Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Пастухова, А. С. Хрипунова, Некоторые варианты принципа компенсированной компактности, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 9, 135–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7793>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:06:30

УДК 517.956.4

С. Е. Пастухова, А. С. Хрипунова

Некоторые варианты принципа компенсированной компактности

Изучается сходимость в $L^1(\Omega)$, где Ω – область в $\mathbb{R}^d$, произведения соленоидального вектора w_ε и градиента ∇u_ε , слабо сходящихся в пространствах $L^\gamma(\Omega)^d$ и $L^\alpha(\Omega)^d$, причем $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} > 1$, т.е. нарушено основное условие классической *div-curl* леммы. Тем не менее при определенных дополнительных условиях сохраняется сходимость (в смысле распределений в Ω)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_\varepsilon \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla u_\varepsilon = w \cdot \nabla u,$$

которая имеет место в рамках *div-curl* леммы.

Новые доказанные нами варианты принципа компенсированной компактности применимы в усреднении и теории G -сходимости монотонных операторов с нестандартными условиями коэрцитивности и роста, в том числе вырожденных.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: компенсированная компактность, Γ -сходимость, интегрант с переменным показателем, вырожденный вес, нестандартные условия коэрцитивности и роста.

Изучим сходимость в $L^1(\Omega)$ произведения $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$ соленоидального вектора w_ε и градиента ∇u_ε , слабо сходящихся в $L^\gamma(\Omega)^d$ и $L^\alpha(\Omega)^d$ соответственно, где Ω – область в $\mathbb{R}^d$. Классическая *div-curl* лемма (или лемма о компенсированной компактности) относится к случаю $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = 1$, $\alpha > 1$, $\gamma > 1$, и утверждает сходимость произведения в смысле распределений в Ω к естественному пределу $w \cdot \nabla u$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx = \int_{\Omega} \varphi w \cdot \nabla u dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1)$$

Поскольку этот результат носит локальный характер, без ограничения общности можно предполагать, что Ω – ограниченная область с достаточно регулярной границей.

В настоящей работе рассмотрено обобщение *div-curl* леммы с сохранением сходимости (1) в ситуации, когда приведенное выше условие сопряжения по Гёльдеру для показателей α и γ нарушено: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} > 1$. Вместо него выполнены дополнительные условия равномерной ограниченности семейств $w_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon$ и, быть может, повышенной их регулярности. Дополнительные условия задаются через сопряженные по Юнгу интегранты нестандартного типа и их Γ -пределы. Это и оказывается компенсирующим моментом для сохранения сходимости (1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 11-01-00331 и № 09-01-12157).

Подобные варианты леммы о компенсированной компактности находят применение, например, в усреднении монотонных уравнений, имеющих либо переменный показатель нелинейности, либо вырожденный вес.

Допускается вес:

- 1) принадлежащий подходящему классу Макенхаупта;
- 2) суммируемый вместе с обратным с достаточно большой степенью;
- 3) суммируемый вместе со своим градиентом.

Веса типов 2), 3) менее изучены и привлекают наше внимание прежде всего.

Некоторые из полученных здесь вариантов принципа компенсированной компактности, по-видимому, могут найти применение в теории G -сходимости монотонных операторов с нестандартными условиями коэрцитивности и роста, до сих пор мало изученной.

§ 1. Классическая *div-curl* лемма и ее обобщения

Согласно *div-curl* лемме Тартара–Мюра (см. [1]), если при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad (2_1)$$

$$w_\varepsilon \rightharpoonup w \quad \text{в } L^{\alpha'}(\Omega)^d, \quad (2_2)$$

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1, \quad (2_3)$$

$$\operatorname{div} w_\varepsilon = 0 \quad \text{в смысле распределений в } \Omega, \quad (3)$$

то имеет место сходимость (1).

Доказательство этого утверждения укладывается в цепочку из трех переходов:

$$\int_{\Omega} \varphi w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx = - \int_{\Omega} w_\varepsilon \cdot (u_\varepsilon \nabla \varphi) \, dx, \quad (4_1)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w_\varepsilon \cdot (u_\varepsilon \nabla \varphi) \, dx = \int_{\Omega} w \cdot (u \nabla \varphi) \, dx, \quad (4_2)$$

$$- \int_{\Omega} w \cdot (u \nabla \varphi) \, dx = \int_{\Omega} \varphi w \cdot \nabla u \, dx. \quad (4_3)$$

Использованы следующие соображения. Во-первых, равенства (4₁) и (4₃) записаны в силу соленоидальности векторов w_ε и w . Поскольку $w_\varepsilon, w \in L^{\alpha'}(\Omega)^d$, это свойство можно понимать по замыканию в расширенном (по сравнению с (3)) смысле – через интегральные тождества

$$\int_{\Omega} w_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dx = 0, \quad \int_{\Omega} w \cdot \nabla \psi \, dx = 0 \quad \forall \psi \in W_0^{1,\alpha}(\Omega),$$

где $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ – замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$.

Во-вторых, в силу слабой сходимости (2₁) и компактности вложения $W^{1,\alpha}(\Omega)$ в $L^\alpha(\Omega)$ имеем сильную сходимость $u_\varepsilon \nabla \varphi \rightarrow u \nabla \varphi$ в $L^\alpha(\Omega)^d$, что позволяет вместе со слабой сходимостью (2₂) осуществить предельный переход (4₂).

Так как ∇u_ε и w_ε ограничены в $L^\alpha(\Omega)^d$ и $L^{\alpha'}(\Omega)^d$ соответственно, то по неравенству Гёльдера произведение $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$ ограничено в $L^1(\Omega)$. Поэтому сходимость (1) означает, что

$$w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup w \cdot \nabla u dx \quad (5)$$

в смысле слабой сходимости мер на Ω .

Следующее обобщение *div-curl* леммы получено В. В. Жиковым и С. Е. Пастуховой в работе [2].

ОБОБЩЕННАЯ ЛЕММА О КОМПЕНСИРОВАННОЙ КОМПАКТНОСТИ. Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, выполнено:

- (i) $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$;
- (ii) $w_\varepsilon \rightharpoonup w$ в $L^{\beta'}(\Omega)^d$, $\operatorname{div} w_\varepsilon = 0$;
- (iii) показатели α, β подчинены неравенствам

$$1 < \alpha \leq \beta < \alpha_* = \begin{cases} \frac{\alpha(d-1)}{(d-1)-\alpha}, & \text{если } \alpha < d-1, \\ +\infty, & \text{если } \alpha \geq d-1; \end{cases}$$

- (iv) $u_\varepsilon \in W^{1,\beta}(\Omega)$ или $w_\varepsilon \in L^{\alpha'}(\Omega)^d$;

- (v) последовательность $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$ ограничена в $L^1(\Omega)$.

Тогда, быть может, по подпоследовательности в смысле слабой сходимости мер

$$w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup d\mu, \quad (6_1)$$

$$d\mu = w \cdot \nabla u dx + d\mu^s, \quad (6_2)$$

где μ^s – сингулярная (относительно меры Лебега) компонента предельной меры.

По поводу этой леммы сделаем некоторые замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В отличие от ситуации (2₁)–(2₃) предположения (i)–(iii) не дают ограниченности семейства $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$ в $L^1(\Omega)$, и это свойство специально оговаривается в п. (v).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие (iv) означает повышенную суммируемость одного из множителей ∇u_ε или w_ε при фиксированном ε , так что верно равенство

$$\int_{\Omega} w_\varepsilon \cdot \nabla(u_\varepsilon \varphi) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (7)$$

использованное ранее при переходе (4₁).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В условиях (i), (ii) предельный переход (4₂) можно осуществить на основе соображений компактности так же, как ранее, если $\beta < \alpha^*$, где α^* – показатель Соболева для размерности d , и, следовательно, $W^{1,\alpha}(\Omega)$ компактно вложено в $L^\beta(\Omega)$. Вариант леммы о компенсированной компактности с ограничением на показатели $1 < \alpha \leq \beta < \alpha^*$ в условии (iii) доказан В. В. Жиковым в работе [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Преобразование (43) не проходит в условиях (i)–(iii) даже при $\beta < \alpha^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Известны примеры, в которых предельная мера μ из (61), (62) имеет нетривиальную сингулярную компоненту, т.е. $\mu^s \neq 0$ (см. [3]–[6]). При этом показатели α, β из условий (i)–(iv) могут быть сколь угодно близки друг к другу.

§ 2. Постановка задачи и основные результаты

Нас интересует вопрос: когда предельная мера μ в (61), (62) не имеет сингулярной компоненты и сходимость (61) принимает вид (5)? Для его решения требуются условия равномерной ограниченности, несколько иные, чем предусмотренные в (i)–(v). Новые требования должны создавать промежуточную ситуацию между (21)–(23) и (i)–(v). Они будут сформулированы в терминах, зависящих от ε интегрантов нестандартного типа и их Γ -пределов.

Напомним некоторые понятия из теории Γ -сходимости (см. [7], [8]).

Рассмотрим класс $S_{\alpha,\beta}$ интегрантов $f(x, \xi)$, измеримых по $x \in \Omega$, выпуклых по $\xi \in \mathbb{R}^d$ и удовлетворяющих двусторонней оценке

$$-c_0 + c_1|\xi|^\alpha \leq f(x, \xi) \leq c_0 + c_2|\xi|^\beta \quad (8)$$

с константами $c_0 \geq 0$, $c_1, c_2 > 0$ и постоянными показателями α и β такими, что $1 < \alpha \leq \beta < \infty$. Соответствующие им функционалы имеют вид

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, \nabla u) dx.$$

Пусть f, f_ε – интегранты из указанного класса. При $\alpha \neq \beta$ имеются два типа Γ -сходимости интегрантов f_ε к f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что f есть Γ_1 -предел f_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, $f_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma_1} f$, если для любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$ с липшицевой границей выполнено:

- 1) как только $u_\varepsilon, u \in W^{1,\alpha}(\Omega')$, $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega')$, так

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega'} f_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega'} f(x, \nabla u) dx; \quad (9)$$

- 2) для любого $u \in W^{1,\beta}(\Omega')$ найдется последовательность $u_\varepsilon \in W^{1,\alpha}(\Omega')$ такая, что $u_\varepsilon - u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega')$, $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega')$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega'} f_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) dx = \int_{\Omega'} f(x, \nabla u) dx. \quad (10)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что f есть Γ_2 -предел f_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. $f_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma_2} f$, если для любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$ с липшицевой границей выполнено:

- 1) как только $u_\varepsilon \in W^{1,\beta}(\Omega')$, $u \in W^{1,\alpha}(\Omega')$, $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega')$, так верно (9);
- 2) для любого $u \in W^{1,\beta}(\Omega')$ найдется последовательность $u_\varepsilon \in W^{1,\beta}(\Omega')$ такая, что $u_\varepsilon - u \in W_0^{1,\beta}(\Omega')$, $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega')$ и верно (10).

Последовательности u_ε из свойства 2) в определениях 1 и 2 принято называть Γ_1 - и Γ_2 -реализующими соответственно.

Видим, что определение 2 отличается от определения 1 только тем, что в обоих свойствах 1) и 2) аппроксимирующие функции должны быть более регулярными, т.е. вместо $u_\varepsilon \in W^{1,\alpha}(\Omega')$ требуется $u_\varepsilon \in W^{1,\beta}(\Omega')$ (можно было взять $u_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})$). Это обстоятельство существенно различает два типа сходимости. Известны примеры (см. [9]) несовпадения Γ_1 - и Γ_2 -пределов для одной и той же последовательности f_ε .

В работе [8] доказана теорема компактности: класс $S_{\alpha,\beta}$ компактен относительно Γ_1 -сходимости (или Γ_2 -сходимости). Иными словами, из любой последовательности интегрантов, принадлежащих классу $S_{\alpha,\beta}$, можно выбрать Γ_1 -сходящуюся (или Γ_2 -сходящуюся) подпоследовательность, причем предельный интегрант остается в классе $S_{\alpha,\beta}$.

Напомним, что интегрант f из класса $S_{\alpha,\beta}$ называется *регулярным*, если для любой $u \in W^{1,1}(\Omega)$, $F(u) < \infty$, найдется последовательность

$$u_j \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad u_j \rightarrow u \quad \text{в } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad F(u_j) \rightarrow F(u). \quad (11)$$

ПРИМЕР. Известно, что регулярными являются:

- а) интегрант $f(x, \xi) = f(\xi)$, не зависящий от пространственной переменной (см. [10]);
- б) степенной интегрант $f(x, \xi) = |\xi|^{p(x)}$, где показатель $p(x)$ лог-гёльдеров, т.е.

$$|p(x) - p(x')| \leq \frac{k}{\ln(1/|x - x'|)}, \quad x, x' \in \Omega, \quad |x - x'| \leq \frac{1}{2}, \quad (12)$$

(условие Жикова–Фан-Сянлина; см. [11], [12]).

Далее, $f^*(x, \cdot)$ – интегрант, сопряженный к $f(x, \cdot)$ по Юнгу (см. [7; гл. XIII], [10; гл. I]),

$$f^*(x, \xi) = \sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} (\xi \cdot \eta - f(x, \eta)).$$

Непосредственно из определения вытекают следующие утверждения:

$$\eta \cdot \xi \leq f(x, \eta) + f^*(x, \xi)$$

(неравенство Юнга) и

$$f \in S_{\alpha,\beta} \iff f^* \in S_{\beta',\alpha'}. \quad (13)$$

Наряду с функционалами $F(u)$ и $F_\varepsilon(u)$ будем рассматривать функционалы с сопряженными интегрантами

$$G(v) = \int_{\Omega} f^*(x, v(x)) dx, \quad G_\varepsilon = \int_{\Omega} f_\varepsilon^*(x, v(x)) dx, \quad v \in L_{\text{sol}}^{\beta'}(\Omega),$$

где

$$L_{\text{sol}}^\gamma(\Omega) = \{v \in L^\gamma(\Omega)^d, \operatorname{div} v = 0 \text{ (в смысле распределений в } \Omega)\}, \quad \gamma \geq 1.$$

Введем также релаксационные функционалы

$$\begin{aligned} \bar{F}(u) &= \inf \left\{ \liminf_{j \rightarrow \infty} F(u_j), u_j \in W^{1,\beta}(\Omega), u_j \rightarrow u \text{ в } W^{1,\alpha}(\Omega) \right\}, \\ \bar{G}(u) &= \inf \left\{ \liminf_{j \rightarrow \infty} G(v_j), v_j \in L_{\text{sol}}^{\alpha'}(\Omega), v_j \rightarrow v \text{ в } L_{\text{sol}}^{\beta'}(\Omega) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь в качестве аппроксимаций u_j и v_j можно брать гладкие функции, так как функционалы $F(u)$ и $G(v)$ непрерывны на $W^{1,\beta}(\Omega)$ и $L_{\text{sol}}^{\alpha'}(\Omega)$ соответственно в силу правой оценки (8) для интегранта $f(x, \xi)$ и аналогичной оценки для $f^*(x, \xi)$.

Из определения релаксационных функционалов видно, что

$$\bar{F}(u) < \infty \implies \exists u_j \in W^{1,\beta}(\Omega): u_j \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,\alpha}(\Omega), F(u_j) \rightarrow \bar{F}(u), \quad (15)$$

$$\bar{G}(v) < \infty \implies \exists v_j \in L_{\text{sol}}^{\alpha'}(\Omega): v_j \rightarrow v \text{ в } L_{\text{sol}}^{\beta'}(\Omega), G(v_j) \rightarrow \bar{G}(v). \quad (16)$$

Говорят, что интегрант $f(x, \xi)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, если

$$f(x, \pm 2\xi) \leq c_3 f(x, \xi) + 1, \quad c_3 = \text{const} > 0. \quad (17)$$

Наши основные результаты сформулированы в теоремах 1 и 2. Далее предполагаем, что интегранты f_ε , f принадлежат классу $S_{\alpha,\beta}$ с α и β , подчиненными неравенству

$$1 < \alpha \leq \beta < \alpha^* = \begin{cases} \frac{\alpha d}{d - \alpha}, & \text{если } \alpha < d, \\ +\infty, & \text{если } \alpha \geq d. \end{cases} \quad (18)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть:

- (i) $f_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma_2} f$;
- (ii) предельный интегрант f регулярен и удовлетворяет Δ_2 -условию;
- (iii) $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) < \infty$, $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$;
- (iv) $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(w_\varepsilon) < \infty$, $w_\varepsilon \rightharpoonup w$ в $L_{\text{sol}}^{\beta'}(\Omega)$;
- (vi) $\bar{F}_\varepsilon(u_\varepsilon) < \infty$ и выполнено Δ_2 -условие для f_ε^* при каждом фиксированном ε .

Тогда в смысле слабой сходимости мер $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup w \cdot \nabla u dx$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть:

- (i) $f_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma_1} f$;
- (ii) предельный интегрант f регулярен и удовлетворяет Δ_2 -условию;
- (iii) $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) < \infty$, $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$;
- (iv) $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(w_\varepsilon) < \infty$, $w_\varepsilon \rightharpoonup w$ в $L_{\text{sol}}^{\beta'}(\Omega)$;
- (vi) $\bar{G}_\varepsilon(w_\varepsilon) < \infty$ и выполнено Δ_2 -условие для f_ε при каждом фиксированном ε .

Тогда в смысле слабой сходимости мер $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup w \cdot \nabla u dx$.

Доказательство теорем 1 и 2 будет приведено в §5. Там же приведены более простые и конкретные варианты теорем 1 и 2 для степенных интегрантов с переменным показателем.

Отметим сейчас одно полезное свойство Γ -предельных интегрантов, связанное с Δ_2 -условием.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть для интегрантов $f_\varepsilon(x, \xi)$, принадлежащих классу $S_{\alpha,\beta}$, Δ_2 -условие выполнено равномерно по ε , т.е. $f_\varepsilon(x, \pm 2\xi) \leq c_3 f_\varepsilon(x, \xi) + 1$. Тогда оно выполнено для Γ -предельных интегрантов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности рассмотрим случай $f_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma_1} f$. По свойству 2) из определения 1 Γ_1 -предела для функции $u = \xi \cdot x$ найдется такая последовательность u_ε , что $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega')$, $\Omega' \subset \Omega$, и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega'} f_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) dx = \int_{\Omega'} f(x, \xi) dx.$$

Одновременно по свойству (9) полунепрерывности снизу

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega'} f_\varepsilon(x, \pm 2\nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega'} f(x, \pm 2\xi) dx.$$

При каждом фиксированном ε в силу основного предположения для интегрантов f_ε имеем

$$\int_{\Omega'} f_\varepsilon(x, \pm 2\nabla u_\varepsilon) dx \leq \int_{\Omega'} (c_3 f_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) + 1) dx.$$

Отсюда в силу приведенных выше предельных соотношений выводим

$$\int_{\Omega'} f(x, \pm 2\xi) dx \leq \int_{\Omega'} (c_3 f(x, \xi) + 1) dx,$$

что в силу произвольности подобласти $\Omega' \subset \Omega$ дает искомое неравенство (17). Предложение доказано.

Учитывая предложение 1, можно дать версии теорем 1 и 2 с несколько иными условиями. Например, верна

ТЕОРЕМА 2'. Пусть интегранты f_ε и f таковы, что $f_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma_1} f$, f регулярен, для f_ε выполнено равномерное по ε Δ_2 -условие. Пусть семейства u_ε , w_ε удовлетворяют условиям (iii), (iv) и $\overline{G}_\varepsilon(w_\varepsilon) < \infty$ при каждом фиксированном ε . Тогда $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup w \cdot \nabla u dx$.

§ 3. Предварительные результаты

3.1. Вначале напомним классические теоремы относительно сходимости в $L^1(\Omega)$ и приведем некоторые следствия из них, полезные в дальнейшем.

КРИТЕРИЙ СЛАБОЙ КОМПАКТНОСТИ. Эквивалентны утверждения:

- а) семейство v_ε слабо компактно в $L^1(\Omega)$;
- б) семейство v_ε равномерно интегрируемо, т.е.

$$\forall \tau > 0 \quad \exists \delta = \delta(\tau): \int_B |v_\varepsilon| dx < \tau$$

для любого измеримого множества $B \subset \Omega$ с лебеговой мерой $|B| \leq \delta$.

ТЕОРЕМА ЛЕБЕГА. Если v_ε равномерно интегрируема и $v_\varepsilon(x) \rightarrow v(x)$ п.в. в Ω , то $v_\varepsilon \rightarrow v$ в $L^1(\Omega)$.

ТЕОРЕМА ШЕФФЕ. Пусть $v_\varepsilon \geq 0$, $v_\varepsilon(x) \rightarrow v(x)$ п.в. в Ω и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v_\varepsilon dx = \int_{\Omega} v dx.$$

Тогда $v_\varepsilon \rightarrow v$ в $L^1(\Omega)$.

Непосредственным следствием теоремы Шеффе является

ЛЕММА 1. Для последовательности $\{u_j\}$ из определения регулярного интегранта f (см. (11)) имеем сходимость

$$f(x, \nabla u_j) \rightarrow f(x, \nabla u) \quad \text{в } L^1(\Omega). \quad (19)$$

Далее будет использоваться

ТЕОРЕМА ЖИКОВА (о релаксационном функционале; см. [12]). 1) Если f^* удовлетворяет Δ_2 -условию, то

$$\overline{F}(u) < \infty \implies \overline{F}(u) = F(u). \quad (20)$$

2) Если f удовлетворяет Δ_2 -условию, то

$$\overline{G}(w) < \infty \implies \overline{G}(w) = G(w). \quad (21)$$

Аналогом леммы 1 является

ЛЕММА 1'. Если f^* удовлетворяет Δ_2 -условию и последовательность u_j реализует свойства (15), то имеет место сходимость (19).

Действительно, поскольку в силу (15) и (20) $F(u_j) \rightarrow F(u)$, то по теореме Шеффе выводим (19).

Аналогично (на основе утверждения (21) и теоремы Шеффе) доказывается

ЛЕММА 1''. Если f удовлетворяет Δ_2 -условию и последовательность w_j реализует свойства (16), то

$$f^*(x, w_j) \rightarrow f^*(x, w) \quad \text{в } L^1(\Omega). \quad (22)$$

3.2. Напомним, что вектор $w \in L^1(\Omega)^d$ соленоидален, если

$$\int_{\Omega} w \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Расширим множество пробных функций φ в этом определении.

ЛЕММА 2. Пусть f регулярен и f^* удовлетворяет Δ_2 -условию. Тогда если

$$f(x, \nabla u) \in L^1(\Omega), \quad (23_1)$$

$$f^*(x, w) \in L^1(\Omega), \quad (23_2)$$

$$\operatorname{div} w = 0, \quad (23_3)$$

то

$$\int_{\Omega} w \cdot \nabla(u\varphi) \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u_j – та же последовательность, что в лемме 1. Не ограничивая общности, считаем, что $\nabla u_j(x) \rightarrow \nabla u(x)$ п.в. в Ω и (по теореме вложения; см. соотношение на показатели α, β) $u_j \rightarrow u$ в $L^\beta(\Omega)$. Поскольку $f^*(x, \xi) \in S_{\beta', \alpha'}$ (см. [13]), то из (23₂) вытекает $w \in L^{\beta'}(\Omega)^d$. Тогда

$$wu_j \rightarrow wu \quad \text{в } L^1(\Omega). \quad (25)$$

Используя неравенство Юнга и Δ_2 -условие для f^* , имеем

$$\begin{aligned} |w \cdot \nabla u_j| &= \frac{1}{2} |2w \cdot \nabla u_j| \leq \frac{1}{2} [f^*(x, 2w) + f^*(x, -2w) + f(x, \nabla u_j)] \\ &\leq c(f^*(x, w) + 1 + f(x, \nabla u_j)). \end{aligned}$$

Отсюда в силу (23₂) и (19) получаем равностепенную интегрируемость семейства $w \cdot \nabla u_j$, и по теореме Лебега

$$w \cdot \nabla u_j \rightarrow w \cdot \nabla u \quad \text{в } L^1(\Omega). \quad (26)$$

Из соленоидальности вектора w и сходимостей (25) и (26) выводим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} w \cdot \nabla(u_j \varphi) dx = \int_{\Omega} (w u_j) \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \varphi w \cdot \nabla u_j dx \\ &\rightarrow \int_{\Omega} (w u) \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \varphi w \cdot \nabla u dx = \int_{\Omega} w \cdot \nabla(u \varphi) dx. \end{aligned} \quad (27)$$

Соотношение (24) и вместе с ними лемма 2 доказаны.

Условия (23₁)–(23₃) обеспечивают равенство (24) и без требования о регулярности интегранта $f(x, \xi)$, если имеется подходящая регулярность функции u либо вектора w . Этот результат сформулирован в следующей лемме.

ЛЕММА 2'. Пусть f^* (соответственно f) удовлетворяет Δ_2 -условию, выполнены соотношения (23₁)–(23₃), а также $\overline{F}(u) < \infty$ (соответственно $\overline{G}(w) < \infty$). Тогда верно равенство (24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем те же соображения, что и при выводе леммы 2. Например, для последовательности u_j , характеризующей свойство $\overline{F}(u) < \infty$ (см. (15)), справедливы соотношения (25)–(27), которые приводят к равенству (24). Проверяя равностепенную интегрируемость семейства $w \cdot \nabla u_j$, ссылаемся на лемму 1'. При другом варианте условий используем лемму 1''.

Приведем также альтернативное доказательство леммы 2', которое не опирается на теорему о релаксационном функционале. При выводе свойства равностепенной интегрируемости семейства $w \cdot \nabla u_j$ не обязательно ссылаться на леммы 1' и 1'' (а значит, и на теорему о релаксационном функционале). Можно несколько изменить схему применения неравенства Юнга и Δ_2 -условия. Например, из Δ_2 -условия для f^* (см. (17)) следует неравенство

$$f^*(x, \pm k\xi) \leq c_3(k) f^*(x, \xi) + c_3(k) \quad \forall k \geq 1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |w \cdot \nabla u_j| &= k^{-1} |kw \cdot \nabla u_j| \leq k^{-1} (f(x, \nabla u_j) + f^*(x, -kw) + f^*(x, kw)) \\ &\leq k^{-1} f(x, \nabla u_j) + c_1(k) f^*(x, w) + c_2(k). \end{aligned}$$

Тогда для любого измеримого множества $B \subset \Omega$

$$\int_B |w \cdot \nabla u_j| dx \leq k^{-1} c_0 + c_0(k) \int_B (f^*(x, w) + 1) dx,$$

где использована оценка $F(u_j) \leq c_0$ для последовательности u_j , характеризующей свойство $\overline{F}(u) < \infty$. Отсюда уже легко вывести равностепенную интегрируемость нашего семейства.

§ 4. О свойствах полунепрерывности снизу

Рассмотрим интегранты f_ε и f из класса $S_{\alpha,\beta}$. Нашей целью будет получение свойств слабой полунепрерывности снизу соответствующих интегральных функционалов при условии Γ -сходимости интегрантов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $f_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma_2} f$, $w_\varepsilon \rightharpoonup w$ в $L^{\beta'}_{\text{sol}}(\Omega)$, то

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon^*(x, w_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f^*(x, w) dx. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем его на несколько шагов.

Шаг 1. Пусть B – куб, $u(x) = x \cdot \xi$, где $\xi \in \mathbb{R}^d$, и u_ε – Γ_2 -реализующая последовательность для $u(x)$ на кубе B . Тогда (см. определение 2)

$$u_\varepsilon - u \in W_0^{1,\beta}(B), \quad (29_1)$$

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в } W^{1,\alpha}(B), \quad (29_2)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B f_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) dx = \int_B f(x, \xi) dx. \quad (29_3)$$

Запишем по неравенству Юнга соотношение

$$\int_B f_\varepsilon^*(x, w_\varepsilon) dx \geq \int_B (w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon - f_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon)) dx \quad (30)$$

и перейдем в нем к пределу.

Поскольку $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon = w_\varepsilon \cdot \nabla(u_\varepsilon - u) + w_\varepsilon \cdot \nabla u$, где $w_\varepsilon \in L^{\beta'}_{\text{sol}}(B)$ и $u_\varepsilon - u \in W_0^{1,\beta}(B)$ по выбору u_ε , имеем

$$\int_B w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx = \int_B w_\varepsilon \cdot \xi dx \rightarrow \int_B w \cdot \xi dx, \quad (31)$$

что вместе с (29₃) дает

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B f_\varepsilon^*(x, w_\varepsilon) dx \geq \int_B (w \cdot \xi - f(x, \xi)) dx. \quad (32)$$

Шаг 2. Пусть $\Omega = \bigcup_i B_i$ – такое разбиение области Ω , что либо $B_i = B_i^h$ – куб с ребром h и гранями, параллельными координатным плоскостям, либо B_i – приграничная область, представляющая собой часть куба B_i^h .

Для каждой области $B = B_i$ выводим оценку (32) со своим вектором ξ_i . Суммируя это оценки, получим

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon^*(x, w_\varepsilon) dx \geq \sum_i \int_{B_i} (w \cdot \xi_i - f(x, \xi_i)) dx = \int_{\Omega} (w \cdot \xi(x) - f(x, \xi(x))) dx, \quad (33)$$

где $\xi(x)$ – кусочно постоянный вектор, равный ξ_i на B_i .

Рассматривая все возможные разбиения $\Omega = \bigcup_i B_i^h$ указанного типа при $h \rightarrow 0$ и выбирая произвольные $\xi \in \mathbb{R}^d$ на B_i^h , получаем множество кусочно постоянных вектор-функций, которое плотно в $L^\gamma(\Omega)^d \quad \forall \gamma \in [1, \infty]$.

Шаг 3. Так как $w \in L^{\beta'}(\Omega)^d$ по условию и $\int_{\Omega} f(x, \xi(x)) dx$ – непрерывный функционал по $\xi \in L^\beta(\Omega)^d$ (следствие того, что $f \in S_{\alpha,\beta}$), то вся правая часть

равенства (33) есть непрерывный функционал по $\xi \in L^\beta(\Omega)^d$. Отсюда по теореме о сопряженном функционале (см. ниже) выводим

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_{\varepsilon}^*(x, w_{\varepsilon}) dx \geq \sup_{\xi \in L^\beta(\Omega)^d} \int_{\Omega} (w \cdot \xi - f(x, \xi)) dx = \int_{\Omega} f^*(x, w) dx,$$

что дает неравенство (28). Предложение доказано.

Следующее утверждение аналогично предложению 2 и относится к случаю Γ_1 -сходимости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $f_{\varepsilon} \xrightarrow{\Gamma_1} f$, f_{ε} удовлетворяет Δ_2 -условию, $w_{\varepsilon} \rightharpoonup w$ в $L_{\text{sol}}^{\beta'}(\Omega)$ и $\overline{G}_{\varepsilon}(w_{\varepsilon}) < \infty$ при каждом фиксированном ε , то верно неравенство (28).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем ту же схему, что и для предложения 2. На шаге 1 получаем соотношения (30), (31), в которых участвует Γ_1 -реализующая последовательность u_{ε} для функции $u(x) = x \cdot \xi$ на кубе B . Требуется объяснения лишь равенство в (31), поскольку $u_{\varepsilon} - u \in W_0^{1,\alpha}(B)$, $w_{\varepsilon} \in L_{\text{sol}}^{\beta'}(B)$ и $\beta' < \alpha'$, так что не столь очевидным оказывается необходимое для этого соотношение

$$\int_B w_{\varepsilon} \cdot \nabla(u_{\varepsilon} - u) dx = 0.$$

Доказываем его так же, как аналогичное соотношение ортогональности (24) в условиях леммы 2', – через аппроксимации типа (16), характеризующие свойство $\overline{G}_{\varepsilon}(w_{\varepsilon}) < \infty$. Шаг 2 и шаг 3 предыдущего доказательства повторяем без изменений. Предложение доказано.

Следующее утверждение лишь слегка уточняет свойство полунепрерывности снизу, имеющееся в определении Γ_2 -сходимости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $f_{\varepsilon} \xrightarrow{\Gamma_2} f$ и $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$, то

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{F}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \geq F(u). \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\overline{F}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) < \infty$. Используя соотношения (15), характеризующие свойство $\overline{F}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) < \infty$, найдем последовательность $u_{\varepsilon,j(\varepsilon)} \in W^{1,\beta}(\Omega)$ такую, что

$$\|u_{\varepsilon} - u_{\varepsilon,j(\varepsilon)}\|_{W^{1,\alpha}(\Omega)} \leq \varepsilon, \quad |F_{\varepsilon}(u_{\varepsilon,j(\varepsilon)}) - \overline{F}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon})| \leq \varepsilon.$$

Поскольку $u_{\varepsilon,j(\varepsilon)} \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$, то по первому свойству Γ_2 -сходимости получим неравенство (34).

Простым следствием предложения 4 является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $f_{\varepsilon} \xrightarrow{\Gamma_2} f$, f_{ε}^* удовлетворяет Δ_2 -условию, $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$ и $\overline{F}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) < \infty$ при каждом фиксированном ε , то

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, \nabla u_{\varepsilon}) dx \geq \int_{\Omega} f(x, \nabla u) dx. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как выполнено Δ_2 -условие для f_ε^* , то по теореме о релаксационном функционале имеем $\overline{F}_\varepsilon(u_\varepsilon) = F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ и из (34) выводим неравенство (35).

Наконец, непосредственно из определения Γ_1 -сходимости следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если $f_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma_1} f$, $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$, то верно неравенство (35).

В заключение этого параграфа приведем использованную выше теорему.

ТЕОРЕМА О СОПРЯЖЕННОМ ФУНКЦИОНАЛЕ. Если f — интегрант класса $S_{\alpha,\beta}$, то

$$\int_{\Omega} f^*(x, w(x)) dx = \sup_{\xi \in L^\infty(\Omega)^d} \int_{\Omega} (w \cdot \xi - f(x, \xi)) dx = \sup_{\xi \in L^1(\Omega)^d} \int_{\Omega} (w \cdot \xi - f(x, \xi)) dx.$$

Доказательство этой теоремы см. в [10].

§ 5. Доказательство теорем 1 и 2. Некоторые следствия и применения

5.1. После подготовительной работы, проделанной в § 3 и § 4, доказательство теоремы 1 укладывается в схему (41)–(43).

Действительно, применяя лемму 2' к интегранту f_ε и функциям u_ε и w_ε при каждом фиксированном ε , получаем соотношение (7), из которого следует равенство (41). Предположения леммы обеспечены условиями теоремы.

Предельный переход (42) осуществляем благодаря компактности вложения $W^{1,\alpha}(\Omega) \subset L^\beta(\Omega)$ при $\beta < \alpha^*$ (см. замечание 3).

Равенство (43) справедливо по лемме 2. Необходимые для этого соотношения (23₁) и (23₂) вытекают из условий теоремы в силу предложений из § 4.

Теорема 2 доказывается аналогично.

5.2. Рассмотрим следствия из основных теорем для интегранта

$$f_\varepsilon(x, \xi) = \frac{|\xi|^{p_\varepsilon(x)}}{p_\varepsilon(x)}, \quad p_\varepsilon(x) = p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (36)$$

где $p(y)$ — периодическая функция на $\mathbb{R}^d$ с ячейкой периодичности $\square = [0, 1)^d$, подчиненная оценке

$$1 < \alpha \leq p(y) \leq \beta < \alpha^*.$$

Сопряженным будет интегрант того же вида

$$f_\varepsilon^*(x, \xi) = \frac{|\xi|^{p'_\varepsilon(x)}}{p'_\varepsilon(x)}, \quad p'_\varepsilon(x) = \frac{p_\varepsilon(x)}{p_\varepsilon(x) - 1}. \quad (37)$$

Очевидно, что интегранты вида (36), (37) удовлетворяют Δ_2 -условию равномерно по ε . Например,

$$f_\varepsilon(x, \pm 2\xi) = \frac{|2\xi|^{p_\varepsilon(x)}}{p_\varepsilon(x)} \leq 2^\beta f_\varepsilon(x, \xi). \quad (38)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть показатель $p(y)$ удовлетворяет $\log$ -условию (см. (12)) u , кроме того,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^{p_{\varepsilon}(x)} dx < \infty, \quad u_{\varepsilon} \rightharpoonup u \quad \text{в } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad (39)$$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |w_{\varepsilon}|^{p'_{\varepsilon}(x)} dx < \infty, \quad w_{\varepsilon} \rightharpoonup w \quad \text{в } L^{\beta'}_{\text{sol}}(\Omega). \quad (40)$$

Тогда в смысле слабой сходимости мер $w_{\varepsilon} \cdot \nabla u_{\varepsilon} dx \rightharpoonup w \cdot \nabla u dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрант вида (36) регулярен в силу $\log$ -условия на показатель, и для него два типа Γ -сходимости совпадают. В качестве Γ -предельного выступает усредненный интегрант $f^{\text{hom}}(x, \xi) = f^{\text{hom}}(\xi)$ (подробности см. в [9]), по смыслу усреднения не зависящий от пространственной переменной и потому тоже регулярный. Далее, принимая во внимание свойства (38)–(40), видим, что в предположениях теоремы 3 обеспечены все условия теоремы 2'. Тогда искомая сходимость мер получена.

5.3. Теперь изучим ситуацию с интегрантом вида (36), не предполагая $\log$ -условие на $p(y)$. Необходимо ввести пространства Орлича и Соболева–Орлича.

Пусть $p(x)$ – измеримая функция такая, что $1 < \alpha \leq p(x) \leq \beta < \infty$. Обозначим через $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ множество вектор-функций

$$\left\{ \varphi \in L^1(\Omega)^d : \int_{\Omega} |\varphi(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}.$$

Вводя норму

$$\|\varphi\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left| \frac{\varphi}{\lambda} \right|^p dx \leq 1 \right\},$$

получаем банахово пространство, сепарабельное и рефлексивное.

Определим пространство Соболева–Орлича:

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \{ \varphi \in W^{1,1}(\Omega) : \nabla \varphi \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \},$$

$$\|\varphi\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla \varphi\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

В этом пространстве, вообще говоря, не плотны гладкие функции (в отличие от ситуации, когда p постоянно); для плотности достаточно, например, $\log$ -гёльдеровости показателя $p(x)$ (см. (12)), а просто непрерывности не достаточно. В связи с этим определим

$$H^{1,p(\cdot)}(\Omega) - \text{замыкание } C^{\infty}(\overline{\Omega}) \text{ в } W^{1,p(\cdot)}(\Omega).$$

Несовпадение $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ и $H^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ влечет за собой несовпадение следующих двух пространств соленоидальных векторов:

$$L^{p'(\cdot)}_{\text{sol},1}(\Omega) = L^1_{\text{sol}}(\Omega) \cap L^{p'(\cdot)}(\Omega),$$

$$L^{p'(\cdot)}_{\text{sol},2}(\Omega) - \text{замыкание в } L^{p'(\cdot)}(\Omega) \text{ пространства } C^{\infty}_{\text{sol}}(\overline{\Omega}).$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены предположения (39), (40) и, кроме того, условие дополнительной регулярности

$$u_{\varepsilon} \in H^{1,p_{\varepsilon}(\cdot)}(\Omega) \quad \forall \varepsilon \quad \text{либо} \quad w_{\varepsilon} \in L^{p'_{\varepsilon}(\cdot)}_{\text{sol},2}(\Omega) \quad \forall \varepsilon.$$

Тогда имеет место слабая сходимость мер $w_{\varepsilon} \cdot \nabla u_{\varepsilon} dx \rightharpoonup w \cdot \nabla u dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предельные интегранты $\Gamma_i\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\xi|^{p_\varepsilon(x)} = f_i^{\text{hom}}(\xi)$, $i = 1, 2$ (см. [9]), регулярны и в силу предложения 1 и оценки (38) удовлетворяют Δ_2 -условию. Соотношения (39), (40) в точности означают условия (iii) и (iv) теорем 1 и 2.

Релаксационный функционал $\overline{F}_\varepsilon(u)$ (соответственно $\overline{G}_\varepsilon(w)$) конечен на пространстве $H^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$ (соответственно $L_{\text{sol},2}^{p'_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$). Следовательно, если $u_\varepsilon \in H^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$, то выполнено первое соотношение из условия (v) теоремы 1, а если $w_\varepsilon \in L_{\text{sol},2}^{p'_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$, то выполнено первое соотношение из условия (v) теоремы 2. Наконец, степенные интегранты (36) и (37) удовлетворяют Δ_2 -условию. Таким образом, в предположениях теоремы 4 обеспечены все условия либо теоремы 1, либо теоремы 2, что гарантирует искомую сходимость мер.

5.4. Теоремы 3 и 4 применимы в усреднении $p_\varepsilon(x)$ -монотонных уравнений вида

$$\operatorname{div} a_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) = \operatorname{div} g,$$

где $a_\varepsilon(x, \xi) = a(x/\varepsilon, \xi)$ и $a(y, \xi)$ – каратеодориева вектор-функция, 1-периодическая по y , со следующими свойствами монотонности, коэрцитивности и роста:

$$\begin{aligned} (a(y, \xi) - a(y, \tilde{\xi})) \cdot (\xi - \tilde{\xi}) &> 0, \quad \xi \neq \tilde{\xi}, \\ a(y, \xi) \cdot \xi &\geq c_1 |\xi|^{p(y)} - 1, \quad |a(y, \xi)|^{p'(y)} \leq c_2 |\xi|^{p(y)} + 1, \end{aligned}$$

где константы c_1, c_2 больше нуля, а показатель $p(y)$ 1-периодичен и $1 < \alpha \leq p(y) \leq \beta < \infty$.

Теоремы 1 и 2, по-видимому, могут найти применение в теории G -сходимости монотонных операторов с символом $a_\varepsilon(x, \xi)$, подчиненным условиям коэрцитивности и роста:

$$a_\varepsilon(x, \xi) \cdot \xi \geq c_1 f_\varepsilon(x, \xi) - c_0(x), \quad f_\varepsilon^*(x, a_\varepsilon(x, \xi)) \leq c_2 f_\varepsilon(x, \xi) + c_0(x),$$

где константы c_1, c_2 больше нуля, функция c_0 принадлежит $L^1(\Omega)$, а интегрант f_ε принадлежит $S_{\alpha,\beta}$. Но это – предмет отдельного изучения. G -сходимость монотонных операторов с условиями коэрцитивности и роста стандартного типа (когда в соотношениях выше $f_\varepsilon(x, \xi) = |\xi|^\alpha$) рассмотрена в [13].

§ 6. Весовые интегранты: нерегулярный случай

К интегрантам с нестандартными условиями коэрцитивности и роста относятся степенные интегранты с вырожденным неотрицательным весом ρ таким, что $\rho + \rho^{-1} \notin L^\infty$. Для весовых интегрантов мы доказываем утверждения типа теорем 1 и 2, не опираясь на теорию Γ -сходимости.

6.1. Рассмотрим квадратичный интегрант $f(x, \xi) = \rho(x)|\xi|^2$ с весом $\rho \geq 0$ таким, что

$$\rho, \rho^{-1} \in L^1(\Omega). \quad (41)$$

Определены лебеговы пространства вектор-функций $L^2(\Omega, \rho dx)$ и $L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)$ с весовыми мерами ρdx и $\rho^{-1} dx$, а также весовое соболевское пространство

$$W_\rho = \left\{ u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \|u\|_\rho^2 \equiv \int_\Omega \rho |\nabla u|^2 dx < \infty \right\}. \quad (42)$$

Полнота пространства W_ρ относительно нормы $\|\cdot\|_\rho$ в силу неравенства

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla u| dx\right)^2 \leq \int_{\Omega} \rho |\nabla u|^2 dx \cdot \int_{\Omega} \rho^{-1} dx$$

следует из полноты классического пространства $W_0^{1,1}(\Omega)$.

Поскольку гладкие функции, вообще говоря, не плотны в W_ρ , введем

$$H_\rho - \text{замыкание } C_0^\infty(\Omega) \text{ в } W_\rho. \quad (43)$$

Во множестве всех соленоидальных векторов выделим весовое подпространство

$$L_{\text{sol},1}(\Omega, \rho^{-1} dx) = \left\{ w \in L_{\text{sol}}^1(\Omega) : \int_{\Omega} |w|^2 \rho^{-1} dx < \infty \right\}. \quad (44)$$

Нетрудно понять, что $L_{\text{sol},1}(\Omega, \rho^{-1} dx) = \{\nabla \varphi : \varphi \in H_\rho\}^\perp$ в смысле двойственности между пространствами $L^2(\Omega, \rho dx)$ и $L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)$. В силу возможного неравенства $W_\rho \neq H_\rho$ выделим в пространстве (44) его подпространство

$$L_{\text{sol},2}(\Omega, \rho^{-1} dx) = \{\nabla \varphi : \varphi \in W_\rho\}^\perp. \quad (45)$$

Далее рассматриваем вес $\rho_\varepsilon(x) = \rho(x/\varepsilon)$, где $\rho(y)$ – периодическая функция ($\square = [0, 1)^d$ – ячейка периодичности) такая, что

$$\rho \in L^r(\square), \quad \rho^{-1} \in L^s(\square), \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} < \frac{2}{d}. \quad (46)$$

Соответствующие соболевские пространства

$$W_\varepsilon \equiv W_{\rho_\varepsilon}, \quad H_\varepsilon \equiv H_{\rho_\varepsilon}$$

определены корректно, поскольку вес ρ_ε удовлетворяет условию (41).

Полезно отметить, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\rho_\varepsilon \rightharpoonup \int_{\square} \rho dy \quad \text{в } L^r(\Omega), \quad \rho_\varepsilon^{-1} \rightharpoonup \int_{\square} \rho^{-1} dy \quad \text{в } L^s(\Omega) \quad (47)$$

по свойству среднего значения периодической функции.

ТЕОРЕМА 5. Пусть семейства $u_\varepsilon \in W_\varepsilon$ и $w_\varepsilon \in L_{\text{sol},1}(\Omega, \rho_\varepsilon^{-1} dx)$ таковы, что

$$\int_{\Omega} \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx, \quad \int_{\Omega} \rho_\varepsilon^{-1} |w_\varepsilon|^2 dx < C < \infty, \quad (48)$$

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в } W^{1,1}(\Omega), \quad w_\varepsilon \rightharpoonup w \quad \text{в } L_{\text{sol}}^1(\Omega). \quad (49)$$

Тогда при дополнительном условии регулярности

$$u_\varepsilon \in H_\varepsilon \quad \forall \varepsilon \quad \text{либо} \quad w_\varepsilon \in L_{\text{sol},2}(\Omega, \rho_\varepsilon^{-1} dx) \quad \forall \varepsilon$$

имеет место слабая сходимость мер $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup w \cdot \nabla u dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуем схеме (41)–(43).

Отметим свойство локальности пространств W_ε и H_ε :

$$u_\varepsilon \in W_\varepsilon \implies \varphi u_\varepsilon \in W_\varepsilon \quad \text{или} \quad u_\varepsilon \in H_\varepsilon \implies \varphi u_\varepsilon \in H_\varepsilon \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (50)$$

благодаря которому в силу условия дополнительной регулярности получаем равенство (41). Само свойство локальности (50) обеспечено неравенством Пуанкаре–Фридрихса

$$\int_{\Omega} |v|^2 \rho_{\varepsilon} dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \rho_{\varepsilon} dx \quad \forall v \in W_{\varepsilon}, \quad C = \text{const}(d, \|\rho\|_{L^r(\square)}, \|\rho^{-1}\|_{L^s(\square)}),$$

доказанным, например, в [14]. Вывод более общего неравенства (см. (64)) приведен в конце этого параграфа.

Из (46) по неравенству Юнга выводим

$$\rho(y)|\xi|^2 \geq |\xi|^{2s/(s+1)} - c_1(y), \quad \rho^{-1}(y)|\xi|^2 \geq |\xi|^{2r/(r+1)} - c_2(y), \quad (51)$$

где $c_1, c_2 \in L^1(\square)$, что вместе с условиями ограниченности (48) дает

$$\|w_{\varepsilon}\|_{L^{2r/(r+1)}(\Omega)} \leq c, \quad \|\nabla u_{\varepsilon}\|_{L^{2s/(s+1)}(\Omega)} \leq c.$$

Тогда по соображениям компактности (см. также (49))

$$w_{\varepsilon} \rightharpoonup w \quad \text{в } L_{\text{sol}}^{2r/(r+1)}(\Omega), \quad u_{\varepsilon} \rightarrow u \quad \text{в } L^{\gamma}(\Omega), \quad \text{если } \frac{1}{\gamma} > \frac{s+1}{2s} - \frac{1}{d}, \quad (52)$$

и переход (42) возможен, как только $\frac{r+1}{2r} + \frac{s+1}{2s} < 1 + \frac{1}{d}$, что обеспечено неравенством (46).

Из соотношений (48) и (49) нетрудно вывести, что

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad (53_1)$$

$$w \in L_{\text{sol}}^2(\Omega). \quad (53_2)$$

Действительно, например, из неравенства

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \varphi dx \right|^2 \leq \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 dx \cdot \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon}^{-1} |\varphi|^2 dx \leq C \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon}^{-1} |\varphi|^2 dx$$

предельным переходом получаем

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \varphi dx \right| \leq C \langle \rho^{-1} \rangle^{1/2} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

по свойству среднего значения (47). Из последней оценки следует (53₁).

Используя свойства (53₁), (53₂), осуществляем преобразование (43). Искомая сходимость мер (5) доказана.

6.2. Теперь изучим более общий интегрант $f(x, \xi) = \rho(x)|\xi|^p$, где показатель p больше 1, а вес $\rho \geq 0$ таков, что

$$\rho, \rho^{-1/(p-1)} \in L^1(\Omega). \quad (54)$$

Будем рассматривать сопряженные весовые лебеговы пространства

$$L^p(\Omega, \rho dx), \quad L^{p'}(\Omega, \rho^{1/(1-p)} dx), \quad p' = \frac{p}{p-1}. \quad (55)$$

На основе свойства (54) строим аналоги пространств (42)–(45)

$$W_{\rho}^p, \quad H_{\rho}^p, \quad L_{\text{sol},1}^{p'}(\Omega, \rho^{1/(1-p)} dx), \quad L_{\text{sol},2}^{p'}(\Omega, \rho^{1/(1-p)} dx).$$

Например,

$$\begin{aligned} W_\rho^p &= \left\{ u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \|u\|_\rho^p \equiv \int_\Omega \rho |\nabla u|^p dx < \infty \right\}, \\ H_\rho^p &- \text{замыкание } C_0^\infty(\Omega) \text{ по норме } \|\cdot\|_\rho, \\ L_{\text{sol},1}^{p'}(\Omega, \rho^{1/(1-p)} dx) &= L_{\text{sol}}^1(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega, \rho^{1/(1-p)} dx). \end{aligned}$$

Нетрудно понять, что

$$L_{\text{sol},1}^{p'}(\Omega, \rho^{1/(1-p)} dx) = \{\nabla \varphi : \varphi \in H_\rho^p\}^\perp \quad (56)$$

в смысле двойственности между пространствами (55). Аналогично, имеем

$$L_{\text{sol},2}^{p'}(\Omega, \rho^{1/(1-p)} dx) = \{\nabla \varphi : \varphi \in W_\rho^p\}^\perp. \quad (57)$$

Как и ранее, рассматриваем ε -периодический вес $\rho_\varepsilon = \rho(x/\varepsilon)$. На этот раз для периодической функции $\rho(y)$ требуем

$$\rho^{r/(p-1)}, \rho^{-s} \in L^1(\square), \quad (58)$$

где r и s согласованы с показателем p так, что

$$s \geq \frac{1}{p-1}, \quad r \geq p-1, \quad (59)$$

$$\frac{1}{p'r} + \frac{1}{ps} < \frac{1}{d}, \quad \text{если } \frac{sp}{s+1} < d. \quad (60)$$

В силу (58), (59) имеем $\rho, \rho^{1/(1-p)} \in L^1(\square)$, что гарантирует свойство типа (54) для веса ρ_ε . Следовательно, корректно определены весовые пространства

$$W_\varepsilon^p \equiv W_{\rho_\varepsilon}^p, \quad H_\varepsilon^p \equiv H_{\rho_\varepsilon}^p. \quad (61)$$

Соотношения (60) при $p = 2$ переходят в неравенство (46).

ТЕОРЕМА 6. Пусть вес ρ подчинен условиям (58)–(60), а семейства $u_\varepsilon \in W_\varepsilon^p$ и $w_\varepsilon \in L_{\text{sol}}^1(\Omega)$ таковы, что

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^p dx, \quad \int_\Omega \rho_\varepsilon^{1/(1-p)} |w_\varepsilon|^{p'} dx < C < \infty, \quad (62)$$

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в } W^{1,1}(\Omega), \quad w_\varepsilon \rightharpoonup w \quad \text{в } L_{\text{sol}}^1(\Omega). \quad (63)$$

Тогда при дополнительном условии регулярности

$$u_\varepsilon \in H_\varepsilon^p \quad \forall \varepsilon \quad \text{либо} \quad w_\varepsilon \in L_{\text{sol},2}(\Omega, \rho_\varepsilon^{1/(1-p)} dx) \quad \forall \varepsilon$$

имеет место слабая сходимость мер $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup w \cdot \nabla u dx$.

Утверждение теоремы 6 при $p = 2$ совпадает с теоремой 5. Для доказательства теоремы 6 используются такие же рассуждения, что и ранее в квадратичном случае. Остановимся подробнее лишь на обосновании предельного перехода (42), т.е. на выводе необходимых свойств компактности для семейств w_ε и u_ε в обычных лебеговых пространствах (см. в доказательстве теоремы 5 вывод формул (51) и (52)). Именно в этом месте проявляется ограничение (60)

на показатели суммируемости веса ρ и его обратного. По неравенству Юнга выводим

$$\rho(y)|\xi|^p \geq |\xi|^{ps/(s+1)} - c_1(y), \quad \rho(y)^{1/(1-p)}|\xi|^{p'} \geq |\xi|^{p'r/(r+1)} - c_2(y),$$

где $c_1 = \rho^{-s} \in L^1(\square)$, $c_2 = \rho^{r/(p-1)} \in L^1(\square)$ в силу (58). Отсюда и из свойств (62) и (63) получаем

$$\begin{aligned} w_\varepsilon \rightharpoonup w \quad & \text{в } L^{p'r/(r+1)}(\Omega), \quad \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u \quad \text{в } L^{ps/(s+1)}(\Omega)^d, \\ u_\varepsilon \rightarrow u \quad & \text{в } L^\gamma, \quad \text{если } \frac{1}{\gamma} > \frac{s+1}{ps} - \frac{1}{d} \end{aligned}$$

(здесь, предполагая $ps/(s+1) < d$, мы применили теорему вложения Соболева). Тогда переход (42) возможен, если $\frac{r+1}{p'r} + \frac{s+1}{ps} < 1 + \frac{1}{d}$, что после упрощения дает первое неравенство в (60).

Поясним коротко переходы (41) и (43). Первый из них возможен благодаря свойству локальности пространств W_ε^p , H_ε^p (см. (50)) и дополнительному условию регулярности для u_ε или w_ε (см. также соотношения ортогональности (56) и (57)). Само свойство локальности обеспечено неравенством Пуанкаре–Фридрихса

$$\int_\Omega |v|^p \rho_\varepsilon dx \leq C \int_\Omega |\nabla v|^p \rho_\varepsilon dx \quad \forall v \in W_\varepsilon^p, \quad (64)$$

где $C = \text{const}(d, p, \Omega, \|\rho^{1/(p-1)}\|_{L^r(\square)}, \|\rho^{-1}\|_{L^s(\square)})$, которое справедливо при условии (60) (даже с нестрогим первым неравенством в (60); вывод см. ниже).

Для обоснования равенства (43) достаточно показать, что предельные элементы w и ∇u попадают в сопряженные пространства $L^{p'}(\Omega)^d$ и $L^p(\Omega)^d$. Это делается так же, как в квадратичном случае (см. вывод соотношений (53₁), (53₂)), с помощью свойства среднего значения периодической функции и условий ограниченности и сходимости типа (62) и (63).

Наконец, приведем вывод неравенства (64). По неравенству Гёльдера (важно, что $r/(p-1) \geq 1$; см. (59))

$$\begin{aligned} \int_\Omega |v|^p \rho_\varepsilon dx &\leq \left(\int_\Omega |v|^\gamma dx \right)^{p/\gamma} \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon^{r/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/r}, \quad \gamma = \frac{pr}{r-p+1}, \\ \left(\int_\Omega |\nabla v|^{ps/(s+1)} dx \right)^{(s+1)/s} &\leq \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla v|^p dx \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon^{-s} dx \right)^{1/s}, \end{aligned}$$

а по свойству среднего значения периодической функции

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \rho_\varepsilon^{r/(p-1)} dx = |\Omega| \int_\square \rho^{r/(p-1)} dx, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \rho_\varepsilon^{-s} dx = |\Omega| \int_\square \rho^{-s} dx.$$

Остается воспользоваться обычным неравенством Соболева, предварительно проверив, что γ не превосходит показателя Соболева для $p \frac{s}{s+1}$, т.е.

$$\frac{1}{\gamma} \geq \frac{s+1}{ps} - \frac{1}{d} \iff \frac{r-p+1}{pr} \geq \frac{s+1}{ps} - \frac{1}{d} \iff \frac{1}{p'r} + \frac{1}{ps} \leq \frac{1}{d},$$

что обеспечено условием (46).

§ 7. Весовые интегранты: вес из класса Макенхаупта

Имеются два случая, когда интегрант $\rho|\xi|^p$ с вырожденным весом является регулярным: вес ρ из соответствующего класса Макенхаупта или корень $\rho^{1/p}$ из соответствующего пространства Соболева. В этом параграфе рассмотрен первый случай.

7.1. Пусть вес $\rho \in A_p$, где A_p – класс Макенхаупта порядка $p > 1$, т.е.

$$C_{\rho,p} \equiv \sup \left(\frac{1}{|K|} \int_K \rho dx \right) \left(\frac{1}{|K|} \int_K \rho^{1/(1-p)} dx \right)^{p-1} < \infty, \quad (65)$$

где супремум берется по всем кубам $K \subset \mathbb{R}^d$ с гранями, параллельными координатным плоскостям. Далее рассматриваются только такие кубы, например K_δ^y – куб с центром в точке y и ребром, равным δ .

Отметим два основополагающих свойства веса $\rho \in A_p$, которые используются далее:

1) существует такое $\sigma > 0$, что для любого куба $K \subset \mathbb{R}^d$

$$\left(\frac{1}{|K|} \int_K \rho^{1+\sigma} dx \right)^{1/(1+\sigma)} \leq C \frac{1}{|K|} \int_K \rho dx, \quad (66_1)$$

$$\left(\frac{1}{|K|} \int_K \rho^{(1+\sigma)/(1-p)} dx \right)^{1/(1+\sigma)} \leq C \frac{1}{|K|} \int_K \rho^{1/(1-p)} dx \quad (66_2)$$

с константой C , зависящей от $d, p, C_{\rho,p}$ (доказательство см. в [15]);

2) для любого куба $K = K_\delta^y \subset \mathbb{R}^d$ справедливо неравенство Пуанкаре

$$\int_K \left| \frac{v}{\delta} \right|^p \rho dx \leq C \int_K |\nabla v|^p \rho dx, \quad C = \text{const}(d, p, C_{\rho,p}), \quad (67)$$

если $\int_K v \rho dx = 0$ или $v \in C_0^\infty(K)$ (доказательство см. в [16]).

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ можно определить соболевские пространства W_ρ^p и H_ρ^p (см. п. 6.2). Хорошо известен факт

$$W_\rho^p = H_\rho^p, \text{ т.е. множество } C_0^\infty(\Omega) \text{ плотно в } W_\rho^p \quad (68)$$

(одно из доказательств, основанное на оценках максимального оператора Харди–Литтлвуда, дано в [17]).

7.2. Пусть $\rho_\varepsilon(x) = \rho(x/\varepsilon)$, где $\rho(y) \geq 0$ – периодическая функция ($\square = [0, 1]^d$ – ячейка периодичности) такая, что $\rho \in A_p$, $p > 1$. Не ограничивая общности, считаем

$$\langle \rho \rangle \equiv \int_\square \rho dy = 1.$$

Поскольку

$$\frac{1}{|K|} \int_K \rho_\varepsilon(x) dx = \frac{1}{|\varepsilon^{-1}K|} \int_{\varepsilon^{-1}K} \rho(x) dx,$$

то соотношение (65) для веса ρ_ε выполнено с той же константой $C_{\rho,p}$, что для ρ , т.е. $\rho_\varepsilon \in A_p$. Тогда определенные в (61) пространства W_ε^p и H_ε^p совпадают,

в результате чего аналог теоремы 6 для веса ρ из класса Макенхаупта выглядит проще, так как упраздняется условие дополнительной регулярности.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\rho \in A_p$, $p > 1$, и семейства $u_\varepsilon \in W_\varepsilon^p$, $w_\varepsilon \in L_{\text{sol}}^1(\Omega)$ удовлетворяют соотношениям (62) и (63).

Тогда имеет место слабая сходимость мер $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup w \cdot \nabla u dx$.

Общая схема доказательства теоремы 7 такая же, как для теорем 5 и 6 (см. (41)–(43)). Но существенного изменения требует обоснование предельного перехода (42). Дело в том, что использованные для этого в § 6 вложения весовых лебеговых пространств в обычные лебеговы пространства ничем не обеспечены в данной ситуации. В нашем случае справедлива

ЛЕММА 3. Пусть $\rho \in A_p$, $p > 1$, а семейства $w_\varepsilon \in L^1(\Omega)$, $u_\varepsilon \in W_\varepsilon^p$ таковы, что

$$w_\varepsilon \rightharpoonup w \quad \text{в } L^1(\Omega), \quad (69_1)$$

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{в } L^1(\Omega), \quad (69_2)$$

$$\int_{\Omega} \rho_\varepsilon^{1/(1-p)} |w_\varepsilon|^{p'} dx < C < \infty, \quad (69_3)$$

$$\int_{\Omega} \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^p dx < C < \infty. \quad (69_4)$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w_\varepsilon u_\varepsilon \psi dx = \int_{\Omega} w u \psi dx \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (70)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что Ω – липшицева область, а функции w_ε , u_ε , w , u продолжены нулем во внешность области Ω .

1. Прежде всего отметим дополнительные свойства ограниченности и сходимости для семейства u_ε , вытекающие из условий (69₁)–(69₄). Далее через K обозначим куб, содержащий область Ω .

В силу неравенства Пуанкаре (67), свойства (68) и условия (69₄) получаем оценку

$$\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^p \rho_\varepsilon dx = \int_K |u_\varepsilon|^p \rho_\varepsilon dx \leq c \int_K |\nabla u_\varepsilon|^p \rho_\varepsilon dx < C < \infty. \quad (71)$$

Отсюда на основании неравенства (66₂) выводим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^s dx &= \left(\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^p \rho_\varepsilon dx \right)^{s/p} \left(\int_{\Omega} \rho_\varepsilon^{s/(s-p)} dx \right)^{(p-s)/p} \\ &\leq c_0 \left(\int_K \rho_\varepsilon^{s/(s-p)} dx \right)^{(p-s)/p} = c_0 \left(\int_K \rho_\varepsilon^{(1+\sigma)/(1-p)} dx \right)^{(p-s)/p} \\ &\leq c_1 \left(\int_K \rho_\varepsilon^{1/(1-p)} dx \right)^{(p-s)(1+\sigma)/p} < C < \infty, \end{aligned}$$

если только

$$\frac{s}{s-p} = \frac{1+\sigma}{1-p} \iff s = \frac{p+p\sigma}{p+\sigma}.$$

Видно, что $s \in (1, p)$, как и требуется. Таким образом, для некоторого $s > 1$

$$\|u_\varepsilon\|_{L^s(\Omega)} < C < \infty.$$

Отсюда по интерполяционному неравенству, учитывая сходимость $u_\varepsilon \rightarrow u$ в $L^1(\Omega)$, получаем

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{в } L^t(\Omega), \quad \text{если } t \in (1, s). \quad (72)$$

2. Пусть $\mathbb{R}^d = \bigcup_i K_i$ – разбиение пространства на замкнутые кубы с ребром δ , не пересекающиеся попарно по внутренним точкам. Положим

$$\begin{aligned} \bar{u}^\delta(x) &= \frac{1}{|K|} \int_K u \, dx, \quad \text{если } x - \text{внутренняя точка куба } K = K_i, \\ \bar{u}_\varepsilon^\delta(x) &= \frac{1}{\rho_\varepsilon(K)} \int_K u_\varepsilon \rho_\varepsilon \, dx, \quad \text{если } x - \text{внутренняя точка куба } K = K_i, \end{aligned} \quad (73)$$

где

$$\rho_\varepsilon(K) = \int_K \rho_\varepsilon \, dx.$$

По определению функции $\bar{u}^\delta$ и $\bar{u}_\varepsilon^\delta$ постоянны на каждом кубе K_i . Так же, как при доказательстве теорем 5 и 6, из предположений (68) выводим, что $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $w \in L^{p'}(\Omega)$.

Из неравенства Пуанкаре (67) для веса ρ_ε следует

$$\int_\Omega |u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon^\delta|^p \rho_\varepsilon \, dx \leq C \delta^p \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p \rho_\varepsilon \, dx, \quad C = \text{const}(d, p, C_{\rho,p}),$$

а в силу классического неравенства Пуанкаре имеем

$$\int_\Omega |u - \bar{u}^\delta|^p \, dx \leq C \delta^p \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx, \quad C = \text{const}(d, p).$$

Из этих оценок и условий ограниченности (69₁)–(69₄) выводим

$$\begin{aligned} \int_\Omega w_\varepsilon u_\varepsilon \psi \, dx - \int_\Omega w u \psi \, dx &= \int_\Omega w_\varepsilon \bar{u}_\varepsilon^\delta \psi \, dx - \int_\Omega w \bar{u}^\delta \psi \, dx + r_\delta \\ &= \sum_i \left(\bar{u}_\varepsilon^\delta|_{K_i} \int_{K_i} w_\varepsilon \psi \, dx - \bar{u}^\delta|_{K_i} \int_{K_i} w \psi \, dx \right) + r_\delta, \quad |r_\delta| < c_0 \delta, \end{aligned}$$

где константа c_0 не зависит от ε и δ .

Далее используем следующие два соотношения:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K w_\varepsilon \psi \, dx = \int_K w \psi \, dx, \quad (74_1)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{u}_\varepsilon^\delta|_K = \bar{u}^\delta|_K \quad \forall K = K_i. \quad (74_2)$$

Первое из них есть следствие сходимости (69₁), второе будет доказано ниже. С помощью этих соотношений выводим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_\Omega w_\varepsilon u_\varepsilon \psi \, dx - \int_\Omega w u \psi \, dx \right| \leq c_0 \delta.$$

Поскольку δ может быть сколь угодно малым, получаем сходимость (70).

3. Докажем сходимость (74₂). Во-первых, по свойству среднего значения периодической функции

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon(K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K \rho_\varepsilon dx = \langle \rho \rangle \int_K dx = |K|, \quad (75)$$

где учтена нормировка веса $\langle \rho \rangle = 1$.

Проверим более сложное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K u_\varepsilon \rho_\varepsilon dx = \int_K u dx. \quad (76)$$

Определим срезку

$$\rho_\varepsilon^{(N)} = \begin{cases} \rho_\varepsilon, & \text{если } \rho_\varepsilon < N, \\ N, & \text{если } \rho_\varepsilon \geq N, \end{cases}$$

и множество $K_\varepsilon^{(N)} = \{x \in K : \rho_\varepsilon \geq N\}$. Тогда

$$|K_\varepsilon^{(N)}| \leq \frac{1}{N} \int_K \rho_\varepsilon dx \leq cN^{-1}. \quad (77)$$

Имеем разложение в сумму трех слагаемых

$$\rho_\varepsilon u_\varepsilon - u = (\rho_\varepsilon^{(N)} u_\varepsilon - \langle \rho^{(N)} \rangle u) + (\rho_\varepsilon - \rho_\varepsilon^{(N)}) u_\varepsilon + (\langle \rho^{(N)} \rangle - 1) u.$$

Изучим сходимость каждого слагаемого.

При фиксированном N

$$\rho_\varepsilon^{(N)} u_\varepsilon \rightarrow \langle \rho^{(N)} \rangle u \quad \text{в } L^1(K),$$

так как $u_\varepsilon \rightarrow u$ в $L^t(K)$, $t > 1$ (см. (72)), и $\rho_\varepsilon^{(N)} \rightarrow \langle \rho^{(N)} \rangle$ в $L^{t'}(K)$.

Далее, в силу оценки (77)

$$\int_K (\rho_\varepsilon - \rho_\varepsilon^{(N)}) |u_\varepsilon| dx \leq \int_{K_\varepsilon^{(N)}} \rho_\varepsilon |u_\varepsilon| dx \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty$$

равномерно по ε , так как семейство $\rho_\varepsilon |u_\varepsilon|$ равномерно интегрируемо. В самом деле, это свойство вытекает по критерию слабой сходимости в $L^1(K)$ из оценки

$$\int_T \rho_\varepsilon |u_\varepsilon| dx \leq \left(\int_T \rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_T \rho_\varepsilon dx \right)^{1/p'} \stackrel{(71)}{\leq} c \left(\int_T \rho_\varepsilon dx \right)^{1/p'} \quad \forall T \subset K$$

и слабой сходимости $\rho_\varepsilon \rightharpoonup \langle \rho \rangle$ в $L^1(K)$.

Наконец, $\langle \rho^{(N)} \rangle \rightarrow \langle \rho \rangle = 1$ и $(\langle \rho^{(N)} \rangle - 1)u \rightarrow 0$ в $L^1(K)$.

Из полученных предельных соотношений следует равенство (76). Согласно определению $\bar{u}_\varepsilon^\delta$ (см. (73)) сходимости (75) и (76) обеспечивают искомое соотношение (74₂). Лемма 3 доказана.

В заключение отметим, что вариант леммы о компенсированной компактности для весовых пространств с весом из класса Макенхаупта впервые доказан в [18].

§ 8. Еще один случай регулярного интегранта

Предположим, что

$$\rho(x) \geq c_0 > 0, \quad (78_1)$$

$$\rho^{1/p} \in W^{1,p}(\Omega), \quad p > 1. \quad (78_2)$$

Очевидно, что условие (54) выполнено. Следовательно, корректно определено пространство W_ρ^p .

ЛЕММА 4. *При условиях (78₁), (78₂) в пространстве W_ρ^p плотно множество $C_0^\infty(\Omega)$.*

Этот результат при $p = 2$ доказан в работе [19]. Предложенный там метод переносится на случай произвольного $p > 1$. Мы попадаем в ситуацию, аналогичную той, когда ρ – вес из класса Макенхаупта.

Рассмотрим вес $\rho_\varepsilon(x) = \rho(x/\varepsilon)$, где $\rho(y)$ – периодическая функция с ячейкой периодичности $\square = [0, 1)^d$, $\langle \rho \rangle = \int_\square \rho dy = 1$,

$$\rho(y) \geq c_0 > 0, \quad (79_1)$$

$$\rho^{1/p} \in W^{1,p}(\square), \quad (79_2)$$

$$p \geq \frac{d}{2}. \quad (79_3)$$

Очевидно, что эти условия гарантируют выполнение условий (78₁), (78₂) для веса ρ_ε , так что в области Ω корректно определено пространство $W_\varepsilon^p = W_{\rho_\varepsilon}^p$ и в нем плотно множество $C_0^\infty(\Omega)$.

Роль ограничения (79₃) проясняет

ЛЕММА 5. *При условиях (79₁)–(79₃) справедливо неравенство Пуанкаре*

$$\int_\square |v|^p \rho dx \leq C \int_\square |\nabla v|^p \rho dx, \quad \text{если} \quad \int_\square v \rho dx = 0, \quad (80)$$

где константа C зависит от $d, p, \|\rho^{1/p}\|_{W^{1,p}(\square)}$ и постоянной c_0 из (79₁).

Вывод неравенства (80) приведем в конце этого параграфа.

Аналогом теоремы 7 является

ТЕОРЕМА 8. *Пусть выполнены условия (79₁)–(79₃), а семейства $u_\varepsilon \in W_\varepsilon^p$ и $w_\varepsilon \in L_{\text{sol}}^1(\Omega)$ удовлетворяют соотношениям (62) и (63).*

Тогда имеет место слабая сходимость мер $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup w \cdot \nabla u dx$.

Теорема 8 доказывается тем же методом, что теорема 7. Существенным инструментом в доказательстве является следующий аналог леммы 3.

ЛЕММА 6. *Пусть выполнены условия (79₁)–(79₃), а семейства w_ε и u_ε такие же, как в лемме 3. Тогда имеет место сходимость (70).*

Доказательство леммы 6 повторяет доказательство леммы 3 по пунктам, причем с некоторыми упрощениями. Прокомментируем наиболее отличительные моменты.

Сильная сходимость (72) (итог п. 1 при выводе леммы 3) заменяется здесь сходимостью

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{в } L^p(\Omega), \quad (81)$$

которая легко извлекается из предположений о семействе u_ε в силу ограничения (79₁).

В п. 2 применяется неравенство Пуанкаре вида (67) для веса ρ_ε . В данном случае оно выводится из неравенства (80) с помощью сдвигов и гомотетий.

Воспроизводим п. 3 с теми минимальными изменениями, которые естественно возникают при замене сходимости (72) на сходимость (81).

Таким образом, осталось привести

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Для краткости введем обозначение

$$\rho^{1/p} = b.$$

Вначале считаем, что $\int_{\square} v \, dx = 0$. Тогда классическое неравенство Соболева дает

$$\|v\|_{L^{p^*}(\square)} \leq C \|\nabla v\|_{L^p(\square)}, \quad \|b\|_{L^{p^*}} \leq C \|b\|_{W^{1,p}(\square)}.$$

Отсюда, исходя из разложения $|bv|^p = |bv|b^{p-1}|v|^{p-1}$ по неравенству Гёльдера, получаем

$$\|bv\|_{L^p(\square)}^p \leq \|vb\|_{L^p(\square)} \|b\|_{L^{p^*}(\square)}^{p-1} \|v\|_{L^{p^*}(\square)}^{p-1} \leq C_0 \|vb\|_{L^p(\square)} \|b\|_{W^{1,p}(\square)}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^p(\square)}^{p-1},$$

если только

$$\frac{1}{p} + 2 \frac{p-1}{p^*} \leq 1 \iff 2 \frac{p-1}{p^*} \leq \frac{p-1}{p} \iff \frac{2}{p^*} \leq \frac{1}{p} \iff \frac{1}{p} \leq \frac{2}{d},$$

что гарантировано условием (79₃). В итоге получаем

$$\|vb\|_{L^p(\square)} \leq C \|b \nabla v\|_{L^p(\square)}, \quad \text{если } \int_{\square} v \, dx = 0, \quad (82)$$

где константа C того же типа, что в (80).

Пусть теперь $\int_{\square} v \rho \, dx = 0$. Имеем

$$v = (v - \bar{v}) + \bar{v}, \quad \bar{v} = \int_{\square} v \, dx. \quad (83)$$

В силу уже доказанного (см. (82))

$$\|b(v - \bar{v})\|_{L^p(\square)} = C \|b \nabla v\|_{L^p(\square)}. \quad (84)$$

Кроме того, с учетом нормировки $\langle \rho \rangle = 1$ имеем

$$\bar{v} = \int_{\square} v \, dx - \int_{\square} v \rho \, dx = \int_{\square} v(1 - \rho) \, dx = \int_{\square} (v - \bar{v})(1 - \rho) \, dx,$$

поэтому

$$|\bar{v}|^p \leq C_1 \left(\int_{\square} |v - \bar{v}|^p \, dx + \int_{\square} |v - \bar{v}|^p \rho \, dx \right) \leq C_2 \left(\int_{\square} |\nabla v|^p \, dx + \int_{\square} |\nabla v|^p \rho \, dx \right)$$

в силу оценки (82) и классического неравенства Пуанкаре. Отсюда с учетом (79₁) получаем

$$\int_{\square} |\bar{v}|^p \rho \, dx \leq C \int_{\square} |\nabla v|^p \rho \, dx. \quad (85)$$

Из (83)–(85) выводим неравенство (80). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Условие (78₂) равносильно тому, что

$$\rho \in W^{1,1}(\Omega), \quad (86_1)$$

$$\frac{\nabla \rho}{\rho} \in L^p(\Omega, \rho \, dx). \quad (86_2)$$

В самом деле, если $b = \rho^{1/p} \in L^p(\Omega)$, то $\rho \in L^1(\Omega)$, а по неравенству Гёльдера $\nabla \rho = \nabla(b^p) = pb^{p-1} \nabla b \in L^1(\Omega)$, так как $b, \nabla b \in L^p(\Omega)$. Кроме того, $|\nabla \rho|^p \rho^{1-p} = p^p |\nabla b|^p$, откуда следует (86₂). Доказательство обратного утверждения также несложно (подробности см. в [20; п. 2.6.12]).

Список литературы

- [1] F. Murat, “Compacité par compensation”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **5**:3 (1978), 489–507.
- [2] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, “О принципе компенсированной компактности”, *Докл. РАН*, **433**:5 (2010), 590–595; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “On the compensated compactness principle”, *Dokl. Math.*, **82**:1 (2010), 590–595.
- [3] В. В. Жиков, “К технике предельного перехода в нелинейных эллиптических уравнениях”, *Функц. анализ и его прил.*, **43**:2 (2009), 19–38; англ. пер.: V. V. Zhikov, “On the technique for passing to the limit in nonlinear elliptic equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **43**:2 (2009), 96–112.
- [4] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, “О повышенной суммируемости градиента решений эллиптических уравнений с переменным показателем нелинейности”, *Матем. сб.*, **199**:12 (2008), 19–52; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “Improved integrability of the gradients of solutions of elliptic equations with variable nonlinearity exponent”, *Sb. Math.*, **199**:12 (2008), 1751–1782.
- [5] В. В. Жиков, “О проблеме слабой сходимости потоков к потоку”, *Докл. РАН*, **430**:4 (2010), 439–443; англ. пер.: V. V. Zhikov, “On the weak convergence of fluxes to a flux”, *Sb. Math.*, **81**:1 (2010), 58–62.
- [6] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, “Леммы о компенсированной компактности в эллиптических и параболических уравнениях”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Тр. МИАН, **270**, МАИК, М., 2010, 110–137; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “Lemmas on compensated compactness in elliptic and parabolic equations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **270** (2010), 104–131.
- [7] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [8] В. В. Жиков, “О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах”, *Матем. сб.*, **183**:8 (1992), 47–84; англ. пер.: V. V. Zhikov, “On passage to the limit in nonlinear variational problems”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **76**:2 (1993), 427–459.
- [9] В. В. Жиков, “Эффект Лаврентьева и усреднение нелинейных вариационных задач”, *Дифференц. уравнения*, **27**:1 (1991), 42–50; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Lavrent’ev effect and the averaging of nonlinear variational problems”, *Differential Equations*, **27**:1 (1991), 32–39.

- [10] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: I. Ekeland, R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, Studies in Mathematics and its Applications, **1**, North-Holland, Amsterdam–Oxford; Elsevier, New York, 1976.
- [11] В. В. Жиков, “Об эффекте Лаврентьева”, *Докл. РАН*, **345**:1 (1995), 10–14; англ. пер.: V. V. Zhikov, “On Lavrent’ev’s effect”, *Dokl. Math.*, **52**:3 (1995), 325–329.
- [12] V. V. Zhikov, “On Lavrentiev’s phenomenon”, *Russian J. Math. Phys.*, **3**:2 (1995), 249–269.
- [13] A. Pankov, *G-convergence and homogenization of nonlinear partial differential operators*, Math. Appl., **422**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht–Boston–London, 1997.
- [14] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, “Усреднение вырождающихся эллиптических уравнений”, *Сиб. матем. журн.*, **49**:1 (2008), 101–124; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “Homogenization of degenerate elliptic equations”, *Siberian Math. J.*, **49**:1 (2008), 80–101.
- [15] R. R. Coifman, C. Fefferman, “Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals”, *Studia Math.*, **51** (1974), 241–250.
- [16] E. B. Fabes, C. E. Kenig, R. P. Serapioni, “The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations”, *Comm. Partial Differential Equations*, **7**:1 (1982), 77–116.
- [17] В. В. Жиков, “О весовых соболевских пространствах”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 27–58; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Weighted Sobolev spaces”, *Sb. Math.*, **189**:8 (1998), 1139–1170.
- [18] R. de Archangelis, F. Serra Cassano, “On the homogenization of degenerate elliptic equations in divergence form”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **71**:2 (1992), 119–138.
- [19] T. Gallouët, J. Lederer, R. Lewandowski, F. Murat, L. Tartar, “On a turbulent system with unbounded eddy viscosities”, *Nonlinear Anal.*, **52**:4 (2003), 1051–1068.
- [20] В. И. Богачёв, *Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна*, РХД, М.–Ижевск, 2008; англ. пер.: V. I. Bogachev, *Differentiable measures and the Malliavin calculus*, Math. Surveys Monogr., **164**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

С. Е. Пастухова (S. E. Pastukhova)

Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики
E-mail: pas-se@yandex.ru

Поступила в редакцию

29.09.2010 и 14.01.2011

А. С. Хрипунова (A. S. Khripunova)

Владимирский государственный гуманитарный
университет
E-mail: anngremlin@rambler.ru