Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Григорян, Модификации функций, коэффициенты
Фурье и нелинейная аппроксимация, *Матем. сб.*, 2012,
том 203, номер 3, 49–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7797>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:12:46

УДК 517.518.454+517.518.36+517.518.8

М. Г. Григорян

Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация

Работа продолжает исследования автора по сходимости жадных алгоритмов с точки зрения классических теорем об исправлении функций. В частности, получен следующий результат: для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0, 1]$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0, 1)$, совпадающую с f на E и такую, что ее жадный алгоритм по системе Уолша сходится к ней почти всюду на $[0, 1]$, и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Уолша по модулю расположены в убывающем порядке.

Библиография: 35 названий.

Ключевые слова: коэффициенты Фурье, исправление функций, нелинейная аппроксимация, жадный алгоритм.

§ 1. Введение

В настоящей работе мы изучим некоторые вопросы о поведении коэффициентов Фурье, а также жадного алгоритма по системе Уолша после исправления функции. Отметим, что идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н. Н. Лузину (см. [1]). Им в 1912 г. был получен следующий знаменитый результат.

ТЕОРЕМА (*C-свойство Лузина*). *Для любой измеримой почти всюду конечной на $[0, 1]$ функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество E с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ и непрерывная на $[0, 1]$ функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ на E .*

Далее в этом направлении получены интересные результаты (см. [2]–[13]). В 1939 г. Д. Е. Меньшов (см. [2]) доказал следующую фундаментальную теорему.

ТЕОРЕМА (*усиленное C-свойство Меньшова*). *Пусть $f(x)$ – измеримая функция, конечная почти всюду на $[0, 2\pi]$. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно определить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E , $|E| > 2\pi - \varepsilon$, и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0, 2\pi]$.*

В 1988 г. автору удалось доказать, что тригонометрическая система обладает усиленным L^1 -свойством суммируемых функций. Оно состоит в следующем: для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$

такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1[0, 1]$ можно найти функцию $g(x) \in L^1[0, 1]$, совпадающую с $f(x)$ на E , ряд Фурье которой по тригонометрической системе $\{\varphi_n\}$ сходится к ней по $L^1[0, 1]$ -норме (см. [9]).

Более того, на вопрос, поставленный П. Л. Ульяновым, обладает ли произвольная ортонормированная система усиленным L^1 -свойством, автор дал положительный ответ (см. [11]–[13]).

Теперь напомним определение жадного (greedy) алгоритма. Пусть $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ – базис в банаховом пространстве X . Для каждого $f \in X$ будем иметь разложение

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) \psi_k.$$

Перестановку неотрицательных целых чисел $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^\infty$ назовем *убывающей*, если

$$|c_{\sigma(k)}(f)| \geq |c_{\sigma(k+1)}(f)|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Множество таких перестановок обозначим через $D(f, \Psi)$. В случае строгих неравенств $D(f, \Psi)$ содержит только одну убывающую перестановку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для каждого элемента $f \in X$ и для любой $\sigma \in D(f, \Psi)$ последовательность нелинейных операторов $\{G_m(f, \Psi, \sigma)\}_{m=1}^\infty$ определим следующим образом:

$$G_m(x, f) = G_m(x, f, \Psi, \sigma) := \sum_{k=1}^m c_{\sigma(k)}(f) \psi_{\sigma(k)}(x). \quad (1.1)$$

Метод приближения элемента $f \in X$ последовательностью $\{G_m(f, \Psi, \sigma)\}_{m=1}^\infty$ называется *жадным алгоритмом по системе Ψ* (подробно об этом см. обзорную статью В. Н. Темлякова [14]).

Говорят, что жадный алгоритм элемента f по системе Ψ *сходится в X* , если для всех $\sigma \in D(f, \Psi)$ имеет место

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|G_m(f, \Psi, \sigma) - f\|_X = 0.$$

Жадные алгоритмы для банаховых пространств относительно нормированных базисов изучались В. Н. Темляковым, Р. ДеВором, С. В. Конягиным, П. Войтащиком, Т. В. Корнером и другими авторами (см. [14]–[33]). Приведем те результаты, которые непосредственно относятся к полученным в настоящей работе.

В работе [14] В. Н. Темляков доказал существование функции

$$f_0(x) \in \bigcap_{1 \leq p < 2} L^p[0, 2\pi] \quad (f_0(x) \in C[0, 2\pi]),$$

жадный алгоритм которой по тригонометрической системе расходится по мере (почти всюду).

Т. В. Корнер, ответив на вопрос, поставленный Карлесоном и Койфманом построил в [18] пример функции из L^2 , а затем в [19] – пример непрерывной

функции, жадный алгоритм которой по тригонометрической системе расходится почти всюду.

В работе [20] доказано, что для каждого $p \geq 1$, $p \neq 2$, существует функция $f(x) \in L^p(0, 1)$, жадный алгоритм которой по системе Уолша расходится в $L^p(0, 1)$ (см. также [21], [22]).

Возникает следующий

ВОПРОС 1. Существует ли измеримое множество e сколь угодно малой меры такое, что после изменения значений любой функции класса $L^p[0, 1]$, $p \geq 1$, на e жадный алгоритм по системе Уолша и по тригонометрической системе измененной функции сходится к ней (почти всюду, по норме $L^p[0, 1]$, равномерно)?

Важно отметить, что в работе [21] показано существование полной в L^2 ортонормированной системы, для которой на поставленный вопрос 1 при $p > 2$ в смысле сходимости по норме L^p дается отрицательный ответ. Точнее, построены ортонормированная система $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty = \psi$ ограниченных функций и непрерывная функция $g(x)$ такие, что если при некоторой функции $f \in L^p$, $p > 2$,

$$|\{x \in [0, 1]; f(x) = g(x)\}| > 0,$$

то ее жадный алгоритм $\{G_m(x, \psi, f)\}$ по системе ψ расходится в $L^p(0, 1)$. А в работе автора [9] установлено, что ответ на вопрос 1 при $p = 1$ в смысле сходимости по норме L^1 для системы Хаара $\chi = \{\chi_n(x)\}$ положителен, более того, для любой последовательности $a_k \searrow 0$ с $a_k = o(\frac{1}{\sqrt{k}})$, $\{a_k\}_{k=1}^\infty \notin l_2$ и для каждого $\varepsilon > 0$ построено измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для произвольной функции $f(x) \in L^1(0, 1)$ можно найти функцию $\tilde{f}(x) \in L^1(0, 1)$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, на E такую, что

$$c_n(\tilde{f}) = \int_0^1 \tilde{f}(x) \chi_n(x) dx = a_n \quad \forall n \in \text{spec}(\tilde{f}),$$

где $\text{spec}(\tilde{f}) = \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, c_k(\tilde{f}) \neq 0\}$.

Следовательно, для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{N_m\}$ будем иметь

$$G_m(x, \tilde{f}, \chi) = S_{N_m}(x, \tilde{f}) \quad \forall x \in (0, 1), \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $S_n(x, \tilde{f})$ – это n -я частичная сумма функции $\tilde{f}(x)$ по системе Хаара, а $\{G_m(x, \tilde{f}, \chi)\}_{m=1}^\infty$ – жадный алгоритм функции $\tilde{f}(x)$ по системе Хаара (см. (1.1)).

Заметим, что ответ на вопрос 1 зависит как от наперед заданной системы и смысла сходимости, так и от того, зависит ли исключительное множество, на котором происходит изменение, от исправляемой функции $f(x)$ или является универсальным.

Мы рассмотрим вопрос 1 в двух постановках:

1) когда значения функции $f(x)$ изменяются на зависящем от функции множестве сколь угодно малой меры?

2) когда исключительное множество e , на котором происходит изменение, не зависит от исправляемой функции $f(x)$ (т.е. оно универсально, обслуживает целый функциональный класс)?

В соответствии с этими постановками в настоящей работе доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $0 < \varepsilon < 1$ и для каждой функции $f \in L^1[0, 1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0, 1)$, $\text{mes}\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$, жадный алгоритм которой по системе Уолша сходится к ней почти всюду на $[0, 1]$.*

ТЕОРЕМА 2. *Для любого $0 < \varepsilon < 1$ существуют измеримое множество $E \subset [0, 1)$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ и весовая функция $\mu(x)$, $\mu(x) = 1$ на E , такие, что для любого $p \in [1, \infty)$ и для каждой функции $f \in L_\mu^p(0, 1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0, 1)$, совпадающую с f на E и такую, что ее жадный алгоритм по системе Уолша сходится к ней по нормам $L_\mu^p[0, 1)$ и $L^1[0, 1)$, где*

$$L_\mu^p[0, 1) = \left\{ f(x); \int_0^1 |f(x)|^p \cdot \mu(x) dx < \infty \right\}.$$

Отметим, что в связи с изучением сходимости жадного алгоритма вновь полученной, исправленной, функции $\tilde{f}(x)$ возник следующий вопрос, представляющий самостоятельный интерес. Можно ли изменить значения любой функции $f(x)$ класса $L^p(0, 1)$, $p \geq 1$, на множестве малой меры так, чтобы все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по классическим системам (в частности, по системе Уолша и по тригонометрической системе) по модулю были расположены в убывающем порядке?

Для системы Уолша автором в работе [32] доказана

ТЕОРЕМА 3. *Для любых $0 < \varepsilon < 1$, $p \geq 1$ и для каждой функции $f \in L^p(0, 1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p(0, 1)$, $\text{mes}\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$, такую, что все ненулевые члены в последовательности $\{|c_n(\tilde{f})|\}$ расположены в убывающем порядке (здесь $c_k(\tilde{f})$ – коэффициенты Фурье исправляемой функции $f(x)$ по системе Уолша).*

Принимая во внимание тот факт, что система Уолша является базисом во всех пространствах $L^p(0, 1)$, $p > 1$, отсюда (из теоремы 3) сразу получается

ТЕОРЕМА 4. *Для любых $0 < \varepsilon < 1$, $2 \leq p < \infty$, и для каждой функции $f(x) \in L^p[0, 1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p[0, 1)$, $\text{mes}\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$, такую, что ее жадный алгоритм по системе Уолша сходится к ней в $L^p[0, 1)$.*

Это свойство назовем усиленным жадным L^p -свойством.

Теорема 4 верна также и при $p = \infty$ (см. [33]).

Теоремы 1–4 следуют из более сильных теорем 5–7 соответственно.

ТЕОРЕМА 5. *Для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0, 1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0, 1)$, совпадающую с f на E и такую, что ее жадный алгоритм по системе Уолша сходится к ней почти всюду на $[0, 1)$,*

и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Уолша по модулю расположены в убывающем порядке.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\{\varphi_k\}$ – система Уолша. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ существуют измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$, измеримая положительная функция $\mu(x)$, $\mu(x) = 1$ при $x \in E$, и ряд вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x), \quad \text{где } |a_i| \searrow 0, \quad (1.2)$$

такие, что:

1) для каждой функции $f \in \bigcap_{p \geq 1} L^p_\mu[0, 1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0, 1)$, совпадающую с f на E , и ряд вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i a_i \varphi_i(x), \quad \text{где } \delta_i = 0 \text{ или } \delta_i = 1, \quad (1.3)$$

который сходится к $\tilde{f}$ во всех пространствах $L^p_\mu(0, 1)$, $p \geq 1$, и $L^1(0, 1)$ одновременно;

2) для любого $p \in [1, \infty)$ и для каждой функции $f \in L^p_\mu[0, 1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0, 1)$, совпадающую с f на E , и ряд вида (1.3), который сходится к $\tilde{f}$ в $L^p_\mu[0, 1)$ и в $L^1[0, 1)$.

ТЕОРЕМА 7. Для любого $0 < \varepsilon < 1$ и для каждой функции $f \in L^1[0, 1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^\infty[0, 1)$, $\text{mes}\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$, жадный алгоритм которой по системе Уолша сходится равномерно на $[0, 1)$, все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Уолша по модулю расположены в убывающем порядке и для всех $1 \leq p \leq \infty$, $t = 1, 2, \dots$

$$\|G_t(x, \tilde{f})\|_p \leq \frac{3}{\varepsilon^{1-1/p}} \|f(x)\|_p \leq 6 \|\tilde{f}(x)\|_p, \quad (1.4)$$

$$\text{где } \|*\|_p = \left(\int_0^1 |*|^p dx \right)^{1/p}.$$

Из теоремы 6 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого $0 < \varepsilon < 1$ существуют измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ и ряд вида (1.2), который является универсальным рядом во всех $L^p(E)$, $p \in [1, \infty)$, относительно частичных рядов, т.е. для каждого $p \geq 1$ и для каждой функции $f \in L^p(E)$ из ряда (1.2) можно выделить частичный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i} \varphi_{k_i}(x), \quad \text{где } k_1 < k_2 < \dots,$$

который сходится к f по $L^p(E)$ -норме.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Этот результат не усиливается (в некотором смысле), поскольку ни при одном $p \in [1, \infty)$ ни по одной ограниченной ортонормированной системе не существует ряда, универсального в $L^p[0, 1)$ относительно частичных рядов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как в теоремах Н. Н. Лузина и Д. Е. Меньшова, так и в теоремах 1, 3, 4 и 7 исключительное множество e , на котором происходит изменение функции $f(x)$, зависит от функции, а в теоремах 2, 5 и 6 это исключительное множество не зависит от исправляемой функции, т.е. обслуживает целый функциональный класс.

Возникают следующие вопросы, ответы на которые нам не известны.

ВОПРОС 2. Можно ли в теоремах 1, 3, 4 и 7 исключительное множество выбрать не зависящим от исправляемой функции $f(x)$?

ВОПРОС 3. Верны ли теоремы 1–7 для тригонометрической системы?

§ 2. Вспомогательные результаты и основные леммы

Сначала приведем определение системы Уолша–Пэли $\Phi = \{\varphi_k\}$ (см. [34] и [35]):

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_n(x) = \prod_{s=1}^k r_{m_s}(x), \quad n = \sum_{s=1}^k 2^{m_s}, \quad m_1 > m_2 > \dots > m_k, \quad (2.1)$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^\infty$ – система Радемахера,

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \end{cases}$$

$$r_0(x+1) = r_0(x), \quad r_k(x) = r_0(2^k x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Введем некоторые обозначения. Разобьем полуинтервал $[0, 1)$ на 2^m равных частей и обозначим эти полуинтервалы через $\Delta_m^{(j)}$. В дальнейшем будем называть их двоичными интервалами или просто интервалами вида

$$\Delta_m^{(j)} = \left[\frac{j-1}{2^m}, \frac{j}{2^m} \right), \quad 1 \leq j \leq 2^m.$$

Положим

$$S_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x), \quad \text{где } a_k(f) = \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx, \quad (2.2)$$

$$\delta_k(x, f) = S_{2^{k+1}}(x, f) - S_{2^k}(x, f) \quad \forall f(x) \in L_{[0,1)}. \quad (2.3)$$

Мы будем пользоваться следующими свойствами системы Уолша $\Phi = \{\varphi_k\}$ (см. [34], [35]):

$$S_n(x, f)\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^k \delta_{m_j}(x, \varphi_n f), \quad \text{если } n = \sum_{j=1}^k 2^{m_j}, \quad m_1 > m_2 > \dots > m_k; \quad (2.4)$$

$$S_{2^m}(x, f) = \frac{1}{|\Delta_m^{(j)}|} \int_{\Delta_m^{(j)}} f(x) dx \quad \text{при } x \in \Delta_m^{(j)} = \left[\frac{j-1}{2^m}, \frac{j}{2^m} \right), \quad 1 \leq j \leq 2^m; \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} |S_n(x, \gamma \chi_\Delta)| \leq 4|\gamma| & \forall x \in [0, 1], \forall n \geq 0, \\ \|\|S_n(x, f)\|_p < C_p \|f\|_p & \forall n \geq 0, \forall f(x) \in L^p[0, 1], \forall p \in (1, \infty), \end{cases} \quad (2.6)$$

где C_p зависит только от p . Пусть

$$I_m^{(j)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0, 1] \setminus \Delta_m^{(j)}, \\ 1 - 2^m & \text{при } x \in \Delta_m^{(j)} = \left[\frac{j-1}{2^m}, \frac{j}{2^m} \right), \end{cases} \quad (2.7)$$

$$m = 1, 2, \dots, \quad 1 \leq j \leq 2^m,$$

и для измеримого множества $E \subset [0, 1]$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in E, \\ 0 & \text{при } x \notin E. \end{cases}$$

Очевидно, что $I_m^{(j)}(x) = \varphi_0(x) - 2^m \cdot \chi_{\Delta_m^{(j)}}(x)$.

Нетрудно видеть, что для любых натуральных чисел $m \geq 1, j \in [1, 2^m]$

$$a_i(I_m^{(j)}) = \int_0^1 I_m^{(j)}(x) \varphi_i(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i = 0 \text{ и } i > 2^m, \\ \pm 1 & \text{при } 1 \leq i \leq 2^m, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$b_i(\chi_{\Delta_m^{(j)}}) = \int_0^1 \chi_{\Delta_m^{(j)}}(x) \varphi_i(x) dx = \pm \frac{1}{2^m}, \quad 0 \leq i < 2^m. \quad (2.9)$$

Следовательно,

$$I_m^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^{2^m-1} a_i(I_m^{(j)}) \varphi_i(x), \quad (2.10)$$

$$\chi_{\Delta_m^{(j)}}(x) = \sum_{i=0}^{2^m-1} b_i(\chi_{\Delta_m^{(j)}}) \varphi_i(x). \quad (2.11)$$

ЛЕММА 1. Пусть даны числа $N_0, \nu_0, \lambda \in \mathbb{N}, N_0 > 1, \nu_0 > \lambda, \gamma \neq 0$, и интервал вида

$$\Delta = \Delta_m^{(k)} = \left[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m} \right), \quad k \in [1, 2^m].$$

Тогда существуют измеримые множества G , $E \subset [0, 1]$ и полином $Q(x)$ по системе Уолша вида

$$Q(x) = \sum_{n=N_0}^N c_n \varphi_n(x)$$

такие, что:

- 1) ненулевые коэффициенты в $\{c_n\}_{n=N_0}^N$ равны $\pm \gamma \cdot |\Delta|$;
- 2) $|G| = |\Delta|(1 - 2^{-\lambda})$, $|E| = |\Delta|(1 - 2^{-\nu_0})$;
- 3) $Q(x) = \begin{cases} \gamma & \text{на } E, \\ 0 & \text{вне } \Delta; \end{cases}$
- 4) $2^{(p-1)\nu_0-1}|\Delta| |\gamma|^p < \int_0^1 |Q(x)|^p dx < 2^{(p-1)\nu_0+1}|\Delta| |\gamma|^p \quad \forall p \in [1, \infty)$;
- 5) $\max_{N_0 \leq M \leq N} \left\| \sum_{k=N_0}^M c_k \varphi_k \right\|_\infty \leq 2^{\nu_0} |\gamma|$, $\|Q(x)\|_\infty = (2^{\nu_0} - 1) \cdot |\gamma|$, $\|\cdot\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |\cdot|$;
- 6) $\max_{N_0 \leq M \leq N} \left\| \sum_{k=N_0}^M c_k \varphi_k \right\|_p < \begin{cases} C_p 2^{\nu_0(1-1/p)+1} |\Delta|^{1/p} |\gamma| & \text{при } p > 1, \\ 2 |\gamma| \sqrt{2^{\nu_0}} |\Delta| & \text{при } p = 1, \end{cases} \quad \text{где}$
 C_p – константа неравенства (2.6);
- 7) $\max_{N_0 \leq M \leq N} \left| \sum_{k=N_0}^M c_k \varphi_k(x) \right| < \begin{cases} 2^\lambda |\gamma| & \text{при } x \in G, \\ |\gamma| & \text{при } x \in [0, 1] \setminus \Delta. \end{cases}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$s = [\log_2 N_0] + m. \quad (2.12)$$

Продолжим функцию $I_{\nu_0}^{(1)}(x)$ с отрезка $[0, 1]$ на всю действительную ось с периодом 1.

Определим полином $Q(x)$ и числа c_n , a_i и b_j следующим образом:

$$Q(x) = \gamma \cdot \chi_{\Delta_m^{(k)}}(x) \cdot I_{\nu_0}^{(1)}(2^s x), \quad x \in [0, 1], \quad (2.13)$$

$$c_n = c_n(Q) = \int_0^1 Q(x) \varphi_n(x) dx \quad \forall n \geq 0, \quad (2.14)$$

$$b_i = b_i(\chi_{\Delta_m^{(k)}}), \quad 0 \leq i < 2^m, \quad a_j = a_j(I_{\nu_0}^{(1)}), \quad 0 < j < 2^{\nu_0}. \quad (2.15)$$

Принимая во внимание равенство (см. (2.1))

$$\varphi_i(x) \cdot \varphi_j(2^s x) = \varphi_{j \cdot 2^s + i}(x), \quad 0 \leq i, \quad j < 2^s,$$

и учитывая соотношения (2.3)–(2.6), (2.8), (2.9), будем иметь

$$\begin{aligned} Q(x) &= \gamma \cdot \sum_{i=0}^{2^m-1} b_i \varphi_i(x) \cdot \sum_{j=1}^{2^{\nu_0}-1} a_j \varphi_j(2^s x) \\ &= \gamma \cdot \sum_{j=1}^{2^{\nu_0}-1} a_j \cdot \sum_{i=0}^{2^m-1} b_i \varphi_{j \cdot 2^s + i}(x) = \sum_{k=N_0}^N c_k \varphi_k(x), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$c_k = c_k(Q) = \begin{cases} \pm \frac{\gamma}{2^m} & \text{или } 0 \quad \text{при } k \in [N_0, N], \\ 0 & \text{при } k \notin [N_0, N], \end{cases} \quad N = 2^{s+\nu_0} + 2^m - 2^s - 1. \quad (2.17)$$

Положим

$$E = \{x; Q(x) = \gamma\}. \quad (2.18)$$

Легко видеть, что (см. (2.7), (2.13), (2.18))

$$|E| = |\Delta|(1 - 2^{-\nu_0}), \quad Q(x) = \begin{cases} \gamma & \text{при } x \in E, \\ \gamma(1 - 2^{\nu_0}) & \text{при } x \notin E, \\ 0 & \text{вне } \Delta. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\|Q\|_\infty = (2^{\nu_0} - 1) \cdot |\gamma|$$

и

$$2^{\nu_0(1-1/p)-1} |\Delta|^{1/p} |\gamma| < \|Q(x)\|_p \leq 2^{\nu_0(1-1/p)+1} |\Delta|^{1/p} |\gamma| \quad \forall p \geq 1. \quad (2.19)$$

Отсюда (при $p = 2$) и из (2.16) (учитывая ортонормированность системы Уолша $\{\varphi_n(x)\}$) для всех $M \in [N_0, N]$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_0}^M c_k \varphi_k(x) \right| dx &\leq \left\| \sum_{n=N_0}^M c_k \varphi_k \right\|_2 = \left(\sum_{n=N_0}^M c_k^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{n=N_0}^N c_k^2 \right)^{1/2} = \|Q\|_2 < 2|\gamma| \sqrt{2^{\nu_0} |\Delta|}. \end{aligned}$$

В силу (2.6), (2.16) и (2.19) для всех $p \in (1, \infty)$ получим

$$\max_{N_0 \leq M \leq N} \left\| \sum_{n=N_0}^M c_k \varphi_k \right\|_p \leq C_p \|Q\|_p < C_p 2^{\nu_0(1-1/p)+1} |\Delta|^{1/p} |\gamma|, \quad p > 1.$$

Пусть $M \in [N_0, N]$, тогда для некоторых $j_0 \in [1, 2^{\nu_0}]$, $i_0 \in [0, 2^m]$ (см. (2.12), (2.16)) будем иметь

$$\sum_{k=N_0}^M c_k \varphi_k(x) = \gamma \sum_{j=1}^{j_0-1} a_j \left(\sum_{i=0}^{2^m-1} b_i \varphi_i(x) \right) \varphi_j(2^s x) + \gamma a_{j_0} \varphi_{j_0}(2^s x) \sum_{i=0}^{i_0-1} b_i \varphi_i(x).$$

Отсюда и из того, что (см. (2.8)–(2.11) и (2.15))

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2^m-1} b_i \varphi_i(x) &= \chi_\Delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta, \\ 0, & x \in [0, 1) \setminus \Delta, \end{cases} \\ |b_i| &= \frac{1}{2} \quad \forall i \in [0, 2^m), \quad |a_j| = 1 \quad \forall j \in [1, 2^{\nu_0}), \end{aligned}$$

будем иметь

$$\left| \sum_{k=N_0}^M c_k \varphi_k(x) \right| = |\gamma| \left[(j_0 - 1) \cdot \chi_\Delta(x) + \frac{i_0}{2^m} \right] \leq \begin{cases} 2^{\nu_0} \cdot |\gamma|, & x \in \Delta, \\ |\gamma|, & x \in [0, 1) \setminus \Delta. \end{cases}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \max_{N_0 \leq M \leq N} \left\| \sum_{k=N_0}^M c_k \varphi_k \right\|_\infty &\leq |\gamma| 2^{\nu_0}, \\ \max_{N_0 \leq M \leq N} \left| \sum_{k=N_0}^M c_k \varphi_k(x) \right| &\leq |\gamma| \quad \forall x \in [0, 1) \setminus \Delta. \end{aligned}$$

Теперь проверим выполнение утверждения 7) леммы 1 (при $x \in G$). Пусть $\Delta_{\nu_0+s}^{(j_k)}$ и $\Delta_{\lambda+s}^{(i_k)}$, $k \in [1, 2^{s-m}]$, – те интервалы, которые удовлетворяют условиям

$$\Delta \setminus E = \bigcup_{k=1}^{2^q} \Delta_{\nu_0+s}^{(j_k)}, \quad \Delta_{\nu_0+s}^{(j_k)} \subset \Delta_{\lambda+s}^{(i_k)}, \quad k \in [1, 2^{s-m}].$$

Положим

$$\begin{cases} g(x) = 2^{\nu_0} \chi_{\Delta \setminus E}(x), \\ G = \Delta \setminus \bigcup_{k=1}^{2^q} \Delta_{\lambda+s}^{(i_k)}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Из (2.7), (2.13), (2.16) и (2.20) вытекает

$$|G| = |\Delta|(1 - 2^{-\lambda}), \quad \sum_{k=N_0}^N c_k \varphi_k(x) = Q(x) = \gamma \chi_\Delta(x) - g(x).$$

Отсюда и из (2.9), (2.10), (2.12) для всех x и n , $x \in [0, 1]$, $n \in [N_0, N]$, имеем

$$\sum_{k=N_0}^n c_k \varphi_k(x) = S_n(x, \gamma \chi_\Delta) - S_n(x, g). \quad (2.21)$$

Докажем, что на множестве G частичные суммы $S_n(x, g)$ удовлетворяют условию $|S_n(x, g)| \leq 2^\lambda |\gamma|$ для всех $n \in [N_0, N]$. Для этого нам нужно оценить частичные суммы вида $S_{2^k}(x, \varphi_n g)$.

Из определения функции $g(x)$ для всех $k \in (s, s + \nu_0]$ при $\Delta_k^{(i)} \subset \Delta_{k-1}^{(j)}$ следует, что

$$\int_{\Delta_k^{(i)}} g(x) dx = \int_{\Delta_{k-1}^{(j)}} g(x) dx, \quad \text{если } g(x) \neq 0 \text{ на } \Delta_k^{(i)}.$$

Принимая во внимание, что

$$\varphi_n(x + j2^{-k}) = \varphi_n(x) \quad \text{при } x \in \Delta_k^{(i)}$$

или

$$\varphi_n(x + j2^{-k}) = -\varphi_n(x) \quad \text{при } x \in \Delta_k^{(i)}$$

(см. (2.7)), из (2.7), (2.13), (2.18), (2.20) находим, что выполнено одно из следующих соотношений:

$$\int_{\Delta_k^{(i)}} \varphi(x)g(x) dx = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{|\Delta_k^{(i)}|} \left| \int_{\Delta_k^{(i)}} \varphi_n(x)g(x) dx \right| = \begin{cases} |\gamma|2^{k-m} & \text{при } 0 \leq k < m, \\ |\gamma| & \text{при } m \leq k < s, \\ |\gamma|2^{k-s} & \text{при } s \leq k < s + \nu_0, \\ |\gamma|2^{\nu_0} & \text{при } k \geq s + \nu_0. \end{cases}$$

И если удовлетворяется второе равенство при $g(x) \neq 0$ на $\Delta_k^{(i)}$, то для всех $k^1 \leq k$, $0 < i \leq 2^{k^1}$

$$\int_{\Delta_{k^1}^{(i)}} \varphi_n(x)g(x) dx = 0.$$

Пусть i_0 и k_0 – наименьшие из тех чисел i и k , для которых

$$\int_{\Delta_k^{(i)}} \varphi_n(x)g(x) dx \neq 0.$$

Нетрудно видеть, что $k_0 \notin (0, m]$; $k_0 = 0$ при $\int_{\Delta} \varphi_n(x)g(x) dx \neq 0$ и $k_0 > m$ при $\int_{\Delta} \varphi_n(x)g(x) dx = 0$. И если $k_0 > m$, то

$$S_{2^k}(x, \varphi_n g) = 0 \quad \text{при } x \in [0, 1] \quad \forall k < k_0. \quad (2.23)$$

Заметим, что если $k_0 > s$, то сразу получим, что $k_0 \geq s + \nu_0$, и, следовательно, в силу (2.3)–(2.5) будем иметь $n > N$, $S_n(x, g) = g(x) \quad \forall x \in [0, 1]$.

Теперь рассмотрим случай $k_0 \leq s$. Тогда из условий (2.5), (2.20), (2.22), (2.23) и из выбора i_0 и k_0 получаем следующие соотношения:

а) если $g(x) \neq 0$ на $\Delta_{k_0}^{(i)}$, то

$$\left| \int_{\Delta_{k_0}^{(i)}} \varphi_n(x)g(x) dx \right| = \left| \int_{\Delta_{k_0}^{(i_0)}} \varphi_n(x)g(x) dx \right|;$$

б) $S_{2^{k_1}}(x, \varphi_n g) = S_{2^{k_2}}(x, \varphi_n g) \quad \forall x \in \Delta_{k_2}^{(i)}$ при $k_2 > k_1 \geq k_0$, $k_2, k_1 \in [m, s]$.

Пусть $m < k_0 \leq s$, $n = \sum_{j=1}^{\bar{k}} 2^{m_j}$, $m_1 > m_2 > \dots > m_{\bar{k}}$. Учитывая соотношения а), б), (2.3)–(2.5), (2.23), находим

$$\begin{aligned} |S_n(x, g)| &= \left| \sum_{j=1}^{\bar{k}} \delta_{m_j}(x, \varphi_n g) \right| \leq \sum_{m_j < m} |\delta_{m_j}(x, \varphi_n g)| + |\delta_m(x, \varphi_n g)| \\ &+ \sum_{m < m_j < k_0} |\delta_{m_j}(x, \varphi_n g)| + |\delta_{k_0}(x, \varphi_n g)| \\ &+ \sum_{k_0 < m_j < s} |\delta_{m_j}(x, \varphi_n g)| + |\delta_s(x, \varphi_n g)| \\ &+ \sum_{s < m_j < s + \lambda} |\delta_{m_j}(x, \varphi_n g)| + |\delta_{s+\lambda}(x, \varphi_n g)| + \sum_{m_j > s + \lambda} |\delta_{m_j}(x, \varphi_n g)| \end{aligned}$$

$$\leq 2^\lambda |\gamma| + \sum_{m_j > s+\lambda} |\delta_{m_j}(x, \varphi_n g)|. \quad (2.24)$$

Аналогично получим соотношение (2.24) в случае $k_0 = 0$.

Поскольку при $k \geq \lambda + s$ интервалы $\Delta_k^{(i)}$ лежат либо на G , либо на $\Delta \setminus G$, то из условий (2.3), (2.20), (2.21) заключаем, что

$$\delta_k(x, \varphi_n g) = 0 \quad \forall x \in G$$

и, следовательно, в силу (2.24) имеем

$$|S_n(x, g)| \leq 2^\lambda |\gamma| \quad \forall x \in G.$$

Отсюда и из (2.6) и (2.21) следует, что

$$\left| \sum_{k=N_0}^n c_k \varphi_k(x) \right| \leq 3|\gamma|2^\lambda, \quad x \in G \quad \forall n \in [N_0, N].$$

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть даны числа $k_0 \geq 1$, $\varepsilon \in (0, 1)$ и полином $f(x)$ с $\|f\|_1 < 1$ по системе Уолша. Тогда существуют измеримые множества E , G и полином $Q(x)$ по системе Уолша вида

$$Q(x) = \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k \varphi_{n_k}, \quad n_k \nearrow,$$

которые удовлетворяют условиям:

- 1) $|E| > 1 - \varepsilon$;
- 2) $|G| > 1 - \sqrt{\|f\|_1}$;
- 3) $Q(x) = f(x)$ на E ;
- 4) $\varepsilon > |a_k| \geq |a_{k+1}| > 0$, $k \in [k_0, \bar{k}]$;
- 5) $\frac{1}{2}\|f\|_1 \leq \|Q(x)\|_1 \leq 2\|f\|_1$;
- 6) $\max_{k_0 \leq m \leq \bar{k}} \left| \sum_{k=k_0+1}^m a_k \varphi_{n_k}(x) \right| < \frac{4\|f(x)\|}{\sqrt{\|f\|_1}}$ при $x \in G$;
- 7) $\max_{k_0 \leq m \leq \bar{k}} \left\| \sum_{k=k_0+1}^m a_k \varphi_{n_k}(x) \right\|_1 \leq 2\|f\|_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} \gamma_\nu \cdot \chi_{\Delta_\nu}(x), \quad [0, 1) = \bigcup_{\nu=1}^{\mu_0} \Delta_\nu, \quad (2.25)$$

где Δ_ν имеют вид $\Delta_m^{(i)}$. Определим числа λ и ν_0 следующим образом:

$$\lambda = 2 - \lceil \log_2 \sqrt{\|f\|_1} \rceil, \quad \nu_0 = \lambda + \left\lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil. \quad (2.26)$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$0 < |\gamma_{\mu_0}| |\Delta_{\mu_0}| < \dots < |\gamma_k| |\Delta_k| < \dots < |\gamma_1| |\Delta_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.27)$$

$$\max_{1 \leq \nu \leq \mu_0} 2^{\nu_0} |\gamma_\nu| |\Delta_\nu|^{1/2} < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\|f\|_1}{2} \right\}. \quad (2.28)$$

Последовательным применением леммы 1 можно определить множества $G_\nu \subset E_\nu \subset \Delta_\nu$ и полиномы

$$Q_\nu = \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} a_k \varphi_{n_k}(x), \quad \nu = 1, 2, \dots, \mu_0, \quad N_0 = k_0 + 1, \quad (2.29)$$

которые удовлетворяют условиям

$$Q_\nu = \begin{cases} \gamma_\nu & \text{на } E_\nu, \\ 0 & \text{вне } \Delta_\nu, \end{cases} \quad \nu = 1, 2, \dots, \mu_0, \quad (2.30)$$

$$|a_j| = |\gamma_\nu| |\Delta_\nu| \quad \text{при } j \in [N_{\nu-1}, N_\nu), \quad 1 < \nu \leq \mu_0, \quad (2.31)$$

$$|E_\nu| = (1 - 2^{-\nu_0}) |\Delta_\nu|, \quad (2.32)$$

$$|G_\nu| = (1 - 2^{-\lambda}) |\Delta_\nu|, \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{2} |\gamma_\nu| \cdot |\Delta_\nu| \leq \int_0^1 |Q_\nu(x)| dx < 2 |\gamma_\nu| \cdot |\Delta_\nu|, \quad (2.34)$$

$$\max_{N_{\nu-1} \leq m < N_\nu} \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{\nu-1}}^m a_k \varphi_{n_k}(x) \right| dx \leq 2 |\gamma_\nu| \sqrt{2^{\nu_0+1} \cdot |\Delta_\nu|}, \quad (2.35)$$

$$\max_{N_{\nu-1} \leq m < N_\nu} \left| \sum_{k=N_{\nu-1}}^m a_k \varphi_{n_k}(x) \right| < \begin{cases} 2^{\lambda+1} |\gamma_\nu| & \text{при } x \in G_\nu, \\ |\gamma_\nu| & \text{при } x \in [0, 1] \setminus \Delta_\nu. \end{cases} \quad (2.36)$$

Положим

$$Q(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} Q_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} \left(\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} a_k \varphi_{n_k}(x) \right) \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k \varphi_{n_k}(x), \quad \text{где } \bar{k} = N_{\mu_0} - 1, \quad (2.37)$$

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{\mu_0} E_\nu \quad G = \bigcup_{\nu=1}^{\mu_0} G_\nu. \quad (2.38)$$

Отсюда и из (2.25)–(2.34), (2.38) получаем

$$\begin{aligned} Q(x) &= f(x), \quad x \in E, \\ \varepsilon &> |a_k| \geq |a_{k+1}| > 0, \quad k \in (k_0, \bar{k}), \\ \frac{1}{2} \|f\|_1 &\leq \|Q\|_1 \leq 2 \sum_{\nu=1}^{\nu_0} |\gamma_\nu| |\Delta_\nu| = 2 \|f\|_1, \\ |E| &> 1 - \varepsilon, \quad |G| > 1 - \sqrt{\|f\|_1}. \end{aligned}$$

Теперь проверим выполнение утверждения 6) леммы 2. Для любого $N \in [k_0, \bar{k}]$ определим ν из условия $N_{\nu-1} \leq N < N_\nu$. Из (2.29) и (2.37) имеем

$$\sum_{k=k_0+1}^N a_k \varphi_{n_k}(x) = \sum_{n=1}^{\nu-1} Q_n(x) + \sum_{k=N_{\nu-1}}^N a_k \varphi_{n_k}(x). \quad (2.39)$$

Учитывая соотношения (2.25), (2.26), (2.36), (2.38), (2.39), при $x \in G$ получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=k_0+1}^N a_k \varphi_{n_k}(x) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\nu-1} |\gamma_n| \chi_{\Delta_n}(x) + 2^{\lambda+1} |\gamma_\nu| \cdot \chi_{G_\nu}(x) + 2 |\gamma_\nu| \cdot \chi_{[0,1] \setminus \Delta_\nu}(x) \\ &\leq \frac{2|f(x)|}{\sqrt{\|f\|_1}} + 2|f(x)| \leq \frac{4|f(x)|}{\sqrt{\|f\|_1}}. \end{aligned}$$

В силу условий (2.25), (2.28), (2.35) и (2.39) для любого $N \in (k_0, \bar{k}]$ имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=k_0+1}^N a_k \varphi_{n_k}(x) \right| dx \leq 2\|f\|_1.$$

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть даны числа $k_0 \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < 1$, $p_0 \geq 1$ и полином $f(x)$ по системе Уолша. Тогда можно найти измеримое множество $E \subset [0, 1]$, функцию g и полином по системе Уолша вида

$$Q = \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k \varphi_{n_k}, \quad n_k \nearrow,$$

удовлетворяющие условиям:

- 1) $|E| > 1 - \varepsilon$;
- 2) $g(x) = f(x) \forall x \in E$;
- 3) $\frac{1}{2\varepsilon^{1-1/p}} \|f\|_p \leq \|g\|_p < \frac{2}{\varepsilon^{1-1/p}} \|f\|_p \forall p \in [1, \infty]$;
- 4) $\|Q(x) - g(x)\|_{p_0} < \varepsilon$;
- 5) $\varepsilon > |a_k| > |a_{k+1}| > 0$, $k \in (k_0, \bar{k})$;
- 6) $\max_{k_0 < m \leq \bar{k}} \left\| \sum_{k=k_0+1}^m a_k \varphi_{n_k} \right\|_p < \frac{2C_p \|f\|_p}{\varepsilon^{1-1/p}} \forall p \in [1, p_0]$; здесь C_p – константа неравенства (2.6);
- 7) для любого измеримого множества $e \subset E$

$$\max_{k_0 < m \leq \bar{k}} \left(\int_e \left| \sum_{k=k_0+1}^m a_k \varphi_{n_k}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_e |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \varepsilon;$$

$$8) \max_{k_0 \leq m \leq \bar{k}} \left\| \sum_{k=k_0}^m a_k \varphi_{n_k}(x) \right\|_\infty < \frac{2\|f\|_\infty}{\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} \gamma_\nu \cdot \chi_{\Delta_\nu}(x), \quad [0, 1] = \bigcup_{\nu=1}^{\mu_0} \Delta_\nu. \quad (2.40)$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\max_{1 \leq \nu \leq \mu_0} \frac{C_{p_0} |\gamma_\nu| |\Delta_\nu|^{1/p_0}}{\varepsilon} < \min_{1 \leq \nu \leq \nu_0} \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\|f\|_p}{2} \right\}, \quad (2.41)$$

$$0 < |\gamma_{\mu_0}| |\Delta_{\mu_0}| < \dots < |\gamma_1| |\Delta_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.42)$$

Последовательным применением леммы 1 можно определить множества $E_\nu \subset \Delta_\nu$ и полиномы

$$Q_\nu(x) = \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} b_k \varphi_{n_k}(x), \quad N_0 = k_0 + 1, \quad \text{для всех } 1 \leq \nu \leq \mu_0, \quad (2.43)$$

которые удовлетворяют условиям

$$|b_k| = |\gamma_\nu| |\Delta_\nu| \quad \text{при } k \in [N_{\nu-1}, N_\nu), \quad \nu = 1, \dots, \mu_0, \quad (2.44)$$

$$|E_\nu| = (1 - 2^{-\nu_0}) |\Delta_\nu| > (1 - \varepsilon) |\Delta_\nu|, \quad \nu = 1, 2, \dots, \mu_0, \quad \nu_0 = 1 + \left\lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil, \quad (2.45)$$

$$Q_\nu(x) = \begin{cases} \gamma_\nu & \text{на } E_\nu, \\ 0 & \text{вне } \Delta_\nu, \end{cases} \quad \nu = 1, 2, \dots, \mu_0, \quad (2.46)$$

$$\frac{|\gamma_\nu|}{2\varepsilon^{1-1/p}} \cdot |\Delta_\nu|^{1/p} < \|Q_\nu\|_p < \frac{2|\gamma_\nu|}{\varepsilon^{1-1/p}} \cdot |\Delta_\nu|^{1/p}, \quad p \geq 1, \quad (2.47)$$

$$\max_{N_{\nu-1} \leq m < N_\nu} \left\| \sum_{k=N_{\nu-1}}^m b_k \varphi_{n_k} \right\|_p \leq \frac{2C_{p_0} |\gamma_\nu| |\Delta_\nu|^{1/p_0}}{\varepsilon^{1-1/p_0}}, \quad 1 \leq p \leq p_0, \quad (2.48)$$

$$\max_{N_{\nu-1} \leq m < N_\nu} \left\| \sum_{k=N_{\nu-1}}^m b_k \varphi_{n_k}(x) \right\|_\infty < \frac{2\|\gamma_\nu\|_\infty}{\varepsilon}. \quad (2.49)$$

Положим

$$Q(x) = \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k \varphi_{n_k}(x), \quad (2.50)$$

где

$$a_k = b_k + 2^{-k} \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\|f\|_p}{2} \right\}, \quad k \in (k_0, \bar{k}], \quad N_{\mu_0} - 1 = \bar{k},$$

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} Q_\nu(x), \quad (2.51)$$

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{\mu_0} E_\nu. \quad (2.52)$$

Из (2.40), (2.42), (2.44)–(2.46), (2.50)–(2.52) вытекает, что

$$g(x) = f(x) \quad \text{при } x \in E,$$

$$|E| > 1 - \varepsilon,$$

$$\|Q(x) - g(x)\|_{p_0} < \varepsilon,$$

$$\varepsilon > |a_k| > |a_{k+1}| > 0, \quad k \in (k_0, \bar{k}).$$

Отметим, что строгие неравенства в леммах 3 и 4 (см. п. 5) и п. 6)) позволяют в теоремах 7 и 6 исправленную функцию $\tilde{f}(x)$ выбрать так, чтобы жадный алгоритм (см. (1.1)) этой функции $\tilde{f}(x)$ был определен однозначно.

В силу (2.40), (2.47), (2.51) для всех $p \geq 1$ и $1 < \nu \leq \mu_0$ получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\nu-1} Q_n(x) \right|^p dx &\leq \int_0^1 |g(x)|^p dx = \sum_{i=1}^{\mu_0} \int_{\Delta_i} \left| \sum_{n=1}^{\mu_0} Q_n(x) \right|^p dx \\ &= \sum_{i=1}^{\mu_0} \int_{\Delta_i} |Q_i(x)|^p dx \leq \sum_{i=1}^{\mu_0} \frac{2^p |\gamma_i|^p |\Delta_i|}{\varepsilon^{p-1}} \leq 2^p \frac{\int_0^1 |f(x)|^p dx}{\varepsilon^{p-1}}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Аналогично для всех $p \in [1, \infty]$ получим

$$\frac{\|f\|_p}{2\varepsilon^{1-1/p}} \leq \|g\|_p < \frac{2\|f\|_p}{\varepsilon^{1-1/p}}.$$

Теперь проверим выполнение утверждения 6) леммы 3. Для любого $k_0 < N \leq \bar{k}$ определим ν из условия $N_{\nu-1} \leq N < N_\nu$. Согласно (2.43) и (2.50) имеем

$$\sum_{k=k_0+1}^N a_k \varphi_{n_k}(x) = \sum_{j=1}^{\nu-1} \sum_{k=N_{j-1}}^{N_j-1} a_k \varphi_{n_k}(x) + \sum_{k=N_{\nu-1}}^N a_k \varphi_{n_k}(x). \quad (2.54)$$

Отсюда и из соотношений (2.41), (2.48), (2.50) и (2.53) для всех $p \in [1, p_0]$ будем иметь

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=k_0+1}^N a_k \varphi_{n_k} \right\|_p &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\nu-1} Q \right\|_p + \left\| \sum_{k=N_{\nu-1}}^N b_k \varphi_{n_k} \right\|_p + \frac{1}{2} \int_0^1 |f(x)| dx \\ &\leq \|g\|_p + 2C_{p_0} \frac{|\gamma_\nu|}{\varepsilon} |\Delta_\nu|^{1/p_0} + \frac{1}{2} \int_0^1 |f(x)| dx \leq 3 \frac{\|f\|_p}{\varepsilon^{1-1/p}}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенство $g(x) = f(x)$ при $x \in E$ (см. (2.40), (2.46), (2.51) и (2.52)), в силу (2.46), (2.50), (2.51) и (2.54) для любого измеримого множества $e \in E$ будем иметь

$$\begin{aligned} &\left(\int_e \left| \sum_{k=k_0+1}^N a_k \varphi_{n_k}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_e \left| \sum_{n=1}^{\nu-1} Q_n(x) \right|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_e \left| \sum_{k=N_{\nu-1}}^N b_k \varphi_{n_k}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq \left(\int_e |g(x)|^p dx \right)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \left(\int_e |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\max_{k_0 < m \leq \bar{k}} \left\| \sum_{k=k_0+1}^m a_k \varphi_{n_k}(x) \right\|_\infty < \frac{3\|f\|_\infty}{\varepsilon}.$$

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $\{\varphi_k\}$ – система Уолша. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримая положительная функция $\mu(x)$ с $|\{x \in [0, 1], \mu(x) = 1\}| > 1 - \varepsilon$ такая, что для любых чисел $\tilde{N} \in \mathbb{N}$, $0 < \delta < 1$, $p_0 > 1$ и для каждой функции $f \in L^{p_0}(0, 1)$, $\|f\|_{p_0} > 0$, можно найти измеримое множество $G \subset [0, 1]$, функцию g и полином

$$Q = \sum_{k=\tilde{N}+1}^M a_{n_k} \varphi_{n_k}, \quad n_k \nearrow,$$

удовлетворяющие условиям:

- 1) $|G| > 1 - \delta$;
- 2) $g(x) = f(x) \quad \forall x \in G$;
- 3) $\|g\|_1 < 2\|f\|_1$;
- 4) $\|Q - g\|_{p_0} < \delta$;
- 5) $\left(\int_0^1 |g(x)|^p \mu(x) dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^p \mu(x) dx\right)^{1/p} + \delta \quad \forall p \in [1, p_0]$;
- 6) $\delta > |a_{n_k}| > |a_{n_{k+1}}| > 0$;
- 7) $\max_{\tilde{N} < m \leq M} \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=\tilde{N}+1}^m a_{n_k} \varphi_{n_k}(x)\right|^p \mu(x) dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^p \mu(x) dx\right)^{1/p} + \delta$
 $\forall p \in [1, p_0]$;
- 8) $\max_{\tilde{N} < m \leq M} \int_0^1 \left|\sum_{k=\tilde{N}+1}^m a_{n_k} \varphi_{n_k}(x)\right| dx \leq \|f\|_1 + \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$p_n \nearrow \infty \quad (2.55)$$

и $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty$ – последовательность, состоящая из всех полиномов по системе Уолша $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ с рациональными коэффициентами. Если последовательным применением леммы 3 можно найти последовательности ограниченных функций $\{g_n(x)\}$, множеств $\{G_n\}$ и полиномов

$$Q_n(x) = \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_{s_k}^{(n)} \varphi_{s_k}(x), \quad m_n \nearrow, \quad (2.56)$$

которые для всех $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} g_n(x) = f_n(x), & x \in G_n, \\ |G_n| > 1 - 2^{-8(n+1)}, \end{cases} \quad (2.57)$$

$$\|g_n\|_1 < 3\|f_n\|_1, \quad (2.58)$$

$$\|Q_n - g_n\|_{p_n} < 2^{-8(n+1)}, \quad (2.59)$$

$$|a_{s_{k+1}}^{(n)}| < |a_{s_k}^{(n)}| < 2^{-n} \quad \forall k \in [m_{n-1}, m_n), \quad (2.60)$$

$$\max_{m_{n-1} \leq N < m_n} \int_0^1 \left|\sum_{k=m_{n-1}}^N a_{s_k}^{(n)} \varphi_{s_k}(x)\right| \leq 3\|f_n\|_1, \quad (2.61)$$

$$\max_{m_{n-1} \leq N < m_n} \left(\int_G \left| \sum_{k=m_{n-1}}^N a_{s_k}^{(n)} \varphi_{s_k}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_G |f_n(x)|^p dx \right)^{1/p} + 2^{-s(n+1)} \quad (2.62)$$

для всех $p \in [1, p_n]$ и при любом измеримом подмножестве $G \subset G_n$.

Пусть ε – любое положительное число. Положим

$$\begin{aligned} \Omega_n &= \bigcap_{s=n}^{\infty} G_s, \quad n = 1, 2, \dots, \\ E &= \Omega_{n_0} = \bigcap_{s=n_0}^{\infty} G_s, \quad n_0 = [\log_{1/2} \varepsilon] + 1, \\ B &= \Omega_{n_0} \cup \left(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} \Omega_n \setminus \Omega_{n-1} \right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Очевидно, что (см. (2.57), (2.63))

$$|B| = 1, \quad |E| > 1 - \varepsilon.$$

Определим функцию $\mu(x)$ следующим образом:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \cup ([0, 1] \setminus B), \\ \mu_n, & x \in \Omega_n \setminus \Omega_{n-1}, \quad n \geq n_0 + 1, \end{cases} \quad (2.64)$$

где

$$\mu_n = \left[2^{2np_n} \cdot \prod_{s=1}^n h_s \right]^{-1}, \quad (2.65)$$

$$h_k = \sup_{1 \leq p \leq p_k} \left(1 + \int_0^1 |g_k(x)|^p dx + \max_{m_{k-1} < m \leq m_k} \int_0^1 \left| \sum_{i=m_{k-1}}^m a_{s_i}^{(k)} \varphi_{s_i}(x) \right|^p dx \right).$$

В силу (2.63)–(2.65) для всех $k \geq n_0$ и $p \in [1, p_k]$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \setminus \Omega_k} |g_k(x)|^p \mu(x) dx &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |g_k(x)|^p \mu_n dx \right) \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-2np_n} \left(\int_0^1 |g_k(x)|^p dx \right) h_k^{-1} < \frac{1}{3} 2^{-2kp}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Аналогично для всех $k \geq n_0$ получим

$$\max_{m_{k-1} \leq m < m_k} \left(\int_{[0,1] \setminus G_k} \left| \sum_{i=m_{k-1}}^m a_{s_i}^{(k)} \varphi_{s_i}(x) \right|^{p_k} \mu(x) dx \right)^{1/p_k} < \frac{1}{3} 2^{-2k}. \quad (2.67)$$

Учитывая соотношения (2.57)–(2.59), (2.63) и (2.66), получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g_k(x)|^{p_k} \mu(x) dx &= \int_{\Omega_k} |f_k(x)|^{p_k} \mu(x) dx + \int_{[0,1] \setminus \Omega_k} |g_k(x)|^{p_k} \mu(x) dx \\ &\leq \int_0^1 |f_k(x)|^{p_k} \mu(x) dx + 2^{-2kp_k} \quad \forall p \in [1, p_k], \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |Q_k(x) - g_k(x)|^{p_k} \mu(x) dx &= \int_{\Omega} |Q_k(x) - g_k(x)|^{p_k} \mu(x) dx + \int_{[0,1] \setminus \Omega_k} |Q_k(x) - g_k(x)|^{p_k} \mu(x) dx \\ &\leq 2 \cdot 2^{-4(k+1)p_k} + 2 \cdot \frac{1}{3} 2^{-2kp_k} \leq 2^{-2kp_k}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

В силу условий (2.62)–(2.65) и (2.67) для $m \in [m_{k-1}, m_k)$, для каждого $k \geq n_0$ и для всех $p \leq p_k$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \sum_{i=m_{k-1}}^m a_{s_i}^{(k)} \varphi_{s_i}(x) \right|^p \mu(x) dx &= \int_{\Omega_k} \left| \sum_{i=m_{k-1}}^m a_{s_i}^{(k)} \varphi_{s_i}(x) \right|^p \mu(x) dx \\ &\quad + \int_{[0,1] \setminus \Omega_k} \left| \sum_{i=m_{k-1}}^m a_{s_i}^{(k)} \varphi_{s_i}(x) \right|^p \mu(x) dx \\ &\leq \frac{1}{3} \cdot 2^{-2k} + \sum_{n=n_0+1}^k \left[\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \left| \sum_{i=m_{k-1}}^m a_{s_i}^{(k)} \varphi_{s_i}(x) \right|^p dx \right] \cdot \mu_n \\ &\leq \frac{1}{3} \cdot 2^{-2k} + \sum_{n=n_0+1}^k \left[2^{-2(k+1)} + \left(\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |f_k(x)|^p dx \right)^{1/p} \right]^p \cdot \mu_n \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2^{-2k} + \sum_{n=n_0+1}^k \left[\frac{\mu_n^{1/p}}{2^{2(k+1)}} + \left(\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |f_k(x)|^p \cdot \mu_n dx \right)^{1/p} \right]^p \\ &\leq \frac{1}{3} \cdot 2^{-2kp} + \sum_{n=n_0+1}^k 2^p \cdot \left[\frac{\mu_n}{2^{2p(k+1)}} + \int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |f_k(x)|^p \cdot \mu_n dx \right] \\ &\leq \frac{1}{3} \cdot 2^{-2kp} + 2^p \cdot 2^{-2p(k+1)} \cdot \sum_{n=n_0+1}^k \mu_n + 2^p \cdot \int_{\Omega_k} |f_k(x)|^p \cdot \mu(x) dx \\ &\leq 2^p \left(2^{-2k} + \int_0^1 |f_k(x)|^p \cdot \mu(x) dx \right). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Возьмем функцию $f_{k_0}(x)$ из последовательности (2.55) такую, что

$$\int_0^1 |f(x) - f_{k_0}(x)|^{p_0} dx < \min \left\{ \left(\frac{\delta}{4} \right)^{p_0}, \frac{\|f\|_1}{2} \right\}, \quad (2.71)$$

$$k_0 > [\log_{1/2} \delta] p_{k_0} > p_0, \quad m_{k_0} > \tilde{N}. \quad (2.72)$$

Положим

$$G = G_{k_0}, \quad g(x) = f(x) + g_{k_0}(x) - f_{k_0}(x),$$

$$Q(x) = Q_{n_0}(x) = \sum_{k=m_{k_0}-1}^{m_{k_0}-1} a_{s_k} \varphi_{s_k}(x) = \sum_{k=\tilde{N}}^M a_k \varphi_{n_k}(x).$$

Учитывая соотношения (2.57)–(2.61), (2.64) и (2.68)–(2.72), получим, что функции $g(x)$, $\mu(x)$, множество G и полином $Q(x)$ удовлетворяют требованиям леммы 4.

Лемма 4 доказана.

§ 3. Доказательства теорем 5–7

Идея доказательства теорем 5–7 состоит в том, что функция $\tilde{f}(x)$, полученная после изменения значений любой функции $f(x) \in L^1[0, 1]$ (соответственно $f \in L^p_\mu[0, 1]$) вне множества E , представляется в $L^1_{[0,1]}$ рядом, членами которого являются непересекающиеся полиномы по системе Уолша, внутренние колебания которых почти всюду по норме $L^1_{[0,1]}$ (равномерно) стремятся к нулю, а модули коэффициентов как в каждом полиноме, так и от полинома к полиному убывают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 5. Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначив через

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \quad (3.1)$$

последовательность, состоящую из всех полиномов по системе Уолша с рациональными коэффициентами, и последовательно применив лемму 2, можем найти последовательности множеств $\{G_n\}$, $\{E_n\}$ и полиномов

$$Q_n(x) = \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_{s_k} \varphi_{s_k}(x), \quad m_0 = 1, \quad |a_{s_k}| > 0, \quad (3.2)$$

которые удовлетворяют условиям

$$Q_n(x) = f_n(x), \quad x \in E_n, \quad (3.3)$$

$$|E_n| > 1 - \varepsilon \cdot 4^{-8(n+2)}, \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{2} \|f_n\|_1 < \|Q_n\|_1 < 2 \cdot \|f_n\|, \quad (3.5)$$

$$\max_{m_{n-1} \leq N < m_n} \int_0^1 \left| \sum_{k=m_{n-1}}^N a_{s_k} \varphi_{s_k}(x) \right| dx \leq 2 \cdot \|f_n\|_1, \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{n} > |a_{s_k}| \geq |a_{s_{k+1}}| > |a_{s_{m_n}}| > 0 \quad \forall n \geq 1, \quad \forall k \in [m_{n-1}, m_n - 1], \quad (3.7)$$

$$\max_{m_{n-1} \leq N < m_n} \left| \sum_{k=m_{n-1}}^N a_{s_k} \varphi_{s_k}(x) \right| \leq \frac{4|f_n(x)|}{\sqrt{\|f_n\|_1}} \quad \text{на } G_n, \quad (3.8)$$

$$|G_n| > 1 - \sqrt{\|f_n\|_1}. \quad (3.9)$$

Положим

$$a_i = a_{s_k} \quad \forall i \in [s_k, s_{k+1}), \quad (3.10)$$

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n. \quad (3.11)$$

Очевидно, что (см. (3.4), (3.7) и (3.10))

$$|E| > 1 - \varepsilon, \quad |a_i| \searrow 0.$$

Пусть $f(x) \in L^1(0, 1)$. Нетрудно видеть, что можно выбрать последовательность $\{f_{n_k}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из последовательности (3.1) такую, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^N f_{n_k}(x) - f(x) \right| dx = 0, \quad (3.12)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{почти всюду на } [0, 1), \quad (3.13)$$

$$\bar{\varepsilon} \cdot 4^{-4(k+3)} \leq \int_0^1 |f_{n_k}(x)| dx \leq \bar{\varepsilon} \cdot 4^{-4(k+2)}, \quad n \geq 2, \quad (3.14)$$

$$\text{где } \bar{\varepsilon} = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \int_E |f(x)| dx \right\}.$$

Обозначив

$$B_k = \{x \in [0, 1]; |f_{n_k}(x)| \leq 4^{-3(k+2)}\}, \quad k \geq 2, \quad (3.15)$$

будем иметь

$$|[0, 1) \setminus B_k| \cdot 4^{-7(k+3)} \leq \int_{[0, 1) \setminus B_k} |f_{n_k}(x)| dx \leq \bar{\varepsilon} \cdot 4^{-8(k+2)}, \quad n \geq 2.$$

Следовательно,

$$|B_k| > 1 - \varepsilon \cdot 4^{-(k+2)}. \quad (3.16)$$

Положим

$$B = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \bigcap_{k=\nu}^{\infty} (B_k \cap G_{n_k}). \quad (3.17)$$

Отсюда и из того, что $|B_k \cap G_{n_k}| > 1 - 4^{-(k+2)}$ (см. (3.9), (3.14), (3.16)), следует

$$|B| = 1.$$

В силу (3.12), (3.14) и (3.16) получим

$$\int_0^1 |f(x) - f_{n_1}(x)| dx < \frac{\bar{\varepsilon}}{2}. \quad (3.18)$$

Учитывая (3.6), будем иметь

$$\max_{m_{n_1-1} \leq m < m_{n_1}} \int_0^1 \left| \sum_{k=m_{n_1-1}}^m a_{s_k} \varphi_{s_k}(x) \right| dx \leq 2 \|f_{n_1}\|_1. \quad (3.19)$$

Определим функцию $\tilde{f}(x)$ и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i a_i \varphi_i(x)$ следующим образом:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{n_k}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=m_{n_k}-1}^{m_{n_k}-1} a_{s_k} \varphi_{s_k}(x), \quad (3.20)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i a_i \varphi_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=m_{n_k}-1}^{m_{n_k}-1} a_{s_j} \varphi_{s_j}(x) \right], \quad (3.21)$$

где

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = s_{kj}, \text{ где } j \in \bigcup_{k=1}^{\infty} [m_{n_k}-1, m_{n_k}), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда и из условий (3.3), (3.5), (3.11), (3.13), (3.20) следует

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &\in L^1(0, 1), \quad \tilde{f}(x) = f(x) \quad \text{при } x \in E, \\ \frac{1}{2} \|f\|_1 &< |\tilde{f}|_1 < 2 \|f\|_1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Из (3.5), (3.7) и (3.14) получаем

$$\max_{m_{n_k}-1 \leq N < m_{n_k}} \int_0^1 \left| \sum_{j=m_{n_k}-1}^N a_{s_k} \varphi_{s_k}(x) \right| dx \leq 2 \int_0^1 |f_{n_k}(x)| dx \leq 2^{-(k+2)}.$$

Отсюда и из условий (3.3), (3.5), (3.13), (3.20), (3.21) будем иметь

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^N \delta_i a_i \varphi_i(x) - \tilde{f}(x) \right| dx = 0, \quad (3.23)$$

т.е. ряд (3.21) сходится к $\tilde{f}(x)$ в метрике $L^1(0, 1)$ и, следовательно, является рядом Фурье–Уолша функции $\tilde{f}(x)$.

Заметим также, что в силу (3.10), (3.18)–(3.22) для каждого натурального N получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 |S_N(x, \tilde{f})| dx &= \int_0^1 \left| \sum_{i=0}^N \delta_i a_i \varphi_i(x) \right| dx \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{m_{n_k}-1 \leq m < m_{n_k}} \int_0^1 \left| \sum_{k=m_{n_k}-1}^m a_{s_k} \varphi_{s_k}(x) \right| dx \right) \\ &\leq 2 \|f_{n_1}(x)\|_1 + \bar{\varepsilon} \sum_{n=2}^{\infty} 4^{-n} \leq 3 \|f\|_1 \leq 6 \|\tilde{f}\|_1. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что на множестве B (т.е. почти всюду на $[0, 1)$) ряд (3.21) сходится к $\tilde{f}(x)$. Пусть $x \in B$, тогда существует натуральное число k_0 такое, что $x \in B_k \cap G_{n_k} \forall k \geq k_0$. Учитывая соотношения (3.8), (3.14), (3.15), получим

$$\max_{m_{n_k-1} \leq N < m_{n_k}} \left| \sum_{j=m_{n_k-1}}^N a_{s_j} \varphi_{s_j}(x) \right| \leq \frac{4|f_{n_k}(x)|}{\sqrt{\|f_{n_k}\|_1}} \leq \frac{4(2^{-3(k+2)})}{2^{-2(k+2)}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (3.13) и (3.20) заключаем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \delta_i a_i \varphi_i(x) = \tilde{f}(x)$$

почти всюду на $[0, 1)$.

Теорема 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Мы доказали, что жадный алгоритм исправленной функции $\tilde{f}(x)$ сходится как почти всюду, так и по $L^1(0, 1)$ -норме (см. (3.23)) и для всех $m = 1, 2, \dots$

$$\int_0^1 |G_m(x, \tilde{f})| dx \leq 3 \int_0^1 |f(x)| dx \leq 6 \int_0^1 |\tilde{f}(x)| dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Пусть даны числа $\varepsilon > 0$ и возрастающая последовательность

$$p_n \nearrow \infty. \quad (3.24)$$

Последовательно применяя лемму 4, можно найти измеримую весовую функцию $\mu(x)$ с

$$|\{x \in [0, 1], \mu(x) = 1\}| > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.25)$$

и последовательности функций $\{\bar{g}_n(x)\}_{n=1}^\infty$, множеств $\{G_n\}$ и полиномов

$$\bar{Q}_n(x) = \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_{s_k} \varphi_{s_k}(x), \quad m_n \nearrow, \quad s_k \nearrow, \quad (3.26)$$

которые для всех $n \geq 1$ удовлетворяют условиям

$$\bar{g}_n(x) = f_n(x), \quad x \in G_n, \quad (3.27)$$

$$|G_n| > 1 - 2^{-n-2}, \quad (3.28)$$

$$\int_0^1 |\bar{g}_n(x)| dx < 3 \int_0^1 |f_n(x)| dx, \quad (3.29)$$

$$\int_0^1 |\bar{Q}_n(x) - \bar{g}_n(x)| < 2^{-8(n+1)}, \quad (3.30)$$

$$|a_{s_{m_n}}| < |a_{s_{k+1}}| < |a_{s_k}| < 2^{-n} \quad \forall k \in [m_{n-1}, m_n), \quad (3.31)$$

$$\int_0^1 |\bar{g}_n(x)|^{p_k} \mu(x) dx \leq \int_0^1 |f_n(x)|^{p_k} \mu(x) dx + 2^{-2np_k}, \quad (3.32)$$

$$\int_0^1 |\overline{Q}_n(x) - \overline{g}_n(x)|^{p_k} \mu(x) dx \leq 2^{-2np_k}, \quad (3.33)$$

$$\max_{m_{n-1} \leq m < m_n} \int_0^1 \left| \sum_{i=m_{n-1}}^m a_{s_i} \varphi_{s_i}(x) \right| dx \leq 2 \cdot \|f_n\|_1 + 2^{-2n}, \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} & \max_{m_{n_k-1} \leq m < m_k} \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=m_{k-1}}^m a_{s_i} \varphi_{s_i}(x) \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} \\ & \leq 2 \cdot \left(\int_0^1 |f_n(x)|^p \cdot \mu(x) dx \right)^{1/p} + 2^{-2n} \quad \forall p \in [2, p_n]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Положим

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{s_k} \varphi_{s_k}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{Q}_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_{s_k} \varphi_{s_k}(x), \quad (3.36)$$

$$G = \left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} G_n \right) \cap \{x \in [0, 1], \mu(x) = 1\}, \quad n_0 = |\log_{1/2} \varepsilon| + 1. \quad (3.37)$$

Очевидно, что (см. (3.25), (3.27)) $|G| > 1 - \varepsilon$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x), \quad (3.38)$$

где

$$a_i = a_{s_k} - \frac{a_{s_k} - a_{s_{k+1}}}{s_{k+1} - s_k} (i - s_k) \quad \text{при } i \in [s_k, s_{k+1}).$$

Ясно, что

$$|a_i| > |a_{i+1}| \quad \forall i \geq 1, \quad |a_i| \searrow 0,$$

(см. (3.31)). Пусть

$$f(x) \in \bigcap_{p \geq 1} L_{\mu}^p[0, 1],$$

т.е.

$$\int_0^1 |f(x)|^p \cdot \mu(x) dx < \infty \quad \forall p \geq 1.$$

Положим

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in G, \\ 0, & x \notin G. \end{cases} \quad (3.39)$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из последовательности (3.1) такую, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N f_{k_n}(x) - \overline{f}(x) \right|^{p_n} dx = 0, \quad (3.40)$$

$$\int_0^1 |f_{k_n}(x)|^{p_n} dx < 2^{-8np_n}, \quad n \geq 2, \quad k_1 > n_0. \quad (3.41)$$

Предположим, что уже определены числа $k_1 = \nu_1 < \dots < \nu_{q-1}$, функции $f_{\nu_1}(x), \dots, f_{\nu_{q-1}}(x)$ и $\bar{g}_{k_1}(x) = g_1(x), \dots, g_{q-1}(x)$ и полиномы

$$\bar{Q}_{\nu_n}(x) = \sum_{k=m_{\nu_n-1}}^{m_{\nu_n}-1} a_{s_k} \varphi_{s_k}(x), \quad (3.42)$$

удовлетворяющие условиям

$$g_n(x) = f_{k_n}(x), \quad x \in G, \quad 1 \leq n \leq q-1, \quad (3.43)$$

$$\begin{cases} \int_0^1 |g_n(x)| dx < 2^{-(n+1)}, \\ \left(\int_0^1 |g_n(x)|^{p_n} \mu(x) dx \right)^{1/p_n} < 2^{-(n+1)}, \end{cases} \quad 1 < n \leq q-1, \quad (3.44)$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{\nu_k}(x) - g_k(x)] \right| dx < 2^{-(n+1)}, \quad 1 < n \leq q-1, \quad (3.45)$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{\nu_k}(x) - g_k(x)]^{p_{n+1}} \mu(x) dx \right| < 2^{-2np_{n+1}}, \quad 1 < n \leq q-1, \quad (3.46)$$

$$\max_{m_{\nu_n-1} \leq m < m_{\nu_n}} \int_0^1 \left| \sum_{i=m_{\nu_n-1}}^m a_{s_i} \varphi_{s_i}(x) \right| dx < 2^{-n}, \quad 1 < n \leq q-1, \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \max_{m_{\nu_n-1} \leq m < m_{\nu_n}} \int_0^1 \left| \sum_{i=m_{\nu_n-1}}^m a_{s_i} \varphi_{s_i}(x) \right|^p \mu(x) dx &< 2^{-np}, \\ 1 < n \leq q-1 \quad \forall p \leq p_n. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать натуральное число $\nu_q > \nu_{q-1}$ (функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (3.1)) таким образом, чтобы

$$\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right) \right|^{p_{q+1}} \mu(x) dx < 2^{-8q}, \quad (3.49)$$

$$\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right) \right| dx < 2^{-8q}. \quad (3.50)$$

В силу (3.41), (3.45) и (3.46) имеем

$$\left(\int_0^1 \left| f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} < 2 \cdot 2^{-2q}, \quad (3.51)$$

$$\int_0^1 \left| f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right| dx < 2 \cdot 2^{-q}. \quad (3.52)$$

Из (3.49)–(3.52) получаем

$$\left(\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} < 3 \cdot 2^{-2q}, \quad (3.53)$$

$$\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)| dx < 3 \cdot 2^{-q}. \quad (3.54)$$

Положим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x) + [\bar{g}_{\nu_q}(x) - f_{\nu_q}(x)]. \quad (3.55)$$

Учитывая соотношения (3.27), (3.29), (3.33), (3.44)–(3.46) и (3.49), получим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in G, \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g_q(x)| dx &\leq \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right) \right| dx \\ &+ \int_0^1 |\bar{g}_{\nu_q}(x)| dx + \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right| dx < 2^{-q-1}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |g_q(x)|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} &\leq \left(\int_0^1 |\bar{g}_{\nu_q}(x)|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} \\ &+ \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} \\ &\leq \left(\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right) \right|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} < 2^{-q-1}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^q [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right|^{p_{q+1}} \mu(x) dx \right)^{1/p_{q+1}} \\ &\leq \left(\int_0^1 |\bar{Q}_{\nu_q}(x) - \bar{g}_{\nu_q}(x)|^{p_{q+1}} \mu(x) dx \right)^{1/p_{q+1}} \\ &+ \left(\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right) \right|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} < 2^{-2q}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

В силу (3.35), (3.53) имеем

$$\begin{aligned} &\max_{m_{\nu_q-1} \leq m < m_{\nu_q}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=m_{\nu_q}}^m a_i \varphi_{s_i}(x) \right|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} \\ &\leq \left(\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} + 2^{-8(\nu_q+1)} < 2^{-q}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Аналогично получим

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^q \bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x) \right| dx < 2^{-2q}, \quad (3.61)$$

$$\max_{m_{\nu_q-1} \leq m < m_{\nu_q}} \int_0^1 \left| \sum_{i=m_{\nu_q}}^m a_{s_i} \varphi_{s_i}(x) \right| dx < 2^{-q}. \quad (3.62)$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций

$$\{g_q(x)\}_{q=1}^{\infty}, \quad g_1(x) = f_{k_1}(x),$$

и полиномов $\{\bar{Q}_{\nu_q}(x)\}$, удовлетворяющих условиям (3.56)–(3.62) для всех $q > 1$. Из (3.57) вытекает, что

$$\sum_{q=1}^{\infty} \int_0^1 |g_q(x)| dx < \infty. \quad (3.63)$$

Определим функцию $g(x)$ и последовательность чисел $\{\delta_i\}$ следующим образом:

$$g(x) = \sum_{q=1}^{\infty} g_q(x), \quad (3.64)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & i \in \{s_k\}_{k=1}^{\infty} \cap \bigcup_{q=1}^{\infty} [m_{\nu_q-1}, m_{\nu_q}), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.65)$$

Из (3.40), (3.56), (3.63) и (3.64) следует

$$g(x) \in L^1[0, 1), \quad g(x) = f(x), \quad x \in G.$$

Пусть $p \geq 1$ – произвольное число. Тогда для некоторого числа k_0 будем иметь

$$p < p_{k_0}. \quad (3.66)$$

Пусть далее произвольное натуральное число $n > m_{\nu_{k_0}}$, тогда для некоторого q , $q > k_0$, имеем $m_{\nu_q-1} \leq n < m_{\nu_q}$. Из соотношений (3.58)–(3.60) и (3.64)–(3.66) будем иметь

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n \delta_i a_i \varphi_i(x) - g(x) \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} &\leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} \\ &+ \sum_{i=q}^{\infty} \left(\int_0^1 |g_i(x)|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} + \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=m_{\nu_q-1}}^n a_k \varphi_{s_k}(x) \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} < 2^{-q}. \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n \delta_i a_i \varphi_i(x) - g(x) \right| dx < 2^{-q} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и, следовательно,

$$\delta_i a_i = \int_0^1 g(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots,$$

т.е. п. 1) доказан.

Точно такими же рассуждениями получим доказательство п. 2).

Теорема 6 доказана.

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 5, и применяя лемму 3 вместо леммы 2, получим доказательство теоремы 7.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В теоремах 5–7 исправленную функцию $\tilde{f}(x)$ можно выбрать так, чтобы

$$|c_n(\tilde{f})| = a_n \quad \forall n \in \text{spec}(\tilde{f}),$$

где $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ – наперед заданная последовательность с $a_k \searrow 0$, $\{a_k\}_{k=1}^\infty \notin l_2$.

Список литературы

- [1] Н. Н. Лузин, “К основной теореме интегрального исчисления”, *Матем. сб.*, **28**:2 (1912), 266–294.
- [2] D. Menchoff, “Sur la convergence uniforme des séries de Fourier”, *Матем. сб.*, **11**(53):1–2 (1942), 67–96.
- [3] Д. Е. Меньцов, “О рядах Фурье от суммируемых функций”, Тр. ММО, **1**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1952, 5–38.
- [4] Д. Е. Меньцов, “О рядах Фурье непрерывных функций”, *Ученые записки МГУ*, **148**:4 (1951), 108–132.
- [5] К. И. Осолков, “Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры”, *Докл. АН СССР*, **229**:2 (1976), 304–306; англ. пер.: K. I. Oskolkov, “Uniform modulus of continuity of summable functions on sets of positive measure”, *Soviet Math. Dokl.*, **17**:2 (1976), 1028–1030.
- [6] Б. С. Кашин, Г. Г. Кошелева, “Об одном подходе к теоремам об исправлении”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1988, № 4, 6–9; англ. пер.: B. S. Kashin, G. G. Kosheleva, “An approach to “correction” theorems”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **43**:4 (1988), 1–5.
- [7] А. М. Олевский, “Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана”, *Докл. АН СССР*, **238**:4 (1978), 796–799; англ. пер.: A. M. Olevskii, “The existence of functions with unremovable Carleman singularities”, *Soviet Math. Dokl.*, **19**:4 (1978), 102–106.
- [8] Ш. В. Хеладзе, “Сходимость рядов Фурье почти всюду и в смысле метрики L ”, *Матем. сб.*, **107**(149):2(10) (1978), 245–258; англ. пер.: Š. V. Heladze, “Convergence of Fourier series almost everywhere and in the L -metric”, *Math. USSR-Sb.*, **35**:4 (1979), 527–539.
- [9] M. G. Grigorian, “On the convergence of Fourier series in the metric of L^1 ”, *Anal. Math.*, **17**:3 (1991), 211–237.
- [10] M. G. Grigorian, “On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces”, *Studia Math.*, **134**:3 (1999), 207–216.
- [11] М. Г. Григорян, “О некоторых свойствах ортогональных систем”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:5 (1993), 75–105; англ. пер.: M. G. Grigoryan, “On some properties of orthogonal systems”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **43**:2 (1994), 261–289.

- [12] Л. Д. Гоголадзе, Т. С. Зерекидзе, “О сопряженных функциях нескольких переменных”, *Сообщ. АН ГССР*, **94**:3 (1979), 541–544.
- [13] М. Г. Григорян, “Об усиленном L^p_μ -свойстве ортонормированных систем”, *Матем. сб.*, **194**:10 (2003), 77–106; англ. пер.: M. G. Grigorian, “On the L^p_μ -strong property of orthonormal systems”, *Sb. Math.*, **194**:10 (2003), 1503–1532.
- [14] V. N. Temlyakov, “Nonlinear methods of approximation”, *Found. Comput. Math.*, **3**:1 (2003), 33–107.
- [15] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, “Some remarks on greedy algorithms”, *Adv. Comput. Math.*, **5**:1 (1996), 173–187.
- [16] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, “A remark on greedy approximation in Banach spaces”, *East J. Approx.*, **5**:3 (1999), 365–379.
- [17] P. Wojtaszczyk, “Greedy algorithm for general biorthogonal systems”, *J. Approx. Theory*, **107**:2 (2000), 293–314.
- [18] T. W. Körner, “Divergence of decreasing rearranged Fourier series”, *Ann. of Math.* (2), **144**:1 (1996), 167–180.
- [19] T. W. Körner, “Decreasing rearranged Fourier series”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **5**:1 (1999), 1–19.
- [20] R. Gribonval, M. Nielsen, “On the quasi-greedy property and uniformly bounded orthonormal systems”, 2003, <http://hal.inria.fr/docs/00/57/62/12/PDF/R-2003-09.pdf>.
- [21] M. G. Grigoryan, K. S. Kazaryan, F. Soria, “Mean convergence of orthogonal Fourier series of modified functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:8 (2000), 3777–3798.
- [22] Е. Д. Лившиц, “Об оптимальности жадного алгоритма для некоторых классов функций”, *Матем. сб.*, **198**:5 (2007), 95–114; англ. пер.: E. D. Livshits, “Optimality of the greedy algorithm for some function classes”, *Sb. Math.*, **198**:5 (2007), 691–709.
- [23] М. Г. Григорян, “О сходимости в метрике L^p гриди алгоритма по тригонометрической системе”, *Изв. НАН Армении*, **39**:5 (2004), 37–52; англ. пер.: M. G. Grigoryan, “On the convergence in the L^p -metric of a greedy algorithm in a trigonometric series”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **39**:5 (2004), 35–48.
- [24] М. Г. Григорян, С. Л. Гогян, “Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций”, *Anal. Math.*, **32**:1 (2006), 49–80.
- [25] S. L. Gogyan, “Greedy algorithm with regard to Haar subsystems”, *East J. Approx.*, **11**:2 (2005), 221–236.
- [26] Г. Г. Геворкян, А. Камонт, “Два замечания о квази-греди базисах в пространстве L_1 ”, *Изв. НАН Армении*, **40**:1 (2005), 5–17; англ. пер.: G. G. Gevorgyan, A. Kamont, “Two remarks on quasi-greedy bases in the space L_1 ”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **40**:1 (2005), 2–14.
- [27] M. G. Grigorian, R. E. Zink, “Greedy approximation with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **134**:12 (2006), 3495–3505.
- [28] М. Г. Григорян, А. А. Саргсян, “Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера–Шаудера”, *Матем. сб.*, **199**:5 (2008), 3–26; англ. пер.: M. G. Grigorian, A. A. Sargsyan, “Non-linear approximation of continuous functions by the Faber–Schauder system”, *Sb. Math.*, **199**:5 (2008), 629–653.
- [29] А. В. Сильниченко, “О скорости сходимости жадных алгоритмов”, *Матем. заметки*, **76**:4 (2004), 628–632; англ. пер.: A. V. Sil’nichenko, “Rate of convergence of greedy algorithms”, *Math. Notes*, **76**:4 (2004), 582–586.
- [30] Г. М. Амирханян, “О сходимости гриди алгоритма по ситеме Уолша в пространстве L^p ”, *Изв. НАН Армении*, **43**:3 (2008), 3–12; англ. пер.: G. Amirkhanyan, “Convergence of greedy algorithm in Walsh system in L^p ”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **43**:3 (2008), 127–134.

- [31] К. А. Навасардян, А. А. Степанян, “О рядах Хаара”, *Изв. НАН Армении*, **42**:4 (2007), 53–66; англ. пер.: К. А. Navasardyan, A. A. Stepanyan, “On series by Haar system”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **42**:4 (2007), 219–231.
- [32] М. Г. Grigorian, “On the Fourier–Walsh coefficients”, *Real Anal. Exchange*, **35**:1 (2010), 157–166.
- [33] М. Grigoryan, “Uniform convergence of the greedy algorithm with respect to the Walsh system”, *Studia Math.*, **198**:2 (2010), 197–206.
- [34] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: В. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **64**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [35] R. E. A. C. Paley, “A remarkable series of orthogonal functions I, II”, *Proc. London Math. Soc.*, **34** (1932), 241–279.

М. Г. Григорян (M. G. Grigoryan)

Ереванский государственный университет, Армения

E-mail: gmarting@ysu.am

Поступила в редакцию

08.10.2010 и 20.04.2011