Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Елагин, Теория спуска для полуортогональных разложений, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 5, 33–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7790>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:28:58

УДК 512.73

А. Д. Елагин

Теория спуска для полуортогональных разложений

Изложен метод, позволяющий строить полуортогональные разложения производной категории G -эквивариантных пучков на многообразии X при условии, что производная категория пучков на X допускает полуортогональное разложение, компоненты которого сохраняются действием группы G на X . При помощи этого метода получены полуортогональные разложения эквивариантных производных категорий для расслоений на проективные пространства и для раздутий с неособым центром, а также для многообразий, обладающих полным исключительным набором, который сохраняется действием группы. В качестве основного инструмента в работе применяется теория спуска для производных категорий.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: производные категории, полуортогональное разложение, теория спуска, алгебраическое многообразие.

§ 1. Введение

Работа посвящена изучению производной категории эквивариантных когерентных пучков на алгебраическом многообразии с действием алгебраической группы. Ее цель – построение полуортогональных разложений такой категории.

Здесь описан способ получения полуортогональных разложений эквивариантной производной категории исходя из полуортогональных разложений производной категории самого многообразия. В таком виде задача естественно обобщается следующим образом: исследовать связь между производными категориями базы и накрывающего ее многообразия. В ситуации производной категории G -эквивариантных пучков на многообразии X с действием группы G роль накрывающего пространства играет X , а роль базы играет стек $X//G$ – факторстек X по действию группы G . Поэтому возникает необходимость работать в категории стеков, а не алгебраических многообразий или схем.

Для морфизма стеков $p: X \rightarrow S$ имеется стандартный способ описания категории пучков на S в терминах категории пучков на X . А именно, при условии строгой плоскости морфизма p задание пучка на S равносильно заданию пучка F на X с данными склейки, имеющими вид изоморфизма $p_1^*F \rightarrow p_2^*F$ на $X \times_S X$, удовлетворяющего условию коцикла. Аналогичное утверждение имеет место и для объекта производной категории пучков на S при выполнении

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 09-01-00242-а, № 10-01-93110-НЦНИЛ-а и № 10-01-93113-НЦНИЛ-а), Программ Президента РФ поддержки молодых докторов наук (грант № МД-2712.2009.1) и поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-4713.2010.1), а также Фонда Дмитрия Зимина “Династия”. Автор благодарит Научный фонд ГУ-ВШЭ “Управление поддержки академических исследований” за поддержку проекта 10-09-0015.

© А. Д. Елагин, 2012

следующего условия отщепимости: пучок $\mathcal{O}_S$ должен выделяться прямым слагаемым при естественном морфизме $\mathcal{O}_S \rightarrow Rp_*\mathcal{O}_X$. Другими словами, при выполнении указанного условия производная категория пучков на базе S эквивалентна некоторой категории спуска, связанной с морфизмом $p: X \rightarrow S$. Это позволяет использовать язык данных спуска при изучении связи полуортогональных разложений производных категорий пучков базы и накрывающего пространства. В ситуации морфизма $X \rightarrow X//G$ условие отщепимости сводится к линейной редуктивности группы G , т.е. к полупростоте категории ее линейных представлений.

Категория спуска, связанная с морфизмом $p: X \rightarrow S$, имеет два эквивалентных определения. Первое: классическая категория спуска $\mathcal{D}(X)/p$ образована парами, состоящими из объекта F категории $\mathcal{D}(X)$ – неограниченной производной категории квазикогерентных пучков на схеме X – и изоморфизма $p_1^*F \rightarrow p_2^*F$, подчиненного условию коцикла. Второе определение: категория спуска – это категория $\mathcal{D}(X)_{T_p}$ комодулей над комонадой $T_p = (T_p, \varepsilon, \delta)$ на категории $\mathcal{D}(X)$, связанной с парой сопряженных функторов p^* и p_* . Язык комодулей над комонадой для некоторых задач более удобен. Так, в терминах комодулей над комонадой формулируется теорема 3.2, в которой построено полуортогональное разложение для категории спуска при условии существования полуортогонального разложения исходной категории, в соответствующем смысле совместимого с функтором T_p .

На теореме 3.2 базируются основные результаты о связи производных категорий базы и накрывающего пространства – теоремы 4.1, 4.3 и 4.4 для накрытия схем и теоремы 6.1–6.3 об эквивариантной производной категории. Так, теорема 6.2 в условиях существования полуортогонального разложения категории $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ совершенных комплексов на X , сохраняемого действием линейно редуктивной группы G , позволяет строить полуортогональное разложение $\mathcal{D}^{\text{perf}, G}(X)$ – производной категории G -эквивариантных совершенных комплексов на X – на компоненты, описываемые в терминах категории спуска. В работе рассмотрены приложения теоремы 6.2 к ситуациям действия группы на проективизации эквивариантного векторного расслоения и на раздутии неособого подмногообразия. В обоих случаях теорема 6.2 применяется к полуортогональным разложениям категории пучков на указанных многообразиях, построенным Д. О. Орловым. При этом строится явное описание компонент разложения как подходящих эквивариантных производных категорий.

Еще одно не менее важное применение теоремы 6.2 – действие линейно редуктивной группы, сохраняющее полный исключительный набор на многообразии, т.е. случай простейшего инвариантного относительно действия группы полуортогонального разложения. Здесь также удастся явно описать (теорема 9.4) компоненты разложения, доставляемого теоремой 6.2. Они эквивалентны производным категориям представлений группы, скрученных на различные коциклы. Аналогичный результат был получен ранее в [1] в предположении, что исключительный набор образован пучками. Применение техники спуска позволяет обойтись без этого предположения.

Автор благодарен Д. О. Орлову за постоянное внимание к этой работе и полезные обсуждения, а также А. Г. Кузнецову за ценные предложения, многочисленные замечания по тексту и поддержку.

§ 2. Предварительные сведения

Все схемы в этой статье предполагаются квазипроективными над произвольным полем k . Под алгебраической группой мы подразумеваем аффинную групповую схему конечного типа над k . Структурный морфизм группы G будем обозначать через $\mu: G \times G \rightarrow G$, а морфизм действия группы G на схеме X – через $a: G \times X \rightarrow X$. Проекции произведений $G \times X$, $G \times G \times X$ и т.п. на сомножители мы обозначаем через p_1 , p_2 , p_{12} и т.д.

Будем рассматривать три версии производной категории пучков на схеме X : неограниченную производную категорию квазикогерентных пучков $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(\text{qcoh}(X))$, ограниченную производную категорию когерентных пучков $\mathcal{D}^b(X) = \mathcal{D}^b(\text{coh}(X))$ и категорию совершенных комплексов $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$. Последняя по определению есть полная подкатегория в $\mathcal{D}(X)$, образованная комплексами, локально квазиизоморфными ограниченному комплексу из векторных расслоений. Имеем $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X) \subset \mathcal{D}^b(X)$, а для неособой схемы $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X) = \mathcal{D}^b(X)$ (см. [2]). Пусть $f: X \rightarrow Y$ – морфизм схем; тогда, согласно Спалтенштейну (см. [3]), определены сопряженные производные функторы обратного и прямого образа между категориями $\mathcal{D}(X)$ и $\mathcal{D}(Y)$, которые мы будем обозначать f^* и f_* там, где это не приведет к путанице. Отметим, что f^* переводит $\mathcal{D}^{\text{perf}}(Y)$ в $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ и для морфизма f конечной Тог-размерности, в частности для плоского f , переводит $\mathcal{D}^b(Y)$ в $\mathcal{D}^b(X)$. Функтор f_* переводит $\mathcal{D}^b(X)$ в $\mathcal{D}^b(Y)$, если f – собственный морфизм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Эквивариантным пучком* на схеме X с действием группы G называется пара, состоящая из пучка F и изоморфизма $\theta: p_2^*F \rightarrow a^*F$ пучков на $G \times X$ таких, что на $G \times G \times X$ выполнено условие коцикла

$$(1 \times a)^*\theta \circ p_{23}^*\theta = (\mu \times 1)^*\theta.$$

Морфизмы эквивариантных пучков из (F_1, θ_1) в (F_2, θ_2) – это морфизмы $f: F_1 \rightarrow F_2$, согласованные с θ , т.е. такие, что $\theta_2 \circ p_2^*f = a^*f \circ \theta_1$.

Когерентные (квазикогерентные) G -эквивариантные пучки на схеме X образуют абелеву категорию $\text{coh}^G(X)$ (соответственно $\text{qcoh}^G(X)$). Через $\mathcal{D}^G(X) = \mathcal{D}(\text{qcoh}^G(X))$ мы обозначаем неограниченную производную категорию G -эквивариантных квазикогерентных пучков, через $\mathcal{D}^b(\text{coh}^G(X))$ – ограниченную производную категорию G -эквивариантных когерентных пучков и через $\mathcal{D}^{\text{perf}, G}(X)$ обозначаем категорию G -эквивариантных совершенных комплексов; последняя есть полная подкатегория в $\mathcal{D}^G(X)$, образованная комплексами, которые при забывании группового действия лежат в $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$.

На G -эквивариантные пучки на схеме X можно смотреть как на пучки на стеке $X//G$ – факторстеке X по действию G . Определение стека $X//G$ можно найти в [4], при наших предположениях это алгебраический стек конечного типа над k . Имеется плоский морфизм $p: X \rightarrow X//G$, обратный образ относительно p – это забывание эквивариантной структуры. Такой взгляд позволяет описывать производную категорию эквивариантных пучков на схеме в терминах производной категории всех пучков. Есть два по сути равносильных способа такого описания – через косимплициальные категории и через комонады (о них и пойдет речь ниже).

Пусть Δ обозначает категорию, объекты которой – множества вида $[1, \dots, n]$, $n \in \mathbb{N}$, а морфизмы – неубывающие отображения между ними.

Косимплициальный объект некоторой категории $\mathcal{C}$ (например, косимплициальное множество, косимплициальная схема) – это функтор из Δ в $\mathcal{C}$. Если в качестве $\mathcal{C}$ взять 2-категорию категорий Cats , получим определение косимплициальной категории.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Косимплициальная категория* – это ковариантный 2-функтор $\Delta \rightarrow \text{Cats}$ в 2-категорию всех категорий. Иными словами, косимплициальная категория $\mathcal{C}_\bullet$ состоит из следующих данных:

- 1) из набора категорий $\mathcal{C}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, соответствующих объектам Δ (при этом категория $\mathcal{C}_k$ отвечает множеству $[1, \dots, k + 1]$);
- 2) из набора функторов $P_f^*: \mathcal{C}_m \rightarrow \mathcal{C}_n$, соответствующих морфизмам в Δ , т.е. монотонным отображениям $f: [1, \dots, m + 1] \rightarrow [1, \dots, n + 1]$;
- 3) из набора изоморфизма функторов $\epsilon_{f,g}: P_f^* P_g^* \rightarrow P_{fg}^*$, соответствующих парам отображений f, g , для которых имеет смысл композиция $f \circ g$.

Изоморфизмы 3) должны подчиняться условию коцикла: диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P_f^* P_g^* P_h^* & \xrightarrow{\epsilon_{f,g}} & P_{fg}^* P_h^* \\ \downarrow \epsilon_{g,h} & & \downarrow \epsilon_{fg,h} \\ P_f^* P_{gh}^* & \xrightarrow{\epsilon_{f,gh}} & P_{fgh}^* \end{array}$$

коммутативна для любой тройки отображений f, g, h , для которых имеет смысл композиция $f \circ g \circ h$.

Нас будет интересовать следующий пример косимплициальной категории.

ПРИМЕР 2.3. Пусть дан морфизм схем (или стеков) $X \rightarrow S$. Тогда схемы X , $X \times_S X$, $X \times_S X \times_S X$, $\dots$ и морфизмы

$$p_f: \underbrace{X \times_S X \times \dots \times X}_{n \text{ раз}} \rightarrow \underbrace{X \times_S X \times \dots \times X}_{m \text{ раз}}$$

между ними, определенные правилом

$$p_f(x_1, \dots, x_n) = (x_{f(1)}, \dots, x_{f(m)})$$

для $f \in \text{Hom}_\Delta([1, \dots, m], [1, \dots, n])$, образуют симплициальную схему. Категории пучков (абелевы категории когерентных, квазикогерентных пучков или же производные категории от них) на этих схемах и функторы обратного образа между ними образуют косимплициальную категорию.

Мы будем обозначать такие косимплициальные категории как

$$[\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(X \times_S X), \mathcal{D}(X \times_S X \times_S X), \dots, p_\bullet^*].$$

Для функторов P_f^* естественно использовать обозначения, напоминающие о функторах обратного образа между категориями пучков. Например, функтор $P_f^*: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ для отображения $f: [1, 2] \rightarrow [1, 2, 3]$ такого, что $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, обозначается P_{13}^* .

Для любой косимплициальной категории $\mathcal{C}_\bullet = [\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, P_\bullet^*]$ определена категория спуска, которая обозначается $\text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ (см. [5; п. 19.3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4 (классическая категория спуска). Объекты $\text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ – это пары (F, θ) , где $F \in \text{Ob } \mathcal{C}_0$, а θ – изоморфизм $P_1^* F \rightarrow P_2^* F$, подчиняющийся условию коцикла, которое состоит в коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} P_{12}^* P_1^* F & \xrightarrow{\sim} & P_{13}^* P_1^* F & \xrightarrow{P_{13}^* \theta} & P_{13}^* P_2^* F \\ & \searrow^{P_{12}^* \theta} & & & \searrow \sim \\ & & P_{12}^* P_2^* F & \xrightarrow{\sim} & P_{23}^* P_1^* F & \xrightarrow{P_{23}^* \theta} & P_{23}^* P_2^* F \end{array}$$

В этой диаграмме отрезками со знаком $\sim$ обозначены изоморфизмы функторов, входящие в определение косимплициальной категории. Морфизмы в $\text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ из (F_1, θ_1) в (F_2, θ_2) – это морфизмы $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_0}(F_1, F_2)$ такие, что $P_2^* f \circ \theta_1 = \theta_2 \circ P_1^* f$.

Для канонического морфизма стеков $X \rightarrow X//G$ симплициальная схема из примера 2.3 имеет вид

$$(X/G)_\bullet = [X_0, X_1, X_2, \dots, p_\bullet] = [X, G \times X, G \times G \times X, \dots, p_\bullet], \quad (2.1)$$

где морфизмы $p_\bullet$ определены следующим образом. Для монотонного отображения $f: [1, \dots, m] \rightarrow [1, \dots, n]$ морфизм схем

$$p_f: \underbrace{G \times \dots \times G \times X}_{n \text{ раз}} \rightarrow \underbrace{G \times \dots \times G \times X}_{m \text{ раз}}$$

задан по правилу

$$(g_n, \dots, g_2, x_1) \mapsto (g_{f(m)} \cdots g_{f(m-1)+1}, \dots, g_{f(2)} \cdots g_{f(1)+1}, g_{f(1)} \cdots g_2 x_1).$$

Для маленьких значений $n = m \pm 1$ и строго монотонных f морфизмы $p_\bullet$ имеют вид

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{1 \times a} & & & \\ & \xleftarrow{p_1 \times e \times p_2} & & \xrightarrow{a} & \\ G \times G \times X & \xrightarrow{\mu \times 1} & G \times X & \xleftarrow{e \times 1} & X \\ & \xleftarrow{e \times 1} & & \xrightarrow{p_2} & \\ & \xrightarrow{p_{23}} & & & \end{array}$$

Из определения видно, что для косимплициальной категории

$$[\text{qcoh}(X), \text{qcoh}(G \times X), \text{qcoh}(G \times G \times X), \dots, p_\bullet^*],$$

образованной абелевыми категориями квазикогерентных пучков на (2.1), категория спуска Kern – это в точности категория эквивариантных пучков. Ниже мы покажем, что для линейно редуктивной группы G категория спуска

$$\mathcal{D}(X)^G = \text{Kern}([\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \mathcal{D}(G \times G \times X), \dots, p_\bullet^*]) \quad (2.2)$$

эквивалентна $\mathcal{D}^G(X)$ – производной категории эквивариантных пучков. Иными словами, переход к категории спуска коммутирует с переходом к производной категории.

Нам понадобятся понятия комонады и комодуля над комонадой, напомним необходимые определения. (Подробности можно найти в работах Барра–Уэллса [6; гл. 3] и Маклейна [7; гл. 6].)

Пусть $\mathcal{C}$ обозначает произвольную категорию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. *Комонада* $T = (T, \varepsilon, \delta)$ на категории $\mathcal{C}$ состоит из функтора $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ и естественных преобразований функторов $\varepsilon: T \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$ и $\delta: T \rightarrow T^2 = TT$ таких, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\delta} & T^2 \\ \downarrow \delta & \searrow & \downarrow T\varepsilon \\ T^2 & \xrightarrow{\varepsilon T} & T \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\delta} & T^2 \\ \downarrow \delta & & \downarrow T\delta \\ T^2 & \xrightarrow{\delta T} & T^3 \end{array}$$

коммутативны.

Основной (и по сути единственный) пример комонады – следующий

ПРИМЕР 2.6. Рассмотрим пару сопряженных функторов $P^*: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ (левый) и $P_*: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ (правый). Пусть $\eta: \text{Id}_{\mathcal{B}} \rightarrow P_*P^*$, $\varepsilon: P^*P_* \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$ – канонические морфизмы сопряжения. Определим тройку (T, ε, δ) , положив $T = P^*P_*$ и взяв $\varepsilon: P^*P_* \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$, $\delta = P^*\eta P_*: P^*P_* \rightarrow P^*P_*P^*P_*$. Тогда $T = (T, \varepsilon, \delta)$ образует комонаду на категории $\mathcal{C}$.

На самом деле любая комонада может быть получена из пары сопряженных функторов описанным выше способом. Это следует из изложенной ниже конструкции, принадлежащей Эйленбергу и Муру.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Пусть $T = (T, \varepsilon, \delta)$ – комонада на категории $\mathcal{C}$. *Комодулем* над T (или *T -коалгеброй*) называется пара (F, h) , где $F \in \text{Ob } \mathcal{C}$, а $h: F \rightarrow TF$ – морфизм, удовлетворяющий двум условиям: композиция

$$F \xrightarrow{h} TF \xrightarrow{\varepsilon F} F$$

равна тождественному морфизму, а диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{h} & TF \\ \downarrow h & & \downarrow Th \\ TF & \xrightarrow{\delta F} & T^2F \end{array}$$

коммутативна.

Морфизмом между комодулями (F_1, h_1) и (F_2, h_2) называется по определению морфизм $f: F_1 \rightarrow F_2$ в категории $\mathcal{C}$, для которого $h_2 \circ f = Tf \circ h_1$.

Комодули над заданной комонадой T на $\mathcal{C}$ образуют категорию, которая обозначается через $\mathcal{C}_T$. Определим функтор $P^*: \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{C}$ как забывание: $(F, h) \mapsto F$. Определим функтор $P_*: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_T$, положив $F \mapsto (TF, \delta F)$. Несложно показать (см. [6; § 3.2]), что функторы P^* и P_* сопряжены и что комонада T изоморфна комонаде, построенной по паре P^*, P_* .

Нам понадобится более общее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Пусть T – комонада на $\mathcal{C}$, а $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ – подкатегория. Определим $\mathcal{C}'_{\mathsf{T}}$ как полную подкатегорию в категории комодулей над T , образованную комодулями (F, h) такими, что $F \in \mathcal{C}'$.

Предположим, что косимплициальная категория $[\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, P_{\bullet}^*]$ удовлетворяет двум условиям. Во-первых, функторы P_f^* имеют правые сопряженные функторы, обозначим их P_{f*} . Во-вторых, для функторов P_f^* и P_{f*} выполнено утверждение, которое является аксиоматизацией теоремы о плоской замене базы: для любого коммутативного квадрата в категории Δ

$$\begin{array}{ccc} [1, \dots, m+n-r] & \xleftarrow{f'} & [1, \dots, n] \\ \uparrow g' & & \uparrow g \\ [1, \dots, m] & \xleftarrow{f} & [1, \dots, r] \end{array}$$

с инъективными отображениями f и f' и такого, что $[1, \dots, m+n-r] = \text{Im } f' \cup \text{Im } g'$, естественный морфизм замены базы

$$P_f^* P_{g*} \rightarrow P_{g'*} P_{f'}^*$$

– изоморфизм функторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Косимплициальную категорию, удовлетворяющую двум указанным условиям, назовем *косимплициальной категорией с заменой базы*.

Косимплициальные категории, образованные категориями пучков (абелевыми или производными), из примера 2.3 являются косимплициальными категориями с заменой базы.

С любой косимплициальной категорией с заменой базы $\mathcal{C}_{\bullet} = [\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, P_{\bullet}^*]$ можно связать комонаду на категории $\mathcal{C}_0$. Пусть $P^*: \text{Kern}(\mathcal{C}_{\bullet}) \rightarrow \mathcal{C}_0$ – функтор забывания, сопоставляющий паре (F, θ) объект F . Согласно [8; предложение 2.9] он имеет правый сопряженный функтор P_* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Определим $\mathsf{T}_{\mathcal{C}_{\bullet}} = (P^* P_*, \varepsilon, \delta)$ как комонаду на $\mathcal{C}_0$, связанную с сопряженной парой (P^*, P_*) .

Для косимплициальных категорий из примера 2.3 эта комонада совпадает с комонадой, заданной парой функторов прямого и обратного образов между категориями пучков на X и на S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.11 (комонадная категория спуска). Для косимплициальной категории с заменой базы $\mathcal{C}_{\bullet}$ определим $\mathcal{C}_{\bullet\mathsf{T}}$ как категорию комодулей над комонадой $\mathsf{T}_{\mathcal{C}_{\bullet}}$ на $\mathcal{C}_0$, связанной с $\mathcal{C}_{\bullet}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12 (см. [8; предложение 4.2]). Для косимплициальной категории с заменой базы $\mathcal{C}_{\bullet}$ категории спуска $\text{Kern}(\mathcal{C}_{\bullet})$ и $\mathcal{C}_{\bullet\mathsf{T}}$ эквивалентны.

Легко видеть, что категория комодулей над комонадой $\mathsf{T} = (T, \varepsilon, \delta)$ с точным функтором T на абелевой категории $\mathcal{C}$ также абелева. В то же время совершенно не ясно, будет ли триангулированной категория $\mathcal{C}_{\mathsf{T}}$, если $\mathcal{C}$ – триангулированная категория с комонадой $\mathsf{T} = (T, \varepsilon, \delta)$ и функтор T точен. Естественно

попытаться определить триангулированную структуру на $\mathcal{C}_T$ следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. Пусть $\mathcal{C}$ – триангулированная категория, и пусть $T = (T, \varepsilon, \delta)$ – комонада на $\mathcal{C}$. Определим функтор сдвига на $\mathcal{C}_T$ равенствами $(F, h)[1] = (F[1], h[1])$, $f[1] = f[1]$. Назовем *выделенными* в $\mathcal{C}_T$ те треугольники $(F', h') \rightarrow (F, h) \rightarrow (F'', h'') \rightarrow (F', h')[1]$, для которых треугольник $F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow F'[1]$ выделен в $\mathcal{C}$.

Операция взятия конуса не функториальна, поэтому без дополнительных предположений нельзя проверить, что любой морфизм в $\mathcal{C}_T$ дополняется до выделенного треугольника. Однако ниже в интересующих нас примерах мы увидим, что данное выше определение действительно вводит триангулированную структуру на $\mathcal{C}_T$.

Пусть $p: X \rightarrow S$ – морфизм, а

$$\mathcal{C}_\bullet = [\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(X \times_S X), \dots, p_\bullet^*]$$

– косимплициальная категория, образованная производными категориями пучков на косимплициальной схеме из примера 2.3. Обозначим через T_p соответствующую комонаду на категории $\mathcal{D}(X)$. Имеется канонический функтор

$$\Phi: \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{D}(X)_{T_p},$$

называемый *функтором сравнения*, он переводит комплекс H в пару (p^*H, h) , где $h: p^*H \rightarrow p^*p_*p^*H$ – канонический морфизм сопряжения.

Сформулируем основные утверждения об эквивалентности категории спуска и категории базы.

ТЕОРЕМА 2.14 (см. [8; теорема 7.3]). *Если при морфизме квазипроективных схем над полем $p: X \rightarrow S$ канонический морфизм $\mathcal{O}_S \rightarrow R p_* \mathcal{O}_X$ является расщепимым вложением, то функторы сравнения*

$$\Phi: \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{D}(X)_{T_p}, \quad \Phi: \mathcal{D}^{\text{perf}}(S) \rightarrow \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)_{T_p}, \quad \Phi: \mathcal{D}^b(S) \rightarrow \mathcal{D}^b(X)_{T_p}$$

суть эквивалентности.

Для формулировки второго утверждения напомним следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.15 (см. [9; определение 1.4]). Групповая схема G над полем k называется *линейно редуктивной*, если категория конечномерных представлений G над k полупроста.

ТЕОРЕМА 2.16 (см. [8; теорема 9.6]). *Если на квазипроективной схеме X над полем k действует линейно редуктивная групповая схема G над k , то функторы сравнения*

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{D}^G(X) &\rightarrow \mathcal{D}(X)_{T_G}, & \Phi: \mathcal{D}^{\text{perf}, G}(X) &\rightarrow \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)_{T_G}, \\ \Phi: \mathcal{D}^b(\text{coh}^G(X)) &\rightarrow \mathcal{D}^b(X)_{T_G} \end{aligned}$$

являются эквивалентностями (где T_G – комонада на $\mathcal{D}(X)$, связанная с (2.2)).

При помощи полученной выше эквивалентности между $\mathcal{D}(X)_{T_p}$ и триангулированной категорией $\mathcal{D}(S)$ можно перенести триангулированную структуру с $\mathcal{D}(S)$ на $\mathcal{D}(X)_{T_p}$, аналогично для $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)_{T_p}$ и $\mathcal{D}^b(X)_{T_p}$. При этом полученная триангулированная структура совпадает с введенной в определении 2.13 (см. [8; предложение 3.13]).

Операция взятия категории спуска функториальна. Чтобы придать этим словам строгий смысл, введем понятия морфизма косимплициальных категорий и категорий с комонадой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.17. *Функтором между косимплициальными категориями $\mathcal{C}_{\bullet}^{(1)}$ и $\mathcal{C}_{\bullet}^{(2)}$ называется набор функторов*

$$\Psi_k: \mathcal{C}_k^{(1)} \rightarrow \mathcal{C}_k^{(2)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

вместе с набором изоморфизмов функторов

$$\beta_f: \Psi_n \circ P_f^{(1)*} \xrightarrow{\sim} P_f^{(2)*} \circ \Psi_m$$

для каждого морфизма $f: [1, \dots, m+1] \rightarrow [1, \dots, n+1]$ в Δ , согласованных с композицией морфизмов в Δ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.18. Пусть $\mathcal{C}_i$, $i = 1, 2$, – две категории, а $T_i = (T_i, \varepsilon_i, \delta_i)$ – комонады на них. Скажем, что функтор $\Psi: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ согласован с T_1 и T_2 , если существует изоморфизм функторов $\beta: \Psi T_1 \rightarrow T_2 \Psi$ такой, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Psi T_1 & \xrightarrow{\beta} & T_2 \Psi \\ \Psi \varepsilon_1 \searrow & & \swarrow \varepsilon_2 \Psi \\ & \Psi & \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccccc} \Psi T_1 & \xrightarrow{\beta} & T_2 \Psi & & \\ \Psi \delta_1 \downarrow & & & & \downarrow \delta_2 \Psi \\ \Psi T_1^2 & \xrightarrow{\beta T_1} & T_2 \Psi T_1 & \xrightarrow{T_2 \beta} & T_2^2 \Psi \end{array}$$

коммутативны.

На самом деле более правильно включать изоморфизм β в данные и говорить о паре (Ψ, β) как о морфизме в 2-категории категорий с комонадой, но для нас это различие будет несущественно.

Не представляет труда проверка следующего факта.

ЛЕММА 2.19. *Пусть (Ψ_k) – функтор между косимплициальными категориями с заменой базы $\mathcal{C}_{\bullet}^{(1)}$ и $\mathcal{C}_{\bullet}^{(2)}$. Пусть T_1 и T_2 – комонады на $\mathcal{C}_0^{(1)}$ и $\mathcal{C}_0^{(2)}$ из определения 2.10. Тогда $\Psi_0: \mathcal{C}_0^{(1)} \rightarrow \mathcal{C}_0^{(2)}$ – согласованный с комонадами T_1 и T_2 функтор.*

Следующая лемма будет использоваться ниже при описании компонент полуортогональных разложений.

ЛЕММА 2.20. *Пусть T_1 и T_2 – комонады на категориях $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ соответственно, а $\mathcal{C}'_1 \subset \mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}'_2 \subset \mathcal{C}_2$ – подкатегории. Пусть $\Psi: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ – функтор, переводящий $\mathcal{C}'_1$ в $\mathcal{C}'_2$. Если Ψ согласован с T_1 и T_2 , то Ψ индуцирует функтор $\Psi_T: \mathcal{C}'_{1T_1} \rightarrow \mathcal{C}'_{2T_2}$. Если при этом Ψ – строго полный функтор, устанавливающий эквивалентность $\mathcal{C}'_1$ с некоторой подкатегорией $\mathcal{A}'$ в $\mathcal{C}'_2$, то Ψ_T является эквивалентностью $\mathcal{C}'_{1T_1} \rightarrow \mathcal{A}'_{T_2} \subset \mathcal{C}'_{2T_2}$.*

Доказательство очевидно.

§ 3. Полуортогональные разложения для категории комодулей

Пусть T – комонада на триангулированной категории $\mathcal{C}$. В этом параграфе мы покажем, что полуортогональное разложение категории $\mathcal{C}$ позволяет построить полуортогональное разложение категории комодулей $\mathcal{C}_T$ при условиях, что категория $\mathcal{C}_T$ триангулирована и что исходное полуортогональное разложение совместимо с T .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Скажем, что функтор $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ *верхнетреуголен* относительно полуортогонального разложения $\mathcal{C} = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$, если

$$T\mathcal{A}_k \subset \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k \rangle \quad \text{для всех } k, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (3.1)$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $T = (T, \varepsilon, \delta)$ – комонада на триангулированной категории $\mathcal{C}$, а $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ – триангулированная подкатегория. Предположим, что функтор T точен и что $\mathcal{C}_T$ – категория, триангулированная в смысле определения 2.13. Допустим, что относительно полуортогонального разложения $\mathcal{C} = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ функтор T верхнетреуголен. Пусть это разложение индуцирует полуортогональное разложение $\mathcal{C}' = \langle \mathcal{A}'_1, \dots, \mathcal{A}'_n \rangle$, где $\mathcal{A}'_k = \mathcal{A}_k \cap \mathcal{C}'$. Тогда категория $\mathcal{C}'_T$ триангулирована и допускает полуортогональное разложение $\mathcal{C}'_T = \langle \mathcal{A}'_{1T}, \dots, \mathcal{A}'_{nT} \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что категории $\mathcal{C}'_T$ и $\mathcal{A}'_{iT}$ триангулированы, непосредственно следует из определений. Доказательство проведем индукцией по n , рассмотрим случай $n = 2$.

Ясно, что подкатегории $\mathcal{A}'_{1T}$ и $\mathcal{A}'_{2T}$ полуортогональны. Необходимо проверить, что любой объект (F, h) в $\mathcal{C}'_T$ может быть дополнен до выделенного треугольника

$$(F_2, h_2) \rightarrow (F, h) \rightarrow (F_1, h_1) \rightarrow (F_2, h_2)[1], \quad (3.2)$$

в котором $F_i \in \mathcal{A}'_i$, а морфизмы лежат в $\mathcal{C}'_T$. Поскольку $\mathcal{C}' = \langle \mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2 \rangle$, существует выделенный треугольник в категории $\mathcal{C}'$

$$F_2 \rightarrow F \rightarrow F_1 \rightarrow F_2[1], \quad (3.3)$$

где $F_i \in \mathcal{A}'_i$. Применяя к нему точный функтор T , получим выделенный треугольник

$$TF_2 \rightarrow TF \rightarrow TF_1 \rightarrow TF_2[1].$$

Морфизм $h: F \rightarrow TF$ можно продолжить до морфизма треугольников

$$\begin{array}{ccccccc} F_2 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_2[1] \\ \downarrow h_2 & & \downarrow h & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_2[1] \\ TF_2 & \longrightarrow & TF & \longrightarrow & TF_1 & \longrightarrow & TF_2[1] \end{array} \quad (3.4)$$

в силу того, что $\text{Hom}(F_2, TF_1) = 0$ по предположению о верхнетреугольности. Проверим, что пары (F_i, h_i) являются комодулями над T . Действительно, компонирова (3.4) с

$$\begin{array}{ccccccc} TF_2 & \longrightarrow & TF & \longrightarrow & TF_1 & \longrightarrow & TF_2[1] \\ \downarrow Th_2 & & \downarrow Th & & \downarrow Th_1 & & \downarrow Th_2[1] \\ TTF_2 & \longrightarrow & TTF & \longrightarrow & TTF_1 & \longrightarrow & TTF_2[1] \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccccccc}
TF_2 & \longrightarrow & TF & \longrightarrow & TF_1 & \longrightarrow & TF_2[1] \\
\downarrow \delta F_2 & & \downarrow \delta F & & \downarrow \delta F_1 & & \downarrow \delta F_2[1] \\
TTF_2 & \longrightarrow & TTF & \longrightarrow & TTF_1 & \longrightarrow & TTF_2[1]
\end{array}$$

мы получим два морфизма

$$\begin{array}{ccccccc}
F_2 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_2[1] \\
Th_2 \circ h_2 \downarrow \delta F_2 \circ h_2 & & Th \circ h \downarrow \delta F \circ h & & Th_1 \circ h_1 \downarrow \delta F_1 \circ h_1 & & Th_2 \circ h_2[1] \downarrow \delta F_2 \circ h_2[1] \\
TTF_2 & \longrightarrow & TTF & \longrightarrow & TTF_1 & \longrightarrow & TTF_2[1]
\end{array}$$

треугольников; эти морфизмы совпадают в среднем члене. Так как $\text{Hom}(F_2, TTF_1) = 0$, существует единственный морфизм треугольников, продолжающий заданный морфизм средних членов, следовательно $\delta F_i \circ h_i = Th_i \circ h_i$. Аналогично проверяется, что $\varepsilon F_i \circ h_i = \text{Id}_{F_i}$. Из диаграммы (3.4) видно, что требуемый треугольник (3.2) построен.

Теперь предположим, что предложение доказано для $n \geq 2$, проверим его справедливость для $n + 1$. В самом деле, разложения $\mathcal{A}_0 = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ и $\mathcal{C} = \langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{n+1} \rangle$ удовлетворяют условиям предложения, и мы получаем

$$\mathcal{C}'_T = \langle \mathcal{A}'_{0T}, \mathcal{A}'_{n+1,T} \rangle = \langle \langle \mathcal{A}'_{1T}, \dots, \mathcal{A}'_{nT} \rangle, \mathcal{A}'_{n+1,T} \rangle = \langle \mathcal{A}'_{1T}, \dots, \mathcal{A}'_{nT}, \mathcal{A}'_{n+1,T} \rangle.$$

§ 4. Спуск для полуортогональных разложений: накрытие схем

Пусть $p: X \rightarrow S$ – плоский морфизм квазипроективных схем такой, что $\mathcal{O}_S$ выделяется прямым слагаемым в $Rp_*\mathcal{O}_X$. В таком случае (см. теорему 2.14) производная категория пучков на S эквивалентна категории спуска, связанной с производной категорией пучков на X . Это позволяет с помощью теоремы 3.2 строить полуортогональные разложения производной категории пучков на S . Роль категории $\mathcal{C}$ из теоремы 3.2, на которой определена комонада, играет неограниченная производная категория $\mathcal{D}(X)$. При этом функтор p^*p_* на категории $\mathcal{D}(X)$ не сохраняет “маленькие” подкатегории такие, как $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ и $\mathcal{D}^b(X)$. Поэтому для применения результатов предыдущего параграфа необходимо построить полуортогональное разложение “большой” категории.

Обозначим через $T_p = (T_p, \varepsilon, \delta)$ комонаду на $\mathcal{D}(X)$, связанную с морфизмом p .

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть X и S – квазипроективные схемы, а $p: X \rightarrow S$ – плоский морфизм, причем $\mathcal{O}_S$ выделяется прямым слагаемым в $Rp_*\mathcal{O}_X$. Пусть дано полуортогональное разложение $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$, относительно которого функтор $T_p = p^*p_*$ верхнетреуголен. Тогда категория $\mathcal{D}(S)$ допускает полуортогональное разложение $\langle \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n \rangle$, где $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{D}(S)$ обозначает полную подкатегорию, состоящую из таких H , что $p^*H \in \mathcal{A}_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.14 категория $\mathcal{D}(S)$ эквивалентна $\mathcal{D}(X)_{T_p}$. Утверждение следует из теоремы 3.2, примененной к $\mathcal{C} = \mathcal{C}' = \mathcal{D}(X)$, описания эквивалентности $\mathcal{D}(S) \cong \mathcal{D}(X)_{T_p}$ и из определения 2.8 категорий $\mathcal{A}_{iT_p}$.

Чтобы доказать аналогичное утверждение для категории совершенных комплексов и для ограниченной производной категории когерентных пучков на схеме, нам понадобится продолжить полуортогональные разложения этих категорий до полуортогонального разложения неограниченной производной категории. Возможность такого продолжения была показана А. Г. Кузнецовым в [10], напомним конструкцию.

Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(X)$ – подкатегория. Определим $\mathcal{A}^{\oplus\infty} \subset \mathcal{D}(X)$ как минимальную триангулированную подкатегорию в $\mathcal{D}(X)$, содержащую $\mathcal{A}$ и замкнутую относительно всевозможных прямых сумм.

ЛЕММА 4.2. 1. Пусть категория $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ обладает полуортогональным разложением $\langle \mathcal{A}_1^{\text{perf}}, \dots, \mathcal{A}_n^{\text{perf}} \rangle$. Положим $\mathcal{A}_i = (\mathcal{A}_i^{\text{perf}})^{\oplus\infty}$. Тогда категории $\mathcal{A}_i$ образуют полуортогональное разложение $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$, причем $\mathcal{A}_i^{\text{perf}} = \mathcal{A}_i \cap \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$.

2. Пусть $\mathcal{A}^p \subset \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ – допустимая слева триангулированная подкатегория, $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X) = \langle \mathcal{A}^p, \mathcal{Z}^p \rangle$ – соответствующее полуортогональное разложение. Тогда $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^p)^{\oplus\infty}$ есть правый ортогонал к $\mathcal{Z}^p$ в $\mathcal{D}(X)$.

3. Пусть $\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{A}'_1, \dots, \mathcal{A}'_n \rangle$ – полуортогональное разложение на допустимые подкатегории. Тогда категории $\mathcal{A}_i$, определенные как $(\mathcal{A}'_i)^{\oplus\infty}$, образуют полуортогональное разложение $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$, причем $\mathcal{A}'_i = \mathcal{A}_i \cap \mathcal{D}^b(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Утверждение следует из [10; предложение 4.2].

2. Согласно п. 1 имеем полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}(X) = \langle (\mathcal{A}^p)^{\oplus\infty}, (\mathcal{Z}^p)^{\oplus\infty} \rangle.$$

Следовательно,

$$(\mathcal{A}^p)^{\oplus\infty} = ((\mathcal{Z}^p)^{\oplus\infty})^\perp = (\mathcal{Z}^p)^\perp.$$

3. Для произвольного i рассмотрим полуортогональное разложение $\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{A}'_i, \mathcal{Z}'_i \rangle$, положим

$$\mathcal{A}_i^p = \mathcal{A}'_i \cap \mathcal{D}^{\text{perf}}(X), \quad \mathcal{Z}_i^p = \mathcal{Z}'_i \cap \mathcal{D}^{\text{perf}}(X), \quad \mathcal{A}_i = (\mathcal{A}_i^p)^{\oplus\infty}.$$

Согласно [10; предложение 4.1] получим разложение $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X) = \langle \mathcal{A}_i^p, \mathcal{Z}_i^p \rangle$. Из п. 2 следует, что $\mathcal{A}'_i \subset (\mathcal{Z}'_i)^\perp \subset (\mathcal{Z}_i^p)^\perp = \mathcal{A}_i$. Следовательно, $\mathcal{A}_i = (\mathcal{A}'_i)^{\oplus\infty}$. Наконец, из [10; предложение 4.1] следует, что имеет место разложение $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X) = \langle \mathcal{A}_1^p, \dots, \mathcal{A}_n^p \rangle$. Согласно п. 1 получаем полуортогональное разложение $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$. Последнее утверждение следует из [10; лемма 3.2].

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть X, S и p такие, как в теореме 4.1, а p_1 и p_2 – проекции $X \times_S X \rightarrow X$. Предположим, что категория совершенных комплексов $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ обладает полуортогональным разложением $\langle \mathcal{A}_1^{\text{perf}}, \dots, \mathcal{A}_n^{\text{perf}} \rangle$. Пусть $\text{Hom}(p_1^* F_j, p_2^* F_i) = 0$ для любых $1 \leq i < j \leq n$ и объектов $F_i \in \mathcal{A}_i^{\text{perf}}$, $F_j \in \mathcal{A}_j^{\text{perf}}$. Тогда $\mathcal{D}^{\text{perf}}(S)$ допускает полуортогональное разложение $\langle \mathcal{B}_1^{\text{perf}}, \dots, \mathcal{B}_n^{\text{perf}} \rangle$, где $\mathcal{B}_k^{\text{perf}} \subset \mathcal{D}^{\text{perf}}(S)$ обозначает полную подкатегорию, образованную объектами H такими, что $p^* H \in \mathcal{A}_k^{\text{perf}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.14 категория $\mathcal{D}^{\text{perf}}(S)$ эквивалентна $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)_{T_p}$. Значит, можно воспользоваться теоремой 3.2 о полуортогональных разложениях для категорий спуска.

Продолжим полуортогональное разложение $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X) = \langle \mathcal{A}_1^{\text{perf}}, \dots, \mathcal{A}_n^{\text{perf}} \rangle$ до разложения $\langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ категории $\mathcal{D}(X)$, следуя лемме 4.2, п. 1. Проверим, что функтор $T_p = p^*p_*$ верхнетреугольный относительно разложения $\langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$. Можно показать (см. [10; предложение 4.2]), что категория $\mathcal{A}_i = (\mathcal{A}_i^{\text{perf}})^{\oplus \infty}$ получается из $\mathcal{A}_i^{\text{perf}}$ добавлением всевозможных прямых сумм (один раз) и последовательным добавлением конусов морфизмов. По условию при $i < j$, $F_i \in \mathcal{A}_i^{\text{perf}}$, $F_j \in \mathcal{A}_j^{\text{perf}}$ имеем

$$\text{Hom}(F_j, T_p F_i) = \text{Hom}(F_j, p^* p_* F_i) = \text{Hom}(F_j, p_{1*} p_2^* F_i) = \text{Hom}(p_1^* F_j, p_2^* F_i) = 0$$

(второе равенство здесь – формула замены базы). Для произвольных семейств $F_i^\alpha \in \mathcal{A}_i^{\text{perf}}$, $F_j^\beta \in \mathcal{A}_j^{\text{perf}}$ получаем

$$\begin{aligned} & \text{Hom}\left(\bigoplus_{\beta} F_j^\beta, T_p \left(\bigoplus_{\alpha} F_i^\alpha\right)\right) \\ &= \prod_{\beta} \text{Hom}\left(F_j^\beta, \bigoplus_{\alpha} T_p F_i^\alpha\right) = \prod_{\beta} \bigoplus_{\alpha} \text{Hom}(F_j^\beta, T_p F_i^\alpha) = 0, \end{aligned}$$

так как объекты F_j компактны и функтор T_p перестановочен с прямыми суммами. Взятие конусов не испортит ортогональности, следовательно равенство $\text{Hom}(F_j, T_p F_i) = 0$ выполнено для любых $F_i \in \mathcal{A}_i$, $F_j \in \mathcal{A}_j$. Это означает, что $T_p \mathcal{A}_i \subset \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_i \rangle$, т.е. что T_p верхнетреугольный относительно указанного разложения.

Для доказательства теоремы применим к категориям $\mathcal{C} = \mathcal{D}(X)$, $\mathcal{C}' = \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ и $\mathcal{A}_i$, построенным выше, теорему 3.2.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть X , S и p такие, как в теореме 4.1. Предположим, что ограниченная производная категория $\mathcal{D}^b(X)$ обладает полуортогональным разложением $\langle \mathcal{A}'_1, \dots, \mathcal{A}'_n \rangle$ на допустимые подкатегории. Пусть

$$\text{Hom}(p_1^* F_j, p_2^* F_i) = 0$$

для всех $1 \leq i < j \leq n$ и объектов $F_i \in \mathcal{A}'_i$, $F_j \in \mathcal{A}'_j$. Тогда категория $\mathcal{D}^b(S)$ допускает полуортогональное разложение $\langle \mathcal{B}'_1, \dots, \mathcal{B}'_n \rangle$, где $\mathcal{B}'_k \subset \mathcal{D}^b(S)$ обозначает полную подкатегорию, состоящую из таких H , что $p^* H \in \mathcal{A}'_k$.

Доказательство полностью аналогично доказательству предыдущей теоремы; используется лемма 4.2, п. 3.

§ 5. Инвариантность разложения относительно действия группы

В этом параграфе вводится понятие инвариантности полуортогонального разложения категории $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ относительно действия алгебраической группы G на схеме X . Будет показано, что функтор p^*p_* (где p – морфизм $X \rightarrow X//G$) верхнетреуголен относительно разложения $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X) = \langle \mathcal{A}_1^{\text{perf}}, \dots, \mathcal{A}_n^{\text{perf}} \rangle$

тогда и только тогда, когда $p_2^* \mathcal{A}_i^{\text{perf}} = a^* \mathcal{A}_i^{\text{perf}}$ при всех i в обозначениях следующей леммы (как и раньше, через a и $p_2: G \times X \rightarrow X$ мы обозначаем морфизм действия и проекцию на второй сомножитель соответственно).

ЛЕММА 5.1. Пусть X – квазипроективная, а Y – аффинная схемы над k . Пусть категория совершенных комплексов $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ обладает полуортогональным разложением $\langle \mathcal{A}_1^{\text{perf}}, \dots, \mathcal{A}_n^{\text{perf}} \rangle$. Тогда имеют место следующие полуортогональные разложения:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(X) &= \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle, \\ \mathcal{D}(Y \times X) &= \langle p_2^* \mathcal{A}_1, \dots, p_2^* \mathcal{A}_n \rangle, \\ \mathcal{D}^{\text{perf}}(Y \times X) &= \langle p_2^* \mathcal{A}_1^{\text{perf}}, \dots, p_2^* \mathcal{A}_n^{\text{perf}} \rangle,\end{aligned}$$

где $\mathcal{A}_i = (\mathcal{A}_i^{\text{perf}})^{\oplus \infty}$ и $p_2^* \mathcal{A}_k$ порождена как триангулированная подкатегория в $\mathcal{D}(Y \times X)$ объектами вида $p_2^* F_k$, $F_k \in \mathcal{A}_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Большая часть утверждений леммы содержится в статье Кузнецова [10], посвященной замене базы для полуортогональных разложений. Мы напомним конструкции для того, чтобы доказать следующий факт, специфичный для случая аффинной схемы Y : категория $p_2^* \mathcal{A}_k$ порождена объектами вида $p_2^* F_k$, $F_k \in \mathcal{A}_k$.

Определим $p_2^* \mathcal{A}_i^{\text{perf}}$ как подкатегорию в $\mathcal{D}^{\text{perf}}(Y \times X)$, порожденную при помощи взятия сдвигов, конусов и прямых слагаемых объектами вида $p_1^* H \otimes p_2^* F_i$, где $H \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(Y)$ и $F_i \in \mathcal{A}_i^{\text{perf}}$. Согласно [10; п. 5.1] получим полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}^{\text{perf}}(Y \times X) = \langle p_2^* \mathcal{A}_1^{\text{perf}}, \dots, p_2^* \mathcal{A}_n^{\text{perf}} \rangle.$$

Определим $\mathcal{A}_i$ как $(\mathcal{A}_i^{\text{perf}})^{\oplus \infty}$, определим $p_2^* \mathcal{A}_i$ как $(p_2^* \mathcal{A}_i^{\text{perf}})^{\oplus \infty}$. Согласно [10; предложение 4.2] эти категории образуют полуортогональные разложения

$$\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle, \quad \mathcal{D}(Y \times X) = \langle p_2^* \mathcal{A}_1, \dots, p_2^* \mathcal{A}_n \rangle.$$

Проверим теперь, что категория $p_2^* \mathcal{A}_i$ порождена как триангулированная категория объектами вида $p_2^* F_i$, $F_i \in \mathcal{A}_i$. Во-первых, такие объекты лежат в $p_2^* \mathcal{A}_i$. Далее, рассмотрим триангулированную подкатегорию $\mathcal{D}'$ в $\mathcal{D}(Y \times X)$, порожденную объектами $p_2^* F_i$, $F_i \in \mathcal{A}_i$, для всех $1 \leq i \leq n$. Эта категория замкнута относительно взятия прямых сумм, потому что таковы все $\mathcal{A}_i$ и функтор p_2^* перестановочен с прямой суммой. Следовательно, $\mathcal{D}'$ замкнута относительно взятия прямых слагаемых, так как они выражаются при помощи счетных прямых сумм и конусов. Категория $\mathcal{D}'$ содержит все объекты вида $p_2^* F_i$ для $F_i \in \mathcal{A}_i^{\text{perf}}$ и, значит, все объекты вида $p_2^* F = p_1^* \mathcal{O}_Y \otimes p_2^* F$ для $F \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(X) = \langle \mathcal{A}_1^{\text{perf}}, \dots, \mathcal{A}_n^{\text{perf}} \rangle$. Правый ортогонал к $\mathcal{O}_Y$ в $\mathcal{D}(Y)$ равен нулю, и согласно результату Равенеля и Нимана (см. [2; п. 2.1.2]) объект $\mathcal{O}_Y$ порождает категорию $\mathcal{D}^{\text{perf}}(Y)$ относительно сдвигов, взятия конусов и прямых слагаемых. Категория $\mathcal{D}'$ замкнута относительно прямых слагаемых, а функтор $p_1^*(-) \otimes p_2^* F$ сохраняет сдвиги, конусы и прямые слагаемые, следовательно все объекты вида $p_1^* H \otimes p_2^* F$ с $H \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(Y)$, $F \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ лежат в $\mathcal{D}'$. Поэтому из [10; лемма 5.2] следует, что $\mathcal{D}'$ содержит $\mathcal{D}^{\text{perf}}(Y \times X)$. Наконец, так как категория $\mathcal{D}'$ замкнута относительно прямых сумм, она совпадает с $\mathcal{D}(Y \times X)$.

Теперь из [10; лемма 3.2] вытекает, что категория $p_2^* \mathcal{A}_i$ порождена объектами вида $p_2^* F_i$, $F_i \in \mathcal{A}_i$.

Предположим, что алгебраическая группа G действует на схеме X , пусть p обозначает канонический морфизм $X \rightarrow X//G$. Заметим, что два морфизма p_2 и $a: G \times X \rightarrow X$ изоморфны в том смысле, что имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow[\sim]{(g,x) \mapsto (g^{-1}, gx)} & G \times X \\ & \searrow a & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

Поэтому предыдущую лемму можно применять к любому из отображений p_2 и $a: G \times X \rightarrow X$. По тем же причинам эта лемма справедлива для морфизмов $\mu: G \times G \rightarrow G$, $p_{23}, \mu \times 1, 1 \times a: G \times G \times X \rightarrow G \times X$ и $p_3, ap_{23}, a(1 \times a) = a(\mu \times 1): G \times G \times X \rightarrow X$.

Лемма 5.1 позволяет дать следующее естественное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Подкатегория $\mathcal{A}^{\text{perf}} \subset \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ инвариантна относительно действия группы G на схеме X , если подкатегории $p_2^* \mathcal{A}^{\text{perf}}$ и $a^* \mathcal{A}^{\text{perf}}$ в $\mathcal{D}^{\text{perf}}(G \times X)$ совпадают. Будем говорить также, что действие группы сохраняет подкатегорию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть категория совершенных комплексов на X допускает полуортогональное разложение $\langle \mathcal{A}_1^{\text{perf}}, \dots, \mathcal{A}_n^{\text{perf}} \rangle$, и пусть $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ – соответствующее разложение неограниченной производной категории. Следующие условия равносильны:

- 1) для любых $1 \leq i < j \leq n$ и $F_i \in \mathcal{A}_i^{\text{perf}}, F_j \in \mathcal{A}_j^{\text{perf}}$ имеем

$$\text{Hom}(p_2^* F_j, a^* F_i) = 0;$$

- 2) функтор $T_p = p^* p_*$ верхнетреуголен относительно разложения $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$;
 3) $p_2^* \mathcal{A}_i = a^* \mathcal{A}_i$ при всех i ;
 4) $p_2^* \mathcal{A}_i^{\text{perf}} = a^* \mathcal{A}_i^{\text{perf}}$ при всех i .

Если эти условия выполнены, мы говорим, что действие группы сохраняет полуортогональное разложение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.3. Вывод 1) $\implies$ 2) по сути содержится в доказательстве теоремы 4.3 (с заменой p_2 на p_1 , а a на p_2).

2) $\implies$ 3). Возьмем объект $F_k \in \mathcal{A}_k$. Для любых $i < k$ и $F_i \in \mathcal{A}_i$ имеем

$$\text{Hom}(p_2^* F_k, a^* F_i) = \text{Hom}(F_k, p_{2*} a^* F_i) = \text{Hom}(F_k, T_p F_i) = 0,$$

так как $T_p F_i \in \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_i \rangle = \langle \mathcal{A}_{i+1}, \dots, \mathcal{A}_n \rangle^\perp$. Согласно лемме 5.1 объекты $a^* F_i$ порождают $a^* \mathcal{A}_i$ как триангулированную категорию, значит, $p_2^* F_k \in {}^\perp a^* \mathcal{A}_i$. Аналогично, для $i > k$ и любого $F_i \in \mathcal{A}_i$ имеем

$$\text{Hom}(a^* F_i, p_2^* F_k) = \text{Hom}(F_i, a_* p_2^* F_k) = \text{Hom}(F_i, T_p F_k) = 0.$$

Как выше, получаем, что $p_2^*F_k \in a^*\mathcal{A}_i^\perp$. Наконец,

$$p_2^*F_k \in {}^\perp\langle a^*\mathcal{A}_1, \dots, a^*\mathcal{A}_{k-1} \rangle \cap \langle a^*\mathcal{A}_{k+1}, \dots, a^*\mathcal{A}_n \rangle^\perp = a^*\mathcal{A}_k.$$

По лемме 5.1 объекты $p_2^*F_k$ порождают категорию $p_2^*\mathcal{A}_k$, значит $p_2^*\mathcal{A}_k \subset a^*\mathcal{A}_k$. Тем же способом доказывается, что $a^*\mathcal{A}_k \subset p_2^*\mathcal{A}_k$.

3) $\implies$ 4). В силу леммы 4.2, п. 1

$$p_2^*\mathcal{A}_i^{\text{perf}} = p_2^*\mathcal{A}_i \cap \mathcal{D}^{\text{perf}}(G \times X) = a^*\mathcal{A}_i \cap \mathcal{D}^{\text{perf}}(G \times X) = a^*\mathcal{A}_i^{\text{perf}}.$$

4) $\implies$ 1). Мы имеем $p_2^*F_j \in p_2^*\mathcal{A}_j^{\text{perf}} = a^*\mathcal{A}_j^{\text{perf}}$ и $a^*F_i \in a^*\mathcal{A}_i^{\text{perf}}$. Так как $a^*\mathcal{A}_i^{\text{perf}}$ и $a^*\mathcal{A}_j^{\text{perf}}$ полуортогональны друг другу, $\text{Hom}(p_2^*F_j, a^*F_i) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Отметим, что условия 1) и 2) говорят о свойстве полуортогонального разложения в целом в то время, как условия 3) и 4) выражают инвариантность разложения через инвариантность его компонент.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Аналоги леммы 5.1 и предложения 5.3 выполнены для ограниченных производных категорий вместо категорий совершенных комплексов (см. [10; теорема 5.6] и лемму 4.2, п. 3). При этом компоненты полуортогональных разложений ограниченных производных категорий должны быть допустимы.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Действие конечной группы G сохраняет разложение

$$\mathcal{D}^{\text{perf}}(X) = \langle \mathcal{A}_1^P, \dots, \mathcal{A}_n^P \rangle,$$

если и только если $g^*\mathcal{A}_i^P = \mathcal{A}_i^P$ для любого элемента $g \in G$ и всех i . Действительно, в этом случае произведение $G \times X$ есть несвязное объединение $\bigsqcup_{g \in G} X$ нескольких экземпляров X , проекции $p_2, a: G \times X \rightarrow X$ имеют вид $(1_X)_{g \in G}$ и $(g)_{g \in G}$ соответственно. Подкатегории $p_2^*\mathcal{A}_i^P$ и $a^*\mathcal{A}_i^P$ в $\mathcal{D}^{\text{perf}}(G \times X)$ – это категории $\bigoplus_{g \in G} \mathcal{A}_i^P$ и $\bigoplus_{g \in G} g^*\mathcal{A}_i^P$. Их совпадение означает, что $g^*\mathcal{A}_i^P = \mathcal{A}_i^P$ при всех g и i .

§ 6. Спуск для полуортогональных разложений: эквивариантные категории

Здесь мы докажем основные теоремы, позволяющие строить полуортогональное разложение производной категории эквивариантных пучков на схеме по полуортогональному разложению производной категории пучков, которое сохраняется действием группы.

Для объекта $F \in \mathcal{D}^G(X)$ обозначим через $\overline{F} \in \mathcal{D}(X)$ объект, полученный из F забыванием эквивариантной структуры.

ТЕОРЕМА 6.1. *Предположим, что X – квазипроективная схема над полем k , на которой действует аффинная групповая схема G конечного типа над k . Допустим, что G линейно редуктивная. Пусть $\mathcal{A}$ в полуортогональном разложении*

$$\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$$

для любых $1 \leq i < j \leq n$ и $F_i \in \mathcal{A}_i, F_j \in \mathcal{A}_j$ имеем $\text{Hom}(p_2^* F_j, a^* F_i) = 0$. Обозначим через $\mathcal{B}_i$ полную подкатегорию в $\mathcal{D}^G(X)$, состоящую из объектов F таких, что $\bar{F} \in \mathcal{A}_i$:

$$\mathcal{B}_i = \{F \in \mathcal{D}^G(X) \mid \bar{F} \in \mathcal{A}_i\}.$$

Тогда имеется полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}^G(X) = \langle \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p: X \rightarrow X//G$ – естественный морфизм стеков. Согласно теореме 2.16 $\mathcal{D}^G(X)$ эквивалентна комонадной категории спуска $\mathcal{D}(X)_{T_G}$, связанной с комонадой $T_G = (p^* p_*, \varepsilon, \delta)$ на $\mathcal{D}(X)$. Из доказательства теоремы 4.3 следует, что функтор $T_G = p^* p_* = p_{2*} a^*$ верхнетреуголен относительно исходного полуортогонального разложения. Применение теоремы 3.2 к категориям $\mathcal{C} = \mathcal{C}' = \mathcal{D}(X)$, разложению $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ и комонаде T_G доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 6.2. *Предположим, что X и G такие, как в теореме 6.1. Пусть в полуортогональном разложении*

$$\mathcal{D}^{\text{perf}}(X) = \langle \mathcal{A}_1^{\text{perf}}, \dots, \mathcal{A}_n^{\text{perf}} \rangle$$

для всех $1 \leq i \leq n$ выполнено $p_2^* \mathcal{A}_i^{\text{perf}} = a^* \mathcal{A}_i^{\text{perf}}$. Положим

$$\mathcal{B}_i^{\text{perf}} = \{F \in \mathcal{D}^{\text{perf}, G}(X) \mid \bar{F} \in \mathcal{A}_i^{\text{perf}}\}.$$

Тогда имеется полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}^{\text{perf}, G}(X) = \langle \mathcal{B}_1^{\text{perf}}, \dots, \mathcal{B}_n^{\text{perf}} \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя лемме 4.2, п. 1, продолжим данное полуортогональное разложение до полуортогонального разложения $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ так, что $\mathcal{A}_i^{\text{perf}} = \mathcal{A}_i \cap \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$. Согласно предложению 5.3 функтор $p^* p_*$ верхнетреуголен относительно полученного разложения. Для доказательства теоремы применим теорему 3.2 к категориям $\mathcal{C} = \mathcal{D}(X)$, $\mathcal{C}' = \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$, разложению $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ и комонаде T_G .

ТЕОРЕМА 6.3. *Предположим, что X и G такие, как в теореме 6.1. Пусть в полуортогональном разложении на допустимые компоненты*

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{A}'_1, \dots, \mathcal{A}'_n \rangle$$

для всех $1 \leq i \leq n$ выполнено $p_2^* \mathcal{A}'_i = a^* \mathcal{A}'_i$. Положим

$$\mathcal{B}'_i = \{F \in \mathcal{D}^b(\text{coh}^G(X)) \mid \bar{F} \in \mathcal{A}'_i\}.$$

Тогда имеется полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}^b(\text{coh}^G(X)) = \langle \mathcal{B}'_1, \dots, \mathcal{B}'_n \rangle.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.2; используется аналог предложения 5.3 для ограниченных производных категорий.

§ 7. Производная теория спуска для скрученных эквивариантных пучков

В этом параграфе обобщим результаты о спуске для производных категорий, полученные в [8], на скрученные эквивариантные пучки. Мы используем понятия коцикла на алгебраической группе и скрученных эквивариантных пучков, введенные в [1]. Напомним определения и необходимые факты.

Пусть G – групповая схема конечного типа над полем k со структурным морфизмом $\mu: G \times G \rightarrow G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. *Коцикл* на G – это пара $(\mathcal{L}, \alpha)$, состоящая из линейного расслоения $\mathcal{L}$ на G и изоморфизма расслоений $\alpha: p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L} \rightarrow \mu^* \mathcal{L}$ на $G \times G$, удовлетворяющего условию ассоциативности: диаграмма изоморфизмов пучков на произведении $G \times G \times G$

$$\begin{array}{ccc} p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L} \otimes p_3^* \mathcal{L} & \xrightarrow{1 \otimes p_{23}^* \alpha} & p_1^* \mathcal{L} \otimes (\mu p_{23})^* \mathcal{L} \\ p_{12}^* \alpha \otimes 1 \downarrow & & \downarrow (1 \times \mu)^* \alpha \\ (\mu p_{12})^* \mathcal{L} \otimes p_3^* \mathcal{L} & \xrightarrow{(\mu \times 1)^* \alpha} & (\mu(\mu \times 1))^* \mathcal{L} \sim (\mu(1 \times \mu))^* \mathcal{L} \end{array}$$

коммутативна.

Пусть $(\mathcal{L}, \alpha)$ – коцикл на G . Пусть группа G действует на схеме X и $a: G \times X \rightarrow X$ обозначает морфизм действия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Назовем $(\mathcal{L}, \alpha)$ - G -эквивариантным пучком на X пару $\mathcal{F} = (F, \theta)$, образованную пучком F на X и изоморфизмом

$$\theta: p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* F \rightarrow a^* F$$

пучков на $G \times X$, удовлетворяющим условию согласованности: диаграмма пучков на $G \times G \times X$

$$\begin{array}{ccc} p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L} \otimes p_3^* F & \xrightarrow{1 \otimes p_{23}^* \theta} & p_1^* \mathcal{L} \otimes (a p_{23})^* F \\ p_{12}^* \alpha \otimes 1 \downarrow & & \downarrow (1 \times a)^* \theta \\ (\mu p_{12})^* \mathcal{L} \otimes p_3^* F & \xrightarrow{(\mu \times 1)^* \theta} & (a(\mu \times 1))^* F \sim (a(1 \times a))^* F \end{array}$$

коммутативна. Морфизм $(\mathcal{L}, \alpha)$ -эквивариантных пучков из (F_1, θ_1) в (F_2, θ_2) – это гомоморфизм пучков $F_1 \rightarrow F_2$, согласованный со структурными морфизмами θ_1 и θ_2 .

В качестве частного случая, когда X – точка, получаем определение $(\mathcal{L}, \alpha)$ -представления группы G .

Абелеву категорию квазикогерентных $(\mathcal{L}, \alpha)$ - G -эквивариантных пучков на X обозначают $\text{qcoh}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(X)$, а категорию когерентных $(\mathcal{L}, \alpha)$ - G -эквивариантных пучков на X обозначают $\text{coh}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(X)$.

На коциклах группы G естественным способом определено умножение (тензорное), оно превращает множество коциклов на G в абелеву группу. Степени коцикла $(\mathcal{L}, \alpha)$ мы обозначаем через $(\mathcal{L}^r, \alpha^r)$. Как и в ситуации с конечными

группами, коциклы классифицируют центральные расширения группы с помощью $\mathbb{G}_m$ – мультипликативной группы поля. А именно, есть взаимно однозначное соответствие между классами изоморфизма коциклов на G и классами изоморфизма центральных расширений

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1.$$

Скрученные представления и эквивариантные пучки хорошо описываются при помощи расширения группы, соответствующего данному коциклу. Верно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3 (см. [1; предложение 1.9]). *В сделанных обозначениях для любого целого r имеется эквивалентность категорий*

$$\mathrm{qcoh}^{G, \mathcal{L}^r, \alpha^r}(X) \cong \mathrm{qcoh}_{(r)}^{\tilde{G}}(X),$$

где $\mathrm{qcoh}_{(r)}^{\tilde{G}}(X)$ – полная подкатегория в $\mathrm{qcoh}^{\tilde{G}}(X)$, образованная пучками, на которых подгруппа $\mathbb{G}_m \subset \tilde{G}$ действует с весом r . Аналогичное утверждение справедливо для когерентных пучков.

Так как подгруппа $\mathbb{G}_m \subset \tilde{G}$ центральна и действует на X тривиально, имеются разложения по характеристам $\mathbb{G}_m$:

$$\mathrm{coh}^{\tilde{G}}(X) = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \mathrm{coh}_{(r)}^{\tilde{G}}(X), \quad \mathrm{qcoh}^{\tilde{G}}(X) = \prod_{r \in \mathbb{Z}} \mathrm{qcoh}_{(r)}^{\tilde{G}}(X).$$

Тем самым, категорию скрученных G -эквивариантных пучков можно описать как полную подкатегорию (и даже прямой сомножитель) в категории эквивариантных пучков относительно некоторого расширения группы G с помощью $\mathbb{G}_m$.

Как и в случае обычных эквивариантных пучков, на скрученные эквивариантные пучки можно смотреть как на объекты категории спуска, связанной с подходящей косимплициальной категорией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4. Рассмотрим симплициальную схему (2.1)

$$(X/G)_{\bullet} = [X, G \times X, G \times G \times X, \dots, p_{\bullet}].$$

Рассмотрим косимплициальную категорию

$$[\mathrm{qcoh}(X), \mathrm{qcoh}(G \times X), \mathrm{qcoh}(G \times G \times X), \dots, p_{\bullet}^*],$$

состоящую из категорий квазикогерентных пучков и функторов обратного образа между ними. Подкрутим функторы p_f^* следующим образом: положим для пучка F на $\underbrace{G \times \dots \times G}_{m-1 \text{ раз}} \times X$ и отображения $f: [1, \dots, m] \rightarrow [1, \dots, n]$

$$P_f'^* F = p_1^* \mathcal{L} \otimes \dots \otimes p_{n-f(m)}^* \mathcal{L} \otimes p_f^* F. \quad (7.1)$$

Здесь p_i , $i = 1, \dots, n - f(m)$, обозначает проекцию $G \times \dots \times G \times X$ на i -й сомножитель G .

Зададим изоморфизмы $\epsilon'_{f,g}: P_f'^* P_g'^* \xrightarrow{\sim} P_{fg}'^*$ для всякой пары компонируемых отображений f, g . Пусть $f: [1, \dots, n] \rightarrow [1, \dots, k]$ и $g: [1, \dots, m] \rightarrow [1, \dots, n]$ – морфизмы в Δ . Имеем

$$\begin{aligned} P_f'^* P_g'^*(-) &= P_f'^*(p_1^* \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes p_{n-g(m)}^* \mathcal{L} \otimes p_g^*(-)) \\ &= p_1^* \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes p_{k-f(n)}^* \mathcal{L} \otimes p_f^* p_1^* \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes p_f^* p_{n-g(m)}^* \mathcal{L} \otimes p_f^* p_g^*(-) \\ &= p_1^* \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes p_{k-f(n)}^* \mathcal{L} \otimes (\mu p_{k-f(n)+1, \dots, k-f(n-1)})^* \mathcal{L} \\ &\quad \otimes \cdots \otimes (\mu p_{k-f(g(m)+1, \dots, k-f(g(m)))})^* \mathcal{L} \otimes p_f^* p_g^*(-), \\ P_{fg}'^*(-) &= p_1^* \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes p_{k-f(g(m))}^* \mathcal{L} \otimes p_{fg}^*(-), \end{aligned}$$

где $p_{i,i+1, \dots, j-1, j}$ обозначает проекцию $G \times \cdots \times G \times X$ на произведение $i, \dots, j$ сомножителей, а μ используется для обозначения умножения $G \times \cdots \times G \rightarrow G$. Определим изоморфизм $\epsilon'_{f,g}$ при помощи изоморфизма $\epsilon_{f,g}: p_f^* p_g^* \rightarrow p_{fg}^*$ и изоморфизмов

$$(\mu p_{i,i+1, \dots, j-1, j})^* \mathcal{L} \rightarrow p_i^* \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes p_j^* \mathcal{L},$$

полученных итерированием структурного изоморфизма $\alpha: p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L} \rightarrow \mu^* \mathcal{L}$ на $G \times G$.

Полученные косимплициальные категории

$$[\mathrm{qcoh}(X), \mathrm{qcoh}(G \times X), \mathrm{qcoh}(G \times G \times X), \dots, P_\bullet'^*], \quad (7.2)$$

$$[\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \mathcal{D}(G \times G \times X), \dots, P_\bullet'^*] \quad (7.3)$$

и аналогичные им будем называть косимплициальными категориями, связанными со скрученным на коцикл $(\mathcal{L}, \alpha)$ действием G на X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. Категории (7.2) и (7.3) являются косимплициальными категориями с заменой базы в смысле определения 2.9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно проверить два условия: существование правых сопряженных к функторам $P_\bullet'^*$ и то, что канонические морфизмы замены базы для точных декартовых квадратов суть изоморфизмы.

Нетрудно видеть, что правым сопряженным к

$$P_f'^* = p_1^* \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes p_{n-f(m)}^* \mathcal{L} \otimes p_f^*(-)$$

является функтор

$$P_{f*}' = p_{f*}(p_1^* \mathcal{L}^{-1} \otimes \cdots \otimes p_{n-f(m)}^* \mathcal{L}^{-1} \otimes -).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}(p_1^* \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes p_{n-f(m)}^* \mathcal{L} \otimes p_f^* F_1, F_2) \\ &\cong \mathrm{Hom}(p_f^* F_1, p_1^* \mathcal{L}^{-1} \otimes \cdots \otimes p_{n-f(m)}^* \mathcal{L}^{-1} \otimes F_2) \\ &\cong \mathrm{Hom}(F_1, p_{f*}(p_1^* \mathcal{L}^{-1} \otimes \cdots \otimes p_{n-f(m)}^* \mathcal{L}^{-1} \otimes F_2)). \end{aligned}$$

Второе условие утверждает, что для коммутативного квадрата неубывающих отображений конечных множеств

$$\begin{array}{ccc} [1, \dots, m+n-r] & \xleftarrow{f'} & [1, \dots, n] \\ \uparrow g' & & \uparrow g \\ [1, \dots, m] & \xleftarrow{f} & [1, \dots, r] \end{array}$$

где f и f' инъективны и $[1, \dots, m+n-r] = \text{Im } f' \cup \text{Im } g'$, морфизм замены базы $P_f'^* P_{g^*}' \rightarrow P_{g'^*}' P_{f'}'^*$ является изоморфизмом функторов. Заметим, что, раскладывая f и g в композицию элементарных отображений, которые соответствуют граням и вырождениям, можно свести проверку к нескольким простым случаям. А именно, можно считать, что $m = r + 1$, $f = \delta_i$ (где $\delta_i(x) = x$ при $x < i$, $\delta_i(x) = x + 1$ при $x \geq i$) и что $n = r + 1$, $g = \delta_j$ либо $n = r - 1$, $g = s_j$ (где $s_j(x) = x$ при $x \leq j$, $s_j(x) = j - 1$ при $x > j$). По существу возникают различные случаи в зависимости от того, равны ли i и j единице. В каждом из них проверка элементарна и сводится к применению свойств сопряженности, использованию изоморфизма α и обычной формуле замены базы. Например, предположим, что $f = g = \delta_1$. Тогда либо $f' = \delta_1$, $g' = \delta_2$, либо $f' = \delta_2$, $g' = \delta_1$; рассмотрим первый случай.

Тогда по определению 7.4 и первой части доказательства имеем

$$\begin{aligned}
 P_{g'^*}' P_{f'}'^* &= p_{g'^*}' (p_1^* \mathcal{L} \otimes p_{f'}^* (-)) \cong p_{g'^*}' (p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L}^{-1} \otimes p_{f'}^* (-)) \\
 &\stackrel{(1)}{\cong} p_{g'^*}' ((\mu p_{12})^* \mathcal{L} \otimes p_{f'}^* p_1^* \mathcal{L}^{-1} \otimes p_{f'}^* (-)) \\
 &\stackrel{(2)}{\cong} p_{g'^*}' (p_{g'}^* p_1^* \mathcal{L} \otimes p_{f'}^* (p_1^* \mathcal{L}^{-1} \otimes -)) \\
 &\stackrel{(3)}{\cong} p_1^* \mathcal{L} \otimes p_{g'^*}' p_{f'}^* (p_1^* \mathcal{L}^{-1} \otimes -) \stackrel{(4)}{\cong} p_1^* \mathcal{L} \otimes p_{f'}^* p_{g^*}' (p_1^* \mathcal{L}^{-1} \otimes -) = P_f'^* P_{g^*}'.
 \end{aligned}$$

Здесь использованы: (1) изоморфизм $\alpha: p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L} \rightarrow \mu^* \mathcal{L}$ расслоений на $G \times G$ и то, что $p_1 p_{f'} = p_2$; (2) равенство $p_1 p_{g'} = \mu p_{12}$, вытекающее из $p_{g'}(g_{r+2}, g_{r+1}, \dots, g_2, x_1) = (g_{r+2} g_{r+1}, \dots, g_2, x_1)$; (3) формула проекции для $p_{g'}$; (4) формула плоской замены базы для морфизмов p_f и p_g .

Остальные случаи разбираются аналогично.

Обозначим через $T_{G, \mathcal{L}, \alpha}$ комонады на $\text{qcoh}(X)$ и $\mathcal{D}(X)$, связанные с косимплициальными категориями (7.2) и (7.3) (см. определение 2.10). В силу предположений 2.12 и 7.5 категории спуска

$$\text{qcoh}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(X) = \text{Kern}([\text{qcoh}(X), \text{qcoh}(G \times X), \text{qcoh}(G \times G \times X), \dots, P_{\bullet}^*])$$

и

$$\mathcal{D}(X)^{G, \mathcal{L}, \alpha} = \text{Kern}([\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \mathcal{D}(G \times G \times X), \dots, P_{\bullet}^*])$$

эквивалентны категориями комодулей $\text{qcoh}(X)_{T_{G, \mathcal{L}, \alpha}}$ и $\mathcal{D}(X)_{T_{G, \mathcal{L}, \alpha}}$ соответственно.

ПРИМЕР 7.6. Для маленьких значений n, m и отображений f , соответствующих граням и вырождениям, функторы $P_f'^*$ из данного определения имеют вид

$$\begin{array}{ccccc}
 & \xleftarrow{(1 \times a)^*} & & \xleftarrow{a^*} & \\
 & \xrightarrow{(p_1 \times e \times p_2)^*} & & \xrightarrow{(e \times 1)^*} & \\
 \text{qcoh}(G \times G \times X) & \xleftarrow{(\mu \times 1)^*} & \text{qcoh}(G \times X) & \xrightarrow{p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^*} & \text{qcoh}(X) \\
 & \xrightarrow{(e \times 1)^*} & & \xleftarrow{p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^*} & \\
 & \xleftarrow{p_1^* \mathcal{L} \otimes p_{23}^*} & & &
 \end{array}$$

Для $g: [1] \rightarrow [1, 2]$, $g(1) = 1$ и $f: [1, 2] \rightarrow [1, 2, 3]$, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ изоморфизм между функторами $P_f'^* P_g'^*$ и $P_{fg}'^*$ устроен следующим образом:

$$\begin{aligned} P_f'^* P_g'^*(-) &= (\mu \times 1)^*(p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^*(-)) \xrightarrow{\sim} p_{12}^* \mu^* \mathcal{L} \otimes p_3^*(-) \\ &\xrightarrow{p_{12}^*(\alpha)^{-1}} p_{12}^*(p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L}) \otimes p_3^*(-) \xrightarrow{\sim} p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L} \otimes p_3^*(-) = P_{fg}'^*(-). \end{aligned}$$

Из определения видно, что категория спуска Kern , связанная с (7.2), – это в точности категория скрученных $(\mathcal{L}, \alpha)$ - G -эквивариантных квазикогерентных пучков на X .

Отметим, что косимплициальная категория (7.2) не получается стандартной конструкцией из примера 2.3, связанной с морфизмом стеков.

Теперь перейдем к производной версии спуска для скрученных пучков. Пусть $\mathcal{D}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(X) = \mathcal{D}(\text{qcoh}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(X))$ – неограниченная производная категория $(\mathcal{L}, \alpha)$ - G -эквивариантных квазикогерентных пучков. Через $\mathcal{D}^b(\text{coh}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(X))$ обозначим ограниченную производную категорию от $\text{coh}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(X)$. Обозначим также через $\mathcal{D}^{\text{perf}, G, \mathcal{L}, \alpha}(X)$ категорию $(\mathcal{L}, \alpha)$ - G -эквивариантных совершенных комплексов. Это полная подкатегория в $\mathcal{D}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(X)$, образованная объектами, которые при забывании эквивариантной структуры становятся совершенными комплексами на X .

Как и в нескрученной ситуации, мы хотим показать, что при условии линейной редуктивности группы G производная категория скрученных эквивариантных пучков $\mathcal{D}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(X)$ эквивалентна категории спуска

$$\mathcal{D}(X)^{G, \mathcal{L}, \alpha} = \text{Kern}([\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \mathcal{D}(G \times G \times X), \dots, P_\bullet'^*]),$$

связанной с косимплициальной категорией из определения 7.4. Мы выведем это утверждение из того, что функтор сравнения является эквивалентностью для производной категории пучков на X , эквивариантных относительно расширения группы G . Пусть

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1 \quad (7.4)$$

– центральное расширение группы G с помощью $\mathbb{G}_m$, соответствующее коциклу $(\mathcal{L}, \alpha)$. Категория квазикогерентных $\tilde{G}$ -эквивариантных пучков на X разлагается в прямое произведение категорий

$$\text{qcoh}^{\tilde{G}}(X) \cong \prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{qcoh}_{(i)}^{\tilde{G}}(X) \cong \prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{qcoh}^{\tilde{G}, \mathcal{L}^i, \alpha^i}(X), \quad (7.5)$$

где $\text{qcoh}_{(i)}^{\tilde{G}}$ обозначает подкатегорию, состоящую из $\tilde{G}$ -эквивариантных пучков, на которые подгруппа $\mathbb{G}_m \subset \tilde{G}$ действует с весом i (см. предложение 7.3).

ТЕОРЕМА 7.7. Пусть X – квазипроективная схема над полем k , на которой действует G – групповая схема конечного типа над k . Предположим, что категория представлений G полупроста. Тогда функторы сравнения

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(X) &\rightarrow \mathcal{D}(X)^{G, \mathcal{L}, \alpha}, \\ \mathcal{D}^{\text{perf}, G, \mathcal{L}, \alpha}(X) &\rightarrow \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)^{G, \mathcal{L}, \alpha}, \\ \mathcal{D}^b(\text{coh}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(X)) &\rightarrow \mathcal{D}^b(X)^{G, \mathcal{L}, \alpha} \end{aligned}$$

являются эквивалентностями, где $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)^{G, \mathcal{L}, \alpha}$ и $\mathcal{D}^b(X)^{G, \mathcal{L}, \alpha}$ обозначают подкатегории в категории спуска

$$\mathcal{D}(X)^{G, \mathcal{L}, \alpha} = \text{Kern}([\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \mathcal{D}(G \times G \times X), \dots, P'_{\bullet}]),$$

связанные с подкатегориями $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$, $\mathcal{D}^b(X) \subset \mathcal{D}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через

$$\mathcal{D}_{(i)} \subset \mathcal{D}(X)^{\tilde{G}} = \text{Kern}([\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(\tilde{G} \times X), \mathcal{D}(\tilde{G} \times \tilde{G} \times X), \dots, p_{\bullet}^*])$$

полную подкатегорию, образованную объектами, на которые подгруппа $\mathbb{G}_m \subset \tilde{G}$ действует с весом i . Несложно видеть, что для разных i эти подкатегории ортогональны, т.е. между объектами разных подкатегорий все морфизмы нулевые. Расширение групп (7.4) задает строго полный функтор на категориях спуска $\mathcal{D}(X)^{G, \mathcal{L}^i, \alpha^i} \rightarrow \mathcal{D}(X)^{\tilde{G}}$, причем его образ попадает в подкатегорию $\mathcal{D}_{(i)}$ (см. [1; доказательство предложения 1.9]). Обозначим полученный функтор $\mathcal{D}(X)^{G, \mathcal{L}^i, \alpha^i} \rightarrow \mathcal{D}_{(i)}$ через Ψ_i . Разложение (7.5) дает разложение

$$\mathcal{D}^{\tilde{G}}(X) \cong \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^{G, \mathcal{L}^i, \alpha^i}(X)$$

для производных категорий. Оно включается в коммутативную диаграмму категорий и функторов

$$\begin{array}{ccc} \prod_i \mathcal{D}^{G, \mathcal{L}^i, \alpha^i}(X) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{D}^{\tilde{G}}(X) \\ \downarrow \prod \Phi_i & & \downarrow \sim \Phi_{\tilde{G}} \\ \prod_i \mathcal{D}(X)^{G, \mathcal{L}^i, \alpha^i} & \xrightarrow{\prod \Psi_i} \prod_i \mathcal{D}_{(i)} & \longrightarrow \mathcal{D}(X)^{\tilde{G}} \end{array}$$

Группа $\tilde{G}$ как расширение G при помощи тора – линейно редуктивная группа, следовательно, функтор сравнения $\Phi_{\tilde{G}}$ – эквивалентность (теорема 2.14). Из того, что подкатегории $\mathcal{D}_{(i)} \subset \mathcal{D}(X)^{\tilde{G}}$ ортогональны, следует, что естественный функтор $\prod_i \mathcal{D}_{(i)} \rightarrow \mathcal{D}(X)^{\tilde{G}}$ строго полный. Отсюда получаем, что каждая из композиций функторов

$$\mathcal{D}^{G, \mathcal{L}^i, \alpha^i}(X) \xrightarrow{\Phi_i} \mathcal{D}(X)^{G, \mathcal{L}^i, \alpha^i} \xrightarrow{\Psi_i} \mathcal{D}_{(i)}$$

– тоже эквивалентность. В силу строгой полноты Ψ_i заключаем, что Φ_i – эквивалентность.

Утверждения, касающиеся $\mathcal{D}^{\text{perf}, G, \mathcal{L}, \alpha}(X)$ и $\mathcal{D}^b(\text{coh}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(X))$, получаем как следствия.

§ 8. Функторы между категориями спуска

Теоремы из § 6 позволяют строить полуортогональные разложения эквивариантных производных категорий. Мы опишем явно компоненты получающихся разложений в трех интересных примерах. В этом параграфе изложены необходимые технические средства.

Как и раньше, схемы предполагаются квазипроективными над полем k . Говоря о группе G , мы имеем в виду аффинную групповую схему конечного типа над k .

Пусть X и Y – схемы с действием группы G , $(\mathcal{L}_X, \alpha_X)$ и $(\mathcal{L}_Y, \alpha_Y)$ – коциклы группы G , а $\Psi: \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(Y)$ – функтор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Предположим, что существует функтор $\Psi_\bullet$ между косимплициальными категориями $[\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \dots, P_{X\bullet}^*]$ и $[\mathcal{D}(Y), \mathcal{D}(G \times Y), \dots, P_{Y\bullet}^*]$, связанными с действием G на X , скрученным на коцикл $(\mathcal{L}_X, \alpha_X)$, и действием G на Y , скрученным на коцикл $(\mathcal{L}_Y, \alpha_Y)$ (см. определение 7.4), такой, что $\Psi_0 = \Psi$. В таком случае скажем, что функтор Ψ согласован со (скрученными) действиями G на X и Y . Аналогично будем говорить о функторах между другими версиями производной категории или абелевыми категориями.

Согласно лемме 2.19, если функтор $\Psi: \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(Y)$ согласован со скрученными на коциклы $(\mathcal{L}_X, \alpha_X)$ и $(\mathcal{L}_Y, \alpha_Y)$ действиями G на X и Y , то он согласован с комонадами $T_{G, \mathcal{L}_X, \alpha_X}$ и $T_{G, \mathcal{L}_Y, \alpha_Y}$. В этом случае в силу леммы 2.20 функтор Ψ индуцирует функтор на категориях спуска:

$$\mathcal{D}(X)^{G, \mathcal{L}_X, \alpha_X} \rightarrow \mathcal{D}(Y)^{G, \mathcal{L}_Y, \alpha_Y}.$$

ЛЕММА 8.2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – эквивариантный морфизм схем над k с действием группы G , а $(\mathcal{L}, \alpha)$ – коцикл на G . Тогда функторы обратного образа $\mathrm{qcoh}(Y) \rightarrow \mathrm{qcoh}(X)$, $\mathcal{D}(Y) \rightarrow \mathcal{D}(X)$, $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Y) \rightarrow \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ согласованы со скрученным на $(\mathcal{L}, \alpha)$ действием G . Как следствие определены функторы обратного образа между категориями спуска

$$\begin{aligned} \mathrm{qcoh}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(Y) &\xrightarrow{f^*} \mathrm{qcoh}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(X), \\ \mathcal{D}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(Y) &\xrightarrow{f^*} \mathcal{D}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(X), \\ \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Y)^{G, \mathcal{L}, \alpha} &\xrightarrow{f^*} \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)^{G, \mathcal{L}, \alpha}, \end{aligned}$$

и если морфизм f имеет конечную Тог-размерность,

$$\mathcal{D}^b(Y)^{G, \mathcal{L}, \alpha} \xrightarrow{f^*} \mathcal{D}^b(X)^{G, \mathcal{L}, \alpha}.$$

Аналогичные утверждения справедливы для функторов прямого образа

$$\mathrm{qcoh}(X) \rightarrow \mathrm{qcoh}(Y) \quad \text{и} \quad \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(Y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что функторы

$$\Psi_k = \underbrace{(1 \times 1 \times \dots \times 1 \times f)^*}_{k \text{ раз}}$$

и канонические изоморфизмы вида $s^* t^* \cong (ts)^*$ корректно определяют функтор обратного образа на косимплициальных категориях

$$[\mathcal{D}(Y), \mathcal{D}(G \times Y), \dots, P_{Y\bullet}^*] \rightarrow [\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \dots, P_{X\bullet}^*], \quad (8.1)$$

связанных со скрученным действием G на X и Y . Для категорий qcoh и $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}$ и для функторов прямого образа рассуждения аналогичны.

ЛЕММА 8.3. Пусть $\mathcal{E}$ – объект категории $\mathcal{D}^{G, \mathcal{L}_0, \alpha_0}(X)$. Тензорное умножение на $\mathcal{E}$ согласовано с действием G на X , скрученным на коцикл $(\mathcal{L}, \alpha)$, и действием G на X , скрученным на коцикл $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0)$. Оно индуцирует функтор

$$\mathcal{D}(X)^{G, \mathcal{L}, \alpha} \rightarrow \mathcal{D}(X)^{G, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0}.$$

Если при этом $\mathcal{E} \in \mathcal{D}^{\text{perf}, G, \mathcal{L}_0, \alpha_0}(X)$, то индуцируются функторы

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)^{G, \mathcal{L}, \alpha} &\rightarrow \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)^{G, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0}, \\ \mathcal{D}^b(X)^{G, \mathcal{L}, \alpha} &\rightarrow \mathcal{D}^b(X)^{G, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим косимплициальные категории

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \mathcal{D}(G \times G \times X), \dots, P_{\bullet}^{\prime*}], \\ [\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \mathcal{D}(G \times G \times X), \dots, P_{\bullet}^{\prime\prime*}], \end{aligned}$$

связанные с действиями G на X , скрученными на коциклы $(\mathcal{L}, \alpha)$ и $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0)$ соответственно (см. определение 7.4). Пусть E – объект $\mathcal{D}(X)$, полученный из $\mathcal{E}$ забыванием эквивариантной структуры. Определим функторы

$$\Psi_k: \mathcal{D}(\underbrace{G \times \dots \times G}_{k \text{ раз}} \times X) \rightarrow \mathcal{D}(\underbrace{G \times \dots \times G}_{k \text{ раз}} \times X)$$

формулой

$$\Psi_k(-) = p_1^* \mathcal{L}_0 \otimes \dots \otimes p_k^* \mathcal{L}_0 \otimes (-) \otimes p_{k+1}^* E.$$

Зададим изоморфизмы функторов

$$\beta_f: \Psi_n \circ P_f^{\prime*} \rightarrow P_f^{\prime\prime*} \circ \Psi_m$$

для всякого отображения $f: [1, \dots, m+1] \rightarrow [1, \dots, n+1]$ в Δ . Имеем

$$\begin{aligned} \Psi_n \circ P_f^{\prime*}(-) &= p_1^* \mathcal{L}_0 \otimes \dots \otimes p_n^* \mathcal{L}_0 \otimes P_f^{\prime*}(-) \otimes p_{n+1}^* E \\ &= p_1^* \mathcal{L}_0 \otimes \dots \otimes p_n^* \mathcal{L}_0 \otimes p_1^* \mathcal{L} \\ &\quad \otimes \dots \otimes p_{n+1-f(m+1)}^* \mathcal{L} \otimes p_f^*(-) \otimes p_{n+1}^* E, \\ P_f^{\prime\prime*} \circ \Psi_m(-) &= p_1^* (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0) \otimes \dots \otimes p_{n+1-f(m+1)}^* (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0) \\ &\quad \otimes p_f^*(p_1^* \mathcal{L}_0 \otimes \dots \otimes p_m^* \mathcal{L}_0 \otimes (-) \otimes p_{m+1}^* E) \\ &= p_1^* \mathcal{L}_0 \otimes \dots \otimes p_{n+1-f(m+1)}^* \mathcal{L}_0 \otimes (\mu p_{n+1-f(m+1)+1, \dots, n+1-f(m)})^* \mathcal{L}_0 \\ &\quad \otimes \dots \otimes (\mu p_{n+1-f(2)+1, \dots, n+1-f(1)})^* \mathcal{L}_0 \otimes p_1^* \mathcal{L} \\ &\quad \otimes \dots \otimes p_{n+1-f(m+1)}^* \mathcal{L} \otimes p_f^*(-) \otimes (a p_{n+1-f(1)+1, \dots, n+1})^* E, \end{aligned}$$

где $p_{i, i+1, \dots, j-1, j}$ обозначает проекцию $G \times \dots \times G \times X$ на произведение $i, \dots, j$ сомножителей, μ используется для обозначения умножения $G \times \dots \times G \rightarrow G$, а a обозначает итерированное действие $G \times \dots \times G \times X \rightarrow X$. Для определения β_f используем изоморфизмы

$$(\mu p_{i, i+1, \dots, j-1, j})^* \mathcal{L}_0 \rightarrow p_i^* \mathcal{L}_0 \otimes \dots \otimes p_j^* \mathcal{L}_0,$$

полученные итерированием структурного изоморфизма $\alpha_0: p_1^* \mathcal{L}_0 \otimes p_2^* \mathcal{L}_0 \rightarrow \mu^* \mathcal{L}_0$ на $G \times G$, и изоморфизм

$$(ap_{n+1-f(1)+1, \dots, n+1})^* E \rightarrow p_{n+1-f(1)+1}^* \mathcal{L}_0 \otimes \cdots \otimes p_n^* \mathcal{L}_0 \otimes p_{n+1}^* E,$$

который получен кратным применением структурного изоморфизма $\theta: p_1^* \mathcal{L}_0 \otimes p_2^* E \rightarrow a^* E$ на $G \times X$. Из условий коцикла для α_0 и согласованности α_0 и θ следует, что функторы Ψ_k с изоморфизмами β_f задают функтор между косимплициальными категориями. Значит, $\Psi_0 = - \otimes E: \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(X)$ согласован со скрученными действиями G на X .

Согласно сказанному в начале параграфа получаем функтор $\mathcal{D}(X)^{G, \mathcal{L}, \alpha} \rightarrow \mathcal{D}(X)^{G, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0}$ на категориях спуска. Для категорий $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ и $\mathcal{D}^b(X)$ рассуждения аналогичные.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4. Пусть X и Y – квазипроективные схемы над k с действием групповой схемы G конечного типа над k . Пусть $\Psi_E: \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(Y)$ – функтор, заданный ядром $E \in \mathcal{D}(X \times Y)$:

$$\Psi_E(-) = p_{2*}(p_1^*(-) \otimes E).$$

Предположим, что существует объект $\mathcal{E} \in \mathcal{D}^{G, \mathcal{L}_0, \alpha_0}(X \times Y)$, дающий E при забывании действия, а $(\mathcal{L}, \alpha)$ – некоторый коцикл.

1. Функтор Ψ_E согласован со скрученным на $(\mathcal{L}, \alpha)$ действием G на X и скрученным на $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0)$ действием G на Y .

2. Пусть $T_{G, \mathcal{L}, \alpha}$ и $T_{G, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0}$ – комонады на $\mathcal{D}(X)$ и $\mathcal{D}(Y)$, связанные со скрученным на $(\mathcal{L}, \alpha)$ действием G на X и скрученным на $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0)$ действием G на Y соответственно. Функтор Ψ_E индуцирует функтор на категориях спуска $\mathcal{D}(X)_{T_{G, \mathcal{L}, \alpha}} \rightarrow \mathcal{D}(Y)_{T_{G, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0}}$. Если Ψ_E строго полон, то индуцированный им функтор на категориях спуска также строго полон.

3. Предположим, что Ψ_E строго полон и переводит $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ в $\mathcal{D}^{\text{perf}}(Y)$. Пусть образ функтора

$$\Psi_E: \mathcal{D}^{\text{perf}}(X) \rightarrow \mathcal{D}^{\text{perf}}(Y)$$

– подкатегория $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}^{\text{perf}}(Y)$. Тогда Ψ_E индуцирует строго полный функтор из $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)_{T_{G, \mathcal{L}, \alpha}}$ в $\mathcal{D}^{\text{perf}}(Y)_{T_{G, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0}}$, образ которого – подкатегория $\mathcal{A}_{T_{G, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0}} \subset \mathcal{D}^{\text{perf}}(Y)_{T_{G, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0}}$. При этом подкатегория $\mathcal{A}$ инвариантна относительно действия группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Согласованность Ψ_E со скрученными действиями G на X и Y вытекает из лемм 8.2 и 8.3.

2. По определению согласованного со скрученными действиями G на X и Y функтора Ψ_E продолжается до функтора между косимплициальными категориями, которые связаны со скрученными действиями G на X и Y . Значит, в силу леммы 2.19 функтор Ψ_E согласован с комонадами $T_{G, \mathcal{L}, \alpha}$ и $T_{G, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0}$. Согласно лемме 2.20 функтор Ψ_E индуцирует функтор на категориях спуска $\mathcal{D}(X)_{T_{G, \mathcal{L}, \alpha}} \rightarrow \mathcal{D}(Y)_{T_{G, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0}}$, который строго полон при условии, что Ψ_E строго полон.

3. Первое утверждение следует из леммы 2.20, примененной к категориям $\mathcal{D}(X)$, $\mathcal{D}(Y)$, их подкатегориям $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$, $\mathcal{D}^{\text{perf}}(Y)$, комонадам $T_{G, \mathcal{L}, \alpha}$,

$T_{G, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0}$ и подкатегории $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}^{\text{perf}}(Y)$. Проверим теперь, что подкатегория $\mathcal{A}$ инвариантна относительно действия. Рассмотрим коммутативную диаграмму (где p_X и p_Y обозначают проекции на X и Y)

$$\begin{array}{ccccc} G \times X & \xleftarrow{p_{12}} & G \times X \times Y & \xrightarrow{p_{13}} & G \times Y \\ p_X \downarrow \downarrow a & & p_{23} \downarrow \downarrow a & & p_Y \downarrow \downarrow a \\ X & \xleftarrow{p_1} & X \times Y & \xrightarrow{p_2} & Y \end{array}$$

Проверим условие 4) предложения 5.3: в $\mathcal{D}^{\text{perf}}(G \times Y)$ подкатегории $p_Y^* \mathcal{A}$ и $a^* \mathcal{A}$ совпадают. По определению категория $p_Y^* \mathcal{A}$ порождена объектами вида $p_1^* F' \otimes p_Y^* p_{2*}(p_1^* F \otimes E)$, где $F' \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(G)$, $F \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$. Имеем

$$\begin{aligned} p_1^* F' \otimes p_Y^* p_{2*}(p_1^* F \otimes E) &= p_1^* F' \otimes p_{13*} p_{23}^*(p_1^* F \otimes E) \\ &= p_1^* F' \otimes p_{13*}(p_{12}^* p_X^* F \otimes p_1^* \mathcal{L}_0^* \otimes a^* E) \\ &\in p_1^* F' \otimes p_{13*}(p_{12}^* a^* \mathcal{D}^{\text{perf}}(X) \otimes p_1^* \mathcal{L}_0^* \otimes a^* E) \\ &= p_1^* F' \otimes p_{13*}(a^*(p_1^* \mathcal{D}^{\text{perf}}(X) \otimes E) \otimes p_{13}^* p_1^* \mathcal{L}_0^*) \\ &= p_1^* F' \otimes p_1^* \mathcal{L}_0^* \otimes p_{13*} a^*(p_1^* \mathcal{D}^{\text{perf}}(X) \otimes E) \\ &= p_1^*(F' \otimes \mathcal{L}_0^*) \otimes a^* p_{2*}(p_1^* \mathcal{D}^{\text{perf}}(X) \otimes E) = p_1^*(F' \otimes \mathcal{L}_0^*) \otimes a^* \mathcal{A} = a^* \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали, что $p_X^* \mathcal{D}^{\text{perf}}(X) = \mathcal{D}^{\text{perf}}(G \times X) = a^* \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ (см. лемму 5.1). Итак, $p_Y^* \mathcal{A} \subset a^* \mathcal{A}$. Обратное включение проверяется таким же образом.

§ 9. Полуортогональные разложения для многообразий, обладающих инвариантным исключительным набором

В этом параграфе мы опишем компоненты полуортогонального разложения из теоремы 6.2 в случае, когда инвариантное полуортогональное разложение производной категории когерентных пучков на X порождено полным исключительным набором.

Пусть X – квазипроективная схема над полем k . Говоря о группе G , в этом параграфе мы имеем в виду приведенную аффинную групповую схему конечного типа над полем k .

Предположим, что E – исключительный объект в категории $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$. Он порождает подкатегорию $\langle E \rangle \subset \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$. Мы покажем, как инвариантность этой подкатегории относительно действия группы G на X (см. определение 5.2) связана с инвариантностью объекта E в смысле определения 9.1.

Для действия конечной группы G естественно считать, что пучок F на X сохраняется действием, если $g^* F \cong F$ при всех $g \in G$. Для алгебраических групп это определение не работает, так как у группы может быть слишком мало рациональных точек. Говоря об инвариантных объектах, мы будем иметь в виду следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Действие алгебраической группы G на схеме X *сохраняет* объект производной категории $F \in \mathcal{D}(X)$, если существует линейное расщепление $\mathcal{L}$ на G такое, что объекты $p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* F$ и $a^* F$ на $G \times X$ квазиизоморфны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. Следующие условия на исключительный объект $E \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ на проективной схеме X над полем k с действием приведенной аффинной групповой схемы G конечного типа над k эквивалентны:

- 1) для подходящего линейного расслоения $\mathcal{L}$ на G существует изоморфизм $p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*E \cong a^*E$ в категории $\mathcal{D}^{\text{perf}}(G \times X)$;
- 2) для любой замкнутой точки g схемы G с полем вычетов $k(g)$ выполнено $g^*E' \cong E'$, где E' – объект, полученный из E расширением скаляров $k \rightarrow k(g)$;
- 3) подкатегории $p_2^*\langle E \rangle$ и $a^*\langle E \rangle$ в $\mathcal{D}^{\text{perf}}(G \times X)$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) $\implies$ 1) доказано в [1; предложение 2.17].

1) $\implies$ 3). По определению подкатегория $p_2^*\langle E \rangle$ в $\mathcal{D}^{\text{perf}}(G \times X)$ порождена объектами вида $p_1^*F \otimes p_2^*F'$, где $F \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(G)$, $F' \in \langle E \rangle$. В частности, $p_2^*\langle E \rangle$ содержит объект $a^*E \cong p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*E$. Следовательно, $p_2^*\langle E \rangle \supset a^*\langle E \rangle$; обратное включение доказывается аналогично.

3) $\implies$ 2). Пусть g – замкнутая точка схемы G . Ограничим равные подкатегории $p_2^*\langle E \rangle$ и $a^*\langle E \rangle$ в $\mathcal{D}^{\text{perf}}(G \times X)$ на слой $X' = g \times X$. Получим подкатегории в $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X')$, порожденные исключительными объектами E' и g^*E' соответственно. Отсюда следует, что E' и g^*E' изоморфны.

Для нас важно следующее обстоятельство: исключительный объект E на X , сохраняемый действием группы, обладает эквивариантной структурой относительно некоторого коцикла на G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3. Пусть E – исключительный объект в $\mathcal{D}(X)$, сохраняемый действием группы G . Тогда для некоторого коцикла $(\mathcal{L}, \alpha)$ на G существует $(\mathcal{L}, \alpha)$ -эквивариантная структура на E , т.е. существует изоморфизм $\theta: p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*E \rightarrow a^*E$, согласованный с α в смысле определения 7.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем изоморфизм $\theta: p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*E \rightarrow a^*E$. На тройном произведении $G \times G \times X$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \otimes p_3^*E & \xrightarrow{1 \otimes p_{23}^*\theta} & p_1^*\mathcal{L} \otimes (ap_{23})^*E & \xrightarrow{(1 \times a)^*\theta} & (a(1 \times a))^*E \\
 \alpha' \downarrow & & & & \parallel \\
 (\mu p_{12})^*\mathcal{L} \otimes p_3^*E & \xrightarrow{(\mu \times 1)^*\theta} & & & (a(\mu \times 1))^*E
 \end{array}$$

где

$$\alpha': p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \otimes p_3^*E \rightarrow (\mu p_{12})^*\mathcal{L} \otimes p_3^*E$$

– некоторый изоморфизм. Проверим, что α' имеет вид $p_{12}^*\alpha \otimes 1$, где α – изоморфизм $p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \rightarrow \mu^*\mathcal{L}$ на $G \times G$. Действительно, так как E исключительный,

$$\begin{aligned}
 & \text{Hom}(p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \otimes p_3^*E, (\mu p_{12})^*\mathcal{L} \otimes p_3^*E) \\
 &= \text{Hom}(p_3^*E, (p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L})^{-1} \otimes (\mu p_{12})^*\mathcal{L} \otimes p_3^*E) \\
 &= \text{Hom}(E, p_{3*}((p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L})^{-1} \otimes (\mu p_{12})^*\mathcal{L} \otimes p_3^*E)) \\
 &= \text{Hom}(E, p_{3*}((p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L})^{-1} \otimes (\mu p_{12})^*\mathcal{L}) \otimes E) \\
 &= \text{Hom}(E, H^0(G \times G, (p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L})^{-1} \otimes \mu^*\mathcal{L}) \otimes E) \\
 &= \text{Hom}(p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L}, \mu^*\mathcal{L}).
 \end{aligned}$$

Предпоследнее равенство здесь выполнено по теореме о плоской замене базы. Рассматривая пучки и их морфизмы на $G \times G \times G \times X$, мы получаем условие ассоциативности: на $G \times G \times G$ изоморфизмы

$$(1 \times \mu)^* \alpha \circ (1 \otimes p_{23}^* \alpha) \quad \text{и} \quad (\mu \times 1)^* \alpha \circ (p_{12}^* \alpha \otimes 1)$$

между пучками $p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L} \otimes p_3^* \mathcal{L}$ и $(\mu(1 \times \mu))^* \mathcal{L}$ равны. Таким образом, пара $(\mathcal{L}, \alpha)$ является коциклом на группе G в смысле определения 7.1, а $\mathcal{E} = (E, \theta)$ – эквивариантным объектом.

Пусть в $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ есть полный исключительный набор $(E_1, \dots, E_n)$. Такой набор определяет полуортогональное разложение категории совершенных комплексов

$$\mathcal{D}^{\text{perf}}(X) = \langle \langle E_1 \rangle, \dots, \langle E_n \rangle \rangle$$

на подкатегории, эквивалентные $\mathcal{D}^b(\mathbf{k}\text{-mod})$. Предположим, что объекты E_i инвариантны относительно действия группы G . Из предложения 9.2 вытекает, что компоненты указанного разложения сохраняются группой. Согласно предложению 9.3 на объекте E_i можно ввести скрученную эквивариантную структуру для некоторого коцикла $(\mathcal{L}_i, \alpha_i)$ на G . Обозначим полученный скрученный объект категории $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)^{G, \mathcal{L}_i, \alpha_i}$ через $\mathcal{E}_i$. Предположим, что группа G линейно редуктивна. Тогда $\mathcal{E}_i$ согласно теореме 7.7 соответствует объекту производной категории $\mathcal{D}^{\text{perf}, G, \mathcal{L}_i, \alpha_i}(X)$, который также будем обозначать через $\mathcal{E}_i$.

ТЕОРЕМА 9.4. *Категория $\mathcal{D}^{\text{perf}, G}(X)$ допускает полуортогональное разложение*

$$\mathcal{D}^{\text{perf}, G}(X) = \langle \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{D}^b(\text{rep}(G, \mathcal{L}_1^{-1}, \alpha_1^{-1})), \dots, \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{D}^b(\text{rep}(G, \mathcal{L}_n^{-1}, \alpha_n^{-1})) \rangle.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.5. Этот факт был доказан в [1; теорема 2.11] в несколько иных предположениях: объекты исходного исключительного набора считались пучками (что позволяло обойтись без техники спуска для производных категорий) и не предполагалась линейная редуктивность группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9.4. В силу теоремы 2.14 категория $\mathcal{D}^{\text{perf}, G}(X)$ эквивалентна категории спуска $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)_{\text{T}_G}$, где T_G обозначает комонаду на категории $\mathcal{D}(X)$, связанную с морфизмом стеков $X \rightarrow X//G$. Из теоремы 6.2 вытекает, что $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)_{\text{T}_G}$ допускает полуортогональное разложение $\langle \langle E_1 \rangle_{\text{T}_G}, \dots, \langle E_n \rangle_{\text{T}_G} \rangle$. Здесь $\langle E_i \rangle_{\text{T}_G}$ – категория спуска, связанная с подкатегорией $\langle E_i \rangle \subset \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ (см. определение 2.8). Опишем более явно категории $\langle E_i \rangle_{\text{T}_G}$, пользуясь леммой 2.20.

Рассмотрим функтор

$$\Psi_i = - \otimes E_i: \mathcal{D}^b(\mathbf{k}\text{-mod}) = \mathcal{D}^{\text{perf}}(\text{Spec } \mathbf{k}) \rightarrow \mathcal{D}^{\text{perf}}(X).$$

Его образ – подкатегория $\langle E_i \rangle \subset \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$. Он продолжается до строго полного функтора

$$\mathcal{D}(\mathbf{k}\text{-Mod}) \cong \mathcal{D}(\text{Spec } \mathbf{k}) \rightarrow \mathcal{D}(X),$$

который также обозначим через Ψ_i . Очевидно, Ψ_i – ядерный функтор, он задается ядром $E_i \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(\text{Spec } \mathbf{k} \times X)$. При этом ядро допускает структуру

скрученного на коцикл $(\mathcal{L}_i, \alpha_i)$ эквивариантного объекта. Согласно предложению 8.4 функтор Ψ_i индуцирует строго полный функтор

$$\mathcal{D}^b(\mathrm{rep}(G, \mathcal{L}_i^{-1}, \alpha_i^{-1})) \cong \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(\mathrm{Spec} \, k)_{T_{G, \mathcal{L}_i^{-1}, \alpha_i^{-1}}} \longrightarrow \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)_{T_G} \cong \mathcal{D}^{\mathrm{perf}, G}(X),$$

его образ есть подкатегория $\langle E_i \rangle_{T_G}$.

§ 10. Полуортогональные разложения для расслоений на проективные пространства и для раздутий

В этом параграфе мы применим теорему 6.2 в двух случаях действия группы на схеме и явно опишем компоненты полученного полуортогонального разложения. Первый пример – эквивариантная производная категория проективного расслоения, изученная в [11] для случая конечной группы. Полуортогональное разложение производной категории проективных расслоений, из которого мы исходим, было получено Д. О. Орловым в [12]. Мы рассмотрим простейший случай, когда действие на проективном расслоении индуцировано эквивариантной структурой на векторном расслоении на базе.

Пусть S – квазипроективная схема над полем k , E – векторное расслоение ранга r на S , а $X = \mathbb{P}_S(E)$ – его проективизация. Обозначим через $\pi: X \rightarrow S$ естественную проекцию. Тогда полуортогональное разложение, построенное Орловым, имеет следующий вид:

$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) = \langle \pi^* \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S), \mathcal{O}_{X/S}(1) \otimes \pi^* \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S), \dots, \mathcal{O}_{X/S}(r-1) \otimes \pi^* \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S) \rangle. \quad (10.1)$$

Допустим, что на S действует группа G (точнее говоря, групповая схема конечного типа над k) и при этом на E есть скрученная G -эквивариантная структура относительно коцикла $(\mathcal{L}, \alpha)$. Соответствующее $(\mathcal{L}, \alpha)$ - G -эквивариантное расслоение обозначим $\mathcal{E}$. Тогда определено действие группы G на X , причем проекция π становится эквивариантным отображением. Предположим, что группа G линейно редуктивна.

ТЕОРЕМА 10.1. *В сделанных предположениях имеет место полуортогональное разложение*

$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf}, G}(X) = \langle \pi^* \mathcal{D}^{\mathrm{perf}, G}(S), \mathcal{O}_{X/S}(1) \otimes \pi^* \mathcal{D}^{\mathrm{perf}, G, \mathcal{L}, \alpha}(S), \dots, \mathcal{O}_{X/S}(r-1) \otimes \pi^* \mathcal{D}^{\mathrm{perf}, G, \mathcal{L}^{r-1}, \alpha^{r-1}}(S) \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что $\pi^* \mathcal{E}$ – это $(\mathcal{L}, \alpha)$ -эквивариантное расслоение на X , а $\mathcal{O}_{X/S}(-1)$ – его линейное $(\mathcal{L}, \alpha)$ -эквивариантное подрасслоение. Значит, расслоения $\mathcal{O}_{X/S}(k)$ являются скрученными $(\mathcal{L}, \alpha)^{-k}$ - G -эквивариантными расслоениями. Для всякого целого k , $0 \leq k \leq r-1$, рассмотрим строго полный функтор

$$\Psi_k = \mathcal{O}_{X/S}(k) \otimes \pi^*(-): \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{D}(X).$$

Этот функтор ядерный, соответствующее ядро – пучок $\mathcal{O}_{X/S}(k)$, сосредоточенный на графике отображения $\pi: X \rightarrow S$. При этом Ψ_k переводит совершенные

комплексы в совершенные комплексы, категория $\Psi_k(\mathcal{D}^{\text{perf}}(S))$ – это подкатегория $\mathcal{O}_{X/S}(k) \otimes \pi^* \mathcal{D}^{\text{perf}}(S)$ разложения (10.1). Пусть $\mathsf{T}_{G, \mathcal{L}^k, \alpha^k}$ и T_G – комонады на категориях $\mathcal{D}(S)$ и $\mathcal{D}(X)$ соответственно, связанные с действием G на S (скрученным на коцикл $(\mathcal{L}^k, \alpha^k)$) и на X (стандартным). Согласно предложению 8.4 функтор Ψ_k индуцирует строго полный функтор

$$\mathcal{D}^{\text{perf}, G, \mathcal{L}^k, \alpha^k}(S) \cong \mathcal{D}^{\text{perf}}(S)_{\mathsf{T}_{G, \mathcal{L}^k, \alpha^k}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)_{\mathsf{T}_G} \cong \mathcal{D}^{\text{perf}, G}(X),$$

образ которого – категория спуска $(\mathcal{O}_{X/S}(k) \otimes \pi^* \mathcal{D}^{\text{perf}}(S))_{\mathsf{T}_G}$. Для завершения доказательства остается заметить, что подкатегории $\mathcal{O}_{X/S}(k) \otimes \pi^* \mathcal{D}^{\text{perf}}(S)$ разложения (10.1) инвариантны относительно действия группы, и применить теорему 6.2 к разложению (10.1).

Второй пример – раздутие неособого инвариантного подмногообразия в неособом многообразии.

Пусть $Z \subset X$ – неособая подсхема коразмерности r неособой квазипроективной схемы над полем k , а $\sigma: \bar{X} \rightarrow X$ – раздутие X вдоль Z . Обозначим через $\bar{Z}$ прообраз Z относительно σ ; тогда $\bar{Z}$ – проективизация нормально-го расслоения $\mathcal{N}_{Z/X}$ на Z . Обозначим через σ_Z ограничение σ на $\bar{Z}$. Как и в предыдущем примере, исходное полуортогональное разложение для раздутия построено Д. О. Орловым в [12]:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\text{perf}}(\bar{X}) = \langle \mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(-r+1) \otimes \sigma_Z^* \mathcal{D}^{\text{perf}}(Z), \dots \\ \dots, \mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(-1) \otimes \sigma_Z^* \mathcal{D}^{\text{perf}}(Z), \sigma^* \mathcal{D}^{\text{perf}}(X) \rangle. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Пусть линейно редуктивная групповая схема G конечного типа над k действует на схеме X так, что подсхема Z инвариантна.

ТЕОРЕМА 10.2. *В сделанных предположениях имеет место полуортогональное разложение*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\text{perf}, G}(\bar{X}) = \langle \mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(-r+1) \otimes \sigma_Z^* \mathcal{D}^{\text{perf}, G}(Z), \dots \\ \dots, \mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(-1) \otimes \sigma_Z^* \mathcal{D}^{\text{perf}, G}(Z), \sigma^* \mathcal{D}^{\text{perf}, G}(X) \rangle, \end{aligned}$$

в котором компоненты $\mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(-i) \otimes \sigma_Z^* \mathcal{D}^{\text{perf}, G}(Z)$ эквивалентны категории $\mathcal{D}^{\text{perf}, G}(Z)$, а компонента $\sigma^* \mathcal{D}^{\text{perf}, G}(X)$ – категории $\mathcal{D}^{\text{perf}, G}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем набросок доказательства, подробности могут быть легко восстановлены по аналогии с доказательством теоремы 10.1.

Компонента $\sigma^* \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ разложения (10.2) есть образ строго полного функтора

$$\sigma^*: \mathcal{D}^{\text{perf}}(X) \rightarrow \mathcal{D}^{\text{perf}}(\bar{X}).$$

Этот функтор согласован с действием G на X и $\bar{X}$, следовательно, подкатегория $\sigma^* \mathcal{D}^{\text{perf}}(X) \subset \mathcal{D}^{\text{perf}}(\bar{X})$ сохраняется действием и соответствующая ей компонента полуортогонального разложения $\mathcal{D}^{\text{perf}, G}(\bar{X})$ эквивалентна $\mathcal{D}^{\text{perf}, G}(X)$.

Аналогично, компонента $\mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(-i) \otimes \sigma_Z^* \mathcal{D}^{\text{perf}}(Z)$ разложения (10.2) есть образ строго полного функтора

$$\Psi_i = j_*(\mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(-i) \otimes \sigma_Z^*(-)): \mathcal{D}^{\text{perf}}(Z) \rightarrow \mathcal{D}^{\text{perf}}(\bar{X}),$$

где j обозначает вложение $\overline{Z}$ в $\overline{X}$. Нормальное расслоение $\mathcal{N}_{Z/X}$ эквивариантно на Z , следовательно, и расслоения $\mathcal{O}_{\overline{Z}/Z}(i)$ на $\overline{Z}$ также эквивариантны. Функторы Ψ_i согласованы с действием G на Z и $\overline{X}$, значит, компоненты $\mathcal{O}_{\overline{Z}/Z}(-i) \otimes \sigma_Z^* \mathcal{D}^{\text{perf}}(Z)$ разложения (10.2) сохраняются действием, а компоненты $\mathcal{O}_{\overline{Z}/Z}(-i) \otimes \sigma_Z^* \mathcal{D}^{\text{perf}, G}(Z)$ эквивалентны категории $\mathcal{D}^{\text{perf}, G}(Z)$.

Список литературы

- [1] А. Д. Елагин, “Полуортогональные разложения для производных категорий эквивариантных когерентных пучков”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:5 (2009), 37–66; англ. пер.: A. D. Elagin, “Semiorthogonal decompositions of derived categories of equivariant coherent sheaves”, *Izv. Math.*, **73**:5 (2009), 893–920.
- [2] A. I. Bondal, M. Van den Bergh, “Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry”, *Mosc. Math. J.*, **3**:1 (2003), 1–36.
- [3] N. Spaltenstein, “Resolutions of unbounded complexes”, *Compositio Math.*, **65**:2 (1988), 121–154.
- [4] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **39**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [5] M. Kashiwara, P. Shapira, *Categories and sheaves*, *Grundlehren Math. Wiss.*, **332**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [6] M. Barr, Ch. Wells, “Toposes, triples and theories”, *Repr. Theory Appl. Categ.*, **12** (2005), 1–288.
- [7] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, Физматлит, М., 2004; пер. с англ.: S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, *Grad. Texts in Math.*, **5**, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [8] А. Д. Елагин, “Когомологическая теория спуска для морфизма стеков и для эквивариантных производных категорий”, *Матем. сб.*, **202**:4 (2011), 31–64; англ. пер.: A. D. Elagin, “Cohomological descent theory for a morphism of stacks and for equivariant derived categories”, *Sb. Math.*, **202**:4 (2011), 495–526.
- [9] D. Mumford, J. Fogarty, *Geometric invariant theory*, **34**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1982.
- [10] A. Kuznetsov, “Base change for semiorthogonal decompositions”, *Compos. Math.*, **147**:3 (2011), 852–876.
- [11] А. Д. Елагин, “Об эквивариантной производной категории расслоений на проективные пространства”, *Многомерная алгебраическая геометрия*, Сборник статей. Посвящается памяти члена-корреспондента РАН Василия Алексеевича Исковских, Тр. МИАН, **264**, МАИК, М., 2009, 63–68; англ. пер.: A. D. Elagin, “Equivariant derived category of bundles of projective spaces”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **264**:1 (2009), 56–61.
- [12] Д. О. Орлов, “Проективные расслоения, моноидальные преобразования и производные категории когерентных пучков”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:4 (1992), 852–862; англ. пер.: D. O. Orlov, “Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **41**:1 (1993), 133–141.

А. Д. Елагин (A. D. Elagin)

Институт проблем передачи информации

им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва;

Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”, г. Москва

E-mail: alexelagin@rambler.ru

Поступила в редакцию

15.09.2010 и 12.08.2011