Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. К. Водопьянов, О регулярности отображений, обратных к соболевским, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 10, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7792>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 03:47:30

УДК 517.518.23+517.548.2

С. К. Водопьянов

О регулярности отображений, обратных к соболевским

Исследуются необходимые и достаточные условия на гомеоморфизмы $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ евклидовых областей в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, гарантирующие принадлежность обратного отображения классу Соболева. Полученный результат применяется для описания новой двухиндексной шкалы гомеоморфизмов класса Соболева, обратные к которым также образуют двухиндексную шкалу отображений другого класса Соболева. В эту шкалу входят квазиконформные отображения, а также гомеоморфизмы класса Соболева W_{n-1}^1 , для которых $\text{rank } D\varphi(x) \leq n - 2$ почти всюду на множестве нулей якобиана $\det D\varphi(x)$.

Библиография: 65 названий.

Ключевые слова: класс отображений Соболева, аппроксимативная дифференцируемость, искажение и коискажение отображения, обобщенное квазиконформное отображение, оператор композиции.

§ 1. Введение

1.1. Важной в классическом анализе является задача об описании свойств регулярности обратного отображения, если известны свойства регулярности прямого. Например, из теоремы об обратном отображении можно вывести следующее утверждение: *если гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, областей пространства $\mathbb{R}^n$ имеет в Ω непрерывные первые производные и ненулевой якобиан, то обратный гомеоморфизм тоже непрерывно дифференцируем и имеет ненулевой якобиан.*

1.2. Другой пример также хорошо известен: *гомеоморфизм, обратный к квазиконформному гомеоморфизму $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, также квазиконформен*, см., например, [1], [2]. Это означает следующее: *гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, класса Соболева $W_{n,\text{loc}}^1(\Omega)$, удовлетворяющий условию*

$$|D\varphi(x)|^n \leq K |\det D\varphi(x)| \quad (1.1)$$

для почти всех $x \in \Omega$ с некоторой постоянной K , не зависящей от $x \in \Omega$, имеет обратный, принадлежащий $W_{n,\text{loc}}^1(\Omega')$ и такой, что

$$|D\varphi^{-1}(y)|^n \leq K' |\det D\varphi^{-1}(y)|$$

для почти всех $y \in \Omega'$, где постоянная K' выражается через K . (Здесь $D\varphi(x)$ – матрица $\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\}$, $i, j = 1, \dots, n$, а $|D\varphi(x)|$ – ее норма.)

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-01-00662 и № 11-01-00819) и Программы поддержки ведущих научных школ Президента РФ (грант № НШ-921.2012.1).

1.3. Отметим еще следующее свойство, вытекающее из предыдущего: если гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, класса Соболева $W_{1,\text{loc}}^1(\Omega)$ удовлетворяет условиям

$$|D\varphi(x)| \leq L, \quad 0 < \alpha \leq |\det D\varphi(x)| \quad (1.2)$$

для почти всех $x \in \Omega$ с некоторыми постоянными L и α , не зависящими от $x \in \Omega$, то обратный имеет те же самые свойства: $\varphi^{-1} \in W_{1,\text{loc}}^1(\Omega')$, $|D\varphi^{-1}(y)| \leq L'$ и $0 < \alpha' \leq |\det D\varphi^{-1}(y)|$ для почти всех $y \in \Omega'$, где постоянные L' и α' выражаются через L и α . Действительно, из неравенства Адамара имеем

$$0 < \alpha \leq |\det D\varphi(x)| \leq |D\varphi(x)|^n \leq L^n.$$

Отсюда вытекает, что отображение φ квазиконформное, так как

$$|D\varphi(x)|^n \leq \frac{L^n}{\alpha} |\det D\varphi(x)|.$$

Следовательно, обратное к нему тоже квазиконформное. Таким образом, для $y = \varphi(x)$ мы одновременно имеем

$$0 < \frac{1}{L^n} \leq |\det D\varphi^{-1}(y)| = \frac{1}{|\det D\varphi(x)|} \leq \frac{1}{\alpha},$$

$$\text{откуда } |D\varphi^{-1}(y)|^n \leq L' |\det D\varphi^{-1}(y)| \leq \frac{L'}{\alpha} \quad \text{для почти всех } x \in \Omega.$$

Отображения, обладающие сформулированными в п. 1.3 свойствами, называются *квазиизометрическими гомеоморфизмами* или *квазиизометриями*.

1.4. Еще С. Л. Соболевым [3] было отмечено, что квазиизометрии евклидовых областей класса C^1 индуцируют изоморфизмы пространств Соболева с первыми обобщенными производными по правилу замены переменной: если $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – C^1 -диффеоморфизм и квазиизометрия одновременно, то оператор переноса $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, где $f \in L_p^1(\Omega')$, является ограниченным изоморфизмом

$$\varphi^*: L_p^1(\Omega') \rightarrow L_p^1(\Omega), \quad p \in [1, \infty].$$

В конце работы [3] С. Л. Соболев замечает: “Весьма вероятно, что квазиизометрии – это все преобразования, сохраняющие L_p^1 . Доказательство этого автору не известно”.

Частичная справедливость высказанного С. Л. Соболевым предположения вытекает из одного результата, установленного В. Г. Мазьей в его кандидатской диссертации [4]: C^1 -диффеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ индуцирует ограниченный оператор

$$\varphi^*: L_p^1(\Omega') \rightarrow L_p^1(\Omega), \quad p \in [1, \infty),$$

по правилу замены переменной тогда и только тогда, когда

$$|D\varphi(x)|^p \leq K |\det D\varphi(x)| \quad \text{для всех } x \in \Omega. \quad (1.3)$$

Из вышесказанного выводим, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — C^1 -диффеоморфизм. Оператор переноса $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, где $f \in L_p^1(\Omega')$, является ограниченным изоморфизмом

$$\varphi^*: L_p^1(\Omega') \rightarrow L_p^1(\Omega), \quad p \in [1, \infty],$$

тогда и только тогда, когда C^1 -диффеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ является квазиизометрией при $p \neq n$ и квазиконформным гомеоморфизмом при $p = n$.

Таким образом, гипотеза Соболева не подтверждается только при $p = n$, где допустимыми заменами переменных являются квазиконформные отображения и только они, см. ниже теорему 1.

Предложение 1 является следствием того, что если при $p \neq n$ условие (1.3) выполняется как для прямого отображения, так и для обратного, то отображение будет удовлетворять также и условию (1.2) (это устанавливается с помощью неравенства Адамара).

Из работы Ф. Геринга [5] можно вывести, что сформулированный результат распространяется и на категорию гомеоморфизмов: гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, индуцирует ограниченный изоморфизм $\varphi^*: L_p^1(\Omega') \rightarrow L_p^1(\Omega)$ пространств Соболева тогда и только тогда, когда он квазиизометричен при $p \neq n$ (квазиконформен при $p = n$).

В работах [6] при $p = n$, [7] при $p > n$, [8] при $p \in (n - 1, n)$ и [9] при $p \in [1, \infty) \setminus \{n\}$ получен результат, содержащий в качестве частного случая все предыдущие.

ТЕОРЕМА 1. Измеримое отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, индуцирует изоморфизм $\varphi^*: L_p^1(\Omega') \rightarrow L_p^1(\Omega)$ пространств Соболева тогда и только тогда, когда оно может быть переопределено на множестве нулевой меры так, чтобы быть квазиизометрическим отображением из Ω в $\mathbb{R}^n$ при $p \neq n$ (квазиконформным¹ отображением из Ω в $\overline{\mathbb{R}^n}$ при $p = n$).

Примечательно, что проблема Решетняка о квазиконформной эквивалентности областей по данным на них пространствам Соболева L_n^1 , частичное решение которой сформулировано в последнем результате, была мотивирована исследованиями из несколько другой области: предложенный в [6] подход к задаче естественно рассматривать в контексте предшествующих этому результатов, см., например, [11; гл. IV, § 16]. В теоремах Банаха, Стоуна, Гельфанда и Колмогорова, Эйленберга, Аренса и Келли, Хьюита получены условия на различные структуры пространства непрерывных функций $C(S)$, изоморфизм которых определяет топологическое пространство S с точностью до гомеоморфизма. Отметим здесь результат Стоуна, согласно которому $C(S)$ как структурно упорядоченная группа определяет S . С другой стороны, М. Накаи [12] и Л. Льюис [13] установили, что изоморфность алгебр Ройдена равносильна квазиконформной эквивалентности областей определения. Выделяя теперь

¹В работе [6] теорема 1 установлена при условии, что $p = n$ и область Ω' ограничена. С помощью методов работы [10] этот результат можно доказать и для произвольных областей $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$.

в однородном пространстве Соболева L_n^1 две структуры: векторной решетки и полунормированного пространства, мы получаем ситуацию, в алгебраическом смысле близкую к работе Стоуна, а в метрическом – к работе Льюиса. Такой взгляд на задачу является наиболее естественным, так как все еще дает возможность восстановить отображение, несмотря на минимум “материала” для его нахождения, доказать его непрерывность и установить его метрические свойства.

1.5. В серии работ [14]–[17] было доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, индуцирует ограниченный оператор $\varphi^*: L_p^1(\Omega') \rightarrow L_p^1(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, пространств Соболева тогда и только тогда, когда $\varphi \in W_{p, \text{loc}}^1(\Omega)$ и существует постоянная $K < \infty$ такая, что*

$$|D\varphi(x)|^p \leq K |\det D\varphi(x)| \quad \text{для почти всех } x \in \Omega. \quad (1.4)$$

Принципиально новым сравнительно с условием (1.3) для C^1 -диффеоморфизмов является условие *конечного искажения*²: частные производные отображения $\varphi \in W_{p, \text{loc}}^1(\Omega)$ с условием (1.4) обращаются в нуль почти всюду на множестве нулей якобиана.

В работах [21], [22] была предпринята попытка³ описания гомеоморфизмов $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, индуцирующих ограниченные операторы $\varphi^*: L_p^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega)$, $1 \leq q < p < \infty$ (см. точную формулировку в доказываемой ниже теореме 5). В [21; предложение 1] сформулировано свойство конечной аддитивности некоторой функции множества, определенной на открытых множествах области значений (см. доказательство в [22; лемма 1]). Идея использования такой функции множества к описанию ограниченных операторов, индуцированных гомеоморфизмами областей, заимствована из работ [23], [24], где она применялась при исследовании аналогичных задач квазиконформного анализа. Производная Лебега [25] этой функции применяется для локального описания свойства обобщенной квазиконформности исследуемых гомеоморфизмов.

В статьях [21], [22] методами квазиконформного анализа работы [24] (см. также [26]) исследовался еще вопрос об аналитических свойствах гомеоморфизма $\psi: \Omega' \rightarrow \Omega$, обратный φ к которому индуцирует ограниченный оператор $\varphi^*: L_p^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega)$, $n \leq q \leq p < \infty$. Полученные свойства гомеоморфизма ψ обеспечивают ограниченность оператора $\psi^*: L_{q/(q-n+1)}^1(\Omega) \rightarrow L_{p/(p-n+1)}^1(\Omega')$. Окончательные результаты в этом направлении методами геометрической теории меры установлены ниже в теоремах 4–6 и предложении 5 при $n-1 \leq q \leq p \leq \infty$.

²Свойство отображений класса $W_{n, \text{loc}}^1(\Omega)$ с условием конечного искажения впервые изучены в работах [18], [19], а название этого класса отображений значительно позже было предложено авторами работ [20].

³К сожалению, результаты работы [21] нельзя считать строго установленными, так как доказательство предложения 1 этой работы содержит существенный пробел. Этот дефект удалось устранить только в работе [22]. Тем не менее, работа [22] наследовала еще два пробела работы [21], которые устраняются в доказательствах теорем 4–6.

Новая задача возникает в том случае, когда мы хотим описать аналитические свойства измеримого отображения $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, индуцирующего ограниченный оператор $\varphi^*: L_p^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega)$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$, пространств Соболева. Типичная задача работ [27]–[29] состоит в нахождении необходимых и достаточных условий на измеримое отображение φ , которое в них не предполагается гомеоморфным (в отличие от работ [14]–[17], [21], [22]), такое, что φ индуцирует по правилу замены переменной ограниченный оператор φ^* пространства Соболева L_p^1 в L_q^1 при $1 \leq q \leq p < \infty$. Примечательно, что решение этой более общей задачи оказалось полезным при решении давно стоявшей проблемы о свойствах измеримого отображения, индуцирующего изоморфизм пространств Соболева $W_p^1(\Omega)$: в [9] доказано, что такое измеримое отображение можно переопределить на множестве нулевой меры так, чтобы оно стало квазиизометрическим при $p \neq n$ (см. теорему 1). Решение этой задачи при $1 \leq p \leq n - 1$ не было известно более 30 лет за исключением случаев, когда областью определения является все пространство $\mathbb{R}^n$, а $p > 1$ [30]. Принципиально новым в работах [27]–[29] является аналитическая формула для функции искажения. Понятно, что в том случае, когда отображение гомеоморфно, из результатов работ [27]–[29] можно получить непосредственно результаты работ [21], [22].

1.6. В связи с задачами нелинейной теории упругости Дж. Болл [31], [32] определил классы отображений

$$\mathcal{A}_{p,q}(\Omega) = \{f \in W_p^1(\Omega) : \text{adj } Df \in L_q\},$$

где $p \geq n - 1$ и $q \geq p/(p - 1)$, а матрица $\text{adj } Df$, называемая *присоединенной*⁴ к Df , обладает тем свойством, что $Df(x) \text{adj } Df(x) = J(x, f) \text{Id}$ для почти всех x (здесь и далее $J(x, f) = \det Df(x)$ – якобиан отображения f в точке x). Таким образом, $J(x, f) \in L_1(\Omega)$, если $f \in \mathcal{A}_{p,q}$. Заметим, что условие на присоединенную матрицу в определении класса $\mathcal{A}_{p,q}(\Omega)$ – это фактически условие на обратное отображение, хотя обратное отображение нигде в определении явно не участвует. В ряде работ последних лет (см., например, [33]–[39]) найдены условия на искажающую функцию

$$H(x) = \begin{cases} \frac{|Df(x)|^n}{J(x, f)} < \infty, & \text{если } J(x, f) > 0, \\ 1, & \text{если } J(x, f) = 0, \end{cases}$$

гарантирующие, что отображения специфических подклассов в $\mathcal{A}_{p,q}(\Omega)$ при некоторых ограничениях наследуют основные свойства отображений с ограниченным искажением [40].

1.7. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы для гомеоморфизмов φ классов Соболева с первыми обобщенными производными найти оптимальные геометрические ограничения, обеспечивающие регулярность обратного отображения. Эти геометрические ограничения на φ выражаются через норму

⁴Присоединенной к $(n \times n)$ -матрице A называется $(n \times n)$ -матрица $\text{adj } A$, составленная из алгебраических дополнений для соответствующих элементов транспонированной матрицы.

присоединенной матрицы дифференциала $D\varphi(x)$ прямого отображения и его якобиан. Например, для отображения φ мы требуем выполнения равенства $\text{adj } D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве Z нулей якобиана (это требование называется здесь условием *конечного коискажения*, см. [41], [42]) и выполнения некоторых соотношений между нормой присоединенной матрицы и модулем якобиана.

Ограничения на прямое отображение таковы, что из них можно вывести и условия регулярности для обратного отображения (т.е. принадлежность обратного классу Соболева и некоторые условия на его функцию искажения, которая выражается через норму дифференциала обратного отображения и его дифференциал).

Заметим, что во всех предшествующих работах по этой проблематике требуется $D\varphi(x) = 0$ почти всюду на Z (известное как условие *конечности искажения*) и выполнение некоторых соотношений между нормой матрицы Якоби и модулем якобиана, (см., например, [22] и доклад П. Коскелы [43], где приведена библиография по данной проблематике).

В § 2, теорема 2, получены достаточно общие геометрически-аналитические условия на отображение, близкие к необходимым, гарантирующие принадлежность обратного отображения классу Соболева. Далее, в § 3 мы вводим две различные функции искажения: первая для прямого отображения, а вторая – для обратного, и устанавливаем новую теорему 3, в которой свойства регулярности обратного отображения и ограничения на вторую функцию искажения выражаются через свойства регулярности прямого отображения, принадлежащего классу Соболева, и ограничения на первую функцию искажения. Там же приводится пример, демонстрирующий, что класс отображений, удовлетворяющий условиям теоремы 3, не пуст. Кроме того, мы приводим следствия из теоремы 3, в частности, показываем как из нее вывести некоторые результаты предшествующих работ. В § 4 мы приводим условия, в которых описывается “обратимость” оператора композиции соболевских пространств (результаты § 4 существенно дополняют результаты и восполняют два пробела работы [22]).

Дополнительная мотивация для исследуемых в работе отображений классов Соболева с конечным коискажением может быть найдена в [42].

Приведенная здесь история вопроса и библиография не претендуют на полноту. Далее в настоящей работе приводится сравнительный анализ полученных здесь результатов с работами, опубликованными ранее.

§ 2. Аппроксимативная дифференцируемость и обобщенные производные в смысле Соболева

2.1. Аппроксимативная дифференцируемость. Мы изучаем здесь свойства гомеоморфизмов $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ евклидовых областей в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, гарантирующие принадлежность обратного отображения $\varphi^{-1} = \psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ классу Соболева. Введем необходимые обозначения. Если $x = \sum_{l=1}^n x_l e_l$, $\{e_l\}$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, а Pr_i – проекция вдоль i -ой оси: $\text{Pr}_i(x) = x - x_i e_i$, то ψ принадлежит классу ACL тогда и только тогда, когда

для $\mathcal{H}^{n-1}$ -почти всех $z \in \text{Pr}_i(\Omega')$ отображение $\psi: \text{Pr}_i^{-1}(z) \cap \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывно на каждом отрезке $[a, b] \subset \text{Pr}_i^{-1}(z) \cap \Omega'$, $i = 1, \dots, n$ (символ $\mathcal{H}^s$ обозначает s -мерную меру Хаусдорфа). Известно, что отображение $\psi \in \text{ACL}$ имеет частные производные $\frac{\partial \psi}{\partial y_i}(y)$ для $\mathcal{H}^n$ -почти всех $y \in \Omega'$. Тогда для $\mathcal{H}^n$ -почти всех $y \in \Omega'$ определена его матрица Якоби $D\psi(y) = \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial y_i}(y) \right)$, $k, i = 1, \dots, n$.

Далее мы рассматриваем отображения $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, аппроксимативно дифференцируемые почти всюду в Ω . Напомним, что отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *аппроксимативно дифференцируемым* в точке $x \in \Omega$ [44]–[48], если существует линейное отображение $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^n(\{y \in B(x, r) : |\varphi(y) - \varphi(x) - L(y - x)| > \varepsilon\})}{r^n} = 0 \quad (2.1)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Напомним, что аппроксимативный дифференциал единствен [47; раздел 3.1.2]. Известно [44], [45], [47; теорема 3.1.4], что всякое непрерывное отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ класса ACL аппроксимативно дифференцируемо почти всюду в Ω .

Аппроксимативный дифференциал в точке $x \in \Omega$ мы обозначаем символом $D\varphi(x)$ (или $\text{ap } Df(x)$), а символом $\text{adj } D\varphi(x)$ – присоединенную матрицу, определяемую из условия $A \text{adj } A = \det A \cdot \text{Id}$, если определитель $(n \times n)$ -матрицы A отличен от нуля, и по непрерывности в топологии $\mathbb{R}^{n \times n}$ в остальных случаях (это определение эквивалентно приведенному выше).

Аппроксимативно дифференцируемый гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ имеет *конечное искажение* (*коискажение*), если $D\varphi(x) = 0$ ($\text{adj } D\varphi(x) = 0$) для почти всех точек множества $\{x \in \Omega : \det D\varphi(x) = 0\}$.

2.2. Аддитивная функция множества. Всякому гомеоморфизму $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ соответствует вполне аддитивная функция множества Φ , определенная на σ -алгебре борелевских множеств $A \subset \Omega$ по правилу $\Phi(A) = \mathcal{H}^n(\varphi(A))$. Для почти всех $x \in \Omega$ существует (см., например, [25], [29], [47]) производная Лебега этой функции

$$\Phi'(x) = \lim_{r \rightarrow 0, B(y, r) \ni x} \frac{\Phi(B(y, r))}{|B(y, r)|}.$$

При этом найдется борелевское множество $\Sigma \subset \Omega$ нулевой меры (называемое множеством сингулярности, $\Phi(\Sigma) > 0$), вне которого функция Φ абсолютно непрерывна. В частности, $\Phi(A) = 0$, если множество $A \subset \Omega \setminus \Sigma$ имеет нулевую $\mathcal{H}^n$ -меру.

Рассмотрим еще борелевское множество

$$Z \supset \{x \in \Omega \setminus \Sigma : \Phi'(x) = 0\} \quad (2.2)$$

такое, что

$$\mathcal{H}^n(Z) = \mathcal{H}^n(\{x \in \Omega \setminus \Sigma : \Phi'(x) = 0\}).$$

Очевидно, что для обратного отображения $\psi = \varphi^{-1}$ можно определить функцию множества $\Psi(T) = \mathcal{H}^n(\psi(T))$, где $T \subset \Omega'$ – борелевское множество. Для

этой функции множества аналогично предыдущему определяются множество сингулярности $\Sigma' \subset \Omega'$ и множество нулей якобиана $Z' \supset \{y \in \Omega' : \Psi'(y) = 0\}$, для которых $\mathcal{H}^n(Z') = 0$ и $\mathcal{H}^n(Z') = \mathcal{H}^n(\{y \in \Omega' : \Psi'(y) = 0\})$. Оба эти множества борелевские.

Следовательно, мы получаем разложения областей Ω и Ω' на дизъюнктные борелевские множества

$$\Omega = (\Omega \setminus (Z \cup \Sigma)) \cup Z \cup \Sigma, \quad (2.3)$$

$$\Omega' = (\Omega' \setminus (Z' \cup \Sigma')) \cup Z' \cup \Sigma'. \quad (2.4)$$

Заметим, что обратное отображение ψ обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина на $\Omega' \setminus \Sigma'$: $\mathcal{H}^n(\psi(B)) = 0$, если $B \subset \Omega' \setminus \Sigma'$ – множество нулевой $\mathcal{H}^n$ -меры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Множества $Z, \Sigma \subset \Omega$ и $Z', \Sigma' \subset \Omega'$ можно выбрать такими, что $\Sigma' = \varphi(Z)$ и $Z' = \varphi(\Sigma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $\varphi(Z)$ имеет нулевую меру, так как

$$\mathcal{H}^n(\varphi(Z)) = \int_Z \Phi'(x) dx = 0.$$

Таким образом, можно считать, что $\varphi(Z) \subset \Sigma'$. Тогда для множества $\Sigma'' = \Sigma' \setminus \varphi(Z)$ нулевой меры имеем

$$\int_{\varphi^{-1}(\Sigma'')} \Phi'(x) dx = \Phi(\varphi^{-1}(\Sigma'')) = \mathcal{H}^n(\Sigma'') = 0.$$

Отсюда выводим, что $\Phi'(x) = 0$ для почти всех $x \in \varphi^{-1}(\Sigma'')$. Следовательно, $\varphi^{-1}(\Sigma'') \subset Z$ с точностью до множества нулевой меры. Возьмем теперь в качестве множества Z борелевское множество, содержащее Z и имеющее ту же самую меру $\mathcal{H}^n(Z)$, а в качестве Σ' – борелевское множество $\varphi(Z)$.

Рассуждения для множеств Σ и Z' проводятся аналогично.

Таким образом, разложения (2.3) и (2.4), удовлетворяющие заключениям предложения 3, установлены.

Пусть $\text{pr}_j(x) = x_j$, $x \in \mathbb{R}^n$, – проекция на j -ю координатную ось. Гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ обладает свойством Лузина на гиперповерхностях, кратко $\varphi \in \text{LPHP}$, если для $\mathcal{H}^1$ -почти всех $x_j \in \text{pr}_j(\Omega)$ отображение

$$\text{Pr}_i \circ \varphi: \text{pr}_j^{-1}(x_j) \cap \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина относительно $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа, $i, j = 1, \dots, n$.

2.3. Связь между аппроксимативной дифференцируемостью и аддитивной функцией множества. Пусть гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ аппроксимативно дифференцируем. Заметим, что $|\det D\varphi(x)| = \Phi'(x)$ почти всюду в Ω . Это равенство вытекает из соотношений⁵

$$\int_A |\det D\varphi(x)| dx = |\varphi(A)| = \Phi(A) = \int_A \Phi'(x) dx, \quad (2.5)$$

⁵Доказательство левой (правой) части формулы (2.5) см., например, в [49] (соответственно [29]).

справедливых для любого борелевского множества $A \subset \Omega \setminus \Sigma$, поскольку на множестве $\Omega \setminus \Sigma$ функция множества Φ абсолютно непрерывна.

Поэтому множества $\{x \in \Omega : \det D\varphi(x) = 0\}$ и $\{x \in \Omega : \Phi'(x) = 0\}$ отличаются на множество нулевой $\mathcal{H}^n$ -меры.

Далее символом Z обозначается и борелевское множество из (2.2), совпадающее почти всюду с $\{x \in \Omega : \Phi'(x) = 0\}$, и множество $\{x \in \Omega : \det D\varphi(x) = 0\}$ нулей якобиана.

2.4. Один из основных результатов работы составляет следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ обладает следующими свойствами:

- 1) φ аппроксимативно дифференцируем почти всюду;
- 2) $\text{adj } D\varphi \in L_1$;
- 3) отображение φ имеет конечное коискажение: $\text{adj } D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве $Z = \{x \in \Omega : \det D\varphi(x) = 0\}$;
- 4) $\varphi \in \text{LPHR}$.

Тогда обратное отображение $\varphi^{-1}: \Omega' \rightarrow \Omega$

- 5) принадлежит классу ACL;
- 6) $D\varphi^{-1} \in L_1(\Omega')$;
- 7) φ^{-1} имеет конечное искажение.

С другой стороны, если обратное к гомеоморфизму $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ отображение имеет свойства 5)–7), а гомеоморфизм φ аппроксимативно дифференцируем на множестве Z (см. (2.2)), то φ обладает свойствами 1)–4).

Сформулированную теорему и приводимое ниже доказательство можно рассматривать как “несоболевское” обобщение работы [50], поскольку мы не требуем, чтобы исходное отображение принадлежало классу Соболева.

2.5. Докажем используемое в работе альтернативное теореме Банаха–Зарецкого (см., например, [51]) описание абсолютно непрерывных функций.

ЛЕММА 1. Пусть функция $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, $[a, b] = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, где A и B – борелевские множества такие, что

- 1) $\mathcal{H}^1(\psi(B)) = 0$ и функция $\psi: A \rightarrow \mathbb{R}$ обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина на множестве A : $\mathcal{H}^1(\psi(E)) = 0$ для любого множества $E \subset A$ нулевой $\mathcal{H}^1$ -меры;
- 2) $\psi(t)$ имеет аппроксимативную производную $\text{ap } \psi'(t)$ почти всюду на A ;
- 3) $\text{ap } \psi' \in L_1(A)$.

Тогда функция $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна, а ее обычная производная

$$\psi'(t) = \begin{cases} \text{ap } \psi'(t) & \text{для почти всех } t \in A, \\ 0 & \text{для почти всех } t \in B. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий теоремы выводим, что ψ обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина на всем отрезке $[a, b]$. Для доказательства абсолютной непрерывности функции ψ фиксируем произвольный отрезок $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ и заметим, что

$$\psi([\alpha, \beta] \setminus B) \subset \psi([\alpha, \beta]) \subset \psi([\alpha, \beta] \setminus B) \cup \psi(B).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\psi(\beta) - \psi(\alpha)| &\leq \mathcal{H}^1(\psi([\alpha, \beta])) = \mathcal{H}^1(\psi([\alpha, \beta] \setminus B)) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} N(\psi, [\alpha, \beta] \setminus B, x) dx = \int_{[\alpha, \beta] \setminus B} |\operatorname{ap} \psi'(t)| dt = \int_{[\alpha, \beta]} |g(t)| dt, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $g(t) = \operatorname{ap} \psi'(t)$, если $t \in [\alpha, \beta] \setminus B$, и $g(t) = 0$, если $y \in B$, а

$$N(\psi, [\alpha, \beta] \setminus B, x) = \#\{t \in [\alpha, \beta] \setminus B : \psi(t) = x\}$$

– индикатриса Банаха (т.е. число прообразов точки x). Используемая в (2.6) формула замены переменной может быть получена как следствие известных результатов: с одной стороны, из [46] заключаем, что с точностью до множества $E \subset A$ нулевой меры множество A можно представить как объединение дизъюнктивных множеств A_i , на каждом из которых функция ψ липшицева. С другой стороны, для каждого такого множества A_i справедлива [47; теорема 3.2.3] формула замены переменной

$$\int_{\mathbb{R}} N(\psi, A_i, x) dx = \int_{A_i} |\operatorname{ap} \psi'(t)| dt.$$

Остается лишь просуммировать полученное равенство по i и воспользоваться $\mathcal{N}$ -свойством Лузина $\mathcal{H}^1(\psi(E)) = 0$, равенствами $\sum_i N(\psi, A_i, x) = N(\psi, A, x)$ почти всюду и

$$\sum_i \int_{A_i} |\operatorname{ap} \psi'(t)| dt = \int_A |\operatorname{ap} \psi'(t)| dt.$$

Так как $g \in L_1([a, b])$, то функция ψ абсолютно непрерывна на $[a, b]$. Более того, ее производная $\psi'(t)$ совпадает с функцией $g(t)$ почти всюду.

2.6. Доказательство теоремы 2. Покажем, как из условий 1)–4) теоремы получить утверждения 5)–7).

Напомним, что символом Σ мы обозначаем борелевское множество нулевой меры, на котором функция множества Φ принимает положительное значение, так что вместо равенства (2.5) мы имеем неравенство

$$0 = \int_{\Sigma} |\det \varphi'(x)| dx < |\varphi(\Sigma)|.$$

Дополнение $\Omega \setminus \Sigma$ можно разложить на счетную совокупность дизъюнктивных измеримых множеств F_k , $k \in \mathbb{N}$, таких, что $\bigcup_k F_k = \Omega \setminus \Sigma$ и отображение $\varphi: F_k \rightarrow \Omega'$ липшицево для всех $k \in \mathbb{N}$ [46]. Каждое множество $F_k \setminus Z$ представимо в виде объединения счетной совокупности дизъюнктивных измеримых множеств F_{km} , $m \in \mathbb{N}$, таких, что отображение $\varphi: F_{km} \rightarrow \Omega'$ билипшицево для всех $m \in \mathbb{N}$ [47; лемма 3.2]. Множества F_{km} можно считать состоящими только из точек дифференцируемости отображения $\varphi: F_{km} \rightarrow \Omega'$ и точек плотности 1 (такowymi являются почти все точки множества F_{km} ; подмножество, на котором эти два свойства не выполняются, можно считать борелевским множеством, оно имеет нулевую меру и его можно включить в Σ , изменив и

множество Z' в соответствии с предложением 3). Переобозначим теперь совокупность дизъюнктивных множеств $\{F_{km}\}$ как $\{E_l\}$. Таким образом, имеем дизъюнктивное разложение

$$\Omega = \Sigma \cup Z \cup \bigcup_{l \in \mathbb{N}} E_l. \quad (2.7)$$

Разложению (2.7) соответствует разложение

$$\Omega' = Z' \cup \Sigma' \cup \bigcup_{l \in \mathbb{N}} E'_l,$$

где $Z' = \varphi(\Sigma)$, $E'_l = \varphi(E_l)$, а $\Sigma' = \varphi(Z)$ и при этом $\mathcal{H}^n(\Sigma') = 0$. Заметим, что обратное отображение $\varphi^{-1} = \psi$ также билипшицево на каждом из множеств E'_l , $l \in \mathbb{N}$. Поэтому отображение $\psi: E'_l \rightarrow \Omega$ дифференцируемо в каждой точке множества E'_l , поскольку $\varphi: E_l \rightarrow \Omega'$ дифференцируемо во всех точках и его дифференциал невырожден, а обратное отображение $\psi: E'_l \rightarrow E_l$ непрерывно. Более того, его дифференциал в точке $y \in E'_l$ будет обратным к дифференциалу $D\varphi(x)$, $x = \psi(y)$.

Отсюда и из свойств множеств E_l вытекает, что отображение

$$\psi: \Omega' \setminus (Z' \cup \Sigma') \rightarrow \Omega$$

аппроксимативно дифференцируемо во всех точках области определения. Обозначим символом $\text{ар } D\psi(y)$ его аппроксимативный дифференциал. На основании вышесказанного для всех $y \in \Omega' \setminus (Z' \cup \Sigma')$ матрица $\text{ар } D\psi(y)$ аппроксимативных частных производных отображения ψ является обратной к матрице $D\varphi(x)$, где $x = \psi(y)$. Поэтому, применяя формулу замены переменной, получаем интегрируемость $|\text{ар } D\psi(y)|$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega' \setminus (Z' \cup \Sigma')} |\text{ар } D\psi(y)| dy &= \int_{\Omega' \setminus (Z' \cup \Sigma')} \frac{|\text{adj } D\varphi(\varphi^{-1}(y))|}{|J(\varphi^{-1}(y)), \varphi|} dy \\ &= \int_{\Omega \setminus (Z \cup \Sigma)} |\text{adj } D\varphi(x)| dx = \int_{\Omega} |\text{adj } D\varphi(x)| dx < \infty. \end{aligned} \quad (2.8)$$

По теореме Фубини из (2.8) выводим, что функция

$$\text{ар } D\psi \in L_1(\text{Pr}_i^{-1}(z) \cap \Omega' \setminus (Z' \cap \Sigma')) \quad \text{для } \mathcal{H}^{n-1}\text{-почти всех } z \in \text{Pr}_i(\Omega'). \quad (2.9)$$

Отметим, что отображение $\psi: \Omega' \setminus (Z' \cup \Sigma') \rightarrow \Omega$ обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина относительно n -мерной меры Хаусдорфа, а для всех $z \in \text{Pr}_i(\Omega' \setminus (Z' \cup \Sigma'))$ отображение $\psi: \text{Pr}_i^{-1}(z) \cap (\Omega' \setminus (Z' \cup \Sigma')) \rightarrow \Omega$ обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина относительно 1-мерной меры Хаусдорфа: $\mathcal{H}^1(\psi(E)) = 0$ для любого множества $E \subset \text{Pr}_i^{-1}(z) \cap (\Omega' \setminus (Z' \cup \Sigma'))$ такого, что $\mathcal{H}^1(E) = 0$.

2.7. Далее нам понадобится следующая

ЛЕММА 2. Пусть для гомеоморфизма $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ выполнены условия 1)–4) теоремы 2. Тогда для любых $i, j = 1, \dots, n$ справедливо

- 1) $\mathcal{H}^1(\psi_j(\text{Pr}_i^{-1}(z) \cap \Sigma')) = 0$ для $\mathcal{H}^{n-1}$ -почти всех $z \in \text{Pr}_i(\Sigma')$;
- 2) $\mathcal{H}^1(\psi_j(\text{Pr}_i^{-1}(z) \cap Z')) = 0$ для $\mathcal{H}^{n-1}$ -почти всех $z \in \text{Pr}_i(Z')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения 1) леммы достаточно применить формулу коплощади [47; теорема 3.2.11] к отображению $\text{Pr}_i \circ \varphi: Z \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое является липшицевым на подмножестве $Z \cap F_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$, и учесть, что $Z = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z \cap F_k$ и коэффициент коплощади

$$\mathcal{J}(x, \text{Pr}_i \circ \varphi) = \sqrt{\det(D(\text{Pr}_i \circ \varphi)(x)D(\text{Pr}_i \circ \varphi)^*(x))}$$

отображения $\text{Pr}_i \circ \varphi$ равен нулю почти всюду на Z . Поэтому по формуле коплощади интегралы в равенствах

$$\begin{aligned} \int_Z \mathcal{J}(x, \text{Pr}_i \circ \varphi) dx &= \int_{\text{Pr}_i(\Sigma')} \mathcal{H}^1(\{x \in Z : \text{Pr}_i \circ \varphi(x) = z\}) dz \\ &= \int_{\text{Pr}_i(\Sigma')} \mathcal{H}^1(\psi(\text{Pr}_i^{-1}(z) \cap \Sigma')) dz \end{aligned} \quad (2.10)$$

нулевые.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим измеримое множество

$$\begin{aligned} T &= \{(t, z) : z \in (\text{Pr}_i \circ \varphi)(\Sigma), t \in \psi_j(\text{Pr}_i^{-1}(z) \cap Z')\} \\ &= \{(t, z) : t \in \text{pr}_j(\Sigma), z \in (\text{Pr}_i \circ \varphi)(\text{pr}_j^{-1}(t) \cap \Sigma)\} \end{aligned}$$

и применим теорему Фубини к повторному интегралу

$$\begin{aligned} \int_{(\text{Pr}_i \circ \varphi)(\Sigma)} d\mathcal{H}^{n-1}(z) \int_{\psi_j(\text{Pr}_i^{-1}(z) \cap Z')} d\mathcal{H}^1(t) \\ = \int_{\text{pr}_j(\Sigma)} d\mathcal{H}^1(t) \int_{(\text{Pr}_i \circ \varphi)(\text{pr}_j^{-1}(t) \cap \Sigma)} d\mathcal{H}^{n-1}(z). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Правый интеграл в (2.11) равен нулю, так как $\mathcal{H}^{n-1}((\text{Pr}_i \circ \varphi)(\text{pr}_j^{-1}(t) \cap \Sigma)) = 0$ для почти всех t по условию 4. Отсюда получаем и второе утверждение леммы.

2.8. Фиксируем i и положим $L_z = \text{Pr}_i^{-1}(z) \cap \Omega'$. Из леммы 2 выводим, что

$$\mathcal{H}^1(\psi_j(L_z \cap (Z' \cup \Sigma'))) = 0 \quad \text{для } \mathcal{H}^{n-1}\text{-почти всех } z \in \text{Pr}_i(Z' \cup \Sigma'). \quad (2.12)$$

Фиксируем $z \in \text{Pr}_i(\Omega')$, для которого одновременно выполняются условия (2.9) и (2.12). Пусть $[a, b] \subset L_z$ – произвольный отрезок. Заметим, что функция $\psi_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям леммы 2, где $B = [a, b] \cap (Z' \cup \Sigma')$. Следовательно, функция ψ_j абсолютно непрерывна на L_z для $\mathcal{H}^{n-1}$ -почти всех $z \in \text{Pr}_i(\Omega')$.

Отсюда $D\varphi^{-1}(y) = \text{ар } D\psi(y)$ почти всюду на множестве $\Omega' \setminus (Z' \cup \Sigma')$ и $D\varphi^{-1}(y) = 0$ почти всюду на $Z' = \varphi(\Sigma)$. Так как $D\varphi^{-1}(y) = 0$ почти всюду на множестве Z' , то множества Z' и $\{y \in \Omega' : J(y, \varphi^{-1}) = 0\}$ отличаются на множество нулевой $\mathcal{H}^n$ -меры.

Окончательно, отображение $\varphi^{-1}: \Omega' \rightarrow \Omega$ принадлежит классу ACL и имеет конечное искажение. Более того, из (2.8) имеем

$$\int_{\Omega'} |D\varphi^{-1}(y)| dy = \int_{\Omega} |\text{adj } D\varphi(x)| dx.$$

2.9. Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть гомеоморфизм $\varphi^{-1}: \Omega' \rightarrow \Omega$ имеет свойства 5)–7), а гомеоморфизм φ аппроксимативно дифференцируем на множестве Z . Надо доказать, что φ обладает свойствами 1)–4).

Свойство 1) получается обращением рассуждений, приведенных в начале доказательства теоремы 2. Для доказательства свойства 3) заметим, что $\{x \in \Omega : J(x, \varphi) = 0\}$ совпадает с множеством $Z = \varphi^{-1}(\Sigma')$ с точностью до множества нулевой меры. Так как отображение $\varphi: \Omega \setminus \Sigma \rightarrow \Omega'$ обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина, то для отображения $\text{Pr}_i \circ \varphi: Z \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ справедлива формула коплощади, левая часть

$$\int_Z \sqrt{\det(D(\text{Pr}_i \circ \varphi)(x)D(\text{Pr}_i \circ \varphi)^*(x))} dx$$

которой равна интегралам в (2.10). Эти интегралы равны нулю, так как $\psi \in \text{ACL}$ и $\mathcal{H}^n(\Sigma') = 0$. Следовательно, $\text{adj } D\varphi(x) = 0$ почти всюду на Z . Отсюда с учетом (2.8) выводим свойство 2).

Для проверки свойства 4) заметим, что левый интеграл в (2.11) равен нулю, так как $\psi \in \text{ACL}$ по условию и $D\psi(y) = 0$ почти всюду на множестве Z' . Равенство нулю правого интеграла в (2.11) эквивалентно выполнению свойства 4). Теорема 2 доказана.

2.10. Специализируя дифференциальные свойства прямого гомеоморфизма, из теоремы 2 можно получать различные следствия. Часть из них сформулирована в следующих параграфах работы. Но, очевидно, это далеко не полный перечень возможных применений теоремы 2. Например, из теоремы 2 и ее доказательства непосредственно получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для того чтобы гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ класса $W_n^1(\Omega)$ имел обратный класса $W_1^1(\Omega')$, необходимо, чтобы гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ имел ограниченное коискажение.*

Поэтому, например, работа Ю. Пешкичева [52] очевидно ошибочная: в основной теореме этой работы утверждается, что гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ класса $W_n^1(\Omega)$ имеет обратный класса Соболева $W_1^1(\Omega')$ с некоторым дополнительным свойством. Обращаем внимание читателя, что на исходный гомеоморфизм никаких дополнительных ограничений не налагается! Это противоречит следствию 1. В работах [50], [53] показано, что в условиях “теоремы Пешкичева” обратный гомеоморфизм принадлежит классу BV (т.е. на почти всех линиях, параллельных координатным осям, отображение имеет ограниченную вариацию).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если свойство 1) леммы 2 не выполняется для функции $\psi_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b] \subset L_z$, на некотором измеримом подмножестве точек $z \in \text{Pr}_i(\Sigma')$, имеющем положительную $\mathcal{H}^{n-1}$ -меру, то интегралы в (2.10) не равны нулю для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$, поэтому множество $\{x \in Z : \text{adj } D\varphi(x) \neq 0\}$ имеет положительную меру. В этом случае только условия 1), 2) и 4) теоремы 2 обеспечивают, что $\psi: [a, b] \rightarrow \Omega$, $[a, b] \subset \text{Pr}_i(z) \cap \Omega'$, – спрямляемая кривая ($\psi \in \text{BV}$) для почти всех $z \in \text{Pr}_i(\Omega')$, $i = 1, \dots, n$ (ср. с [50]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если вместо условия 4) теоремы 2 гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина относительно n -мерной меры Хаусдорфа, то множество Σ в доказательстве теоремы 2 можно считать пустым. Тогда множество $Z' = \varphi(\Sigma) = \emptyset$ и из доказательства теоремы выводим, что обратное отображение $\varphi^{-1}: \Omega' \rightarrow \Omega$ принадлежит классу ACL, $D\varphi^{-1} \in L_1(\Omega')$ и $|J(y, \varphi^{-1})| > 0$ почти всюду.

Из теоремы 2 получаем также

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ принадлежит классу Соболева $W_{n-1}^1(\Omega)$. Для того чтобы обратный гомеоморфизм $\varphi^{-1}: \Omega' \rightarrow \Omega$ принадлежал классу $W_1^1(\Omega')$ и имел конечное искажение, необходимо и достаточно, чтобы гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ имел ограниченное коискажение.

Для доказательства достаточно напомнить, что $\mathcal{N}$ -свойство Лузина на гиперплоскостях для отображений из условия следствия 2 доказано в работе [50].

Основной вывод из этого утверждения состоит в том, что для дифференцируемых (в любом смысле) отображений без дополнительного условия ограниченного коискажения бесполезно исследовать регулярность обратного в терминах пространства Соболева (обратное отображение будет иметь другие свойства).

§ 3. Геометрически-аналитические свойства соболевских гомеоморфизмов

3.1. В этом параграфе мы установим условия, при которых прямой и обратный гомеоморфизм принадлежат классу Соболева.

Введем в рассмотрение две функции искажения:

1) для отображения $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, класса $W_{1,\text{loc}}^1(\Omega)$ определим

$$\Omega \ni x \mapsto \mathcal{K}_{\varphi,p}(x) = \begin{cases} \frac{|\text{adj } D\varphi(x)|}{|J(x, \varphi)|^{(n-1)/p}} & \text{при } x \in \Omega \setminus (Z \cup \Sigma), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Заметим, что $\mathcal{K}_{\varphi,\infty}(x) = |\text{adj } D\varphi(x)|$ в тех точках, где $J(x, \varphi) \neq 0$;

2) для отображения $\psi: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, класса $W_{1,\text{loc}}^1(\Omega')$ положим (см. [22])

$$\Omega' \ni y \mapsto K_{\psi,q'}(y) = \begin{cases} \frac{|D\psi(y)|}{|J(y, \psi)|^{1/q'}} & \text{при } y \in \Omega' \setminus (Z' \cup \Sigma'), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Заметим, что $K_{\psi,\infty}(y) = |D\psi(y)|$ в тех точках, где $J(y, \psi) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\varphi \in W_{q,\text{loc}}^1(\Omega)$, $n-1 \leq q \leq \infty$;
- 2) φ имеет конечное коискажение: $\text{adj } D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве Z ;

- 3) $\mathcal{K}_{\varphi,p}(\cdot) \in L_{\varrho}(\Omega)$, где $1/\varrho = (n-1)/q - (n-1)/p$, $n-1 \leq q \leq p \leq \infty$ ($\varrho = \infty$ при $q = p$).

Тогда обратный гомеоморфизм имеет свойства:

- 4) $\varphi^{-1} \in W_{p',\text{loc}}^1(\Omega')$, где $p' = p/(p-n+1)$, $p' = 1$ при $p = \infty$;
 5) φ^{-1} имеет конечное искажение ($|J(y, \varphi^{-1})| > 0$ почти всюду в Ω' при $n \leq q$);
 6) $K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \in L_{\varrho}(\Omega')$, где $q' = q/(q-n+1)$, $q' = \infty$ при $q = n-1$.

Более того, $\|K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \mid L_{\varrho}(\Omega')\| = \|\mathcal{K}_{\varphi,p}(\cdot) \mid L_{\varrho}(\Omega)\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что на каждой компактной подобласти в Ω выполнены условия теоремы 2. В приводимых ниже соотношениях при $n \leq q$ множество $Z' = \varphi(\Sigma)$ в силу замечания 2 можно считать пустым.

Действительно, условия 1)–3) и условие 4) при $n = 2$ теоремы 2 вытекают непосредственно из условий 1) и 2) теоремы 3. В случае $1 < n-1 < q$ условие 4) теоремы 2 вытекает из теоремы вложения Соболева $i: W_q^1(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow H^{1-(n-1)/q}$ (см., например, [54], [55]), а при $1 < n-1 = q$ оно доказано в [50]. Из теоремы 2 получаем, что $\varphi^{-1} \in W_{1,\text{loc}}^1(\Omega)$ и φ^{-1} имеет конечное искажение. При $n \leq q$ отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина относительно n -мерной меры Хаусдорфа, и поэтому $|J(y, \varphi^{-1})| > 0$ почти всюду в силу замечания 2.

Далее используем легко проверяемое равенство

$$\varrho = \frac{pq}{(p-q)(n-1)} = \frac{p'q'}{q'-p'}.$$

В точках невырожденности матрицы Якоби $\text{ар } D\varphi(x)$ имеем

$$[\text{adj } D\varphi(x)]^{-1} = J(x, \varphi)^{-1} D\varphi(x). \quad (3.3)$$

Отсюда с учетом равенств $D\varphi^{-1}(y) = [D\varphi(x)]^{-1}$, $\text{adj } D\varphi^{-1}(y) = [\text{adj } D\varphi(x)]^{-1}$ и $J(y, \varphi^{-1}) = J(x, \varphi)^{-1}$ получаем

$$|D\varphi^{-1}(y)| = |J(\varphi^{-1}(y), \varphi)|^{-1} |\text{adj } D\varphi(\varphi^{-1}(y))|, \quad y = \varphi(x).$$

Дальнейшие рассмотрения разбиваются на ряд случаев.

Случай I: $n-1 < q < p < \infty$. С учетом последних равенств выводим

$$\begin{aligned} \|K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \mid L_{\varrho}(\Omega')\|^{\varrho} &= \int_{\Omega' \setminus \varphi(\Sigma)} \left(\frac{|D\varphi^{-1}(y)|}{|J(y, \varphi^{-1})|^{1/q'}} \right)^{\varrho} d\mathcal{H}^n(y) \\ &= \int_{\Omega' \setminus \varphi(\Sigma \cup Z)} \left(\frac{|J(\varphi^{-1}(y), \varphi)|^{-1} |\text{adj } D\varphi(\varphi^{-1}(y))|}{|J(y, \varphi^{-1})|^{1/q'}} \right)^{p'q'/(q'-p')} d\mathcal{H}^n(y) \\ &= \int_{\Omega \setminus (Z \cup \Sigma)} \left(\frac{|J(x, \varphi)|^{-1} |\text{adj } D\varphi(x)|}{|J(x, \varphi)|^{-1/q'}} \right)^{p'q'/(q'-p')} |J(x, \varphi)| d\mathcal{H}^n(x) \\ &= \int_{\Omega \setminus Z} \left(\frac{|\text{adj } D\varphi(x)|}{|J(x, \varphi)|^{(n-1)/p}} \right)^{\varrho} d\mathcal{H}^n(x) = \|\mathcal{K}_{\varphi,p}(\cdot) \mid L_{\varrho}(\Omega)\|^{\varrho}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Случай II: $n-1 < q < p = \infty$. Рассмотрение этой ситуации является модификацией (3.4). Действительно, в этом случае $p' = 1$, $\varrho = q/(n-1)$ и поэтому

проверка $K_{\varphi^{-1}, q'}(\cdot) \in L_{\varrho}(\Omega')$ опять сводится к замене переменной в интеграле

$$\begin{aligned}
 \|K_{\varphi^{-1}, q'}(\cdot) \mid L_{\varrho}(\Omega')\|^e &= \int_{\Omega'} \left(\frac{|D\varphi^{-1}(y)|}{|J(y, \varphi^{-1})|^{(q-n+1)/q}} \right)^e d\mathcal{H}^n(y) \\
 &= \int_{\Omega' \setminus (Z' \cup \Sigma')} \left(\frac{|J(\varphi^{-1}(y), \varphi)|^{-1} |\operatorname{adj} D\varphi(\varphi^{-1}(y))|}{|J(y, \varphi^{-1})|^{(q-n+1)/q}} \right)^{q/(n-1)} d\mathcal{H}^n(y) \\
 &= \int_{\Omega \setminus Z} \left(\frac{|J(x, \varphi)|^{-1} |\operatorname{adj} D\varphi(x)|}{|J(x, \varphi)|^{(q-n+1)/q}} \right)^{q/(n-1)} |J(x, \varphi)| d\mathcal{H}^n(x) \\
 &= \int_{\Omega} |\operatorname{adj} D\varphi(x)|^e d\mathcal{H}^n(x) = \|\mathcal{K}_{\varphi, \infty}(\cdot) \mid L_{\varrho}(\Omega)\|^e. \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

СЛУЧАЙ III: $n-1 = q$, $p = \infty$. Утверждения 4)–6) вытекают прямо из теоремы 2.

СЛУЧАЙ IV: $n-1 = q < p < \infty$. Утверждения 4), 5) вытекают из теоремы 2, а утверждение 6) – из соотношений

$$\begin{aligned}
 \|K_{\varphi^{-1}, \infty}(\cdot) \mid L_{\varrho}(\Omega')\|^e &= \int_{\Omega' \setminus (Z' \cup \Sigma')} |D\varphi^{-1}(y)|^{p'} d\mathcal{H}^n(y) \\
 &= \int_{\Omega \setminus (\Sigma \cup Z)} |D\varphi^{-1}(\varphi(x))|^{p'} |J(x, \varphi)| d\mathcal{H}^n(x) \\
 &= \int_{\Omega \setminus (Z \cup \Sigma)} \left(\frac{|\operatorname{adj} D\varphi(x)|}{|J(x, \varphi)|} \right)^{p'} |J(x, \varphi)| d\mathcal{H}^n(x) \\
 &= \int_{\Omega \setminus Z} \left(\frac{|\operatorname{adj} D\varphi(x)|}{|J(x, \varphi)|^{(n-1)/p}} \right)^e d\mathcal{H}^n(x) = \|\mathcal{K}_{\varphi, p}(\cdot) \mid L_{\varrho}(\Omega)\|^e. \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

СЛУЧАЙ V: $n-1 \leq q = p \leq \infty$. Утверждения 4), 5) вытекают из теоремы 2, а утверждение 6) – из соотношений

$$\begin{aligned}
 \|K_{\varphi^{-1}, q'}(\cdot) \mid L_{\infty}(\Omega')\| &= \operatorname{ess\,sup}_{y \in \Omega' \setminus (Z' \cup \Sigma')} \frac{|D\varphi^{-1}(y)|}{|J(y, \varphi^{-1})|^{1/q'}} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega \setminus (\Sigma \cup Z)} \frac{|\operatorname{adj} D\varphi(x)|}{|J(x, \varphi)|^{-1/q'+1}} \\
 &= \|\mathcal{K}_{\varphi, p}(\cdot) \mid L_{\infty}(\Omega)\| = \begin{cases} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega \setminus Z} \frac{|\operatorname{adj} D\varphi(x)|}{|J(x, \varphi)|^{(n-1)/p}} & \text{при } p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega \setminus Z} |\operatorname{adj} D\varphi(x)| & \text{при } p = \infty. \end{cases} \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

Для окончания доказательства остается лишь показать, что $\varphi^{-1} \in W_{p', \operatorname{loc}}^1(\Omega')$ при $p' = p/(p-n+1)$. Это свойство установлено в доказываемой ниже теореме 5.

3.2. Выделим из предыдущей теоремы несколько частных утверждений, представляющих независимый интерес.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ принадлежит классу Соболева $\varphi \in W_{n, \operatorname{loc}}^1(\Omega)$. Если для некоторого неотрицательного числа $M \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|\operatorname{adj} D\varphi(x)|^{n/(n-1)} \leq M|J(x, \varphi)|$ для почти всех $x \in \Omega$, то отображение φ квазиконформно (см. п. 1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие следствия означает, что $\text{adj } D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве Z и $\|\mathcal{H}_{\varphi,n} \mid L_\infty(\Omega)\| \leq M^{(n-1)/n}$. Полагая $p = q = n$ в теореме 3, выводим, что $\varphi^{-1} \in W_{n,\text{loc}}^1(\Omega')$ и справедливо поточечное неравенство $|D\varphi^{-1}(y)|^n \leq M^{n-1}|J(y, \varphi^{-1})|$ для почти всех $y \in \Omega'$. Таким образом, отображение φ^{-1} квазиконформно, а вместе с ним квазиконформно также и отображение φ , т.е. отображение φ имеет конечное искажение (см. ниже теорему 4 и замечание 5, где приводится новое сравнительно с [1], [2] доказательство этого свойства).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условия следствия 3 представляют собой фактически новое определение квазиконформного отображения.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\varphi \in W_{q,\text{loc}}^1(\Omega)$, $n-1 \leq q \leq \infty$;
- 2) φ имеет конечное коискажение: $\text{adj } D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве Z .

Тогда обратный гомеоморфизм имеет свойства:

- 3) $\varphi^{-1} \in W_{1,\text{loc}}^1(\Omega')$;
- 4) φ^{-1} имеет конечное искажение ($|J(y, \varphi^{-1})| > 0$ почти всюду в Ω' при $n \leq q$);
- 5) $K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \in L_{q/(n-1),\text{loc}}(\Omega')$, где $q' = q/(q-n+1)$, $q' = \infty$ при $q = n-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следствия вытекает, что

$$\mathcal{H}_{\varphi,\infty}(\cdot) = \text{adj } D\varphi(\cdot) \in L_{q/(n-1),\text{loc}}(\Omega).$$

Следовательно, на каждой компактной части области Ω выполняются условия теоремы 3. Отсюда с учетом $q = q/(n-1)$ получаем утверждения 3)–5) следствия.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При $n = 2$, $q = 1$ следствие 4 другими методами доказано в [56]. Кроме того, при $n > 2$, $q = n-1$ следствие 4 усиливает теорему 1.2 из [50], в которой вместо условия “конечности коискажения” налагается более сильное требование конечности искажения отображения φ .

Приводимый ниже пример показывает, что класс отображений, удовлетворяющих условию следствия 4, не пуст.

ПРИМЕР 1. Пусть $f = f(x_1, \dots, x_k): [0, 1]^k \rightarrow [0, 1]^k$ – гомеоморфизм из работы [57] класса $W_p^1([0, 1]^k)$, $2 \leq k < n$, $p \in [n-1, \infty)$, для которого $Z_k = \{(x_1, \dots, x_k) \in [0, 1]^k : J((x_1, \dots, x_k), f) = 0\}$ имеет положительную меру. Тогда отображение $\varphi: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$, $\varphi(x) = (f(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)$, будет гомеоморфизмом класса $W_p^1([0, 1]^n)$ таким, что множество $Z = Z_k \times [0, 1]^{n-k}$ имеет положительную меру и $\text{rank } D\varphi(x) = n-k$ для почти всех $x \in Z$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть

- 1) гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ принадлежит классу Соболева $W_{\infty,\text{loc}}^1(\Omega)$,
- 2) φ имеет конечное коискажение: $\text{adj } D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве Z .

Тогда

- 3) $\varphi^{-1} \in W_{1,\text{loc}}^1(\Omega')$,
- 4) $|J(y, \varphi^{-1})| > 0$ почти всюду в Ω' ,
- 5) поточечное неравенство $|D\varphi^{-1}(y)| \leq L|J(y, \varphi^{-1})|$ выполняется для почти всех $y \in \Omega'$.

Из теорем 2 и 3, а также из следствия 2 выводим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ класса $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega)$, $n-1 \leq q \leq \infty$, обладает свойствами 2), 3) теоремы 3 тогда и только тогда, когда обратный гомеоморфизм имеет свойства 4)–6) теоремы 3.

3.3. Далее мы обобщаем, в частности, результаты из [22] и распространяем их на весь спектр возможных значений показателей суммируемости⁶.

ТЕОРЕМА 4. Пусть гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\varphi \in W_{q,\text{loc}}^1(\Omega)$, $n-1 \leq q \leq \infty$;
- 2) отображение φ имеет конечное искажение;
- 3) $K_{\varphi,p}(\cdot) \in L_{\varkappa}(\Omega)$, где $1/\varkappa = 1/q - 1/p$, $n-1 \leq q \leq p \leq \infty$ ($\varkappa = \infty$ при $q = p$).

Тогда обратный гомеоморфизм имеет свойства:

- 4) $\varphi^{-1} \in W_{p',\text{loc}}^1(\Omega')$, где $p' = p/(p - n + 1)$, $p' = 1$ при $p = \infty$;
- 5) φ^{-1} имеет конечное искажение ($|J(y, \varphi^{-1})| > 0$ почти всюду в Ω' при $n \leq q$);
- 6) $K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \in L_{\varrho}(\Omega')$, где $q' = q/(q - n + 1)$, $q' = \infty$ при $q = n - 1$, а $1/\varrho = 1/p' - 1/q'$.

Более того,

$$\|K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \mid L_{\varrho}(\Omega')\| \leq \|K_{\varphi,p}(\cdot) \mid L_{\varkappa}(\Omega)\|^{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, прежде всего, что $\varkappa = \varrho(n-1)$. Из условия 2) теоремы вытекает, что $\text{adj } D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве Z . Кроме того, из неравенства $|\text{adj } D\varphi(x)| \leq |D\varphi(x)|^{n-1}$ получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_{\varphi,p}(\cdot) \mid L_{\varrho}(\Omega)\|^{\varrho} &= \int_{\Omega \setminus (Z \cup \Sigma)} \left(\frac{|\text{adj } D\varphi(x)|}{|J(x, \varphi)|^{(n-1)/p}} \right)^{\varrho} d\mathcal{H}^n(x) \\ &\leq \int_{\Omega \setminus (Z \cup \Sigma)} \left(\frac{|D\varphi(x)|}{|J(x, \varphi)|^{1/p}} \right)^{\varrho(n-1)} d\mathcal{H}^n(x) = \|K_{\varphi,p}(\cdot) \mid L_{\varkappa}(\Omega)\|^{\varkappa}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Следовательно, выполнены условия теоремы 3 и поэтому верно ее заключение. Заметим, что из (3.4)–(3.7) и (3.8) вытекают соотношения

$$\|K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \mid L_{\varrho}(\Omega')\|^{\varrho} = \|\mathcal{K}_{\varphi,p}(\cdot) \mid L_{\varrho}(\Omega)\|^{\varrho} \leq \|K_{\varphi,p}(\cdot) \mid L_{\varkappa}(\Omega)\|^{\varkappa},$$

⁶ Другими методами теорема 4 при $n \leq q \leq p < \infty$ доказана в [21], [22]. В работах [21], [22] эта теорема сформулирована для показателей суммируемости $n-1 < q \leq p < \infty$, однако, доказательство при $n-1 < q < n$ содержит существенный пробел: доказано лишь, что отображение φ^{-1} , обратное к данному гомеоморфизму $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$, обладает ACL-свойством, но не доказано, что оно имеет конечное искажение.

откуда выводим последнее утверждение теоремы

$$\|K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \mid L_{\varrho}(\Omega')\| \leq \|K_{\varphi,p}(\cdot) \in L_{\kappa}(\Omega)\|^{n-1}. \quad (3.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $q = p = n$ теорема 4 представляет новое доказательство известного свойства о квазиконформности отображения, обратного к квазиконформному. Другими методами теорема 4 доказана в [56] при $n = 2$, $q = 1$, $p = 2, \infty$. Кроме того, при $n > 2$, $q = n - 1$, $p = n$ усилена теорема 4.1 из [58].

3.4. Следующее утверждение содержит в качестве частного случая следствие 3.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\varphi \in W_{q,\text{loc}}^1(\Omega)$, $n - 1 \leq q \leq n + 1/(n - 2)$;
- 2) φ имеет конечное коискажение: $\text{adj } D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве Z ;
- 3) $\mathcal{K}_{\varphi,p}(\cdot) \in L_{\varrho}(\Omega)$, где $1/\varrho = (n - 1)/q - (n - 1)/p$, $n - 1 \leq q \leq p \leq n + 1/(n - 2)$ ($\varrho = \infty$ при $q = p$).

Тогда гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ имеет также следующие свойства:

- 4) $\varphi \in W_{q'',\text{loc}}^1(\Omega')$, где $q'' = q/((n - 1)^2 - q(n - 2))$;
- 5) φ имеет конечное искажение ($|J(y, \varphi)| > 0$ почти всюду в Ω при $n - 1 \leq p \leq n$);
- 6) $K_{\varphi,p''}(\cdot) \in L_{\varrho'}(\Omega)$, где $p'' = p/((n - 1)^2 - p(n - 2))$, $p'' = \infty$ при $p = (n - 1)^2/(n - 2)$, а $1/\varrho' = 1/p'' - 1/q''$.

Более того,

$$\|K_{\varphi,p''}(\cdot) \mid L_{\varrho'}(\Omega)\| \leq \|\mathcal{K}_{\varphi,p}(\cdot) \in L_{\varrho}(\Omega)\|^{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях следствия имеем $n - 1 \leq p' \leq q' \leq \infty$. Применяя теорему 3, получаем, что обратный гомеоморфизм обладает свойствами

- 7) $\varphi^{-1} \in W_{p',\text{loc}}^1(\Omega')$, где $p' = p/(p - n + 1)$;
- 8) φ^{-1} имеет конечное искажение;
- 9) $K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \in L_{\varrho}(\Omega')$, где $q' = q/(q - n + 1)$, $q' = \infty$ при $q = n - 1$.

Более того, $\|K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \mid L_{\varrho}(\Omega')\| = \|\mathcal{K}_{\varphi,p}(\cdot) \in L_{\varrho}(\Omega)\|$.

Заметим, что отображение $\varphi^{-1}: \Omega' \rightarrow \Omega$ удовлетворяет условиям теоремы 4.

Тогда для прямого отображения φ справедливы следующие выводы:

- 10) $\varphi \in W_{q'',\text{loc}}^1(\Omega)$, где $q'' = q'/(q' - n + 1) = q/((n - 1)^2 - q(n - 2))$;
- 11) φ имеет конечное искажение ($|J(y, \varphi)| > 0$ почти всюду в Ω при $n \leq p' = p/(p - n + 1)$);
- 12) $K_{\varphi,p''}(\cdot) \in L_{\varrho'}(\Omega)$, где $p'' = p'/(p' - n + 1) = p/((n - 1)^2 - p(n - 2))$, $p'' = \infty$ при $p' = n - 1$, а $1/\varrho' = 1/p'' - 1/q''$.

Более того,

$$\|K_{\varphi,p''}(\cdot) \mid L_{\varrho'}(\Omega)\| \leq \|K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \in L_{\varrho}(\Omega')\|^{n-1} = \|\mathcal{K}_{\varphi,p}(\cdot) \in L_{\varrho}(\Omega)\|^{n-1}.$$

Из свойств 10)–12) непосредственно получаем утверждения 4)–6) следствия.

Заметим, что при $q = p = n$ мы получаем следствие 3.

§ 4. Об обратимости операторов композиции соболевских пространств

4.1. Напомним, что однородное пространство Соболева $L_p^1(\Omega)$ состоит из локально суммируемых функций $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих обобщенный градиент ∇f и конечную полунорму $\|\nabla f\|_{L_p(\Omega)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^*: L_\infty^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega)$ по правилу $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ для $f \in L_\infty^1(\Omega')$ тогда и только тогда, когда гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ принадлежит классу Соболева $\varphi \in L_q^1(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$.*

Более того, $\|\varphi^\| \leq \|D\varphi(\cdot)\|_{L_q(\Omega)} \leq \sqrt{n} \|\varphi^*\|$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если в предложении 5 отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ – гомеоморфизм, то получается утверждение, аналогичное сформулированному в работах [59], [60]. Приводимое ниже доказательство достаточности отличается от данного в [59], [60] возможностью обобщить его на отображения классов Соболева со значениями в метрическом пространстве [61]. Отметим, что оценки на норму $\|D\varphi(\cdot)\|_{L_q(\Omega)}$ в этих работах не установлены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Так как оператор $\varphi^*: L_\infty^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega)$ ограничен, то для всех $f \in L_\infty^1(\Omega')$ справедлива оценка

$$\|\nabla(f \circ \varphi)\|_{L_q(\Omega)} \leq \|\varphi^*\| \|f\|_{L_\infty^1(\Omega')}, \quad q \in [1, \infty]. \quad (4.1)$$

Подставляя в правую часть соотношения (4.1) тестовую функцию $\Omega' \ni y \mapsto f(y) = y_i$, получаем, что

$$\|\nabla \varphi_i\|_{L_q(\Omega)} \leq \|\varphi^*\|, \quad i = 1, \dots, n, \quad q \in [1, \infty].$$

Отсюда выводим $\varphi \in L_q^1(\Omega)$ и оценку $\|D\varphi(\cdot)\|_{L_q(\Omega)} \leq \sqrt{n} \|\varphi^*\|$. Действительно, для линейного отображения $D\varphi(x)$ имеем $|D\varphi(x)| = |[D\varphi(x)]^*| = |[D\varphi(x)]^* \langle a \rangle|$, где $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ – некоторый вектор единичной длины. Отсюда

$$|D\varphi(x)| = |[D\varphi(x)]^* \langle a \rangle| \leq \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i [D\varphi(x)]^* \langle e_i \rangle \right| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| |\nabla \varphi_i(x)|.$$

Следовательно,

$$\|D\varphi(\cdot)\|_{L_q(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|\nabla \varphi_i\|_{L_q(\Omega)} \leq \sqrt{n} \|\varphi^*\|.$$

Достаточность. Гомеоморфизм φ принадлежит $L_q^1(\Omega)$, а функция $f \in L_\infty^1(\Omega')$ локально липшицева, т.е. для близких точек $u, v \in \Omega'$ имеем $|f(u) - f(v)| \leq \|f\|_{L_\infty^1(\Omega')} \|u - v\|$. Поэтому

$$|f \circ \varphi(y) - f \circ \varphi(x)| \leq \|f\|_{L_\infty^1(\Omega')} \|\varphi(y) - \varphi(x)\| \quad (4.2)$$

для достаточно близких точек $x, y \in \Omega$ таких, что и значения $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ тоже достаточно близки. Отсюда можно вывести, что композиция $f \circ \varphi$ принадлежит

классу $\text{ACL}(\Omega)$. Действительно, изменим отображение φ на множестве нулевой меры так, чтобы оно стало абсолютно непрерывным на почти всех линиях, параллельных координатным осям. Тогда для достаточно близких точек x, y на одной из таких линий (параллельной оси x_i) будет выполняться неравенство (4.2). Из него легко выводится, что вместе с отображением φ на этой линии будет абсолютно непрерывной также и композиция $f \circ \varphi$. Следовательно, частные производные $\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi)(x)$ существуют для почти всех $x \in \Omega$, $i = 1, \dots, n$.

Из вышесказанного выводим, что в точках $x \in \Omega$ аппроксимативной дифференцируемости отображения φ и композиции $f \circ \varphi$ (такowymi являются почти все точки в Ω) справедлива оценка

$$|\nabla(f \circ \varphi)|(x) \leq \|f \mid L_\infty^1(\Omega')\| |D\varphi(x)|.$$

Отсюда в случае $q = \infty$ выводим соотношение

$$\|\nabla(f \circ \varphi) \mid L_\infty(\Omega)\| \leq \|D\varphi(\cdot) \mid L_\infty(\Omega)\| \|f \mid L_\infty^1(\Omega')\|. \quad (4.3)$$

Из (4.3) вытекает ограниченность оператора $\varphi^*: L_\infty^1(\Omega') \rightarrow L_\infty^1(\Omega)$.

В случае $1 \leq q < \infty$ нужно для ограниченности оператора $\varphi^*: L_\infty^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega)$ неравенство выводится несколько по-иному:

$$\int_\Omega |\nabla(f \circ \varphi)|^q(x) dx \leq \|f \mid L_\infty^1(D')\|^q \int_\Omega |D\varphi(x)|^q dx. \quad (4.4)$$

Из (4.3) и (4.4) очевидно имеем $\|\varphi^*\| \leq \|D\varphi(\cdot) \mid L_q(\Omega)\|$ для всех $q \in [1, \infty]$.

ТЕОРЕМА 5. *Гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^*: L_p^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega)$, $1 \leq q \leq p < \infty$, где $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ для $f \in L_p^1(\Omega')$, тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

- 1) $\varphi \in W_{q, \text{loc}}^1(\Omega)$;
- 2) отображение φ имеет конечное искажение;
- 3) $K_{\varphi, p}(\cdot) \in L_\varkappa(\Omega)$, где $1/\varkappa = 1/q - 1/p$, $1 \leq q \leq p < \infty$ ($\varkappa = \infty$ при $q = p$).
При этом $\|\varphi^*\| \leq \|K_{\varphi, p}(\cdot) \mid L_\varkappa(\Omega)\| \leq C \|\varphi^*\|$, где C – постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий теоремы доказана в [22], [28].

Достаточность. Шаг 1. На этом этапе мы докажем, как из перечисленных в теореме 5 свойств отображения φ вывести ограниченность оператора $\varphi^*: L_p^1(\Omega') \cap C^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega)$.

В случае $1 \leq q < p < \infty$ для $f \in L_q^1(\Omega') \cap C^1(\Omega')$ имеем $f \circ \varphi \in \text{ACL}(\Omega)$, и теперь остается только воспользоваться известным из работы [22] выводом

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(f \circ \varphi)|^q(x) dx &\leq \int_\Omega |\nabla f(\varphi(x))|^q |D\varphi(x)|^q dx \\ &= \int_{\Omega \setminus Z} |\nabla f|^q(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)|^{q/p} \frac{|D\varphi(x)|^q}{|\det D\varphi(x)|^{q/p}} dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega \setminus Z} |\nabla f(\varphi(x))|^p |\det D\varphi(x)| dx \right)^{q/p} \left(\int_{\Omega \setminus Z} \left(\frac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{1/p}} \right)^\varkappa dx \right)^{q/\varkappa} \\ &= \left(\int_{\Omega'} |\nabla f(z)|^p dz \right)^{q/p} \|K_{\varphi, p}(\cdot) \mid L_\varkappa(\Omega)\|^q. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Отсюда вытекает ограниченность оператора $\varphi^*: L_p^1(\Omega') \cap C^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega)$.

Случай $1 \leq q = p < \infty$ аналогичен предыдущему. Действительно, в этом случае $\varkappa = \infty$, а вместо (4.5) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(f \circ \varphi)|^q(x) dx &\leq \int_{\Omega} |\nabla f(\varphi(x))|^q |D\varphi(x)|^q dx \\ &= \int_{\Omega \setminus Z} |\nabla f|^q(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| \frac{|D\varphi(x)|^q}{|\det D\varphi(x)|} dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega'} |\nabla f(z)|^q dz \right) \|K_{\varphi,q}(\cdot) \|_{L_{\infty}(\Omega)}^q. \end{aligned}$$

Шаг 2. Во всех случаях $1 \leq q \leq p < \infty$ мы получили ограниченность оператора

$$\varphi^*: L_p^1(\Omega') \cap C^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega).$$

Остается доказать, что распространение оператора по непрерывности совпадает с оператором суперпозиции. Если $f \in L_p^1(\Omega')$ – произвольная функция, то рассмотрим последовательность функций $f_k \in L_p^1(\Omega') \cap C^1(\Omega')$, сходящихся к f не только в $L_p^1(\Omega')$, но и почти всюду при $p \leq n$ и поточечно при $p > n$ [62] в области Ω' . Тогда последовательность композиций $f_k \circ \varphi$ сходится в $L_q^1(\Omega)$ (так как фундаментальная последовательность переходит в фундаментальную). Кроме того, $f_k \circ \varphi$ сходится поточечно к $f \circ \varphi$ в Ω при $p > n$ и почти всюду при $p \leq n$, так как в этом случае отображение φ^{-1} обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина [28].

Шаг 3. Дальнейшие рассуждения восполняют пробел в работах [21], [22], [28]. Остается сделать вывод о том, что $f \circ \varphi$ – локально суммируемая в области Ω функция⁷. Тогда $f_k \circ \varphi$ будет сходиться к $f \circ \varphi$ в $L_p^1(\Omega)$.

Фиксируем шар $B \Subset D$. Заметим, что $|B \setminus Z| > 0$. Если это не так, то в силу конечности искажения имеем $D\varphi(x) = 0$ для почти всех $x \in B$, откуда вытекает, что $\varphi = \text{const}$ на B . Последнее невозможно, так как φ – гомеоморфизм.

Суммируемость композиции $f \circ \varphi$ очевидна на B , если функция f ограничена в области Ω . Произвольный случай легко сводится к ограниченной снизу функции f такой, что $f \circ \varphi(x) = 0$ на некотором множестве $F \subset B \setminus Z$ положительной меры: действительно, множество $\{z \in \varphi(B \setminus Z) \mid f(z) - k_0 \leq 0\}$ будет иметь положительную меру при некотором $k_0 \in \mathbb{N}$; тогда вместо f можно рассмотреть функцию $\max(f(z) - k_0, 0) \in L_p^1(\Omega')$.

Фиксируем функцию $f \in L_p^1(\Omega')$, для которой множество $F = \{x \in B \setminus Z \mid f \circ \varphi(x) = 0\}$ имеет положительную меру. Тогда функции $u_m = g_m \circ \varphi \in L_q^1(B)$, где $g_m = \min(f, m)$, монотонно возрастаая, сходятся на B к функции $u = f \circ \varphi$ при $m \rightarrow \infty$. Подставим функцию u_m в следующее неравенство Пуанкаре (см., например, [28], [62]): пусть F – измеримое подмножество шара $B = B(0, r)$ положительной меры; для всех $v \in W_q^1(B)$, $1 \leq q < \infty$, $v|_F = 0$, выполняется неравенство

$$\left(\int_B |v|^q dx \right)^{1/q} \leq \frac{Cr}{(r^{-n}|F|)^{1/q}} \left(\int_B |\nabla v|^q dx \right)^{1/q}$$

⁷Доказательство этого свойства как раз и отсутствует в работах [21], [22], [28]. Приводимое здесь доказательство этого свойства можно применить во всех работах, где требуется обосновать локальную суммируемость композиции.

(здесь C – некоторая постоянная, не зависящая от функции v). В результате получим

$$\int_B |u_m|^q dx \leq \frac{C^q r^q}{r^{-n}|F|} \int_B |\nabla u_m|^q dx \leq \frac{C^q r^q}{r^{-n}|F|} \int_B |\nabla u|^q dx.$$

Так как функции $u_k = g_k \circ \varphi$, монотонно возрастаая, сходятся на B к функции $u = f \circ \varphi$, то по теореме Бешо Леви функция $u = f \circ \varphi$ принадлежит $L_q(B)$.

Поскольку шар $B \subset D$ произволен, то композиция $f \circ \varphi$ локально суммируема в области D .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Третий шаг доказательства теоремы 5 при $p = n$, $q \in [1, n)$ несколько более сложным способом доказан в [63].

В следующем утверждении мы формулируем условия, при выполнении которых композиция отображений с конечным искажением будет также отображением с конечным искажением.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть гомеоморфизм $\varphi_2: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\varphi_2 \in W_{q,\text{loc}}^1(\Omega_1)$, $1 \leq q \leq p < \infty$;
- 2) φ_2 имеет конечное искажение: $D\varphi_2(x) = 0$ почти всюду на множестве Z_1 нулей якобиана $\det D\varphi_2(x)$;
- 3) $K_{\varphi_2,p}(\cdot) \in L_{\varkappa_2}(\Omega_1)$, где $1/\varkappa_2 = 1/q - 1/p$, $1 \leq q \leq p < \infty$ ($\varkappa_2 = \infty$ при $q = p$);

а гомеоморфизм $\varphi_1: \Omega \rightarrow \Omega_1$ обладает свойствами:

- 4) $\varphi_1 \in W_{s,\text{loc}}^1(\Omega)$, $1 \leq s \leq q < \infty$;
- 5) φ_1 имеет конечное искажение: $D\varphi_1(x) = 0$ почти всюду на множестве Z нулей якобиана $\det D\varphi_1(x)$;
- 6) $K_{\varphi_1,p}(\cdot) \in L_{\varkappa_1}(\Omega)$, где $1/\varkappa_1 = 1/s - 1/q$, $1 \leq s \leq q \leq p < \infty$ ($\varkappa_1 = \infty$ при $s = q$).

Тогда гомеоморфизм $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1: \Omega \rightarrow \Omega_2$ имеет свойства:

- 7) $\varphi \in W_{s,\text{loc}}^1(\Omega)$;
- 8) φ имеет конечное искажение;
- 9) $K_{\varphi,p}(\cdot) \in L_{\varkappa}(\Omega)$, где $1/\varkappa = 1/s - 1/p$ ($\varkappa = \infty$ при $s = p$).

Более того,

$$\|K_{\varphi,p}(\cdot) \mid L_{\varkappa}(\Omega)\| \leq C \|K_{\varphi_1,q}(\cdot) \in L_{\varkappa_1}(\Omega)\| \|K_{\varphi_2,p}(\cdot) \in L_{\varkappa_2}(\Omega_1)\|. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для отображения φ_2 выполняются условия теоремы 5 с $\Omega = \Omega_1$ и $\Omega' = \Omega_2$. Поэтому гомеоморфизм $\varphi_2: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi_2^*: L_p^1(\Omega_2) \rightarrow L_q^1(\Omega_1)$, $1 \leq q \leq p < \infty$, где $\varphi_2^*(f) = f \circ \varphi_2$ для $f \in L_q^1(\Omega_2)$, и при этом

$$\|\varphi_2^*\| \leq \|K_{\varphi_2,p}(\cdot) \mid L_{\varkappa_2}(\Omega_1)\| \leq C_2 \|\varphi_2^*\|, \quad (4.7)$$

где C_2 – постоянная.

С другой стороны, для отображения φ_1 выполняются условия теоремы 5 с $\Omega' = \Omega_1$, $p = q$, $q = s$. Поэтому гомеоморфизм $\varphi_1: \Omega \rightarrow \Omega_1$ индуцирует

ограниченный оператор композиции $\varphi_1^*: L_q^1(\Omega_1) \rightarrow L_s^1(\Omega)$, $1 \leq s \leq q < \infty$, где $\varphi_1^*(f) = f \circ \varphi_1$ для $f \in L_q^1(\Omega_1)$, и при этом

$$\|\varphi_1^*\| \leq \|K_{\varphi_1, q}(\cdot) \mid L_{\kappa_1}(\Omega)\| \leq C_1 \|\varphi_1^*\|, \quad (4.8)$$

где C_1 – постоянная.

Очевидно, что композиция операторов $\varphi_1^* \circ \varphi_2^*$ является ограниченным оператором из $L_q^1(\Omega_2)$ в $L_s^1(\Omega)$. С другой стороны, оператор $\varphi_1^* \circ \varphi_2^*$ порождается гомеоморфизмом $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1: \Omega \rightarrow \Omega_2$.

По теореме 5 отображение $\varphi \in W_{s, \text{loc}}^1(\Omega)$, φ имеет конечное искажение и $K_{\varphi, p}(\cdot) \in L_{\kappa}(\Omega)$, где $1/\kappa = 1/s - 1/p$ ($\kappa = \infty$ при $s = p$). Более того,

$$\|\varphi^*\| \leq \|K_{\varphi, p}(\cdot) \mid L_{\kappa}(\Omega)\| \leq C' \|\varphi^*\|, \quad (4.9)$$

где C' – постоянная.

Из известного неравенства $\|\varphi^*\| \leq \|\varphi_2^*\| \|\varphi_1^*\|$ и соотношений (4.7)–(4.9) получаем (4.6) с постоянной $C = C'$.

4.2. В следующей теореме для гомеоморфизма φ , индуцирующего ограниченный оператор пространств Соболева, получены условия, при выполнении которых обратный гомеоморфизм φ^{-1} индуцирует ограниченный оператор другой пары пространств Соболева, определяемой по первой.

ТЕОРЕМА 6. Пусть гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$

- 1) индуцирует ограниченный оператор $\varphi^*: L_p^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega)$, где $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ для $f \in L_p^1(\Omega')$, $n - 1 \leq q \leq p \leq \infty$,
- 2) имеет конечное коискажение при $n - 1 \leq q \leq p = \infty$.

Тогда (а при $n = 2$ и только тогда) обратное отображение $\varphi^{-1}: \Omega' \rightarrow \Omega$ индуцирует ограниченный оператор $\varphi^{-1*}: L_{q'}^1(\Omega) \rightarrow L_{p'}^1(\Omega')$, где $q' = q/(q - n + 1)$, $p' = p/(p - n + 1)$, по правилу замены переменной и имеет конечное искажение.

Более того,

$$\|\varphi^{-1*}\| \leq \|K_{\varphi^{-1}, q'}(\cdot) \mid L_{\varrho}(\Omega')\| \leq \|K_{\varphi, p}(\cdot) \in L_{\kappa}(\Omega)\|^{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 6 при $n \leq q \leq p < \infty$ доказана в [22]⁸. Здесь мы приведем ее новое доказательство, пригодное для всех показателей суммируемости.

Шаг 1. Доказательство при $n - 1 \leq q \leq p < \infty$ основано на аналитическом описании отображений, индуцирующих ограниченный оператор $\varphi^*: L_p^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega)$, полученном в [22], [28] (см. также теорему 5): для ограниченности этого оператора необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1)–3) теоремы 4. Следовательно, в этом случае верны заключения теоремы 4:

⁸В работе [22] эта теорема сформулирована для показателей суммируемости $n - 1 < q \leq p < \infty$, однако, доказательство при $n - 1 < q < n$ содержит существенный пробел: доказано лишь, что отображение φ^{-1} , обратное к данному гомеоморфизму $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$, обладает ACL-свойством, но не доказано, что оно имеет конечное искажение. Без этого свойства оператор композиции для обратного отображения не существует!

- 4) $\varphi^{-1} \in W_{p', \text{loc}}^1(\Omega')$, где $p' = p/(p - n + 1)$;
- 5) φ^{-1} имеет конечное искажение ($|J(y, \varphi^{-1})| > 0$ почти всюду в Ω' при $n \leq q$);
- 6) $K_{\varphi^{-1}, q'}(\cdot) \in L_{\varrho}(\Omega')$, где $q' = q/(q - n + 1)$, $q' = \infty$ при $q = n - 1$, а $1/\varrho = 1/p' - 1/q'$.

Из предложения 5 при $q' = \infty$ и теоремы 5 при $q' < \infty$ вытекает ограниченность оператора $\varphi^{-1*}: L_{q'}^1(\Omega) \rightarrow L_{p'}^1(\Omega')$, а с учетом теоремы 4 – и оценка на норму (в теореме 5 следует рассмотреть q' вместо p , p' вместо q и ϱ вместо $\varkappa$).

Шаг 2. В случае $n - 1 \leq q \leq p = \infty$ мы находимся в условиях предложения 5. Поэтому $\varphi \in L_q^1(\Omega)$. Следовательно, выполнены все условия следствия 4. Поэтому справедливы его выводы 3)–5). Эти выводы являются условиями теоремы 5 для отображения φ^{-1} . Отсюда по теореме 5 получаем ограниченность оператора $\varphi^{*-1}: L_{q'}^1(\Omega) \rightarrow L_1^1(\Omega')$.

Достаточность условий теоремы 6 при $n = 2$ вытекает из того, что в этом случае свойства отображения иметь конечное искажение или конечное коискажение эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. В работах [59], [60] утверждение теоремы 6 в случае $p = \infty$, $q \geq n - 1$ доказано при более сильном предположении: вместо условия 2 теоремы 6 авторы работ [59], [60] требуют, чтобы гомеоморфизм φ имел конечное искажение и обладал $\mathcal{N}$ -свойством Лузина.

ТЕОРЕМА 7. Пусть гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ индуцирует ограниченный оператор

- 1) $\varphi^*: L_n^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega)$, где $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ для $f \in L_n^1(\Omega')$, $1 \leq q \leq n$. Тогда $|\Omega| < \infty$ и оператор $\varphi^*: L_n^1(\Omega') \rightarrow L_s^1(\Omega)$ ограничен для любого $1 \leq s \leq q$.
- 2) $\varphi^*: L_p^1(\Omega') \rightarrow L_n^1(\Omega)$, где $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ для $f \in L_p^1(\Omega')$, $n < p < \infty$. Тогда $|\Omega'| < \infty$ и оператор $\varphi^*: L_r^1(\Omega') \rightarrow L_n^1(\Omega)$ ограничен для любого $p \leq r < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В силу теоремы 5 гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ индуцирует ограниченный оператор $\varphi^*: L_n^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega)$, $1 \leq q \leq n$, тогда и только тогда, когда $\varphi \in W_{q, \text{loc}}^1(\Omega)$, отображение φ имеет конечное искажение и $K_{\varphi, n}(\cdot) \in L_{\varkappa}(\Omega)$, где $\varkappa = qn/(n - q)$, $1 \leq q < n$. Заметим, что при данных показателях суммируемости условие конечности искажения можно не принимать во внимание, так как в этом случае прообраз множества нулевой меры есть множество нулевой меры [22], [28] и поэтому множество Z нулей якобиана можно считать пустым. Таким образом, в силу неравенства Адамара имеем $1 \leq |D\varphi(x)|^n / |J(x, \varphi)|$ для почти всех точек $x \in \Omega$. Отсюда

$$|\Omega| = \int_{\Omega} dx \leq \int_{\Omega} \left(\frac{|D\varphi(x)|^n}{|J(x, \varphi)|} \right)^{q/(n-q)} dx = \|K_{\varphi, n}(\cdot) \|_{L_{\varkappa}(\Omega)}^{\kappa}.$$

Так как мера $|\Omega|$ конечна, то стандартным образом проверяется, что оператор вложения $i: L_q^1(\Omega) \rightarrow L_s^1(\Omega)$, $s \in [1, q]$, ограничен. Отсюда непосредственно вытекает, что оператор $\varphi^*: L_n^1(\Omega') \rightarrow L_s^1(\Omega)$ как композиция⁹ данного оператора

⁹Здесь очевидно отождествляются оператор вложения i с индуцированным оператором Id^* , а также φ^* и $i \circ \varphi^*$.

$\varphi^*: L_n^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega)$ и оператора вложения $i: L_q^1(\Omega) \rightarrow L_s^1(\Omega)$, $s \in [1, q]$, порожденного тождественным отображением $\text{Id}: \Omega \rightarrow \Omega$, ограничен для любого $1 \leq s \leq q$.

2) Пусть теперь оператор $\varphi^*: L_p^1(\Omega') \rightarrow L_n^1(\Omega)$, $n < p < \infty$, ограничен. В силу теоремы 6 будет также ограниченным и оператор $\varphi^{-1*}: L_n^1(\Omega) \rightarrow L_{p'}^1(\Omega')$, где $p' = p/(p - n + 1)$. В силу первой части теоремы область Ω' имеет конечную меру. Поэтому оператор вложения $i: L_r^1(\Omega') \rightarrow L_p^1(\Omega')$, $r \in [p, \infty)$, ограничен.

Отсюда непосредственно вытекает, что оператор $\varphi^*: L_r^1(\Omega') \rightarrow L_n^1(\Omega)$ ограничен для любого $p < r < \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Первое утверждение теоремы 7 сформулировано в работе [60] для $q = n - 1$. Однако доказательство, приведенное в [60], неполное: авторы работы [60] не отметили, что $|Z| = 0$. Без этого свойства мера области Ω не оценивается сверху.

Основные положения настоящей статьи сформулированы в работах [64], [65].

В заключение автор выражает благодарность Б. Боярскому и В. М. Миклюкову за полезные замечания к предварительному варианту настоящей работы. Автор выражает также искреннюю признательность рецензентам за многочисленные замечания, которые помогли придать рукописи завершённую форму.

Список литературы

- [1] G. D. Mostow, “Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **34**:1 (1968), 53–104.
- [2] J. Väisälä, *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [3] С. Л. Соболев, “О некоторых группах преобразований n -мерного пространства”, *Докл. АН СССР*, **32**:6 (1941), 380–382.
- [4] В. Г. Мазья, *Классы множеств и теоремы вложения функциональных классов. Некоторые проблемы теории эллиптических операторов*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, ЛГУ, Л., 1961.
- [5] F. W. Gehring, “Lipschitz mappings and the p -capacity of rings in n -space”, *Advances in the theory of Riemann surfaces* (Stony Brook, NY, 1969), Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971, 175–193.
- [6] С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, “Структурные изоморфизмы пространств W_n^1 и квазиконформные отображения”, *Сиб. матем. журн.*, **16**:2 (1975), 224–246; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, V. M. Gol'dshtein, “Lattice isomorphisms of the spaces W_n^1 and quasiconformal mappings”, *Siberian Math. J.*, **16**:2 (1975), 174–189.
- [7] С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, “Функциональные характеристики квазиизометрических отображений”, *Сиб. матем. журн.*, **17**:4 (1976), 768–773; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, V. M. Gol'dshtein, “Functional characteristics of quasiisometric mappings”, *Siberian Math. J.*, **17**:4 (1976), 580–584.
- [8] В. М. Гольдштейн, А. С. Романов, “Об отображениях, сохраняющих пространства Соболева”, *Сиб. мат. журн.*, **25**:3 (1984), 55–61; англ. пер.: V. M. Gol'dshtein, A. S. Romanov, “Transformations that preserve Sobolev spaces”, *Siberian Math. J.*, **25**:3 (1984), 382–388.
- [9] S. K. Vodop'yanov, “Composition operators on Sobolev spaces”, *Complex analysis and dynamical systems II* (Nahariya, Israel, 2003), Contemp. Math., **382**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 401–415.

- [10] С. К. Водопьянов, " L_p -теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах", *Современные проблемы геометрии и анализа*, Наука, Новосибирск, 1989, 45–89.
- [11] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators*, Pure Appl. Math., **7**, Intersci. Publ., New York–London, 1958.
- [12] M. Nakai, "Algebraic criterion on quasiconformal equivalence of Riemann surfaces", *Nagoya Math. J.*, **16** (1960), 157–184.
- [13] L. G. Lewis, "Quasiconformal mappings and Royden algebras in space", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **158**:2 (1971), 481–492.
- [14] С. К. Водопьянов, *Формула Тейлора и функциональные пространства*, НГУ, Новосибирск, 1988.
- [15] С. К. Водопьянов, "Отображения однородных групп и вложения функциональных пространств", *Сиб. мат. журн.*, **30**:5 (1989), 25–41; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, "Mappings of homogeneous groups and imbeddings of functional spaces", *Siberian Math. J.*, **30**:5 (1989), 685–698.
- [16] С. К. Водопьянов, *Геометрические аспекты пространств обобщенно-дифференцируемых функций*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Ин-т математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, 1992.
- [17] С. К. Водопьянов, "Весовые пространства Соболева и теория отображений", *Тез. докладов Всесоюзной математической школы "Теория потенциала"* (Кацивели, 1991), Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1991, 7.
- [18] С. К. Водопьянов, *Функционально-теоретический подход к некоторым задачам теории пространственных квазиконформных отображений*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Сиб. отделение АН СССР, Ин-т математики, Новосибирск, 1975.
- [19] С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, "Квазиконформные отображения и пространства функций с первыми обобщенными производными", *Сиб. матем. журн.*, **17**:3 (1976), 515–531; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, V. M. Gol'dshtein, "Quasiconformal mappings and spaces of functions with generalized first derivatives", *Siberian Math. J.*, **17**:3 (1976), 399–411.
- [20] T. Iwaniec, V. Šverák, "On mappings with integrable dilatation", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118**:1 (1993), 181–188.
- [21] А. Д. Ухлов, "Отображения, порождающие вложения пространств Соболева", *Сиб. матем. журн.*, **34**:1 (1993), 185–192; англ. пер.: A. D. Ukhlov, "On mappings generating the embeddings of Sobolev spaces", *Siberian Math. J.*, **34**:1 (1993), 165–171.
- [22] С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, "Пространства Соболева и (P, Q) -квазиконформные отображения групп Карно", *Сиб. матем. журн.*, **39**:4 (1998), 776–795; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, A. D. Ukhlov, "Sobolev spaces and (P, Q) -quasiconformal mappings of Carnot groups", *Siberian Math. J.*, **39**:4 (1998), 665–682.
- [23] В. М. Миклюков, "Об искажении емкости при квазиконформных в среднем отображениях", *Материалы итог. научн. конф. по матем. и мех. сек. мат.*, Томский гос. ун-т, Томск, 1972, 43–45.
- [24] В. И. Кругликов, "Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем", *Матем. сб.*, **130(172)**:2(6) (1986), 185–206; англ. пер.: V. I. Kruglikov, "Capacity of condensers and spatial mappings quasiconformal in the mean", *Math. USSR-Sb.*, **58**:1 (1987), 185–205.
- [25] T. Radó, P. V. Reichelderfer, *Continuous transformations in analysis with an introduction to algebraic topology*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1955.

- [26] O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, “Definitions for quasiregular mappings”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No.*, **448** (1969), 1–40.
- [27] С. К. Водопьянов, “Операторы подстановки пространств Соболева”, *Современные проблемы теории функций и их приложения* (Саратов, 2002), Саратов, 2002, 42–43.
- [28] С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, “Операторы суперпозиции в пространствах Соболева”, *Изв. вузов. Матем.*, 2002, № 10, 11–33; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, A. D. Ukhlov, “Superposition operators in Sobolev spaces”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **46:10** (2002), 9–31.
- [29] С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, “Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. I”, *Матем. тр.*, **6:2** (2003), 14–65; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, S. K. Ukhlov, “Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I”, *Siberian Adv. Math.*, **14:4** (2004), 78–125.
- [30] А. С. Романов, “О замене переменной в пространствах потенциалов Бесселя и Рисса”, *Функциональный анализ и математическая физика*, Сиб. отделение АН СССР, Ин-т математики, Новосибирск, 1985, 117–133.
- [31] J. M. Ball, “Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **63:4** (1976), 337–403.
- [32] J. M. Ball, “Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **88:3–4** (1981), 315–328.
- [33] J. J. Manfredi, E. Villamor, “Mappings with integrable dilatation in higher dimensions”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **32:2** (1995), 235–240.
- [34] С. К. Водопьянов, “Топологические и геометрические свойства отображений классов Соболева с суммируемым якобианом. I”, *Сиб. матем. журн.*, **41:1** (2000), 23–48; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, “Topological and geometrical properties of mappings with summable Jacobian in Sobolev classes. I”, *Siberian Math. J.*, **41:1** (2000), 19–39.
- [35] J. Kauhanen, P. Koskela, J. Malý, “Mappings of finite distortion: discreteness and openness”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **160:2** (2001), 135–151.
- [36] J. Kauhanen, P. Koskela, J. Malý, “Mappings of finite distortion: condition N ”, *Michigan Math. J.*, **49:1** (2001), 169–181.
- [37] J. Kauhanen, P. Koskela, J. Malý, “Mappings of finite distortion: sharp Orlicz-conditions”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **19:3** (2003), 857–872.
- [38] P. Koskela, J. Onninen, “Mappings of finite distortion: capacity and modulus inequalities”, *J. Reine Angew. Math.*, **599** (2006), 1–26.
- [39] A. D. Ukhlov, S. K. Vodopyanov, “Mappings with bounded (P, Q) -distortion on Carnot groups”, *Bull. Sci. Math.*, **134:6** (2010), 605–634.
- [40] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.
- [41] M. Troyanov, S. Vodop'yanov, “Liouville type theorems for mappings with bounded (co)-distortion”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **52:6** (2002), 1753–1784.
- [42] С. К. Водопьянов, “Пространства дифференциальных форм и отображения с контролируемым искажением”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74:4** (2010), 5–32; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, “Spaces of differential forms and maps with controlled distortion”, *Izv. Math.*, **74:4** (2010), 663–689.
- [43] P. Koskela, “Regularity of the inverse of a Sobolev homeomorphism”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. III (Hyderabad, India, 2010), Hindustan Book Agency, New Dehli, 2010, 1411–1416.
- [44] W. Stepanoff, “Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale”, *Матем. сб.*, **32:3** (1925), 511–527.

- [45] С. Сакс, *Теория интеграла*, Факториал Пресс, М., 2004; пер. с англ.: S. Saks, *Theory of the integral*, Dover Publ., New York, 1937.
- [46] H. Whitney, “On totally differentiable and smooth functions”, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 143–159.
- [47] Х. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987; пер. с англ.: H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [48] M. Giaquinta, G. Modica, J. Souček, *Cartesian currents in the calculus of variations*, v. I, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **37**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [49] P. Hajlasz, “Change of variables formula under minimal assumptions”, *Colloq. Math.*, **64**:1 (1993), 93–101.
- [50] M. Csörnyei, S. Hencl, Y. Malý, “Homeomorphisms in the Sobolev space $W^{1,n-1}$ ”, *J. Reine Angew. Math.*, **644** (2010), 221–235.
- [51] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Гостехиздат, М.–Л., 1950; англ. пер.: I. P. Natanson, *Theory of functions of a real variable*, Frederick Ungar Publ. Co., New York, 1955.
- [52] Ю. А. Пешкичев, “Обратные отображения для гомеоморфизмов класса BL”, *Матем. заметки*, **53**:5 (1993), 98–101; англ. пер.: Yu. A. Peshkichev, “Inverse mappings for homeomorphisms of class BL”, *Math. Notes*, **53**:5 (1993), 520–522.
- [53] А. Д. Ухлов, “Дифференциальные и геометрические свойства соболевских отображений”, *Матем. заметки*, **75**:2 (2004), 317–320; англ. пер.: A. D. Ukhlov, “Differential and geometric properties of sobolev mappings”, *Math. Notes*, **75**:2 (2004), 291–294.
- [54] Ю. Г. Решетняк, “Некоторые геометрические свойства функций и отображений с обобщенными производными”, *Сиб. матем. журн.*, **7**:4 (1966), 886–919; англ. пер.: Yu. G. Reshetnyak, “Some geometrical properties of functions and mappings with generalized derivatives”, *Math. Notes*, **7**:4 (1966), 704–732.
- [55] С. К. Водопьянов, “О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно”, *Матем. сб.*, **194**:6 (2003), 67–86; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, “Differentiability of maps of Carnot groups of Sobolev classes”, *Sb. Math.*, **194**:6 (2003), 857–877.
- [56] S. Hencl, P. Koskela, “Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **180**:1 (2006), 75–95.
- [57] С. П. Пономарев, “Об N -свойстве гомеоморфизмов класса W_p^1 ”, *Сиб. матем. журн.*, **28**:2 (1987), 140–148; англ. пер.: S. P. Ponomarev, “Property N of homeomorphisms of the class W_p^1 ”, *Siberian Math. J.*, **28**:2 (1987), 291–298.
- [58] S. Hencl, P. Koskela, Y. Malý, “Regularity of the inverse of a Sobolev homeomorphism in space”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **132**:6 (2006), 1267–1285.
- [59] V. Gold'shtein, A. Ukhlov, “Sobolev homeomorphisms and composition operators”, *Around the research of Vladimir Maz'ya*, v. I, *Int. Math. Ser. (N. Y.)*, **11**, Springer-Verlag, New York, 2010, 207–220.
- [60] V. Gold'shtein, A. Ukhlov, “About homeomorphisms that induce composition operators on Sobolev spaces”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **55**:8–10 (2010), 833–845.
- [61] Ю. Г. Решетняк, “К теории соболевских классов функций со значениями в метрическом пространстве”, *Сиб. матем. журн.*, **47**:1 (2006), 146–168; англ. пер.: Yu. G. Reshetnyak, “To the theory of Sobolev-type classes of functions with values in a metric space”, *Siberian Math. J.*, **47**:1 (2006), 117–134.
- [62] В. Г. Мазья, *Пространства Соболева*, Изд-во ЛГУ, Л., 1985; англ. пер.: V. G. Maz'ya, *Sobolev spaces*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1985.

- [63] S. Hencl, P. Koskela, “Mappings of finite distortion: composition operator”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **33**:1 (2008), 65–80.
- [64] С. К. Водопьянов, “О регулярности отображений, обратных к соболевским”, *Докл. РАН*, **423**:5 (2008), 592–596; англ. пер.: S. K. Vodop’yanov, “On regularity of mappings inverse to Sobolev mappings”, *Dokl. Math.*, **78**:3 (2008), 891–895.
- [65] С. К. Водопьянов, “Отображения с конечным коискажением и классы функций Соболева”, *Докл. РАН*, **440**:3 (2011), 301–305; англ. пер.: S. K. Vodop’yanov, “Mappings of finite codistortion and Sobolev classes of functions”, *Dokl. Math.*, **84**:2 (2011), 640–644.

С. К. Водопьянов (S. K. Vodop’yanov)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет
E-mail: vodopis@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
20.09.2010 и 05.08.2012