi \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k} \right) = \left(f \left(\frac{\xi}{k} \right), \frac{1}{y^n} \varphi \left(\frac{x-\xi}{y} \right) \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3.1, следствие к ней и теорема 3.1' останутся справедливыми, если вместо квазиасимптотической ограниченности (квазиасимптотики) в нуле рассматривать квазиасимптотическую ограниченность (квазиасимптотику) на бесконечности. Другими словами, если всюду в условиях вместо $f(\xi/k)$ и $L_f^\varphi(x/k, y/k)$ подставить $f(k\xi)$ и $L_f^\varphi(kx, ky)$ соответственно.

Следующие теоремы можно интерпретировать как теоремы тауберова типа. Их формулировке и доказательству предпослелим несколько лемм.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, $\rho(k)$ – автомодельная функция, $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$ и $\omega(x) \in \mathcal{S}$, причем $\tilde{\omega}(t)$ не вырождена в нуле, а ее тейлоровское разложение в начале координат имеет вид:

$$T_{\tilde{\omega}}^N(t) = \sum_{q=0}^N P_q(t), \quad q = 0, 1, \dots, N, \quad N = 0, 1, \dots, \quad (3.6)$$

где $P_q(t)$ – однородный многочлен степени q (либо тождественный нуль). Пусть еще существуют постоянные A и b такие, что

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| L_f^\omega \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k} \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{A}{y^b}, \quad |x|^2 + y^2 = 1, \quad y > 0. \quad (3.7)$$

Тогда существует ℓ такое, что f квазиасимптотически ограничено в нуле относительно $\rho(k)$ на множестве $\tilde{\mathcal{I}}_{[\ell; P_0, P_1, \dots, P_\ell]}$, т.е.

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| \left(f \left(\frac{\xi}{k} \right), \varphi(\xi) \right) \right\|_{\mathbb{B}} < \infty \quad \forall \varphi \in \tilde{\mathcal{I}}_{[\ell; P_0, P_1, \dots, P_\ell]}. \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу конечности порядка f существуют Q и C_1 такие, что $\|(f, \varphi)\|_{\mathbb{B}} \leq C_1 \mathcal{P}_Q[\varphi]$, поэтому

$$\left\| \left(f \left(\frac{\xi}{k} \right), \varphi(\xi) \right) \right\|_{\mathbb{B}} = k^n \|(f(\xi), \varphi(k\xi))\|_{\mathbb{B}} \leq C_2 k^{Q_1} \mathcal{P}_Q[\varphi], \quad k > 1, \quad (3.9)$$

для некоторых C_2 и Q_1 . Без ограничения общности можно считать, что $Q_1 > \alpha$. Введем банаховы пространства

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left\{ \gamma(k) \in C([1, \infty) \rightarrow \mathbb{B}) : \|\gamma(k)\|_{\mathcal{L}} = \sup_{k>1} \frac{1}{k^{Q_1}} \|\gamma(k)\|_{\mathbb{B}} < \infty \right\}, \\ G &= \left\{ \gamma(k) \in C([1, \infty) \rightarrow \mathbb{B}) : \|\gamma(k)\|_G = \sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \|\gamma(k)\|_{\mathbb{B}} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $G \subset \mathcal{L}$. Из (3.9) следует, что отображение $g: \varphi \mapsto (f(\xi/k), \varphi(\xi)) = \gamma_\varphi(k)$ непрерывно из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{L}$. Поэтому обобщенная функция $g(\xi)$, задаваемая формулой

$$(g(\xi), \varphi(\xi)) = \left(f \left(\frac{\xi}{k} \right), \varphi(\xi) \right), \quad (3.10)$$

принадлежит $\mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$. Заметим, что

$$L_g^\omega(x, y) = \left(g(\xi), \frac{1}{y^n} \omega \left(\frac{x - \xi}{y} \right) \right) = \left(f \left(\frac{\xi}{k} \right), \frac{1}{y^n} \omega \left(\frac{x - \xi}{y} \right) \right) = L_f^\omega \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k} \right).$$

Из условия (3.7) и леммы П.4 следует, что существуют постоянные A_1 , b_1 и a_1 такие, что

$$\|L_g^\omega(x, y)\|_G = \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| L_f^\omega \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k} \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{A_1}{y^{b_1}} (1 + |x|)^{a_1}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in (0, 1). \quad (3.11)$$

Тем самым для $L_g^\omega(x, y)$ выполнено условие б) теоремы 2.1, в котором надо банахово пространство $\mathbb{B}$ заменить на G и f на g . Докажем, что выполнено и условие а₁) (см. замечание к теореме 2.1). Для этого при любом $\varepsilon > 0$ введем банахово пространство

$$G_\varepsilon = \left\{ \gamma(k) \in C([1, \infty) \rightarrow \mathbb{B}) : \|\gamma(k)\|_{G_\varepsilon} = \sup_{k>1} \frac{1}{k^\varepsilon \rho(k)} \|\gamma(k)\|_{\mathbb{B}} < \infty \right\}. \quad (3.12)$$

Ясно, что

$$G = \left\{ \gamma \in \bigcap_{\varepsilon > 0} G_\varepsilon : \sup_{\varepsilon > 0} \|\gamma\|_{G_\varepsilon} < \infty \right\}, \quad \|\gamma\|_{G_\varepsilon} \nearrow \|\gamma\|_G, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ и $y \in (0, 1)$ функция $L_g^\omega(x, y)$ измерима по x как функция со значениями в G_ε . Пусть

$$\eta(k) \in C^\infty, \quad \eta(k) = \begin{cases} 1, & 0 < k < 1; \\ 0, & k > 2. \end{cases} \quad (3.13)$$

Тогда функции $\eta(k/n)L_g^\omega(x, y) = \eta(k/n)L_f^\omega(x/k, y/k)$, $n = 1, 2, \dots$, непрерывны по x как функции со значениями в G_ε . Пользуясь оценкой (3.11), имеем

$$\begin{aligned} \left\| L_g^\omega(x, y) - \eta\left(\frac{k}{n}\right)L_g^\omega(x, y) \right\|_{G_\varepsilon} &= \sup_{k > 1} \frac{1}{k^\varepsilon \rho(k)} \left\| L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) - L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) \eta\left(\frac{k}{n}\right) \right\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq \sup_{k > n} \frac{1}{k^\varepsilon \rho(k)} \left| \eta\left(\frac{k}{n}\right) - 1 \right| \left\| L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) \right\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq \frac{1}{n^\varepsilon} \sup_{k > 1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) \right\|_{\mathbb{B}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Пользуясь теперь теоремой 2.1, заключаем, что существует ℓ такое, что

$$g \in L(\tilde{\mathcal{S}}_{[\ell; P_0, \dots, P_\ell]} \rightarrow G).$$

Откуда и вытекает (3.8). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть в условиях леммы существует еще

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) = C(x, y), \quad |x|^2 + y^2 = 1, \quad y > 0. \quad (3.14)$$

Тогда $f(x)$ обладает квазиасимптотикой в нуле относительно $\rho(k)$, т.е. существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi) \right) = c_\varphi \quad \forall \varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[\ell; P_0, P_1, \dots, P_\ell]}. \quad (3.15)$$

Доказательство аналогично, следует только в качестве пространства G использовать пространство

$$G = \left\{ \gamma(k) \in C([1, \infty) \rightarrow \mathbb{B}) : \exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \|\gamma(k)\|_{\mathbb{B}} \right\} \quad (3.16)$$

с той же нормой и учесть, что в этом случае измеримость $L_g^\omega(x, y)$ по x как функций со значениями в G будет следовать из леммы П.6 работы [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в условиях леммы и замечании 1 заменить $L_f^\omega(x/k, y/k)$ на $L_f^\omega(kx, ky)$ (см. (3.7) и (3.14)), то утверждения леммы и замечание к ней останутся справедливыми, если только вместо $f(\xi/k)$ всюду подставить $f(k\xi)$. Другими словами, в этом случае f будет квазиасимптотически ограничена (обладать квазиасимптотикой) на бесконечности относительно $\rho(k)$ на множестве $\tilde{\mathcal{S}}_{[\ell; P_0, P_1, \dots, P_\ell]}$ при некотором ℓ .

ЛЕММА 3.2. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, $g(t) \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$ и $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α . Пусть также существует целое неотрицательное число ℓ такое, что $g(t)$ квазиасимптотически ограничена (обладает квазиасимптотикой) в нуле относительно $\rho(k)$ на основных функциях $\varphi(t) \in \mathcal{S}$ таких, что $T_\varphi^{\ell-1}(t) \equiv 0$, т. е.

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| \left(g\left(\frac{t}{k}\right), \varphi(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}} &< \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad T_\varphi^{\ell-1}(t) \equiv 0 \\ \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \left(g\left(\frac{t}{k}\right), \varphi(t) \right) \right) &= C_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad T_\varphi^{\ell-1}(t) \equiv 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Тогда если $\alpha \neq n, n+1, \dots$, то существуют постоянные

$$C_j \in \mathbb{B}, \quad j = (j_1, \dots, j_n), \quad |j| < \ell,$$

такие, что обобщенная функция

$$G(t) = g(t) - \sum_{|j| < \ell} C_j \delta^{(j)}(t) \quad (3.18)$$

квазиасимптотически ограничена (обладает квазиасимптотикой) в нуле относительно $\rho(k)$ на $\mathcal{S}$, т. е.

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| \left(G\left(\frac{t}{k}\right), \varphi(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}} &< \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \\ \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \left(G\left(\frac{t}{k}\right), \varphi(t) \right) \right) &= C_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Если же $\alpha = n + p$, где $p = 0, 1, \dots$, то

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| \left(G\left(\frac{t}{k}\right), \varphi(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}} &< \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad T_\varphi^p(t) \equiv 0 \\ \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \left(G\left(\frac{t}{k}\right), \varphi(t) \right) \right) &= C_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad T_\varphi^p(t) \equiv 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

где

$$G(t) = g(t) - \sum_{|j| < \ell} C_j \delta^{(j)}(t) \quad (3.21)$$

с некоторыми $C_j \in \mathbb{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим лишь случай квазиасимптотической ограниченности. Доказательство в случае существования квазиасимптотики совершенно аналогично. Без ограничения общности можно считать, что $n + \ell - 1 > \alpha$. По индукции мы построим семейство обобщенных функций

$$\{g_\ell(t), g_{\ell-1}(t), \dots, g_s(t), \dots, g_{s_0}(t)\}, \quad s_0 \geq 0,$$

таких, что $g_s(t)$, $s = \ell, \ell-1, \dots, s_0$, отличается от $g(t)$ на обобщенную функцию вида $\sum_{|j| < \ell} C_j \delta^{(j)}(t)$ с некоторыми $C_j \in \mathbb{B}$ и каждая $g_s(t)$ квазиасимптотически

ограничена в нуле относительно $\rho(k)$ на всех $\varphi(t) \in \mathcal{S}$ таких, что $T_\varphi^{s-1}(t) \equiv 0$. То есть

$$\sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| \left(g_s \left(\frac{t}{k} \right), \varphi(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}} < \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad T_\varphi^{s-1}(t) \equiv 0. \quad (3.22)$$

Число s_0 определится в процессе построения.

Положим $g_\ell(t) = g(t)$ и предположим, что $g_\ell, g_{\ell-1}, \dots, g_s$ уже построены. Построим функцию $g_{s-1}(t)$. При этом могут встретиться три случая: $n + s - 1 > \alpha$, $n + s - 1 < \alpha$ и $n + s - 1 = \alpha$.

Случай 1: $n + s - 1 > \alpha$. Пусть j – мультииндекс такой, что $|j| = s - 1$. Непосредственной проверкой (дифференцируя по k) можно убедиться, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^{n+s-1}} \left(g_s \left(\frac{t}{k} \right), t^j \varphi(t) \right) &= - \int_k^\infty \left(g_s \left(\frac{t}{\varkappa} \right), t^j \sum_{q=1}^n t_q \frac{\partial}{\partial t_q} \varphi(t) \right) \frac{d\varkappa}{\varkappa^{n+s}} \\ &\quad + (\gamma_j(t), \varphi(t)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $\gamma_j(t) \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$. Согласно индуктивному предположению (3.22) интеграл справа в (3.23) сходится. Подставляя в (3.23) вместо φ функции $t_q \psi(t)$, где $q = 1, \dots, n$, $\psi \in \mathcal{S}$, учитывая, что $T_{t^j t_q \psi}^{s-1}(t) \equiv 0$, и соотношение (3.22), при $k \rightarrow \infty$ имеем $(\gamma_j(t), t_q \psi(t)) = 0$. Следовательно,

$$\gamma_j(t) = C_j \delta(t), \quad C_j \in \mathbb{B}.$$

Положим $g_{s-1}(t) = g_s(t) - \sum_{|i|=s-1} (1/i!) C_i \delta^{(i)}(t)$. Докажем, что $g_{s-1}(t)$ квазиасимптотически ограничена в нуле относительно $\rho(k)$ на всех $\varphi \in \mathcal{S}$ таких, что $T_\varphi^{s-2}(t) \equiv 0$. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \left(g_{s-1} \left(\frac{t}{k} \right), t^j \varphi(t) \right) &= \left(g_s \left(\frac{t}{k} \right), t^j \varphi(t) \right) - \left(\frac{1}{j!} C_j \delta^{(j)} \left(\frac{t}{k} \right), t^j \varphi(t) \right) \\ &= \left(g_s \left(\frac{t}{k} \right), t^j \varphi(t) \right) - k^{s-1} \left(C_j \delta \left(\frac{t}{k} \right), \varphi(t) \right) \\ &= \left(g_s \left(\frac{t}{k} \right), t^j \varphi(t) \right) - k^{n+s-1} (\gamma_j(t), \varphi(t)). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Мы воспользовались тем, что при $|j| = |i|$

$$t^j \delta^{(i)}(t) = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ j! \delta(t), & i = j. \end{cases}$$

Используя (3.24) из соотношения (3.23), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} \left(g_{s-1} \left(\frac{t}{k} \right), t^j \varphi(t) \right) &= - \frac{k^{n+s-1}}{\rho(k)} \int_k^\infty \left(g_s \left(\frac{t}{\varkappa} \right), t^j \sum_{q=1}^n t_q \frac{\partial}{\partial t_q} \varphi(t) \right) \frac{d\varkappa}{\varkappa^{n+\ell}} \\ &\quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

В силу (3.22)

$$\frac{1}{\varkappa^{n+s}} \left\| \left(g_s \left(\frac{t}{\varkappa} \right), t^j \sum_{q=1}^n t_q \frac{\partial}{\partial t_q} \varphi(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq \text{const} \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{n+s}} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Поэтому из (3.25) следует неравенство

$$\frac{1}{\rho(k)} \left\| \left(g_{s-1} \left(\frac{t}{k} \right), t^j \varphi(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq \text{const} \frac{k^{n+s-1}}{\rho(k)} \int_k^{+\infty} \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{n+s}} d\varkappa. \quad (3.26)$$

Так как порядок автомодельности функции $\rho(\varkappa)/\varkappa^{n+s}$ равен $\alpha - n - s < -1$, то в силу (1.11) из (3.26) заключаем, что $g_{s-1}(t)$ квазиасимптотически ограничена в нуле относительно $\rho(k)$ на всех основных функциях вида $t^j \varphi(t)$, $|j| = s-1$, $\varphi \in \mathcal{S}$. Пусть $\varphi(t) \in \mathcal{S}$ такова, что $T_\varphi^{s-2}(t) \equiv 0$. Положим

$$\eta(t) \in \mathcal{S}, \quad \eta(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1; \\ 0, & |t| > 2. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} \left(g_{s-1} \left(\frac{t}{k} \right), \varphi(t) \right) &= \frac{1}{\rho(k)} \left(g_{s-1} \left(\frac{t}{k} \right), \eta(t) \varphi(t) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho(k)} \left(g_{s-1} \left(\frac{t}{k} \right), (1 - \eta(t)) \varphi(t) \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Второе слагаемое справа можно переписать в виде $(1/\rho(k))(g_s(t/k), (1 - \eta(t))\varphi(t))$, если заметить, что

$$(g_{s-1}(t), \psi(t)) = (g_s(t), \psi(t)) \quad \forall \psi \in \mathcal{S}, \quad T_\psi^{s-1}(t) \equiv 0. \quad (3.28)$$

Поэтому в силу квазиасимптотической ограниченности g_s на таких основных функциях (см. (3.22)) это слагаемое ограничено при $k \rightarrow +\infty$. Первое слагаемое справа в (3.27) в силу (3.28) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho(k)} \left(g_{s-1} \left(\frac{t}{k} \right), \eta(t) (\varphi(t) - T_\varphi^{s-1}(t)) \right) + \frac{1}{\rho(k)} \left(g_{s-1} \left(\frac{t}{k} \right), \eta(t) T_\varphi^{s-1}(t) \right) \\ &= \frac{1}{\rho(k)} \left(g_s \left(\frac{t}{k} \right), \eta(t) (\varphi(t) - T_\varphi^{s-1}(t)) \right) + \frac{1}{\rho(k)} \left(g_{s-1} \left(\frac{t}{k} \right), \eta(t) T_\varphi^{s-1}(t) \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Первое слагаемое справа в (3.29) ограничено по индуктивному предположению (3.22), а второе слагаемое ограничено по уже доказанному, так как $T_\varphi^{s-1}(t)$ — однородный многочлен степени $s-1$. Таким образом, построенная нами g_{s-1} обладает требуемыми свойствами.

Случай 2: $n + s - 1 < \alpha$. Положим $g_{s-1}(t) = g_s(t)$. Докажем, что $g_{s-1}(t)$ квазиасимптотически ограничена в нуле относительно $\rho(k)$ на всех $\varphi \in \mathcal{S}$ таких, что $T_\varphi^{s-2}(t) \equiv 0$. Пусть j — мультииндекс такой, что $|j| = s-1$. Теперь вместо (3.23) воспользуемся легко проверяемой формулой

$$\frac{1}{k^{n+s-1}} \left(g_s \left(\frac{t}{k} \right), t^j \varphi(t) \right) = (g_s(t), t^j \varphi(t)) + \int_1^k \left(g_s \left(\frac{t}{\varkappa} \right), t^j \sum_{q=1}^n t_q \frac{\partial}{\partial t_q} \varphi(t) \right) \frac{d\varkappa}{\varkappa^{n+s}}.$$

Из нее следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} \left(g_{s-1} \left(\frac{t}{k} \right), t^j \varphi(t) \right) &= \frac{k^{n+s-1}}{\rho(k)} (g_s(t), t^j \varphi(t)) \\ &+ \frac{k^{n+s-1}}{\rho(k)} \int_1^k \left(g_s \left(\frac{t}{\varkappa} \right), t^j \sum_{q=1}^n t_q \frac{\partial}{\partial t_q} \varphi(t) \right) \frac{d\varkappa}{\varkappa^{n+s}} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Первое слагаемое справа при $k \rightarrow +\infty$ стремится к нулю, а второе слагаемое ограничено в силу следующей оценки:

$$\begin{aligned} \frac{k^{n+s-1}}{\rho(k)} \int_1^k \left\| \left(g_s \left(\frac{t}{\varkappa} \right), t^j \sum_{q=1}^n t_q \frac{\partial}{\partial t_q} \varphi(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \frac{d\varkappa}{\varkappa^{n+s}} \\ \leq \text{const} \frac{k^{n+s-1}}{\rho(k)} \int_1^k \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{n+s}} d\varkappa \leq \text{const}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались индуктивным предположением (3.22), имея в виду, что тейлоровское разложение в нуле порядка $s-1$ функции $t^j \sum_{q=1}^n t_q \partial \varphi(t) / \partial t$ тождественно равно нулю, а также свойством автомодельных функций (1.11), учитывая, что порядок автомодельной функции $\rho(\varkappa) / \varkappa^{n+s}$ равен $\alpha - n - s > -1$. Таким образом, мы показали, что $g_{s-1}(t)$ квазиасимптотически ограничена в нуле относительно $\rho(k)$ на функциях вида $t^j \varphi(t)$, $|j| = s-1$, $\varphi \in \mathcal{S}$. Далее, точно так же, как и в предыдущем случае, показывается, что она квазиасимптотически ограничена и на всех $\varphi \in \mathcal{S}$ таких, что $T_\varphi^{s-2}(t) \equiv 0$.

Случай 3: $n + s - 1 = \alpha$. В этом случае мы полагаем $s = s_0$ и завершаем построение.

Продолжая доказательство леммы, положим $G(t) = g_{s_0}(t)$. Ясно, что если $\alpha \neq n, n+1, \dots$, то $s_0 = 0$ и $G(t)$ удовлетворяет соотношениям (3.18) и (3.19). Если же $\alpha = n+p$, где $p = 0, 1, \dots$, то $s_0 = p+1$, а стало быть, $G(t)$ удовлетворяет соотношению (3.20). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что в формуле (3.18) в сумме справа можно оставить лишь те члены, для которых $|j| > \alpha - n$, поскольку

$$\frac{1}{\rho(k)} \delta^{(j)} \left(\frac{t}{k} \right) = \frac{k^{n+|j|}}{\rho(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \quad |j| < \alpha - n.$$

Точно так же в (3.21) можно оставить лишь те слагаемые, для которых $|j| > p$, так как если $|j| < p$, то

$$\frac{1}{\rho(k)} \delta^{(j)} \left(\frac{t}{k} \right) = \frac{k^{n+|j|}}{\rho(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Если же $|j| = p$, то $(\delta^{(j)}(t/k), \varphi(t)) = 0$ для $\varphi \in \mathcal{S}$ таких, что $T_\varphi^p(t) \equiv 0$.

ЛЕММА 3.3. Пусть $\mathbb{B}$ — банахово пространство, $g(t) \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$ и $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α . Пусть также существует целое неотрицательное число ℓ такое, что $g(t)$ квазиасимптотически ограничена

(обладает квазиасимптотикой) на бесконечности относительно $\rho(k)$ на основных функциях $\varphi(t) \in \mathcal{S}$ таких, что $T_\varphi^{\ell-1}(t) \equiv 0$, т.е.

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \|(g(kt), \varphi(t))\|_{\mathbb{B}} &< \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad T_\varphi^{\ell-1}(t) \equiv 0 \\ \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} (g(kt), \varphi(t)) = C_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad T_\varphi^{\ell-1}(t) \equiv 0 \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Тогда если $\alpha \neq -n, -n-1, \dots$, то существуют постоянные $C_j \in \mathbb{B}$, $j = (j_1, \dots, j_n)$, $|j| < \ell$, такие, что обобщенная функция

$$G(t) = g(t) - \sum_{|j| < \ell} C_j \delta^{(j)}(t) \quad (3.32)$$

квазиасимптотически ограничена (обладает квазиасимптотикой) на бесконечности относительно $\rho(k)$ на $\mathcal{S}$, т.е.

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \|(G(kt), \varphi(t))\|_{\mathbb{B}} &< \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \\ \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} (G(kt), \varphi(t)) = C_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Если же $\alpha = -n-p$, где $p = 0, 1, \dots$, то $g(t)$ квазиасимптотически ограничена (обладает квазиасимптотикой) на бесконечности относительно $\rho(k)$ на всех $\varphi \in \mathcal{S}$ таких, что $T_\varphi^p(t) \equiv 0$, т.е.

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \|(g(kt), \varphi(t))\|_{\mathbb{B}} &< \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad T_\varphi^p(t) \equiv 0 \\ \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} (g(kt), \varphi(t)) = C_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad T_\varphi^p(t) \equiv 0 \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и при доказательстве предыдущей леммы, мы ограничимся случаем квазиасимптотической ограниченности. Доказательство в случае существования квазиасимптотики совершенно аналогично. Без ограничения общности можно считать ℓ настолько большим, что $n + \ell - 1 > -\alpha$. По индукции мы построим семейство обобщенных функций

$$\{g_\ell(t), g_{\ell-1}(t), \dots, g_s(t), \dots, g_{s_0}(t)\}, \quad s_0 \geq 0,$$

таких, что $g_s(t)$, $s = \ell, \ell-1, \dots, s_0$, отличается от $g(t)$ на обобщенную функцию вида $\sum_{|j| < \ell} C_j \delta^{(j)}(t)$ с некоторыми $C_j \in \mathbb{B}$ и каждая $g_s(t)$ квазиасимптотически ограничена на бесконечности относительно $\rho(k)$ на всех $\varphi(t) \in \mathcal{S}$ таких, что $T_\varphi^{s-1}(t) \equiv 0$. То есть

$$\sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \|(g_s(kt), \varphi(t))\|_{\mathbb{B}} < \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad T_\varphi^{s-1}(t) \equiv 0. \quad (3.35)$$

Число s_0 определится в процессе построения.

Положим $g_\ell(t) = g(t)$ и предположим, что $g_\ell, g_{\ell-1}, \dots, g_s$ уже построены. Построим функцию $g_{s-1}(t)$. При этом могут встретиться три случая: $n+s-1+\alpha > 0$, $n+s-1+\alpha < 0$ и $n+s-1+\alpha = 0$.

Случай 1: $n+s-1+\alpha > 0$. Положим $g_{s-1}(t) = g_s(t)$. Докажем, что $g_{s-1}(t)$ квазиасимптотически ограничена на бесконечности относительно $\rho(k)$ на всех $\varphi \in \mathcal{S}$ таких, что $T_\varphi^{s-2}(t) \equiv 0$. Пусть j – мультииндекс такой, что $|j| = s-1$. Воспользуемся легко проверяемой (дифференцированием по k) формулой

$$k^{n+s-1}(g_s(kt), t^j \varphi(t)) = (g_s(t), t^j \varphi(t)) - \int_1^k \left(g_s(\varkappa t), t^j \sum_{q=1}^n t_q \frac{\partial}{\partial t_q} \varphi(t) \right) \varkappa^{n+s-2} d\varkappa.$$

Из нее следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)}(g_{s-1}(kt), t^j \varphi(t)) &= \frac{1}{k^{n+s-1}\rho(k)}(g_s(t), t^j \varphi(t)) \\ &- \frac{1}{k^{n+s-1}\rho(k)} \int_1^k \left(g_s(\varkappa t), t^j \sum_{q=1}^n t_q \frac{\partial}{\partial t_q} \varphi(t) \right) \varkappa^{n+s-2} d\varkappa \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Первое слагаемое справа при $k \rightarrow +\infty$ стремится к нулю, а второе слагаемое ограничено в силу следующей оценки:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k^{n+s-1}\rho(k)} \int_1^k \left\| \left(g_s(\varkappa t), t^j \sum_{q=1}^n t_q \frac{\partial}{\partial t_q} \varphi(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \varkappa^{n+s-2} d\varkappa \\ &\leq \text{const} \frac{1}{k^{n+s-1}\rho(k)} \int_1^k \rho(\varkappa) \varkappa^{n+s-2} d\varkappa \leq \text{const}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались индуктивным предположением (3.35), имея в виду, что тейлоровское разложение в нуле порядка $s-1$ функции $t^j \sum_{q=1}^n t_q \partial \varphi(t) / \partial t$ тождественно равно нулю, а также свойством автомодельных функций (1.11), учитывая, что порядок автомодельной функции $\rho(\varkappa) \varkappa^{n+s-2}$ равен $\alpha - n - s - 2 > -1$. Таким образом, мы показали, что $g_{s-1}(t)$ квазиасимптотически ограничена на бесконечности относительно $\rho(k)$ на функциях вида $t^j \varphi(t)$, $|j| = s-1$, $\varphi \in \mathcal{S}$. Далее, рассуждая, как и в предыдущей лемме (пользуясь формулами (3.27)–(3.29), в которых следует только заменить t/k на kt), показываем, что $g_{s-1}(t)$ квазиасимптотически ограничена на бесконечности относительно $\rho(k)$ на всех функциях $\varphi \in \mathcal{S}$ таких, что $T_\varphi^{s-2}(t) \equiv 0$.

Случай 2: $n+s-1+\alpha < 0$. Пусть j – мультииндекс такой, что $|j| = s-1$. Непосредственной проверкой (дифференцируя по k) можно убедиться, что

$$\begin{aligned} k^{n+s-1}(g_s(kt), t^j \varphi(t)) &= \int_k^\infty \left(g_s(t\varkappa), t^j \sum_{q=1}^n t_q \frac{\partial}{\partial t_q} \varphi(t) \right) \varkappa^{n+s-2} d\varkappa \\ &+ (\gamma_j(t), \varphi(t)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где $\gamma_j(t) \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$. Согласно индуктивному предположению (3.35)

$$\left\| \left(g_s(t\varkappa), t^j \sum_{q=1}^n t_q \frac{\partial}{\partial t_q} \varphi(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq \text{const} \rho(\varkappa),$$

а так как функция $\rho(\varkappa) \varkappa^{n+s-2}$ имеет порядок $n+s-2+\alpha < -1$, то интеграл справа в (3.37) сходится. Подставляя в (3.37) вместо φ функции $t_q \psi(t)$, где $q = 1, \dots, n$,

$\psi \in \mathcal{S}$, учитывая, что $T_{t^j t_q}^{s-1} \psi(t) \equiv 0$, и соотношение (3.35), при $k \rightarrow \infty$ имеем $(\gamma_j(t), t_q \psi(t)) = 0$. Следовательно,

$$\gamma_j(t) = C_j \delta(t), \quad C_j \in \mathbb{B}.$$

Положим $g_{s-1}(t) = g_s(t) - \sum_{|i|=s-1} (1/i!) C_i \delta^{(i)}(t)$. Из соотношения (3.37), пользуясь формулой (3.24), в которой k заменено на $1/k$, получаем

$$\frac{1}{\rho(k)} (g_{s-1}(kt), t^j \varphi(t)) = \frac{1}{k^{n+s-1} \rho(k)} \int_k^{+\infty} \left(g_s(\varkappa t), t^j \sum_{q=1}^n t_q \frac{\partial}{\partial t_q} \varphi(t) \right) \varkappa^{n+s-2} d\varkappa$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Отсюда, замечая, что порядок автомодельной функции $\rho(\varkappa) \varkappa^{n+s-2}$ равен $\alpha + n + s - 2 < -1$, как и в предыдущей лемме, заключаем, что $g_{s-1}(t)$ квазиасимптотически ограничена на бесконечности относительно $\rho(k)$ на всех $\varphi \in \mathcal{S}$ таких, что $T_\varphi^{s-2}(t) \equiv 0$.

Случай 3: $n + s - 1 + \alpha = 0$. В этом случае мы полагаем $s = s_0$ и завершаем построение.

Продолжая доказательство леммы, положим $G(t) = g_{s_0}(t)$. Ясно, что если $\alpha \neq -n, -n-1, \dots$, то $s_0 = 0$ и $G(t)$ удовлетворяет соотношениям (3.32) и (3.33). Если же $\alpha = -n-p$, где $p = 0, 1, \dots$, то $s_0 = p+1$, а стало быть, $G(t) = g(t)$ и $g(t)$ удовлетворяет соотношению (3.34). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что в формуле (3.32) в сумме справа можно оставить лишь те члены, для которых $|j| < -\alpha - n$, так как

$$\frac{1}{\rho(k)} \delta^{(j)}(kt) = \frac{1}{k^{n+|j|} \rho(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \quad |j| > -\alpha - n.$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α , $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$ и $\omega(x) \in \mathcal{S}$, причем $\tilde{\omega}(t)$ не вырождена в нуле, а ее тейлоровское разложение в начале координат имеет вид:

$$T_{\tilde{\omega}}^N(t) = \sum_{q=0}^N P_q(t), \quad N = 0, 1, \dots, \quad (3.38)$$

где $P_q(t)$ – однородный многочлен степени q (либо тождественный нуль). Пусть еще существуют постоянные A и b такие, что

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \|L_f^\omega(kx, ky)\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{A}{y^b}, \quad |x|^2 + y^2 = 1, \quad y > 0. \quad (3.39)$$

Тогда существует единственный многочлен вида

$$Q(x) = \sum_{\alpha < \tau < \ell} Q_\tau(x), \quad (3.40)$$

где $Q_\tau(x)$ – однородный многочлен степени τ (либо тождественный нуль), ℓ – некоторое целое число, такой, что обобщенная функция $G(x) = f(x) - Q(x)$ квазиасимптотически ограничена на бесконечности относительно $\rho(k)$ на

всех $\varphi \in \mathcal{S}$, если $\alpha \neq 0, 1, 2, \dots$, и на всех $\varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[\alpha; P_0, P_1, \dots, P_\alpha]}$, если $\alpha = 0, 1, \dots$.
То есть

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \|(G(kx), \varphi(x))\|_{\mathbb{B}} < \infty \quad \begin{cases} \forall \varphi \in \mathcal{S}, & \text{если } \alpha \neq 0, 1, \dots; \\ \forall \varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[\alpha; P_0, \dots, P_\alpha]}, & \text{если } \alpha = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (3.41)$$

При этом

$$P_q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) Q_\tau(x) = 0, \quad \alpha < \tau < \ell, \quad q = 0, 1, \dots \quad (3.42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из замечания 2 к лемме 3.1, леммы 3.2 и замечания к ней вытекает, что существует многочлен вида (3.40) такой, что для $G(x) = f(x) - Q(x)$ справедливо неравенство

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \|(G(k\xi), \varphi(\xi))\|_{\mathbb{B}} < \infty \quad \begin{cases} \forall \varphi \in \mathcal{S}, & \alpha \neq 0, 1, \dots; \\ \forall \varphi \in \mathcal{S}, T_{\tilde{\varphi}}^\alpha(t) \equiv 0, & \alpha = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно в лемме 3.2 положить $g(t) = \tilde{f}(t)$ и учесть, что

$$F \left[\frac{1}{\rho(k)} f(kx) \right] = \frac{1}{k^n \rho(k)} \tilde{f} \left(\frac{t}{k} \right).$$

Докажем, что на самом деле для этого же многочлена справедливо неравенство (3.41). Для этого, конечно, достаточно рассмотреть случай $\alpha = 0, 1, \dots$.

Пусть $\tilde{\varphi}(t) \in \mathcal{S}_{[\alpha; P_0, \dots, P_\alpha]}$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} (G(kx), \varphi(x)) &= \frac{1}{k^n \rho(k)} \left(g \left(\frac{t}{k} \right) - \sum_{\alpha < |j|} C_j \delta^{(j)} \left(\frac{t}{k} \right), \tilde{\varphi}(t) (1 - h(t)) \right) \\ &+ \frac{1}{k^n \rho(k)} \left(g \left(\frac{t}{k} \right) - \sum_{\alpha < |j|} C_j \delta^{(j)} \left(\frac{t}{k} \right), (\tilde{\varphi}(t) - T_{\tilde{\varphi}}^\alpha(t)) h(t) \right) \\ &+ \frac{1}{k^n \rho(k)} \left(g \left(\frac{t}{k} \right) - \sum_{\alpha < |j|} C_j \delta^{(j)} \left(\frac{t}{k} \right), T_{\tilde{\varphi}}^\alpha(t) h(t) \right), \end{aligned} \quad (3.43)$$

где $h(t) \in \mathcal{S}$, $h(t) = 1$ при $|t| < 1$. Первые два слагаемых справа в (3.43) ограничены, так как тейлоровское разложение в нуле порядка α соответствующих основных функций в этих слагаемых тождественно равно нулю. А третье слагаемое равно

$$\left(g \left(\frac{t}{k} \right), T_{\tilde{\varphi}}^\alpha(t) h(t) \right) = \frac{1}{\rho(k)} (f(kx), F^{-1}[h(t) T_{\tilde{\varphi}}^\alpha(t)](x)).$$

Мы учли, что $(\sum_{\alpha < |j|} C_j \delta^{(j)}(t), T_{\tilde{\varphi}}^\alpha(t) h(t)) = 0$. Так как $T_{\tilde{\varphi}}^\alpha(t) h(t) \in \mathcal{S}_{[\ell; P_0, \dots, P_\ell]}$ для любого $\ell \geq \alpha$, то по замечанию 2 к лемме 3.1 оно также ограничено. Что и требовалось.

Докажем единственность многочлена (3.40). Пусть $Q^1(x)$ и $Q^2(x)$ два таких многочлена. Положим

$$\Delta(x) = Q^1(x) - Q^2(x) = \sum_{\alpha < \tau < \ell} \Delta_\tau(x).$$

Тогда $(1/\rho(k)) \sum_{\alpha < \tau < \ell} k^\tau (\Delta_\tau(x), \varphi(x))$ ограничена для всех $\varphi \in \mathcal{S}$, если $\alpha \neq 0, 1, \dots$, и для всех $\varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[\alpha; P_0, \dots, P_\alpha]}$, если $\alpha = 0, 1, \dots$. Отсюда для тех же α следует, что

$$(\Delta_\tau(x), \varphi(x)) = 0, \quad \alpha < \tau < \ell. \quad (3.44)$$

Из (3.44) сразу заключаем, что $\Delta_\tau(x) \equiv 0$, если $\alpha \neq 0, 1, \dots$. Если же $\alpha = 0, 1, \dots$, то, переходя в (3.44) к преобразованию Фурье, получаем

$$\left(\sum_{|j|=\tau} C_j \delta^{(j)}(t), \tilde{\varphi}(t) \right) = 0 \quad \forall \varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[\alpha; P_0, \dots, P_\alpha]}.$$

Полагая здесь $\tilde{\varphi}(t) = t^j$ в окрестности нуля, получаем, что $C_j = 0$, $|j| = \tau$, т.е. $\Delta_\tau(x) \equiv 0$ и в этом случае.

Нам осталось доказать лишь соотношение (3.42). Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta > 0$, тогда (3.41) заведомо выполнено при $\varphi(x) = \omega((x-\xi)/\eta)$, поскольку $F[\omega((x-\xi)/\eta)] = e^{it\xi} \tilde{\omega}(\eta t) \in \mathcal{S}_{[\ell; P_0, \dots, P_\ell]}$ для любого ℓ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} \left(G(kx), \omega\left(\frac{x-\xi}{\eta}\right) \right) &= \frac{1}{\rho(k)} \left(f(kx) - Q(kx), \omega\left(\frac{x-\xi}{\eta}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\rho(k)} \left(f(kx), \omega\left(\frac{x-\xi}{\eta}\right) \right) - \frac{1}{\rho(k)} \sum_{\alpha < \tau < \ell} k^\tau \left(Q_\tau(x), \omega\left(\frac{x-\xi}{\eta}\right) \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Выражение слева в (3.45) по только что доказанному ограничено. Первое слагаемое справа тоже ограничено по условию (3.39), так как

$$\frac{1}{\rho(k)} \left(f(kx), \omega\left(\frac{x-\xi}{\eta}\right) \right) = \frac{1}{\rho(k)} L_f^\omega(k\xi, k\eta).$$

Следовательно, ограничено и второе слагаемое справа в (3.45). Отсюда

$$\left(Q_\tau(x), \omega\left(\frac{x-\xi}{\eta}\right) \right) \equiv 0, \quad \tau > \alpha. \quad (3.46)$$

Пусть теперь в (3.42) $q = 0$. Если $P_0 = 0$, то соотношение (3.42) тривиально. Если $P_0 \neq 0$, то из (3.46) вытекает

$$0 \equiv \left(Q_\tau(x), \frac{1}{\eta^n} \omega\left(\frac{x-\xi}{\eta}\right) \right) \xrightarrow{\eta \rightarrow +0} P_0 Q_\tau(\xi).$$

Предположим, что (3.42) доказано для всех $q \leq s$. Докажем, что (3.42) справедливо и при $q = s+1$. Пусть $h(x) \in \mathcal{S}$, $h(x) = 1$ в некоторой окрестности начала координат. В силу индуктивного предположения имеем

$$0 \equiv \left(Q_\tau(x), \omega\left(\frac{x-\xi}{\eta}\right) \right) = \left(Q_\tau(x), \omega_1\left(\frac{x-\xi}{\eta}\right) \right), \quad (3.47)$$

где $\omega_1(x) = \omega(x) - \sum_{q=0}^s P_q(i\partial/\partial x)h(x)$, а следовательно,

$$\tilde{\omega}_1(t) = \tilde{\omega}(t) - \sum_{q=0}^s P_q(t) \tilde{h}(t).$$

Замечая, что

$$\tilde{\omega}_1(t) = P_{a+1}(t) + o(|t|^{s+1}), \quad t \rightarrow +0,$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta^{n+s+1}} \omega_1\left(\frac{x-\xi}{\eta}\right) &= F^{-1}\left[\frac{1}{\eta^{s+1}} e^{it\xi} \tilde{\omega}_1(t\eta)\right](x) \\ &= F^{-1}\left[\frac{1}{\eta^{s+1}} e^{it\xi} (P_{s+1}(t) + o(|t|^{s+1}\eta^{s+1}))\right](x) \xrightarrow[\eta \rightarrow +0]{\mathcal{B}\mathcal{S}} F^{-1}[e^{it\xi} P_{s+1}(t)](x) \\ &= P_{s+1}\left(i\frac{\partial}{\partial \xi}\right) \delta(x-\xi). \end{aligned}$$

Пользуясь этим, из (3.47) при $\eta \rightarrow +0$ нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta^{n+s+1}} \left(Q_\tau(x), \omega_1\left(\frac{x-\xi}{\eta}\right)\right) &\xrightarrow[\eta \rightarrow +0]{} \left(Q_\tau(x), P_{s+1}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) \delta(x-\xi)\right) \\ &= (-i)^{s+1} P_{s+1}\left(i\frac{\partial}{\partial \xi}\right) Q_\tau(\xi) = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть в условиях теоремы существует еще

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} L_f^\omega(kx, ky) = C(x, y), \quad |x|^2 + y^2 = 1, \quad y > 0. \quad (3.48)$$

Тогда обобщенная функция $G(x)$, фигурирующая в теореме, обладает квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\rho(k)$ на всех $\varphi \in \mathcal{S}$, если $\alpha \neq 0, 1, \dots$, и на всех $\varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[\alpha; P_0, P_1, \dots, P_\alpha]}$, если $\alpha = 0, 1, \dots$. То есть существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} (G(k\xi), \varphi(\xi)) = C_\varphi \quad \begin{cases} \forall \varphi \in \mathcal{S}, & \alpha \neq 0, 1, \dots; \\ \forall \varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[\alpha; P_0, \dots, P_\alpha]}, & \alpha = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (3.49)$$

Это непосредственно вытекает из доказательства теоремы, только в соответствующих местах следует использовать замечания 1 и 2 к лемме 3.1 и утверждения леммы 3.2, стоящие в скобках.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α , $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$ и $\omega(x) \in \mathcal{S}$, причем $\tilde{\omega}(t)$ не вырождена в нуле, а ее тейлоровское разложение в начале координат имеет вид:

$$T_{\tilde{\omega}}^N(t) = \sum_{q=0}^N P_q(t), \quad N = 0, 1, \dots,$$

где $P_q(t)$ – однородный многочлен степени q (либо тождественный нуль). Пусть еще существуют постоянные A и b такие, что

$$\sup_{k > 1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{A}{y^b}, \quad |x|^2 + y^2 = 1, \quad y > 0. \quad (3.50)$$

Тогда если $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$, то существует единственный многочлен вида

$$Q(x) = \sum_{\tau < -\alpha} Q_\tau(x), \quad (3.51)$$

где $Q_\tau(x)$ – однородный многочлен степени τ (либо тождественный нуль), такой, что обобщенная функция $G(x) = f(x) - Q(x)$ квазиасимптотически ограничена в нуле относительно $\rho(k)$, т.е.

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| \left(G\left(\frac{x}{k}\right), \varphi(x) \right) \right\|_{\mathbb{B}} < \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (3.52)$$

При этом

$$P_q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) Q_\tau(x) = 0, \quad \tau < -\alpha, \quad q = 0, 1, \dots \quad (3.53)$$

Если же $\alpha = 0, -1, -2, \dots$, то сама $f(x)$ квазиасимптотически ограничена в нуле относительно $\rho(k)$ на всех $\varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[-\alpha; P_0, P_1, \dots, P_{-\alpha}]}$, т.е.

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| \left(f\left(\frac{x}{k}\right), \varphi(x) \right) \right\|_{\mathbb{B}} < \infty \quad \forall \varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[-\alpha; P_0, \dots, P_{-\alpha}]}. \quad (3.54)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.1, леммы 3.3 и замечания к ней вытекает, что если $\alpha \neq 0, -1, \dots$, то существует многочлен вида (3.51) такой, что для $G(x) = f(x) - Q(x)$ справедливо неравенство (3.52), а если $\alpha = 0, -1, \dots$, то справедливо соотношение

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| \left(f\left(\frac{x}{k}\right), \varphi(x) \right) \right\|_{\mathbb{B}} < \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad T_{\tilde{\varphi}}^{-\alpha}(t) \equiv 0. \quad (3.55)$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно в лемме 3.3 положить $g(t) = \tilde{f}(t)$ и учесть, что

$$F \left[\frac{1}{\rho(k)} f\left(\frac{x}{k}\right) \right] = \frac{k^n}{\rho(k)} \tilde{f}(kt).$$

Докажем, что в случае $\alpha = 0, -1, \dots$ на самом деле справедливо неравенство (3.54). Пусть $\tilde{\varphi}(t) \in \mathcal{S}_{[-\alpha; P_0, \dots, P_{-\alpha}]}$, тогда, полагая $h(t) \in \mathcal{S}$, $h(t) = 1$ при $|t| < 1$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} \left(f\left(\frac{x}{k}\right), \varphi(x) \right) &= \frac{k^n}{\rho(k)} (f(kt), \tilde{\varphi}(t)(1 - h(t))) \\ &+ \frac{k^n}{\rho(k)} (f(kt), (\tilde{\varphi} - T_{\tilde{\varphi}}^{-\alpha}(t))h(t)) + \frac{k^n}{\rho(k)} (f(kt), T_{\tilde{\varphi}}^{-\alpha}(t)h(t)). \end{aligned}$$

Первые два слагаемых справа в этом равенстве ограничены в силу (3.55), так как тейлоровское разложение в нуле порядка $-\alpha$ соответствующих основных функций в этих слагаемых тождественно равно нулю. Третье слагаемое ограничено в силу леммы 3.1, так как $T_{\tilde{\varphi}}^{-\alpha}(t)h(t) \in \mathcal{S}_{[\ell; P_0, \dots, P_\ell]}$ для любого $\ell \geq -\alpha$. Что и требовалось.

Доказательство единственности многочлена (3.51), равно как и доказательство соотношений (3.53), вполне аналогично доказательству соответствующих утверждений предыдущей теоремы. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть в условиях теоремы существует еще

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} L_f^\omega \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k} \right) = C(x, y), \quad |x|^2 + y^2 = 1, \quad y > 0. \quad (3.56)$$

Тогда в случае $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$ обобщенная функция $G(x)$, фигурирующая в теореме, обладает квазиасимптотикой в нуле относительно $\rho(k)$, а если $\alpha = 0, -1, \dots$, то сама $f(x)$ обладает квазиасимптотикой в нуле относительно $\rho(k)$ на всех $\varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[-\alpha; P_0, P_1, \dots, P_{-\alpha}]}$. То есть

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \left(G \left(\frac{x}{k} \right), \varphi(x) \right) &= C_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, & \alpha \neq 0, -1, \dots, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \left(f \left(\frac{x}{k} \right), \varphi(x) \right) &= C_\varphi \quad \forall \varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[-\alpha; P_0, \dots, P_{-\alpha}]}, & \alpha = 0, -1, \dots \end{aligned} \quad (3.57)$$

Отметим, что в теоремах 3.2 и 3.3 некоторые слагаемые, составляющие многочлен $Q(x)$, фигурирующий в формулах (3.40) и (3.51), могут отсутствовать, если φ подчинено некоторым добавочным условиям. А именно, имеет место следующее

ЗАМЕЧАНИЕ 2 К ТЕОРЕМАМ 3.2 И 3.3. Пусть в условиях теоремы 3.2 (теоремы 3.3) $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ такова, что тейлоровское разложение ее преобразования Фурье в нуле $T_{\tilde{\varphi}}^N(t) = \sum_{q=0}^N \Phi_q(t)$, где $\Phi_q(t)$ — однородный многочлен степени q , содержит слагаемое

$$\Phi_{q_0}(t) \in \mathbb{P}[P_0, P_1, \dots, P_{q_0}]. \quad (3.58)$$

Тогда

$$(Q_{q_0}(k\xi), \varphi(\xi)) = 0. \quad (3.59)$$

Действительно, переходя к преобразованию Фурье (считая $N > q_0$), полагая $h(x) \in \mathcal{S}$ такой, что $\tilde{h}(t) = 1$ в некоторой окрестности нуля, имеем

$$\begin{aligned} (Q_{q_0}(i\xi), \varphi(\xi)) &= \left(Q_{q_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t), \tilde{\varphi}(t) \right) = \left(Q_{q_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t), (\tilde{\varphi}(t) - T_{\tilde{\varphi}}^N(t)) \tilde{h}(t) \right) \\ &+ \left(Q_{q_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t), T_{\tilde{\varphi}}^N(t) \tilde{h}(t) \right) = \left(Q_{q_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t), \Phi_{q_0}(t) \tilde{h}(t) \right) \\ &= \left(Q_{q_0}(\xi), \Phi_{q_0} \left(-i \frac{\partial}{\partial \xi} \right) h(\xi) \right) = \left(\Phi_{q_0} \left(i \frac{\partial}{\partial \xi} \right) Q_{q_0}(\xi), h(\xi) \right) = 0. \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы учли, что Φ_{q_0} разлагается в сумму, в каждом из слагаемых которой присутствуют множителями P_q . А для них согласно (3.42) (или (3.53) в случае теоремы 3.3) $P_q(\partial/\partial \xi) Q_{q_0}(\xi) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в условиях теоремы 3.3 (теоремы 3.2) функция $\varphi(x) \in \tilde{\mathcal{S}}_{[d; P_0, \dots, P_d]}$ для некоторого $d = 0, 1, \dots$. Тогда в (3.51) (соответственно в (3.40)) можно считать, что $Q(x) = \sum_{d < \tau < -\alpha} Q_\tau(x)$ (соответственно $Q(x) = \sum_{\max\{d, \alpha\} < \tau < \ell} Q_\tau(x)$).

В частности, если $d = [-\alpha]$, то в (3.51) многочлен $Q(x) \equiv 0$, т.е. соотношение (3.52) переписывается в виде

$$\sup_{k > 1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| \left(f \left(\frac{x}{k} \right), \varphi(x) \right) \right\|_{\mathbb{B}} < \infty \quad \forall \varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[-\alpha; P_0, \dots, P_{[-\alpha]}]}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предположим, что $\text{supp } \tilde{f} \subset \Gamma$. В этом случае все предыдущие рассмотрения (в том числе теоремы 3.2 и 3.3) останутся справедливыми, если условие невырожденности в нуле $\tilde{\omega}(t)$ заменить более слабым.

А именно, существует m такое, что тейлоровское разложение $\tilde{\omega}(t)$ в начале координат удовлетворяет следующему условию: для любого вектора $\bar{e} \in \Gamma$, $|\bar{e}| = 1$,

$$T_{\varphi}^m(\lambda \bar{e}) \neq 0, \quad \lambda > 0.$$

Все доказательства проводятся по той же самой схеме, при этом следует пользоваться вариантом леммы П.1, отмеченном в замечании 3 к этой лемме.

§ 4. Некоторые применения

В этом параграфе полученные выше теоремы применяются для изучения асимптотических свойств решений задачи Коши для уравнения теплопроводности, задачи Коши для диффузии многокомпонентных веществ и некомпенсации граничных особенностей голоморфных функций в трубчатых областях (в одномерном случае см. [1]).

4.1. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= a^2 \Delta u(x, t), \quad \lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x) \quad (\text{в } \mathcal{S}'), \\ f &\in \mathcal{S}', \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

в классе не более чем полиномиально растущих функций, т.е. таких, что

$$|u(x, t)| < C \frac{1}{t^b} (|x|^N + |t|^N + 1)$$

для некоторых b , C и N , зависящих от u . Как известно, в этом классе существует единственное решение задачи (4.1), определяемое формулой

$$u(x, t) = \left(f(\xi), \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-(x-\xi)^2/(4a^2 t)} \right) \equiv L_f^{\omega}(x, y), \quad (4.2)$$

где

$$\omega(\xi) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^n} e^{-\xi^2/(4a^2)} \quad (\tilde{\omega}(t) = e^{-a^2 t^2}), \quad y = \sqrt{t}. \quad (4.3)$$

Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α . Если для некоторой функции $u(x, t)$ выполнены условия:

1) существует предел

$$\frac{1}{\rho(k)} u(kx, k^2 t) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} u_0(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0; \quad (4.4)$$

2) существуют A и b такие, что

$$\left| \frac{1}{\rho(k)} u(kx, k^2 t) \right| \leq \frac{A}{t^b}, \quad |x|^2 + t^2 = 1, \quad (4.5)$$

то будем говорить, что функция $u(x, t)$ стабилизируется (в бесконечности) по параболам относительно автомодельной функции $\rho(k)$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция. Для того чтобы решение задачи Коши (4.1) стабилизировалось по параболам относительно $\rho(k)$, необходимо и достаточно, чтобы начальная функция $f(x) \in \mathcal{S}'$ обладала квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\rho(k)$, т.е.

$$\frac{1}{\rho(k)}(f(k\xi), \varphi(\xi)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено (4.6). Тогда (4.4) и (4.5) следуют из замечания к теореме 3.1' при $P_0 \neq 0$, если учесть формулы (4.2) и (4.3).

Обратно. Пусть решение задачи Коши (4.1) $u(x, t)$ удовлетворяет условиям (4.4) и (4.5). Заметим сначала, что

$$\frac{1}{\rho(k)}u(kx, k^2t) = \frac{1}{\rho(k)}L_f^\omega(kx, ky),$$

где ω и y определяются по формуле (4.3). Из (4.4) и (4.5) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)}L_f^\omega(kx, ky) = C(x, y), \quad \frac{1}{\rho(k)}|L_f^\omega(kx, ky)| \leq \frac{A}{y^b}, \quad |x|^2 + y^2 = 1, \quad y > 0.$$

Пользуясь теперь теоремой 3.2 (точнее, замечанием к ней) и учитывая, что $P_0 \neq 0$, а, стало быть, в силу (3.42) $Q(x) \equiv 0$, получаем соотношение (4.6). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть решение задачи Коши (4.1) $u(x, t)$ стабилизируется по параболам относительно автомодельной функции $\rho(k)$. Тогда оно стабилизируется по времени относительно функции $\rho(\sqrt{t})$, т.е. для любого $x \in \mathbb{R}^n$ существует

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)}u(x, t) = u_0. \quad (4.7)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(\sqrt{t})}u(x, t) &= \frac{1}{\rho(y)}L_f^\omega(x, y) = \frac{1}{\rho(y)}\left(f(\xi), \frac{1}{y^n}\omega\left(\frac{x - \xi}{y}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\rho(y)}\left(f(y\xi), \omega\left(\frac{x}{y} - \xi\right)\right) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} (f_0(\xi), \omega(-\xi)) = c_\omega. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что согласно теореме 4.1 начальная функция $f(x)$ задачи Коши (4.1) обладает квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\rho(k)$, и тем, что $\omega(x/y - \xi) \rightarrow \omega(-\xi)$ в $\mathcal{S}$ при любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \rightarrow +\infty$.

4.2. Задача Коши для диффузии многокомпонентных веществ. Рассмотрим следующую модельную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u_i(x, t) &= a_i^2\Delta u_i(x, t), \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \lim_{t \rightarrow +0} u_i(x, t) &= f(x) \quad (\text{в } \mathcal{S}), \quad f \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь $u_i(x, t)$ – концентрация i -го вещества, $i = 1, 2, \dots, m$. Не нарушая общности, можно считать, что все коэффициенты диффузии различных веществ a_i различны. Рассмотрим линейную комбинацию

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^m c_i u_i(x, t).$$

Ее можно интерпретировать, например, как плотность зарядов смеси веществ, где c_i – удельный заряд i -ой компоненты.

Пусть $U(x, t)$ стабилизируется относительно $\rho(k)$ по параболам. Что можно сказать об асимптотическом поведении концентрации отдельных веществ u_i ? Положим

$$s_p = \sum_{i=1}^m c_i a_i^{2p}, \quad p = 0, 1, \dots \quad (4.9)$$

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $U(x, t)$ стабилизируется по параболам относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α . Тогда если $s_0 = \sum_{i=1}^m c_i \neq 0$, то каждая компонента $u_i(x, t)$ стабилизируется по параболам относительно функции $\rho(k)$.

Если же

$$s_p = 0, \quad p = 0, 1, \dots, M-1, \quad s_M \neq 0 \quad (M > 0), \quad \alpha \neq 0, 1, \dots,$$

то существует M -гармонический многочлен $Q(x)$, $\Delta^M Q(x) = 0$, такой, что для каждого $i = 1, \dots, m$ функция

$$\hat{u}_i(x, t) = u_i(x, t) - \sum_{q=0}^{M-1} \frac{(a_i^2 t)^q}{q!} \Delta^q Q(x) \quad (4.10)$$

стабилизируется по параболам относительно $\rho(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$u_i(kx, k^2 t) = L_f^{\omega_i}(kx, ky), \quad \omega_i(x) = \frac{1}{(2a_i \sqrt{\pi})^n} e^{-x^2/(4a_i^2)}, \quad y = \sqrt{t},$$

$$U(kx, k^2 t) = L_f^{\omega}(kx, ky), \quad \omega(x) = \sum_{i=1}^m c_i \omega_i(x).$$

По условию

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} L_f^{\omega}(kx, ky) = C(x, y), \quad \frac{1}{\rho(k)} |L_f^{\omega}(kx, ky)| \leq \frac{A}{y^b}, \quad |x|^2 + y^2 = 1, \quad y > 0,$$

для некоторых A и b . Воспользуемся теперь теоремой 3.2 (точнее, замечанием к ней). Если $s_0 \neq 0$, то $P_0 \neq 0$. Следовательно, $f(x)$ обладает квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\rho(k)$, а потому согласно замечанию к теореме 3.1' при любом $i = 1, \dots, m$ $u_i(x, t)$ стабилизируется по параболам относительно $\rho(k)$.

Пусть теперь $s_p = 0$, $p = 0, 1, \dots, M-1$, $s_M \neq 0$ и $\alpha \neq 0, 1, \dots$. Тогда, учитывая, что $\tilde{\omega}(t) = \sum_{i=1}^m c_i e^{-a_i^2 t}$, имеем $P_q \equiv 0$ при $q = 0, 1, \dots, M-1$, а $P_M(t) = (-1)^M / (M!) s_M |t|^{2M}$. Согласно замечанию 1 к теореме 3.2 существует

многочлен $Q(x)$ такой, что $\Delta^M Q(x) = 0$ и функция $G(x) = f(x) - Q(x)$ обладает квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\rho(k)$. Далее, замечая, что функция $\hat{u}_i(x, t)$ (см. (4.10)) является решением задачи Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i(x, t) = a_i^2 \Delta u_i(x, t), \quad \hat{u}_i(x, 0) = G(x), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

по теореме 4.1 заключаем, что $\hat{u}_i$ стабилизируется по параболам относительно $\rho(k)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $U(x, t)$ стабилизируется по параболам относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha \neq 0, 1, \dots$ и $s_p = 0$ при $p = 0, 1, \dots, M-1$, а $s_M \neq 0$. Пусть еще $\alpha > 2M-2$. Тогда каждая компонента $u_i(x, t)$, $i = 1, \dots, m$, стабилизируется по времени относительно $\rho(\sqrt{t})$.

Действительно, по теореме $\hat{u}_i(x, t)$ стабилизируется по параболам относительно автомодельной функции $\rho(k)$. Следовательно, согласно следствию к теореме 4.1 она стабилизируется по времени относительно $\rho(\sqrt{t})$. Теперь наше утверждение вытекает из того факта, что при $\alpha > 2M-2$

$$\frac{1}{\rho(\sqrt{t})} \sum_{q=0}^{M-1} \frac{(a_i^2 t)^q}{q!} \Delta^q Q(x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

4.3. О некомпенсации граничных особенностей голоморфных функций в трубчатых областях над острыми конусами. Пусть $F(z) \in H(T^C)$, где C — острый выпуклый открытый конус в $\mathbb{R}^n$, а $T^C = \mathbb{R}^n + iC$ — трубчатая область над конусом C . Это означает, что $F(z)$ голоморфна в T^C и удовлетворяет там оценке

$$|F(z)| \leq A \frac{(1 + |z|)^d}{\Delta_C^b(y)}, \quad z = x + iy, \quad y \in C, \quad (4.11)$$

с некоторыми постоянными A, b и d . Здесь $\Delta_C(y)$ — расстояние от $y \in C$ до границы конуса C . Отметим, что у $F(z)$ существует граничное значение в $\mathcal{S}'$ при $y \rightarrow +0$ такое, что $f(x) = \lim_{y \rightarrow +0} F(x + iy)$, причем носитель его преобразования Фурье лежит в конусе, сопряженном к конусу C , т.е.

$$\text{supp } \tilde{f}(t) \subset \Gamma = C^* \quad (4.12)$$

(см. [2]). Отметим, что для любого вектора $y \in C$

$$F(x + iy) = (\tilde{f}(t), e^{i(x,t)} e^{-(y,t)}) = (f(\xi), \omega_y(x - \xi)) = L_f^{\omega_y}(x, 1), \quad (4.13)$$

где $\omega_y(x) \in \mathcal{S}$ такова, что $\tilde{\omega}_y(t) = e^{-(y,t)}$ при $t \in \Gamma$, а вне Γ она является каким-либо продолжением этой экспоненты до основной функции из $\mathcal{S}$.

Пусть заданы автомодельная функция $\rho(k)$, векторы h_1 и h_2 из C , числа c_1 и c_2 и выполнена оценка

$$\frac{1}{\rho(k)} \left| c_1 F\left(\frac{x + ih_1}{k}\right) + c_2 F\left(\frac{x + ih_2}{k}\right) \right| \leq A(1 + |x|)^a, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k > 1, \quad (4.14)$$

с некоторыми постоянными A и a . Нас будет интересовать вопрос, что можно сказать о поведении самой функции $F(z)$ в окрестности начала координат?

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $F(z) \in H(T^C)$ и удовлетворяет оценке (4.14) с некоторой автомодельной функцией $\rho(k)$ порядка α , причем $\hat{h} = h_1 - h_2 \in C$. Тогда

1) если $c_1 + c_2 \neq 0$, то существуют постоянные A_1 , a_1 и b_1 такие, что

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left| F\left(\frac{z}{k}\right) \right| \leq A_1 \frac{(1+|x|)^{a_1}}{\Delta_C^{b_1}(y)}, \quad z \in T^C; \quad (4.15)$$

2) если $c_1 + c_2 = 0$ (не нарушая общности, можно считать, что $c_1 = -c_2 = 1$) и, кроме того,

- а) если $\alpha > 0$, то выполняется соотношение (4.15);
- б) если $\alpha < 0$ и $\alpha \neq -1, -2, \dots$, то существует многочлен $Q(z)$ степени меньшей $-\alpha$, удовлетворяющий уравнению

$$\left(\hat{h}, \frac{\partial}{\partial z} \right) Q(z) = 0, \quad (4.16)$$

такой, что

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left| F\left(\frac{z}{k}\right) - Q\left(\frac{z}{k}\right) \right| \leq A_1 \frac{(1+|x|)^{a_1}}{\Delta_C^{b_1}(y)}, \quad z \in T^C, \quad (4.17)$$

для некоторых постоянных A_1 , a_1 и b_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (4.13) вытекает, что

$$c_1 F\left(\frac{x+ih_1}{k}\right) + c_2 F\left(\frac{x+ih_2}{k}\right) = L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{1}{k}\right), \quad k > 1,$$

где $f(x)$ есть граничное значение $F(z)$, а $\omega(x) \in \mathcal{S}$ и $\tilde{\omega}(t) = c_1 e^{-(h_1, t)} + c_2 e^{-(h_2, t)}$, $t \in \Gamma$. Из условия (4.14) и замечания 2 к лемме П.4 следует, что

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left| L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{\varkappa}{k}\right) \right| \leq \frac{A_1 (1+|x|)^{a_1}}{\varkappa^b}, \quad |x|^2 + \varkappa^2 = 1, \quad \varkappa > 0.$$

Заметим, что $T_{\tilde{\omega}}^1(t) = (c_1 + c_2) - ((c_1 h_1 + c_2 h_2), t) = P_0 + P_1(t)$.

Пусть $c_1 + c_2 \neq 0$. Тогда $\tilde{\omega}(t)$ не вырождена в нуле и $P_0 \neq 0$, а потому по теореме 3.3 заключаем, что $f(x)$ квазиасимптотически ограничена в нуле относительно $\rho(k)$. Следовательно, $\tilde{f}(t)$ квазиасимптотически ограничена на бесконечности относительно $(1/k^n)\rho(k)$. Теперь оценка (4.15) следует из того, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} \left| F\left(\frac{z}{k}\right) \right| &= \frac{k^n}{\rho(k)} |(f(k t), e^{i(x, t) - (y, t)})| \\ &\leq C \max_{|j| \leq N} \sup_{t \in \Gamma} (1+|t|)^N \left| \frac{\partial^{|j|}}{\partial t^j} e^{i(x, t) - (y, t)} \right| \end{aligned}$$

для некоторых C и N .

Пусть теперь $c_1 = -c_2 = 1$. Тогда $P_0 = 0$, а $P_1(t) = (\hat{h}, t) \neq 0$ при $t \in \Gamma$, и мы снова можем воспользоваться теоремой 3.3 (см. замечание 3 к ней). Из этой

теоремы следует, что если $\alpha > 0$, то по-прежнему $f(x)$ квазиасимптотически ограничена в нуле относительно $\rho(k)$ и оценка (4.15) получается так же, как и в предыдущем случае. Если же $\alpha < 0$ и $\alpha \neq -1, -2, \dots$, то существует многочлен $Q(z) = \sum_{0 \leq \tau < -\alpha} Q_\tau(z)$ такой, что

$$P_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)Q(x) = \left(\hat{h}, \frac{\partial}{\partial x}\right)Q(x) = 0$$

и функция $G(x) = f(x) - Q(x)$ квазиасимптотически ограничена в нуле относительно $\rho(k)$. Переходя к преобразованию Фурье и действуя, как и в предыдущем случае, получаем требуемую оценку (4.17). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если наряду с оценкой (4.14) потребовать еще существование пределов

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \left(c_1 F\left(\frac{x + ih_1}{k}\right) + c_2 F\left(\frac{x + ih_2}{k}\right) \right) = C(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.18)$$

то можно утверждать, что наряду с оценками (4.15) и (4.17) существуют еще пределы

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} F\left(\frac{z}{k}\right) = C(x, y), \quad z \in T^C, \quad (4.19)$$

и

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \left(F\left(\frac{z}{k}\right) - Q\left(\frac{z}{k}\right) \right) = C(x, y), \quad z \in T^C, \quad (4.20)$$

соответственно.

Доказательство проводится аналогично, следует только воспользоваться замечанием 1 к теореме 3.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В условиях теоремы и существования предела (4.18) при $\alpha < 0$ и $\alpha \neq -1, -2, \dots$ существуют постоянные Q_0 и C такие, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \left(F\left(\frac{\zeta \hat{h}}{k}\right) - Q_0 \right) = C(\zeta)^{-\alpha}, \quad \zeta \in \mathbb{C}, \quad \text{Im } \zeta > 0.$$

Действительно, нетрудно заметить, что в силу (4.16)

$$\frac{d}{d\zeta} Q(\zeta \hat{h}) = \left(\hat{h}, \frac{\partial}{\partial x} \right) Q(x) \Big|_{x=\zeta \hat{h}} = 0, \quad \zeta \in \mathbb{C}, \quad \text{Im } \zeta > 0,$$

и, следовательно, $Q(\zeta \hat{h}/k) = Q(0) = Q_0$. Согласно теореме 3.3 и предыдущему замечанию

$$\frac{1}{\rho(k)} \left(F\left(\frac{\zeta \hat{h}}{k}\right) - Q_0 \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c(\zeta).$$

Ясно, что $c(\zeta)$ — голоморфная в верхней полуплоскости функция, однородная степени $-\alpha$, а потому $c(\zeta) = C(\zeta)^{-\alpha}$.

§ 5. Приложение

В этом приложении мы докажем ряд вспомогательных утверждений, которые были использованы в основном тексте.

Следующая лемма является некоторым вариантом классической теоремы о короне. Мы приводим ее в том виде, который нам был нужен в основном тексте (ср. также [5]).

ЛЕММА П.1. Пусть $\mathbb{J}$ – произвольное множество индексов и задано семейство функций $\{\eta_\beta(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \beta \in \mathbb{J}\}$ такое, что существуют числа

$$q, Q_j, C_l \quad \text{и} \quad c > 0, \quad j = (j_1, \dots, j_n), \quad j_k = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

такие, что для любого мультииндекса j выполнены оценки

$$\left| \frac{\partial^{|j|}}{\partial t^j} \eta_\beta(t) \right| \leq C_j (1 + |t|)^{Q_j}, \quad \beta \in \mathbb{J}, \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{П.1})$$

$$\sup_{\beta \in \mathbb{J}} |\eta_\beta(t)| \geq \frac{c}{(1 + |t|)^q}, \quad t \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{П.2})$$

Тогда существуют счетное множество индексов $I \subset \mathbb{J}$, числа $\lambda_i > 0$, $\beta_i \in I$, $i = 1, 2, \dots$, $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i = 1$, и функции $\{g_i(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), i = 1, 2, \dots\}$ такие, что для любого мультииндекса j найдутся постоянные C_j^* и Q_j^* такие, что

$$\left| \frac{\partial^{|j|}}{\partial t^j} g_i(t) \right| \leq C_j^* (1 + |t|)^{Q_j^*}, \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (\text{П.3})$$

и выполнено тождество

$$\sum_{i=1}^\infty \lambda_i g_i(t) \eta_{\beta_i}(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{П.4})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что существуют счетное множество индексов $I \subset \mathbb{J}$, числа $\lambda_i > 0$, $\beta_i \in I$, $i = 1, 2, \dots$, $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i = 1$, постоянные d и ℓ такие, что

$$\sum_{i=1}^\infty \lambda_i |\eta_{\beta_i}(t)|^2 \geq \frac{d}{(1 + |t|)^\ell}, \quad t \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{П.5})$$

Для этого положим

$$r_\beta(t) = \min \left\{ 1, \frac{1}{2nC_1(2 + |t|)^{Q_1}} |\eta_\beta(t)| \right\}, \quad \beta \in \mathbb{J}, \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{П.6})$$

где $C_1 = \max_{|j|=1} \{C_j\}$ и $Q_1 = \max_{|j|=1} \{Q_j\}$. Покажем, что

$$|\eta_\beta(t)| \geq \frac{1}{2} |\eta_\beta(t^0)|, \quad |t - t^0| \leq r_\beta(t^0). \quad (\text{П.7})$$

Действительно, полагая $\Phi_\beta(\xi) = \eta_\beta(t^0 + \xi(t - t^0))$, по лемме о конечных приращениях имеем

$$\begin{aligned} |\eta_\beta(t) - \eta_\beta(t^0)| &= |\Phi_\beta(1) - \Phi_\beta(0)| = |\Phi'_\beta(\xi^*)| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_\beta(t + \xi^*(t - t^0))}{\partial t_k} (t_k - t_k^0) \right| \leq |t - t^0| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \eta_\beta(t^*)}{\partial t_k} \right| \\ &\leq nr_\beta(t^0)C_1(1 + |t^0|)^{Q_1} \leq \frac{1}{2}|\eta_\beta(t^0)|. \end{aligned}$$

Мы учли соотношение (П.6)

В силу (П.2) для каждой точки $t \in \mathbb{R}^n$ найдется $\beta(t) \in \mathbb{J}$ такое, что

$$|\eta_{\beta(t)}(t)| \geq \frac{1}{2} \frac{c}{(1 + |t|)^q},$$

в частности, $r_{\beta(t^0)}(t^0) > 0$. Поэтому

$$|\eta_{\beta(t^0)}(t)| \geq \frac{1}{2}|\eta_{\beta(t^0)}(t^0)| \geq \frac{1}{4} \frac{c}{(1 + |t^0|)^q}, \quad |t - t^0| \leq r_{\beta(t^0)}(t^0). \quad (\text{П.8})$$

Положим $T_p = \{|t| < p\}$ и $K_p = \overline{T_p} \setminus T_{p-1}$. Если $t^0 \in K_p$, то из (П.6) и (П.8) следует, что

$$r_{\beta(t^0)}(t^0) \geq \min \left\{ 1, \frac{c}{8nC_1(1 + |t^0|)^{Q_1+q}} \right\} \geq \min \left\{ 1, \frac{c}{8C_1n(1 + p)^{Q_1+q}} \right\} \quad (\text{П.9})$$

(мы учли, что $p - 1 \leq |t^0| \leq p$). Таким образом, каждый K_p покрыт шарами радиуса $r_{\beta(t)}(t)$ и из этого покрытия выделим покрытие конечной кратности N (см. [6]), где N зависит только от размерности пространства n . Центры выбранных шаров перенумеруем следующим образом. Сначала нумеруем шары, покрывающие K_1 , затем K_2 и т.д. Получим счетное семейство шаров, покрывающее все $\mathbb{R}^n$. Их центры обозначим через t^i , а сами шары – через $S(t^i)$. Объем такого шара не меньше чем $\sigma_n(r_{\beta(t^i)}(t^i))^n$ (здесь $\sigma_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2 + 1)$ – объем едичного шара в $\mathbb{R}^n$). Поскольку

$$\sum_{t^i \in K_p} \sigma_n(r_{\beta(t^i)}(t^i))^n \leq N \cdot [\text{объем } T_{p+1}] \leq N\sigma_n(p + 1)^n,$$

то количество выбранных шаров M_p , покрывающих K_p , удовлетворяет соотношению

$$M_p \leq N(p + 1)^n \left(\frac{8nC_1(1 + p)^{Q_1+q}}{c} \right)^n. \quad (\text{П.10})$$

Положим теперь $\lambda_i = 6/(\pi^2 i^2)$, тогда $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$. Обозначим $\beta_i = \beta(t^i)$, а через I – счетное множество $\{\beta_i, i = 1, 2, \dots\}$.

Пусть теперь точка $t \in K_p$, тогда она обязательно попадет в какой-то шар $S(t^{i_0})$, покрывающий K_p . Имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |\eta_{\beta_i}(t)|^2 \geq \lambda_{i_0} |\eta_{\beta_{i_0}}(t)|^2. \quad (\text{П.11})$$

Из всей суммы мы оставили только то слагаемое, которое соответствует шару $S(t^{i_0})$. Согласно (П.8) имеем

$$\lambda_{i_0} |\eta_{\beta_{i_0}}(t)|^2 \geq \lambda_{i_0} \left(\frac{1}{4} \frac{c}{(1 + |t^{i_0}|)^q} \right)^2 \geq \lambda_{i_0} \frac{c^2}{16(1+p)^{2q}}. \quad (\text{П.12})$$

Оценим λ_{i_0} , учитывая, что i_0 — это номер одного из шаров, покрывающих K_p . В силу (П.10)

$$\begin{aligned} i_0 &\leq M_1 + M_2 + \dots + M_p \leq \sum_{\tau=1}^p N \left(\frac{8nC_1}{c} \right)^n (1+\tau)^{(Q_1+q+1)n} \\ &\leq N \left(\frac{8C_1n}{c} \right)^n (p+1)^{n(Q_1+q+1)+1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lambda_{i_0} = \frac{6}{\pi^2 i_0^2} \geq \frac{6c^{2n}}{\pi^2 N^2 64^n n^{2n} C_1^{2n}} \frac{1}{(p+1)^{2n(1+Q_1+q)+2}}.$$

Теперь из (П.11) и (П.12) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |\eta_{\beta_i}(t)|^2 &\geq \frac{6c^{2n+2}}{16^{n+1} \pi^2 N^2 n^{2n} C_1^{2n}} \frac{1}{(p+1)^{2n(1+Q_1+q)+2q+2}} \\ &\geq \frac{\text{const}}{(2+|t|)^{2n(1+Q_1+q)+2q+2}} \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

(здесь учтено, что $p-1 \leq |t| \leq p$). Из (П.13) и следует (П.5).

Полагая теперь

$$g_i(t) = \frac{\overline{\eta_{\beta_i}(t)}}{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |\eta_{\beta_i}(t)|^2}, \quad (\text{П.14})$$

нетрудно убедиться, что выполнены соотношения (П.3) и (П.4). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из соотношений (П.1), (П.13) и (П.14) нетрудно увидеть, что для любого мультииндекса j существуют постоянные $\widehat{C}_j$, $\widehat{Q}_j$, и $\widehat{P}_j$, зависящие только от q , $\{Q_\ell : |\ell| \leq |j| + 1\}$ (в частности, не зависящие от конкретного выбора семейства $\{\eta_\beta(t), \beta \in \mathbb{J}\}$ со свойствами (П.1) и (П.2)), такие, что

$$|Q_j^*| \leq \widehat{Q}_j, \quad (\text{П.15})$$

$$|C_j^*| \leq \widehat{C}_j \left(\sum_{|\ell| \leq |j|+1} |C_\ell| + \frac{1}{c} \right)^{\widehat{P}_j}. \quad (\text{П.16})$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть в условиях леммы соотношение (П.2) выполняется только при $|t| > \delta > 0$.

Тогда соотношения (П.3) и (П.4) будут иметь место при $|t| > 2\delta$, причем для любого мультииндекса j существуют постоянные $\widehat{C}_j$, $\widehat{Q}_j$ и $\widehat{P}_j$, зависящие только от q , $\{Q_\ell : |\ell| \leq |j| + 1\}$ (в частности, не зависящие от чисел C_ℓ , c , δ и конкретного выбора семейства $\{\eta_\beta(t), \beta \in \mathbb{J}\}$ со свойствами (П.1) и (П.2)), такие, что

$$|Q_j^*| \leq \widehat{Q}_j, \quad (\text{П.17})$$

$$|C_j^*| \leq \widehat{C}_j \left(\sum_{|\ell| \leq |j|+1} |C_\ell| + \frac{1}{c} + \frac{1}{\delta} \right)^{\widehat{P}_j}. \quad (\text{П.18})$$

Действительно, добавим к нашему семейству $\{\eta_\beta(t), \beta \in \mathbb{J}\}$ еще одну функцию $c\omega(t/\delta)$, где “шапочка” $\omega(t)$ обладает следующими свойствами:

$$\omega(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \omega(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1; \\ 0, & |t| > 2. \end{cases}$$

Считая (без ограничения общности) $0 < \delta < 1$, нетрудно проверить, что новое семейство (с добавленной “шапочкой”) удовлетворяет всем условиям леммы. Поэтому существует счетное множество $I \subset \mathbb{J}$, числа

$$\lambda_0 > 0, \quad \lambda_i > 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i = 1,$$

индексы $\beta_i \in I$ и функции $\{g_i(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), i = 0, 1, \dots\}$ такие, что выполнены соотношения (П.3) и

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \eta_{\beta_i}(t) g_i(t) + \lambda_0 c\omega\left(\frac{t}{\delta}\right) g_0(t). \quad (\text{П.19})$$

Согласно предыдущему замечанию для $g_i(t), i = 0, 1, \dots$, выполнены оценки (П.15) и (П.16), из которых (и еще из (П.19)) и следуют соотношения (П.17) и (П.18).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Лемма П.1 останется справедливой, если вместо семейства функций $\{\eta_\beta(t), \beta \in \mathbb{J}\}$, заданных в $\mathbb{R}^n$, рассматривать семейство функций $\{\eta_\beta(t) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \beta \in \mathbb{J}\}$, где Ω – произвольная выпуклая область. При этом соотношения (П.1) и (П.2) должны выполняться в $\overline{\Omega}$. Функции $g_i(t), i = 1, 2, \dots$, также будут определены в $\overline{\Omega}$ и там же будут выполнены соотношения (П.3) и (П.4) (единственное изменение в доказательстве состоит в том, что в качестве множеств K_p теперь нужно рассматривать множества $\overline{T_p} \setminus \overline{T_{p-1}} \cap \overline{\Omega}$ и учесть тот факт, что в выпуклом множестве любые две точки можно соединить отрезком прямой). Отметим, что в качестве Ω можно взять внутренность выпуклого конуса Γ с вершиной в начале координат.

ЛЕММА П.2. Пусть $P(t)$ – многочлен степени N от n переменных $t = (t_1, \dots, t_n)$ такой, что

$$P(\lambda \bar{e}) \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda > 0 \quad \text{и} \quad \text{любом} \quad \bar{e}, \quad |\bar{e}| = 1. \quad (\text{П.20})$$

Пусть заданы числа $\lambda_i > 0, i = 0, 1, \dots, N$, попарно не равные друг другу. Тогда существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\inf_{|\bar{e}|=1} \max_{0 \leq i \leq N} |P(\varepsilon \lambda_i \bar{e})| \geq c \varepsilon^N, \quad \varepsilon < 1. \quad (\text{П.21})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P(t) = \sum_{k=0}^N P_k(t)$, где $P_k(t)$ – однородные многочлены степени k . Из условия (П.20) вытекает, что на единичной сфере $\{\bar{e} : |\bar{e}| = 1\}$ все они одновременно в нуль не обращаются, а потому

$$\|\bar{P}(\bar{e})\| \geq c_1 > 0, \quad |\bar{e}| = 1, \quad (\text{П.22})$$

здесь и далее $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора, а вектор $\bar{P}(\bar{e}) = (P_0(\bar{e}), P_1(\bar{e}), \dots, P_N(\bar{e}))$. Положим

$$A_0(\bar{e}, \varepsilon) = P(\varepsilon \lambda_0 \bar{e}) = P_0(\bar{e}) + \varepsilon \lambda_0 P_1(\bar{e}) + (\varepsilon \lambda_0)^2 P_2(\bar{e}) + \dots + (\varepsilon \lambda_0)^N P_N(\bar{e}),$$

$$\dots \dots \dots A_N(\bar{e}, \varepsilon) = P(\varepsilon \lambda_N \bar{e}) = P_0(\bar{e}) + \varepsilon \lambda_N P_1(\bar{e}) + (\varepsilon \lambda_N)^2 P_2(\bar{e}) + \dots + (\varepsilon \lambda_N)^N P_N(\bar{e}).$$

Полагая вектор $\bar{A}(\bar{e}, \varepsilon) = (A_0(\bar{e}, \varepsilon), \dots, A_N(\bar{e}, \varepsilon))$ и обозначая через $W(\varepsilon)$ матрицу Вандермонда

$$W(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & (\varepsilon \lambda_0) & (\varepsilon \lambda_0)^2 & \dots & (\varepsilon \lambda_0)^N \\ 1 & (\varepsilon \lambda_1) & (\varepsilon \lambda_1)^2 & \dots & (\varepsilon \lambda_1)^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (\varepsilon \lambda_N) & (\varepsilon \lambda_N)^2 & \dots & (\varepsilon \lambda_N)^N \end{pmatrix},$$

имеем $\bar{A}(\bar{e}, \varepsilon) = W(\varepsilon) \bar{P}(\bar{e})$. Отсюда и из (П.22) получаем

$$0 < c_1 \leq \|\bar{P}(\bar{e})\| \leq \|W^{-1}(\varepsilon)\| \|\bar{A}(\bar{e}, \varepsilon)\|.$$

Далее, имеем

$$\|\bar{A}(\bar{e}, \varepsilon)\| \geq \frac{c_1}{\|W^{-1}(\varepsilon)\|}. \quad (\text{П.23})$$

Если мы покажем, что $\|W^{-1}(\varepsilon)\| \leq \text{const}/\varepsilon^N$, то из (П.23) и будет следовать соотношение (П.21).

Получаем

$$\|W^{-1}(\varepsilon)\| \leq C_2 \max_{0 \leq i, k \leq N} |w_{i,k}|,$$

где $w_{i,k}$ – элементы матрицы $W^{-1}(\varepsilon)$. Обозначая теперь через $M_{i,k}$ соответствующие миноры матрицы Вандермонда $W(\varepsilon)$, имеем

$$\begin{aligned} |w_{i,k}| &= \left| \frac{M_{k,i}}{\det W(\varepsilon)} \right| = \left| \frac{\varepsilon^{1+2+\dots+(k-1)+(k+1)+\dots+N} v_{i,k}(\lambda_0, \dots, \lambda_N)}{\varepsilon^{1+2+\dots+N} \det W(\lambda_0, \dots, \lambda_N)} \right| \\ &= \frac{1}{\varepsilon^k} C(\lambda) \leq \frac{C(\lambda)}{\varepsilon^N}, \end{aligned}$$

где $C(\lambda)$ не зависит от ε . Лемма доказана.

ЛЕММА П.3. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово и $\mathcal{L}$ – локально выпуклое пространства, причем $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$, $f(\xi) \in \mathbb{L}(\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L})$ и $\omega(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Пусть при каждом $y \in (0, 1]$ функция $L_f^\omega(x, y)$ измерима по $x \in \mathbb{R}^n$ как функция со значениями в $\mathbb{B}$ и существуют $\tilde{C}$, a и b такие, что при $0 < y \leq 1$

$$\|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{C}{y^b} (1 + |x|)^a \quad \text{при п.в. } x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{П.24})$$

Тогда для любых $\chi(x) \in \mathcal{S}$ и $y \in (0, 1]$ $(\tilde{f}(t), \tilde{\chi}(t) \tilde{\omega}(yt)) \in \mathbb{B}$ и

$$\|(\tilde{f}(t), \tilde{\chi}(t) \tilde{\omega}(yt))\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{C}{y^b} \int (1 + |x|)^a |\chi(x)| dx \quad (\text{П.25})$$

для некоторых C_1 и N , не зависящих от банахова пространства $\mathbb{B}$ и обобщенной функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой $\chi(x) \in \mathcal{S}$ в силу (П.24) существует интеграл Бохнера $\int \chi(x) y^b L_f^\omega(x, y) dx \in \mathbb{B}$ и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left\| \int \chi(x) y^b L_f^\omega(x, y) dx \right\|_{\mathbb{B}} &\leq \int \|\chi(x) y^b\| L_f^\omega(x, y) dx \\ &\leq C \int (1 + |x|)^a |\chi(x)| dx. \end{aligned} \quad (\text{П.26})$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \int \chi(x) y^b L_f^\omega(x, y) dx &= \int \chi(x) y^b \left(f(\xi), \frac{1}{y^n} \omega\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) dx \\ &= \int \chi(x) (\tilde{f}(t), e^{ixt} y^b \tilde{\omega}(yt)) dx. \end{aligned} \quad (\text{П.27})$$

Здесь мы в последнем равенстве перешли к преобразованию Фурье, учитывая формулу

$$\left(f(\xi), \frac{1}{y^n} \omega\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) = \left(F[f(\xi)](t), F\left[\frac{1}{y^n} \omega\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right](t) \right) = (\tilde{f}(t), e^{ixt} \tilde{\omega}(yt)).$$

Теперь покажем, что всюду по y

$$\int \chi(x) (\tilde{f}(t), e^{ixt} y^b \tilde{\omega}(yt)) dx = \left(\tilde{f}(t), \int \chi(x) e^{ixt} y^b \tilde{\omega}(yt) dx \right) \quad (\text{П.28})$$

как элементы из пространства $\mathcal{L}$.

Для этого достаточно показать, что для любой $\psi \in \mathcal{L}^*$

$$\left\langle \int \chi(x) (\tilde{f}(t), e^{ixt} y^b \tilde{\omega}(yt)) dx, \psi \right\rangle = \left\langle \left(\tilde{f}(t), \int \chi(x) e^{ixt} y^b \tilde{\omega}(yt) dx \right), \psi \right\rangle. \quad (\text{П.29})$$

Так как в (П.29) слева стоит интеграл Бохнера в $\mathbb{B}$, а $\psi \in \mathcal{L}^* \subset \mathbb{B}^*$ (напомним, что $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$), то

$$\left\langle \int \chi(x) (\tilde{f}(t), e^{ixt} y^b \tilde{\omega}(yt)) dx, \psi \right\rangle = \int \chi(x) \langle (\tilde{f}(t), e^{ixt} y^b \tilde{\omega}(yt)), \psi \rangle dx. \quad (\text{П.30})$$

Рассмотрим выражение справа в (П.29). Разобьем $\mathbb{R}^n$ на n -мерные кубы Δ_j со стороной Δ , $x_j \in \Delta_j$. Тогда при фиксированном разбиении интегральные суммы $\sum_j \chi(x_j) e^{ix_j t} y^b \tilde{\omega}(yt) \Delta^n$ сходятся в $\mathcal{S}$, а при $\Delta \rightarrow 0$ они в $\mathcal{S}$ сходятся к $\int \chi(x) e^{ixt} y^b \tilde{\omega}(yt) dx$. Поэтому в $\mathcal{L}$

$$\left(\tilde{f}(t), \sum_j \chi(x_j) e^{ix_j t} y^b \tilde{\omega}(yt) \Delta^n \right) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \left(\tilde{f}(t), \int \chi(x) e^{ixt} y^b \tilde{\omega}(yt) dx \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\tilde{f}(t), \int \chi(x) e^{ixt} y^b \tilde{\omega}(yt) dx \right), \psi \right\rangle &= \left\langle \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\tilde{f}(t), \sum_j \chi(x_j) e^{ix_j t} y^b \tilde{\omega}(yt) \Delta^n \right), \psi \right\rangle \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\langle \left(\tilde{f}(t), \sum_j \chi(x_j) e^{ix_j t} y^b \tilde{\omega}(yt) \Delta^n \right), \psi \right\rangle \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_j \chi(x_j) \langle \tilde{f}(t), e^{ix_j t} y^b \tilde{\omega}(yt) \rangle \Delta^n \\
&= \int \chi(x) \langle \tilde{f}(t), e^{ixt} y^b \tilde{\omega}(yt) \rangle \psi \rangle dx.
\end{aligned} \tag{П.31}$$

Сравнивая (П.30) и (П.31), получаем равенство (П.29), в котором слева стоит элемент из $\mathbb{B}$. Следовательно, и элемент справа

$$\left(\tilde{f}(t), \int \chi(x) e^{ixt} y^b \tilde{\omega}(yt) dx \right) = (\tilde{f}(t), \tilde{\chi}(t) y^b \tilde{\omega}(yt)) \in \mathbb{B}.$$

Продолжая (П.27), получаем

$$\int \chi(x) y^b L_f^\omega(x, y) dx = (\tilde{f}(t), \tilde{\chi}(t) y^b \tilde{\omega}(yt) dy).$$

Отсюда и из (П.26) имеем соотношение (П.25).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из (П.25) непосредственно следует, что

$$\|(\tilde{f}(t), \tilde{\chi}(t) \tilde{\omega}(yt))\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{\text{const}}{y^b} \mathcal{P}_N[\tilde{\chi}(t)]$$

для некоторых постоянных b и N .

ЛЕММА П.4. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, $\rho(k)$ – автомодельная функция, $\omega(x) \in \mathcal{S}$, $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$ и

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| L_f^\omega \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k} \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{A}{y^d}, \quad |x|^2 + y^2 = 1, \quad y > 0, \tag{П.32}$$

для некоторых A и d . Тогда существуют A_1 , a_1 и b_1 такие, что

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| L_f^\omega \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k} \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{A_1 (1 + |x|)^{a_1}}{y^{b_1}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < y \leq 1. \tag{П.33}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – порядок автомодельности $\rho(k)$. Положим

$$x = k_0 x^0, \quad y = k_0 y^0, \quad |x^0|^2 + (y^0)^2 = 1, \quad k_0^2 = |x|^2 + y^2. \quad (\text{П.34})$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $k_0 \leq 1$. Пользуясь свойствами автомодельных функций (1.10), имеем

$$\begin{aligned} \sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left(\left\| L_f^\omega \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k} \right) \right\|_{\mathbb{B}} \right) &= \sup_{k>1} \frac{\rho(k/k_0)}{\rho(k)} \frac{1}{\rho(k/k_0)} \left\| L_f^\omega \left(\frac{x^0}{k/k_0}, \frac{y^0}{k/k_0} \right) \right\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq C_\varepsilon \left(\frac{1}{k_0} \right)^{\alpha+\varepsilon} \sup_{k>k_0} \frac{1}{\rho(k/k_0)} \left\| L_f^\omega \left(\frac{x^0}{k/k_0}, \frac{y^0}{k/k_0} \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq C_\varepsilon \left(\frac{1}{k_0} \right)^{\alpha+\varepsilon} \frac{A}{(y^0)^d} \\ &\leq C_\varepsilon k_0^{d-\alpha-\varepsilon} \frac{A}{y^d} \leq C_1 \frac{(|x|^2 + y^2)^{(d-\alpha-\varepsilon)/2}}{y^d} \leq C_2 \frac{(|x|^2 + 1)^{(d-\alpha-\varepsilon)/2}}{y^d}. \end{aligned}$$

Откуда и следует (П.33) в этом случае.

Случай 2: $k_0 > 1$. Пользуясь (1.10), а также общей оценкой класса (1.9), имеем

$$\begin{aligned} \sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| L_f^\omega \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k} \right) \right\|_{\mathbb{B}} &= \sup_{k>k_0} \frac{\rho(k/k_0)}{\rho(k)} \frac{1}{\rho(k/k_0)} \left\| L_f^\omega \left(\frac{x^0}{k/k_0}, \frac{y^0}{k/k_0} \right) \right\|_{\mathbb{B}} + \sup_{1<k<k_0} \frac{1}{\rho(k)} \left\| L_f^\omega \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k} \right) \right\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq c_\varepsilon \left(\frac{1}{k_0} \right)^{\alpha-\varepsilon} \frac{A}{(y^0)^d} + \sup_{1<k\leq k_0} C_\varepsilon \frac{1}{k^{\alpha-\varepsilon}} C_1 \frac{(1+|x/k|)^a}{(y/k)^b} \\ &\leq C_3 \frac{(|x|^2 + 1)^{(|d|+|\alpha|+\varepsilon)/2}}{y^d} + C_4 k_0^{|b|+|\alpha|+\varepsilon} \frac{(1+|x|)^a}{y^b} \\ &\leq C_5 \frac{(1+|x|)^{a_2}}{y^d} + C_6 \frac{(1+|x|)^{a_3}}{y^b}. \end{aligned}$$

В последних неравенствах использованы соотношения (П.34). Отсюда и следует соотношение (П.33) в этом случае. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Лемма остается справедливой, если k заменить на $1/k$, т.е. если в условиях леммы вместо (П.32) выполнено соотношение

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \|L_f^\omega(kx, ky)\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{A}{y^d}, \quad |x|^2 + y^2 = 1, \quad y > 0, \quad (\text{П.35})$$

то найдутся A_1 , a_1 и b_1 такие, что

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \|L_f^\omega(kx, ky)\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{A_1(1+|x|)^{a_1}}{y^{b_1}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < y \leq 1. \quad (\text{П.36})$$

Доказательство аналогично рассмотренному выше.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждения леммы (а также замечание 1 к ней) останутся справедливыми, если вместо условия (П.32) требовать

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| L_f^\omega \left(\frac{x}{k}, \frac{1}{k} \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq A(1+|x|)^a, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{П.37})$$

соответственно вместо (П.35) требовать

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \|L_f^\omega(kx, k)\|_{\mathbb{B}} \leq A(1+|x|)^a, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{П.38})$$

ЛЕММА П.5. Пусть задано семейство $\{P_q(x), q = 0, 1, \dots, d\}$, где $P_q(x)$ – однородный многочлен степени q (либо тождественный нуль), и функция $\varphi(x) \in \mathcal{S}$. Тогда

$$\varphi(t) \in \widetilde{S}_{[d; P_0, P_1, \dots, P_d]} \quad (\text{П.39})$$

в том и только том случае, если

$$\int Q(x) \varphi(x) dx = 0 \quad (\text{П.40})$$

для любого многочлена степени не более чем d такого, что

$$P_q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) Q(x) = 0, \quad q = 0, 1, \dots, d. \quad (\text{П.41})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть выполнено (П.39) и $Q(x)$ – многочлен степени не более чем d такой, что справедливо соотношение (П.41). Для $h(t) \in \mathcal{S}$ и $h(t) = 1$ в некоторой окрестности нуля имеем

$$\begin{aligned} \int Q(x) \varphi(x) dx &= \left(Q \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t), \widetilde{\varphi}(t) \right) = \left(Q \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t), \widetilde{\varphi}(t) - T_{\widetilde{\varphi}}^d(t) h(t) \right) \\ &+ \left(Q \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t), T_{\widetilde{\varphi}}^d(t) h(t) \right) = \left(Q \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t), T_{\widetilde{\varphi}}^d(t) \right). \end{aligned} \quad (\text{П.42})$$

Здесь учтено, что $\widetilde{\varphi}(t) - T_{\widetilde{\varphi}}^d(t) h(t)$ имеет в начале координат нуль порядка больше d . Так как по условию $T_{\widetilde{\varphi}}^d(t) = \sum_{0 \leq q \leq d} P_q(t) \Lambda_q(t)$, где $\Lambda_q(t)$ – многочлены степени не выше $d - q$, то

$$\begin{aligned} \left(Q \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t), T_{\widetilde{\varphi}}^d(t) \right) &= \sum_{q=0}^d \left(Q \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t), P_q(t) \Lambda_q(t) h(t) \right) \\ &= \sum_{q=0}^d \left(P_q(t) Q \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t), \Lambda_q(t) h(t) \right) \\ &= \sum_{q=0}^d \left(P_q \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) Q(x), F^{-1}[\Lambda_q(t) h(t)](x) \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (П.42) следует (П.40).

Достаточность. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}$ такова, что для любого $Q_\tau(x)$ – однородного многочлена степени $\tau \leq d$ такого, что выполнено (П.41), имеет место и соотношение (П.40). Имеем

$$0 = \int Q_\tau(x) \varphi(x) dx = \left(Q_\tau \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t), \widetilde{\varphi}(t) \right) = \left(Q_\tau \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t), T_{\widetilde{\varphi}}^d(t) \right).$$

Наше утверждение вытекает теперь из следующей леммы.

ЛЕММА П.6. Пусть $T(t)$ – многочлен степени не более чем d и задано семейство $\{P_q(t), q = 0, 1, \dots, d\}$, где $P_q(t)$ – однородный многочлен степени q (либо тождественный нуль). Тогда для того чтобы

$$T(t) = \sum_{q=0}^d P_q(t) \Lambda_{d-q}(t), \quad (\text{П.43})$$

где $\Lambda_{d-q}(t)$ – многочлен степени не более чем $d-q$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left(Q_\tau \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t), T(t) \right) = 0 \quad (\text{П.44})$$

для любого однородного многочлена $Q_\tau(x)$ степени $\tau \leq d$ такого, что

$$P_q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) Q_\tau(x) = 0. \quad (\text{П.45})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Без ограничения общности можно считать, что $T(t)$ – однородный многочлен степени d (а $\Lambda_{d-q}(t)$ – однородный многочлен степени $d-q$). Обозначим через $\mathcal{P}_d$ множество всех многочленов степени не более чем d . Пусть

$$V(t) = \sum_{j=0}^d V_j(t) = \sum_{|\alpha| \leq d} v_\alpha t^\alpha, \quad U(t) = \sum_{j=0}^d U_j(t) = \sum_{|\alpha| \leq d} u_\alpha t^\alpha,$$

где V_j и U_j – однородные многочлены степени j . Положим

$$\begin{aligned} \langle V(t), U(t) \rangle &= \left(V \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t), \overline{U}(t) \right) = \left(\sum_{|\alpha| \leq d} v_\alpha \delta^{(\alpha)}(t), \sum_{|\beta| \leq d} \overline{u}_\beta t^{(\beta)} \right) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq d} \alpha! v_\alpha \overline{u}_\alpha. \end{aligned}$$

Тем самым $\mathcal{P}_d$ – конечномерное гильбертово пространство. Рассмотрим в нем линейный оператор

$$AU(t) = \sum_{q=0}^d P_q(t) U_{d-q}(t).$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что $T(t) \in \mathcal{R}(A)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $T(t)$ был ортогонален $\text{Ker}(A^*)$. Теперь утверждение леммы следует из того, что

$$A^* V(x) = \sum_{\ell=0}^d \overline{P}_{d-\ell} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V_d(x). \quad (\text{П.46})$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned}
 \langle AU(t), V(t) \rangle &= \overline{\langle V(t), AU(t) \rangle} = \sum_{q=0}^d \left(\overline{V} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t), P_q(t) U_{d-q}(t) \right) \\
 &= \sum_{q=0}^d \left(P_q \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) U_{d-q} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta(x), \overline{V}_d(ix) \right) \\
 &= \sum_{q=0}^d \left(U_{d-q} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta(x), P_q \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \overline{V}_d(ix) \right) \\
 &= \sum_{q=0}^d \left\langle U_{d-q}(x), \overline{P}_q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V_d(x) \right\rangle = \sum_{\ell=0}^d \left\langle U_\ell(x), \overline{P}_{d-\ell} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V_d(x) \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что ℓ -я проекция оператора A^* есть $(A^*V)_\ell = \overline{P}_{d-\ell}(\partial/\partial x)V_d(x)$. Откуда и вытекает (П.46). Лемма П.6, а вместе с ней и лемма П.5 доказаны.

Список литературы

1. Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Тауберовы теоремы для обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 4. С. 47–119.
2. Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Об одной многомерной теореме тауберова типа для обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах // Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 2. С. 158–161.
3. Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М.: Наука, 1986.
4. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
5. Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Теоремы тауберова типа для обобщенной мультипликативной свертки // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 1. С. 37–94.
6. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1985.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: drozzin@mi.ras.ru, bzavial@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
05.05.2003