Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. Кардоне, С. А. Назаров, К. Руотсалайнен, Асимптотика собственного числа на непрерывном спектре сужающегося волновода, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 2, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7798>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:03:45

УДК 517.956.8+517.956.227

Дж. Кардоне, С. А. Назаров, К. Руотсалайнен

Асимптотика собственного числа на непрерывном спектре сужающегося волновода

Установлено существование собственного числа, вкрапленного в непрерывный спектр задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в двумерном волноводе, имеющем два выхода на бесконечность в виде полуполос единичной ширины и ширины $1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Функция толщины участка волновода, соединяющего указанные выходы на бесконечность, имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$ и задана как линейная комбинация трех достаточно произвольных функций с коэффициентами, определяемыми при решении некоторого нелинейного уравнения. Результат получен на основе асимптотического анализа вспомогательного объекта – расширенной матрицы рассеяния.

Библиография: 29 названий.

Ключевые слова: акустический волновод, волны на поверхности жидкости в канале, собственные числа на непрерывном спектре, асимптотика, расширенная матрица рассеяния.

§ 1. Постановка задачи

Пусть Π^ε – полоса переменной ширины (рис. 1)

$$\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, -1 - \sqrt{\varepsilon}h(x_1) < x_2 < -\varepsilon H(x_1)\} \quad (1.1)$$

со сторонами ϖ_1^ε и ϖ_0^ε , искривленными на конечном участке длиной $l > 0$; при этом ε – малый положительный параметр, а H и h – гладкие функции, подчиненные требованиям

$$H(x_1) = h(x_1) = 0 \quad \text{при } x_1 > l > 0, \quad H(x_1) = 1, h(x_1) = 0 \quad \text{при } x_1 < 0. \quad (1.2)$$

Все геометрические параметры и координаты считаются безразмерными.

Интерпретируя область (1.1) как акустический волновод с жесткими стенками (см., например, [1]), рассмотрим задачу Неймана для уравнения Гельмгольца

$$-\Delta u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \Pi^\varepsilon, \quad \partial_{n^\varepsilon} u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi^\varepsilon, \quad (1.3)$$

где Δ – оператор Лапласа, λ^ε – спектральный параметр, ∂_{n^ε} – производная вдоль внешней нормали,

$$\begin{aligned} \partial_{n^\varepsilon} &= (1 + \varepsilon^2 |\partial_1 H(x_1)|^2)^{-1/2} (\partial_2 + \varepsilon \partial_1 H(x_1) \partial_1) \quad \text{на } \varpi_0^\varepsilon, \\ \partial_{n^\varepsilon} &= -(1 + \varepsilon |\partial_1 h(x_1)|^2)^{-1/2} (\partial_2 + \sqrt{\varepsilon} \partial_1 h(x_1) \partial_1) \quad \text{на } \varpi_1^\varepsilon \end{aligned} \quad (1.4)$$

Работа первого автора выполнена в рамках проекта F.A.R. 2009 of University of Sannio–Asymptotic analysis and numerical modeling, а работа второго автора – при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00348).

и $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, 2$. Другая физическая интерпретация задачи (1.3) относится к линейной теории волн на поверхности жидкости (см., например, [2]), а именно, в трехмерном канале

$$\Omega^\varepsilon = \{(x, z) = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x \in \Pi^\varepsilon, -d < z < 0\}$$

с вертикальными стенками и постоянной глубиной $d > 0$ рассматривается спектральная задача Стеклова

$$\begin{aligned} -(\Delta + \partial_z^2)\Phi^\varepsilon(x, z) &= 0, \quad x \in \Omega^\varepsilon, \quad \partial_z \Phi^\varepsilon(x, 0) = \Lambda^\varepsilon \Phi^\varepsilon(x, 0), \quad x \in \Pi^\varepsilon, \\ \partial_z \Phi^\varepsilon(x, -d) &= 0, \quad x \in \Pi^\varepsilon, \quad \partial_{n^\varepsilon} \Phi^\varepsilon(x, z) = 0, \quad x \in \partial \Pi^\varepsilon, \quad z \in (-d, 0). \end{aligned} \quad (1.5)$$

При этом $\partial_z = \partial/\partial z$. Отыскивая потенциал скоростей Φ^ε в виде

$$\Phi^\varepsilon(x, z) = u^\varepsilon(x) (\exp(z\lambda^\varepsilon) + \exp(-(z + 2d)\lambda^\varepsilon)),$$

получаем задачу (1.3) для множителя $u^\varepsilon(x)$, а также соотношение

$$\Lambda^\varepsilon = \lambda^\varepsilon \frac{1 - \exp(-2d\lambda^\varepsilon)}{1 + \exp(-2d\lambda^\varepsilon)}, \quad (1.6)$$

связывающее спектральные параметры. Поскольку правая часть (1.6) – строго монотонно возрастающая функция переменной λ^ε , собственные числа задачи Неймана (1.3) без труда пересчитываются в собственные числа задачи Стеклова (1.5). Далее к обсуждению спектральной задачи (1.5) о поверхностных волнах не возвращаемся.

Рис. 1. Сужающийся волновод с локальным возмущением

Вариационная формулировка задачи (1.3) апеллирует к интегральному тождеству [3]

$$(\nabla u^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)_{\Pi^\varepsilon} = \lambda^\varepsilon (u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Pi^\varepsilon}, \quad v^\varepsilon \in H^1(\Pi^\varepsilon), \quad (1.7)$$

в котором $\nabla = (\partial_1, \partial_2)$ – оператор-градиент, $(\cdot, \cdot)_{\Pi^\varepsilon}$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Pi^\varepsilon)$ и $H^1(\Pi^\varepsilon)$ – пространство Соболева. Поскольку билинейная форма из левой части (1.7) с областью определения $H^1(\Pi^\varepsilon)^2$ замкнута и положительна, задаче (1.7) ставится [4; гл. 10] в соответствие неограниченный положительный самосопряженный оператор A^ε в $L_2(\Pi^\varepsilon)$ с областью определения $H^2(\Pi^\varepsilon)$, причем спектр оператора A^ε представляет собой замкнутую положительную вещественную полуось $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ и является непрерывным. Непрерывный спектр имеет пороги $\pi^2 k^2$ и $\pi^2(1 - \varepsilon)^{-2} k^2$, $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, на которых появляются стоячие и резонансные волны (ср. определение (4.7) в частном случае $k = 1$).

Далее, обсуждая спектры краевых задач в волноводах, всегда имеем в виду указанное истолкование задач в дифференциальной или вариационной форме как самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

Основная цель статьи – подобрать профильные функции h и H так, чтобы ниже первого положительного порога, т.е. на интервале $(0, \pi^2)$, задача (1.3) приобрела собственное число λ_1^ε , которое принадлежит непрерывному спектру и порождает экспоненциально затухающую на бесконечности собственную функцию $u_1^\varepsilon \in H^1(\Pi^\varepsilon)$, называемую *локализованным решением* или *захваченной волной*.

Если заменить в задаче (1.3) условие Неймана условием Дирихле на $\partial\Pi^\varepsilon$, то у получившейся краевой задачи для уравнения Гельмгольца возникает положительная точка отсечки¹ $\lambda_+ = \pi^2$ – нижняя грань непрерывного спектра $[\lambda_+, +\infty)$ (подчеркнем, что $\lambda_+ = 0$ в задаче Неймана), а на интервале $(0, \lambda_+)$ могут располагаться собственные числа, образующие дискретный спектр задачи Дирихле. Поиску точек дискретного спектра и построению их асимптотик посвящено большое количество публикаций (см. [5]–[9] и др.), предоставляющих разнообразные приемы и методы исследования. Так, в статье [7] (см. также [8]) было установлено, что в случае локального возмущения прямой полосы (рис. 2, (a)), т.е. при условии

$$h(x_1) = 0 \quad \text{при } x_1 \in \mathbb{R}, \quad H(x_1) = 0 \quad \text{при } x_1 \notin (0, l),$$

отличающемся от условий (1.2) по существу и не допускающем утончение волновода на бесконечном участке, в случае

$$I(H) := \int_0^l H(x_1) dx_1 > 0 \tag{1.8}$$

(отрицательное приращение объема) дискретный спектр задачи Дирихле пуст, но в случае $I(H) < 0$ (положительное приращение объема) на интервале $(0, \lambda_+)$ имеется единственное собственное число

$$\lambda_1^\varepsilon = \pi^2 - \varepsilon^2 \pi^4 I(H)^2 + O(\varepsilon^3). \tag{1.9}$$

Из упомянутого результата о пустоте дискретного спектра при помощи минимального принципа (см., например, [4; теорема 10.2.1]) можно вывести, что при $h = 0$ в формуле (1.2) для Π^ε (рис. 2, (b)) у задачи Дирихле собственных чисел на интервале $(0, \pi^2)$ нет. Отметим, что на физическом уровне строгости этот факт вытекает из равенства $I(H) = +\infty$ для волновода на рис. 2, (b), и невозможности сделать интеграл (1.8) отрицательным путем локального возмущения профильной функции εH . Можно проверить, что при большой положительной профильной функции h , т.е. введении вместилища локального расширения волновода порядка $\sqrt{\varepsilon}$, дискретный спектр у задачи Дирихле все-таки появляется. Иными словами, бесконечное уменьшение объема волновода из-за его сужения при $x_1 < 0$ компенсируется приращением $O(\sqrt{\varepsilon})$ на конечном участке.

Результатов по идентификации собственных чисел, вкрапленных в непрерывный спектр и потому принадлежащих только точечному спектру, значительно меньше. По сути, широко известен и применяется лишь метод [10] постановки искусственных краевых условий Дирихле на линии (плоскости) симметрии, которые обеспечивают положительную точку отсечки и позволяют воспользоваться уже упоминавшимися приемами поиска точек дискретного

¹В английской терминологии cut-off.

Рис. 2. Волновод с локальным возмущением (a) и сужающийся волновод без локального возмущения (b)

спектра. Понятно, что область (1.1) не может быть симметричной относительно прямой, параллельной оси абсцисс, и искусственное образование какой-либо положительной точки отсечки невозможно. В статье применяется иной подход, намеченный в работах [11], [12], требующий объемистых выкладок и потому редко востребованный. Он основан на анализе вспомогательного объекта – расширенной матрицы рассеяния (см. § 2), введенной в [13] для конических и в [14] для цилиндрических областей. Эта матрица порождает достаточное условие [14] (см. теорему 6 в § 3) существования экспоненциально затухающих решений. Формальный асимптотический анализ представлен в § 4, а обоснование асимптотики – в § 6. Наконец, в § 5 показано, как асимптотические формулы для расширенной матрицы рассеяния позволяют установить появление захваченной волны в задаче (1.3). Некоторые простые обобщения обсуждаются в § 7.

Полученный результат об асимптотике собственного числа на непрерывном спектре даже по формулировке отличается от привычных асимптотических формул вида (1.9). Именно, профильную функцию h нужно представить как сумму

$$h(x_1) = h_0(x_1) + \tau_1 h_1(x_1) + \tau_2 h_2(x_1), \quad (1.10)$$

где τ_p – дополнительные малые параметры, функции h_p подчинены условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &:= \int_0^l h(x_1) dx_1 > \frac{1}{\sqrt{2}\pi}, \\ \int_0^l \cos(\pi x_1) h_0(x_1) dx_1 &= \int_0^l \sin(\pi x_1) h_0(x_1) dx_1 = 0, \\ \int_0^l \cos(\pi x_1) h_p(x_1) dx_1 &= \delta_{1,p}, \quad \int_0^l \sin(\pi x_1) h_p(x_1) dx_1 = \delta_{2,p}, \quad p = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.11)$$

а $\delta_{p,q}$ – символ Кронекера. При таких требованиях в теореме 8 установлено, что при любой функции H из формулы (1.2) и при малом $\varepsilon > 0$ найдутся такие, опять-таки малые, числа τ_1 и τ_2 , что задача Неймана (1.3) в волноводе Π^ε , заданном соотношениями (1.1) и (1.10), имеет собственное число

$$\lambda_1^\varepsilon = \pi^2 - \varepsilon\mu + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \mu = \frac{(2\pi^2 \mathbf{h}^2 - 1)^2}{4\mathbf{h}^2}. \quad (1.12)$$

Подчеркнем, что функция H , описывающая сужение волновода, не фигурирует в выражении для поправки μ , однако форма верхней стенки волновода на

рис. 1 должна проявиться в младших асимптотических членах, которые в данной работе не изучаются.

Подобрать функции h_p , удовлетворяющие условиям (1.11), нетрудно: например, в случае $l = 2\pi$ у линейной комбинации (1.10) один коэффициент Фурье предполагается положительным, два считаются малыми, а остальные оставлены произвольными.

Рис. 3. Полосы с симметричным (a) и несимметричным (b) препятствиями

Упомянем работу [15], дополняющую результат [10] о существовании собственного числа у задачи Неймана в прямой полосе $\Pi^0 = \mathbb{R} \times (-1, 0)$ с внутренним препятствием при условии симметрии относительно средней линии $\{x : x_2 = -1/2\}$ (рис. 3, (a)). В [15] установлено, что смещение препятствия со средней линии (рис. 3, (b)) приводит к исчезновению собственного числа – превращению его в точку комплексного резонанса. В итоге сложилось мнение (ср. [10; с. 25] и [16; с. 17]), что появление собственных чисел на непрерывном спектре – событие крайне редкое и неустойчивое по своей природе. Теорема 8 о наличии собственного числа у задачи (1.3) и обсуждавшийся произвол в выборе профильной функции показывают, что собственное число образовать нетрудно, однако, действительно, для этого требуется “точная настройка” геометрических параметров волновода.

§ 2. Волны и расширенная матрица рассеяния

При

$$\lambda^\varepsilon = \pi^2 - \varepsilon\mu \in (0, \pi^2), \quad \mu > 0 \quad (2.1)$$

в двух полуполосах $\Pi_\pm^\varepsilon = \{x \in \Pi^\varepsilon : \pm x_1 > l\}$ (рукавах волновода (1.1)) возникают четыре осциллирующие волны

$$\begin{aligned} w_+^{\text{out}}(x) &= (4\lambda^\varepsilon)^{-1/4} \exp(+ix_1\sqrt{\lambda^\varepsilon}), \\ w_+^{\text{in}}(x) &= (4\lambda^\varepsilon)^{-1/4} \exp(-ix_1\sqrt{\lambda^\varepsilon}), \\ w_-^{\text{out}}(x) &= (4\lambda^\varepsilon(1-\varepsilon)^2)^{-1/4} \exp(-ix_1\sqrt{\lambda^\varepsilon}), \\ w_-^{\text{in}}(x) &= (4\lambda^\varepsilon(1-\varepsilon)^2)^{-1/4} \exp(+ix_1\sqrt{\lambda^\varepsilon}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Различие в нормирующих множителях вызвано разной шириной рукавов. В соответствии с волновыми числами $\pm\sqrt{\lambda^\varepsilon}$ и $\mp\sqrt{\lambda^\varepsilon}$ волны $w_\pm^{\text{out}}$ называются уходящими на бесконечность в $\Pi_\pm^\varepsilon$, а волны $w_\pm^{\text{in}}$ – приходящими с бесконечности в $\Pi_\pm^\varepsilon$. Известно (см. [1], [17], [18; § 5.3] и др.), что задача (1.3) имеет два решения

$$\begin{aligned} u_\pm^\varepsilon(x) &= \chi_\pm(x)w_\pm^{\text{in}}(x) + \sum_{\alpha=\pm} s_{\pm,\alpha}(\varepsilon)\chi_\alpha(x_1)w_\alpha^{\text{out}}(x) \\ &\quad + O(\exp(-|x_1|\sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon})), \quad |x| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\chi_{\pm}$ – гладкие срезающие функции, $\chi_{\pm}(x_1) = 1$ при $\pm x_1 > 2l$ и $\chi_{\pm}(x_1) = 0$ при $\pm x_1 < l$, а остаток $O(\exp(x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon}))$ в левом рукаве Π_-^ε может быть заменен бесконечно малой $O(\exp(x_1 \sqrt{\pi^2(1 - \varepsilon)^{-2} - \lambda^\varepsilon}))$ более высокого порядка. Из коэффициентов отражения $s_{\pm\pm}(\varepsilon)$ и прохождения $s_{\pm\mp}(\varepsilon)$ сооружается унитарная матрица рассеяния $s(\varepsilon)$ размером 2×2 . Один из возможных способов проверки важного свойства унитарности будет пояснен при доказательстве теоремы 1 в несколько более сложной ситуации.

В работах [11] и [14] соответственно для уравнения Гельмгольца и общих формально самосопряженных эллиптических систем в цилиндрических областях были предложены к рассмотрению специальные линейные комбинации экспоненциальных волн, которые для рассматриваемой задачи (1.3) приобретают в рукаве Π_+^ε вид

$$\begin{aligned} w_o^{\text{out}}(x) &= |4(\pi^2 - \lambda^\varepsilon)|^{-1/4} \cos(\pi x_2) (\exp(+x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon}) - i \exp(-x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon})), \\ w_o^{\text{in}}(x) &= |4(\pi^2 - \lambda^\varepsilon)|^{-1/4} \cos(\pi x_2) (\exp(+x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon}) + i \exp(-x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon})). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Аналогичные волны с ингредиентами

$$w_o^\pm(x) = \cos(\pi(1 - \varepsilon)^{-1} x_2) \exp(\pm x_1 \sqrt{\pi^2(1 - \varepsilon)^{-2} - \lambda^\varepsilon}) \quad (2.5)$$

можно было бы ввести и в рукаве Π_-^ε , но в статье они востребованы не будут (ср. § 4, где затухающая волна w_o^- все-таки включена в асимптотику). Установлено [14] (см. пояснения в замечании 1) существование следующих трех решений задачи (1.3):

$$\begin{aligned} U_\alpha^\varepsilon(x) &= \chi_\alpha(x) w_\alpha^{\text{in}}(x) + \sum_{\beta=\circ, \pm} S_{\beta\alpha}(\varepsilon) \chi_\beta(x) w_\beta^{\text{out}}(x) \\ &+ O(\exp(\pm x_1 B_\pm(\varepsilon))), \quad x_1 \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь индекс α принимает значения $\circ$ и $\pm$; кроме того, $B_+(\varepsilon) = (4\pi^2 - \lambda^\varepsilon)^{1/2}$ и $B_-(\varepsilon) = (\pi^2(1 - \varepsilon)^{-2} - \lambda^\varepsilon)^{1/2}$, а срезающая функция $\chi_\circ$ по определению совпадает с χ_+ . Коэффициенты $S_{\beta\alpha}(\varepsilon)$ образуют (3×3) -матрицу

$$S(\varepsilon) = \begin{pmatrix} S_{\circ\circ}(\varepsilon) & S_{\circ+}(\varepsilon) & S_{\circ-}(\varepsilon) \\ S_{+\circ}(\varepsilon) & S_{++}(\varepsilon) & S_{+-}(\varepsilon) \\ S_{-\circ}(\varepsilon) & S_{-+}(\varepsilon) & S_{--}(\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{\circ\circ}(\varepsilon) & S_{\circ\bullet}(\varepsilon) \\ S_{\bullet\circ}(\varepsilon) & S_{\bullet\bullet}(\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

которая названа *расширенной матрицей рассеяния* [11], [13], [14]. Подчеркнем, что расширение [14] матрицы рассеяния отличается от широко принятого в математической физике² (см., например, статью [15]) по двум причинам: во-первых, матрица $S(\varepsilon)$ сохраняет унитарность и, во-вторых, (2×2) -блок $S_{\bullet\bullet}(\varepsilon)$, вообще говоря, не совпадает с (2×2) -матрицей $s(\varepsilon)$ коэффициентов разложений (2.3) из-за присутствия в формулах (2.6) условно уходящих волн w_o^{out} , растущих экспоненциально при $x_1 \rightarrow +\infty$. Связь матриц $s(\varepsilon)$ и $S(\varepsilon)$ описана в теореме 7.

ТЕОРЕМА 1. *Матрица $S(\varepsilon)$ унитарная.*

²Различается и англоязычная терминология: соответственно augmented и extended scattering matrices.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим два решения U_α^ε и U_τ^ε в формулу Грина на усеченном волноводе $\Pi^\varepsilon(R) = \{x \in \Pi^\varepsilon : |x_1| < R\}$ и устремим его длину $2R$ к бесконечности. В такой формуле Грина остаются только интегралы по торцам $\{x \in \Pi^\varepsilon : x_1 = \pm R\}$ и, следовательно,

$$Q_R(U_\alpha^\varepsilon, U_\tau^\varepsilon) := \int_{-1}^0 (\overline{U_\tau^\varepsilon(x)} \partial_1 U_\alpha^\varepsilon(x) - U_\alpha^\varepsilon(x) \overline{\partial_1 U_\tau^\varepsilon(x)}) \Big|_{x_1=R} dx_2 - \int_{-1}^{-\varepsilon} (\overline{U_\tau^\varepsilon(x)} \partial_1 U_\alpha^\varepsilon(x) - U_\alpha^\varepsilon(x) \overline{\partial_1 U_\tau^\varepsilon(x)}) \Big|_{x_1=-R} dx_2 = 0. \quad (2.8)$$

Непосредственные и достаточно простые вычисления приводят к соотношениям

$$Q_R(\chi_\alpha w_\alpha^{\text{out}}, \chi_\tau w_\tau^{\text{out}}) = i\delta_{\alpha,\tau}, \quad Q_R(\chi_\alpha w_\alpha^{\text{in}}, \chi_\tau w_\tau^{\text{in}}) = -i\delta_{\alpha,\tau}, \quad (2.9)$$

$$Q_R(\chi_\alpha w_\alpha^{\text{out}}, \chi_\tau w_\tau^{\text{in}}) = \overline{Q_R(\chi_\tau w_\tau^{\text{in}}, \chi_\alpha w_\alpha^{\text{out}})} = 0, \quad \alpha, \tau = \circ, \pm,$$

где черта означает комплексное сопряжение. Предельный переход $R \rightarrow +\infty$ устраняет из выражения (2.8) экспоненциально малые остатки, т.е. согласно формулам (2.9) находим

$$0 = \lim_{R \rightarrow +\infty} Q_R \left(\chi_\alpha w_\alpha^{\text{in}} + \sum_{\beta=\circ, \pm} S_{\beta\alpha}(\varepsilon) \chi_\beta w_\beta^{\text{out}} \chi_\tau w_\tau^{\text{in}} + \sum_{\sigma=\circ, \pm} S_{\sigma\tau}(\varepsilon) \chi_\sigma w_\sigma^{\text{out}} \right) = -i\delta_{\alpha,\tau} + i \sum_{\beta=\circ, \pm} \overline{S_{\beta\tau}(\varepsilon)} S_{\beta\alpha}(\varepsilon). \quad (2.10)$$

Равенства (2.10) показывают, что $S(\varepsilon)^* S(\varepsilon) = \mathbb{I}_3$ – единичная матрица размером 3×3 . Таким образом, сопряженная $S(\varepsilon)^*$ и обратная $S(\varepsilon)^{-1}$ матрицы для $S(\varepsilon)$ совпадают, а значит, сама расширенная матрица рассеяния (2.7) унитарная.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогичная (2.10) выкладка обеспечивает существование решений (2.10) (подробности см. в статье [14]). Дело в том, что предположение об отсутствии базиса $\{U_\alpha^\varepsilon\}_{\alpha=\circ, \pm}$ влечет за собой наличие решения u^ε однородной задачи (1.3) с асимптотикой

$$u^\varepsilon(x) = \sum_{\beta=\circ, \pm} K(\varepsilon) \chi_\beta(x) w_\beta^{\text{out}}(x) + O(\exp(\pm x_1 B_\pm(\varepsilon))), \quad x_1 \rightarrow \pm\infty, \quad (2.11)$$

и нетривиальным вектором коэффициентов $\vec{K} = (K_\circ, K_+, K_-)$. В то же время, подставив функцию u^ε на обе позиции в формулу Грина, повторяем вычисления (2.10) с понятными изменениями и приходим к противоречию $0 = i|\vec{K}|^2$. Обращаем внимание на то, что формула (2.11) представляет собой условия излучения, которыми следует снабдить неоднородную задачу (1.3) для обеспечения ее нормальной разрешимости (ср. [1], [17], [18; § 5.3] и др.).

ТЕОРЕМА 2. Справедливы равенства $S_{\alpha\beta}(\varepsilon) = S_{\beta\alpha}(\varepsilon)$, где $\alpha, \beta = \circ, \pm$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим матричную форму записи [13] – введем строки решений $U^\varepsilon = (U_\circ^\varepsilon, U_+^\varepsilon, U_-^\varepsilon)$ и волн

$$\chi w^{\text{in/out}} = (\chi_\circ w_\circ^{\text{in/out}}, \chi_+ w_+^{\text{in/out}}, \chi_- w_-^{\text{in/out}}).$$

Тогда формулы (2.6) принимают вид

$$U^\varepsilon = \chi w^{\text{in}} + \chi w^{\text{out}} S(\varepsilon) + \dots, \quad (2.12)$$

причем многоточием обозначены экспоненциально малые при $x_1 \rightarrow \pm\infty$ остатки $O(\exp(\pm x_1 B_\pm(\varepsilon)))$. Заметим, что согласно определению волн (2.2) и (2.4) выполнено равенство

$$\chi w^{\text{in}} = \overline{\chi w^{\text{out}}}. \quad (2.13)$$

В результате получаем, что

$$\begin{aligned} \overline{U^\varepsilon} &= \overline{\chi w^{\text{in}}} + \overline{\chi w^{\text{out}} S(\varepsilon)} + \dots = (\chi w^{\text{out}} \overline{S(\varepsilon)})^{-1} + \chi w^{\text{in}} + \dots \overline{S(\varepsilon)}, \\ \overline{U^\varepsilon} \overline{S(\varepsilon)}^{-1} &= \chi w^{\text{in}} + \chi w^{\text{out}} \overline{S(\varepsilon)}^{-1} + \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Выкладка (2.10) (см. также замечание 1) демонстрирует, что совпадение в строках (2.14) и (2.6) коэффициентов при приходящих волнах гарантирует совпадение коэффициентов при уходящих волнах, т.е. упомянутые строки могут различаться лишь быстро затухающими захваченными волнами (на самом деле таковых нет; см. первую формулу (3.8)), не влияющими на названные коэффициенты. Следовательно, $S(\varepsilon) = \overline{S(\varepsilon)}^{-1}$. С другой стороны, $S(\varepsilon)^* = \overline{S(\varepsilon)}^\top$, где $\top$ – знак транспонирования (без комплексного сопряжения). В итоге $\overline{S(\varepsilon)} = S(\varepsilon)^{-1} = S(\varepsilon)^* = \overline{S(\varepsilon)}^\top$, и нужные формулы доказаны.

Разумеется, симметричность, проверенная для расширенной матрицы рассеяния и обеспеченная по существу формулой (2.13), присуща и обычной матрице рассеяния $s(\varepsilon)$.

§ 3. Оператор задачи в весовых классах и достаточное условие захвата волны

Весовое пространство Соболева $W_\gamma^1(\Pi^\varepsilon)$ (см. первоисточник [19] и, например, монографию [18; § 3.1]) состоит из тех функций $u^\varepsilon \in H_{\text{loc}}^1(\overline{\Pi^\varepsilon})$, для которых конечна норма

$$\|u^\varepsilon; W_\gamma^1(\Pi^\varepsilon)\| = (\|\exp(\gamma|x_1|)\nabla u^\varepsilon; L_2(\Pi^\varepsilon)\|^2 + \|\exp(\gamma|x_1|)u^\varepsilon; L_2(\Pi^\varepsilon)\|^2)^{1/2}.$$

Если весовой показатель γ положителен, то функция $u^\varepsilon \in W_\gamma^1(\Pi^\varepsilon)$ исчезает на бесконечности с экспоненциальной скоростью, но при $\gamma < 0$ в пространстве $W_\gamma^1(\Pi^\varepsilon)$ присутствуют и функции с определенным экспоненциальным ростом, причем скорости затухания и допустимого роста определяются именно весовым показателем γ . Ясно, что $W_\gamma^1(\Pi^\varepsilon) \subset W_\kappa^1(\Pi^\varepsilon)$ при $\gamma \geq \kappa$, и $W_0^1(\Pi^\varepsilon) = H^1(\Pi^\varepsilon)$.

Пусть $\kappa \in \mathbb{R}$ и $f^\varepsilon \in W_{-\kappa}^1(\Pi^\varepsilon)^*$ – линейный непрерывный функционал на пространстве $W_{-\kappa}^1(\Pi^\varepsilon)$. Под обобщенным решением неоднородной (с правой частью f^ε) задачи (1.3) в весовом классе $W_\kappa^1(\Pi^\varepsilon)$ понимаем элемент $u^\varepsilon \in W_\kappa^1(\Pi^\varepsilon)$, удовлетворяющий интегральному тождеству [3]

$$(\nabla u^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)_{\Pi^\varepsilon} - \lambda^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Pi^\varepsilon} = f^\varepsilon(v^\varepsilon), \quad v^\varepsilon \in W_{-\kappa}^1(\Pi^\varepsilon) \quad (3.1)$$

(ср. вариационную задачу (1.7)). Задаче (3.1) поставим в соответствие непрерывное отображение

$$W_\kappa^1(\Pi^\varepsilon) \ni u^\varepsilon \mapsto \mathcal{A}_\kappa^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)u^\varepsilon = f^\varepsilon \in W_{-\kappa}^1(\Pi^\varepsilon)^*. \quad (3.2)$$

Ввиду симметричности билинейной формы из левой части (3.1) операторы $\mathcal{A}_\kappa^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$ и $\mathcal{A}_{-\kappa}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$ взаимно сопряжены. Другие свойства оператора $\mathcal{A}_\kappa^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$ зависят от параметров κ , λ^ε и могут быть изучены на основе теории³ эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность (см. ключевые работы [19], [21]–[23] и, например, монографию [18]). Сформулируем и докажем несколько утверждений, используемых далее. С этой целью заметим, что в силу определения (1.1) области Π^ε она почти тождественной заменой координат

$$x \mapsto x^\varepsilon = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) = (x_1, (1 + \sqrt{\varepsilon}h(x_1) - \varepsilon H(x_1))^{-1}(x_2 + \varepsilon H(x_1))) \quad (3.3)$$

трансформируется в прямую полосу $\Pi^0 = \mathbb{R} \times (-1, 0)$. Еще зафиксируем весовые показатели

$$\gamma \in (\sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon}, \sqrt{4\pi^2 - \lambda^\varepsilon}), \quad \rho^\varepsilon \in (\sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon}, \sqrt{\pi^2(1 - \varepsilon)^{-2} - \lambda^\varepsilon}), \quad (3.4)$$

причем λ^ε – число (2.1). Показатель γ можно взять не зависящим от ε , но показатель ρ^ε принадлежит интервалу, стягивающемуся к точке π при $\varepsilon \rightarrow +0$, и потому несомненно зависит от ε .

ТЕОРЕМА 3 (см. [19] и теорему 5.1.4 [18]). 1) Операторы $\mathcal{A}_{\pm\gamma}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$ и $\mathcal{A}_{\pm\rho^\varepsilon}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$ являются фредгольмовыми, но теряют это свойство в концевых точках интервалов (3.4), так как образы операторов перестают быть замкнутыми подпространствами.

2) Если $u^\varepsilon \in W_{-\gamma}^1(\Pi^\varepsilon)$ – решение задачи (3.1) с весовым показателем $\kappa = -\gamma$ и правой частью $f^\varepsilon \in W_{-\gamma}^1(\Pi^\varepsilon)^* \subset W_\gamma^1(\Pi^\varepsilon)^*$, то справедливо представление

$$u^\varepsilon(x) = \tilde{u}^\varepsilon(x) + \sum_{\alpha=0,\pm} \chi_\alpha(x_1) (a_\alpha^{\text{in}} w_\alpha^{\text{in}}(x) + a_\alpha^{\text{out}} w_\alpha^{\text{out}}(x)) + \sum_{\pm} \chi_{\pm}(x_1) a_{\pm} \cos(\pi(1 - \varepsilon)^{-1} x_2) \exp(\pm x_1 \sqrt{\pi^2(1 - \varepsilon)^2 - \lambda^\varepsilon}), \quad (3.5)$$

где коэффициенты и экспоненциально затухающий остаток $\tilde{u}^\varepsilon \in W_\gamma^1(\Pi^\varepsilon)$ удовлетворяют оценке

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}^\varepsilon; W_\gamma^1(\Pi^\varepsilon)\| + \sum_{\alpha=0,\pm} (|a_\alpha^{\text{in}}| + |a_\alpha^{\text{out}}|) + \sum_{\pm} |a_{\pm}| \\ & \leq C_\varepsilon (\|f^\varepsilon; W_{-\gamma}^1(\Pi^\varepsilon)^*\| + \|u^\varepsilon; W_{-\gamma}^1(\Pi^\varepsilon)\|), \end{aligned} \quad (3.6)$$

в которой множитель C_ε не зависит от функций u^ε и f^ε .

Множитель C_ε зависит от малого параметра ε хотя бы потому, что нормирующий коэффициент $(4(\pi^2 - \lambda^\varepsilon))^{-1/4}$ у волн (2.4) равен $O(\varepsilon^{-1/4})$ согласно предположению (2.1). В теореме 9 эта зависимость будет уточнена.

ТЕОРЕМА 4. Пусть весовой показатель γ подчинен требованию (3.4). Индекс

$$\text{Ind } \mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon) = \dim \ker \mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon) - \dim \text{coker } \mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$$

оператора $\mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$ вычисляется по формуле

$$\text{Ind } \mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon) = \text{Ind } \mathcal{A}_\gamma^\varepsilon(\lambda^\varepsilon) + 8 \implies \text{Ind } \mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon) = 4. \quad (3.7)$$

³Обычно эта теория имеет дело с краевыми задачами в классической постановке, однако переход к интегральным тождествам и обобщенным решениям не встречает сколь-нибудь заметных препятствий (ср. [20]).

Кроме того, ядро $\ker \mathcal{A}_\gamma^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$ оператора $\mathcal{A}_\gamma^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$ тривиально при малом $\varepsilon > 0$, т.е. согласно выводу (3.7) верны равенства

$$\begin{aligned} \dim \ker \mathcal{A}_\gamma^\varepsilon(\lambda^\varepsilon) &= \dim \operatorname{coker} \mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon) = 0, \\ \dim \ker \mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon) &= \dim \operatorname{coker} \mathcal{A}_\gamma^\varepsilon(\lambda^\varepsilon) = 4. \end{aligned} \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая формула (3.7), в которой восемь – количество линейно независимых волн, отделенных в асимптотике (3.5), следует из теоремы об индексе (см. [18; теоремы 3.3.3 и 5.1.4]). Вторая формула (3.7) опирается на очевидное равенство $\operatorname{Ind} \mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon) = -\operatorname{Ind} \mathcal{A}_\gamma^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$ для взаимно сопряженных операторов $\mathcal{A}_\gamma^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$ и $\mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$. Замена координат (3.3) и переход к $\varepsilon = 0$ приводят к задаче Неймана

$$-\Delta u^0(x) = \lambda^0 u^0(x), \quad x \in \Pi^0, \quad \partial_2 u^0(x) = 0, \quad x \in \partial \Pi^0, \quad (3.9)$$

аналогичный (3.2) оператор $\mathcal{A}_\gamma^0$ которой имеет тривиальное ядро. Задача (3.9) допускает разделение переменных, и результат об отсутствии экспоненциально затухающих при $x_1 \rightarrow \pm\infty$ решений становится очевидным. Поскольку оператор $\mathcal{A}_\gamma^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$ мало отличается от $\mathcal{A}_\gamma^0(\lambda^\varepsilon)$ благодаря замене координат (3.3), почти тождественной, равенство $\dim \ker \mathcal{A}_\gamma^\varepsilon = 0$ сохраняется при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и некотором $\varepsilon_0 > 0$.

ТЕОРЕМА 5. 1) Пусть λ_1^ε – собственные числа семейства задач (1.3), причем $\lambda_1^\varepsilon \rightarrow \pi^2 - 0$ или $\lambda_1^\varepsilon \rightarrow \pi^2 + 0$ вдоль некоторой последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, а соответствующие собственные функции $u_1^\varepsilon \in H^1(\Pi^\varepsilon)$ нормированы условием

$$\|u_1^\varepsilon; L_2(\Pi^\varepsilon(2l))\| = 1. \quad (3.10)$$

Тогда u_1^ε имеет слабый в $W_{-\gamma}^1(\Pi^0)$ предел u_1^0 вдоль некоторой бесконечно малой подпоследовательности, и u_1^0 – нетривиальное ограниченное решение предельной задачи (3.9) с параметром $\lambda^0 = \pi^2$.

2) Найдутся такие положительные ε_0 и c_0 , что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ в $c_0\varepsilon$ -окрестности точки $\lambda^0 = \pi^2$ задача (1.3) имеет не более одного собственного числа, причем это число заведомо строго меньше π^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим сходимость, повторив аргументацию из статьи [24]. Поскольку $u_1^\varepsilon \in H^1(\Pi^\varepsilon) \subset W_{-\gamma}^1(\Pi^\varepsilon)$ – решение задачи (3.1) с правой частью $f_1^\varepsilon = 0$, в силу известной оценки, выражающей фредгольмовость оператора $\mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon$ (см., например, [18; теорема 5.1.4]), получаем, что

$$\|u_1^\varepsilon; W_{-\gamma}^1(\Pi^\varepsilon)\| \leq c(\|f_1^\varepsilon; W_\gamma^1(\Pi^\varepsilon)^*\| + \|u_1^\varepsilon; L_2(\Pi^\varepsilon(2l))\|) = c. \quad (3.11)$$

Подчеркнем, что множитель c не зависит от параметра ε опять-таки в силу почти тождественной замены координат (3.3). Отсюда вытекает, что вдоль некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon_n\}$ имеет место слабая сходимость

$$u_1^\varepsilon \rightharpoonup u_1^0 \quad \text{в пространстве } W_{-\gamma}^1(\Pi^0);$$

здесь $u_1^\varepsilon \in H^1(\Pi^0)$ – функция u_1^ε , записанная в координатах x^ε . Делая в интегральном тождестве (3.1) с фиксированной пробной функцией $v^\varepsilon \in C_c^\infty(\overline{\Pi^\varepsilon})$, гладкой и финитной, замену координат (3.3) и предельный переход $\varepsilon \rightarrow +0$, получаем соотношение

$$(\nabla u_1^0, \nabla v^0)_{\Pi^0} = \pi^2(u_1^0, v^0)_{\Pi^0}, \quad v^0 \in C_c^\infty(\overline{\Pi^0}). \quad (3.12)$$

По замыканию в интегральное тождество (3.12) можно подставить любую пробную функцию $v^0 \in W_\gamma^1(\Pi^0)$, т.е. $u_1^0 \in W_{-\gamma}^1(\Pi^\varepsilon)$ – решение задачи (3.9) с параметром $\lambda^0 = \pi^2$, причем в силу компактности вложения $W_{-\gamma}^1(\Pi^\varepsilon) \subset L_2(\Pi^\varepsilon(2l))$ и вытекающей из нее сильной сходимости по норме пространства Лебега $L_2(\Pi^\varepsilon(2l))$ требование (3.10) обеспечивает нормировку

$$\|u_1^0; L_2(\Pi^0(2l))\| = 1. \quad (3.13)$$

Полученная задача в полосе Π^0 решается явно: любое ее решение $u_1^0 \in W_{-\gamma}^1(\Pi^0)$ оказывается линейной комбинацией

$$u_1^0(x) = c_1 \exp(-i\pi x_1) + c_2 \exp(i\pi x_1) + (c_3 + c_4 x_1) \cos(\pi x_2). \quad (3.14)$$

Вычислим коэффициенты c_q .

Локальная оценка [25], примененная к решению задачи (1.3) на прямоугольнике $(l, 2l) \times (-1, 0) \subset \Pi^\varepsilon(2l)$, дает соотношение

$$\begin{aligned} & \left\| u_1^\varepsilon; H^2\left(\left(\frac{5l}{4}, \frac{7l}{4}\right) \times (-1, 0)\right) \right\| \\ & \leq c(\|\Delta u_1^\varepsilon; L_2((l, 2l) \times (-1, 0))\| + \|u_1^\varepsilon; L_2((l, 2l) \times (-1, 0))\|) \\ & = c(\lambda^\varepsilon + 1)\|u_1^\varepsilon; L_2((l, 2l) \times (-1, 0))\| = c(\lambda^\varepsilon + 1). \end{aligned} \quad (3.15)$$

В конце выкладки учтена нормировка (3.10). Итак, в силу следового неравенства [3] и вытекающей из соотношения (3.15) сходимости $u_1^\varepsilon \rightarrow u_1^0$, слабой в $H^2((5l/4, 7l/4) \times (-1, 0))$, выводим, что

$$u_1^\varepsilon\left(\frac{3l}{2}, \cdot\right) \rightarrow u_1^0\left(\frac{3l}{2}, \cdot\right), \quad \partial_1 u_1^\varepsilon\left(\frac{3l}{2}, \cdot\right) \rightarrow \partial_1 u_1^0\left(\frac{3l}{2}, \cdot\right) \quad \text{сильно в } L_2(-1, 0) \quad (3.16)$$

вдоль некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon_n\}$. Подчеркнем, что сильные сходимости (3.16) обеспечены компактностью вложения $H^2((5l/4, 7l/4) \times (-1, 0))$ в $H^1(-1, 0)$ (см., например, [3; гл. 1]).

Пусть $\lambda_1^\varepsilon < \pi^2$. Применим формулу Грина в полуполосе $(3l/2, +\infty) \times (-1, 0)$ к функции u_1^ε , экспоненциально затухающей при $x_1 \rightarrow +\infty$, и одной из трех функций

$$x \mapsto \exp\left(\pm i\left(x_1 - \frac{3l}{2}\right)\sqrt{\lambda_1^\varepsilon}\right), \quad \cos(\pi x_2) \exp\left(-\left(x_1 - \frac{3l}{2}\right)\sqrt{\pi^2 - \lambda_1^\varepsilon}\right),$$

двух ограниченных и одной затухающей. В результате получаем равенства

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^0 \left(\partial_1 u_1^\varepsilon\left(\frac{3}{2}l, x_2\right) \mp i\sqrt{\lambda_1^\varepsilon} u_1^\varepsilon\left(\frac{3}{2}l, x_2\right) \right) dx_2, \\ 0 &= \int_{-1}^0 \cos(\pi x_2) \left(\partial_1 u_1^\varepsilon\left(\frac{3}{2}l, x_2\right) \mp i\sqrt{\pi^2 - \lambda_1^\varepsilon} u_1^\varepsilon\left(\frac{3}{2}l, x_2\right) \right) dx_2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

При учете сходимостей (3.16) переходим в этих трех равенствах к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ и выводим, что

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^0 \left(\partial_1 u_1^0\left(\frac{3}{2}l, x_2\right) \mp i\pi u_1^0\left(\frac{3}{2}l, x_2\right) \right) dx_2, \\ 0 &= \int_{-1}^0 \cos(\pi x_2) \partial_1 u_1^0\left(\frac{3}{2}l, x_2\right) dx_2. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $c_1 = c_2 = c_4 = 0$, а условие (3.13) позволяет вычислить коэффициент $c_3 = l^{-1/2}$ линейной комбинации (3.14).

В случае $\lambda_1^\varepsilon > \pi^2$ в формулу Грина можно подставить четыре ограниченные в полуполосе $(3l/2, +\infty) \times (-1, 0)$ функции

$$\begin{aligned} x \mapsto & \exp\left(\pm i\left(x_1 - \frac{3l}{2}\right)\sqrt{\lambda_1^\varepsilon}\right), \quad \cos(\pi x_2) \exp\left(i\left(x_1 - \frac{3l}{2}\right)\sqrt{\lambda_1^\varepsilon - \pi^2}\right), \\ & (\lambda_1^\varepsilon - \pi^2)^{-1/2} \cos(\pi x_2) \left(\exp\left(i\left(x_1 - \frac{3l}{2}\right)\sqrt{\lambda_1^\varepsilon - \pi^2}\right) \right. \\ & \left. - \exp\left(-i\left(x_1 - \frac{3l}{2}\right)\sqrt{\lambda_1^\varepsilon - \pi^2}\right) \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

которые обеспечивают два равенства (3.17), а также еще два равенства

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^0 \cos(\pi x_2) \left(\partial_1 u_1^\varepsilon\left(\frac{3}{2}l, x_2\right) - i\sqrt{\lambda_1^\varepsilon - \pi^2} u_1^\varepsilon\left(\frac{3}{2}l, x_2\right) \right) dx_2, \\ 0 &= \int_{-1}^0 \cos(\pi x_2) u_1^\varepsilon\left(\frac{3}{2}l, x_2\right) dx_2. \end{aligned}$$

Согласно сходимостям (3.16) полученные соотношения выдерживают предельный переход $\varepsilon \rightarrow +0$, причем четыре условия ортогональности при $\varepsilon = 0$ превращают в нуль все коэффициенты $c_1, \dots, c_4$, а значит, и саму линейную комбинацию (3.14). Последний вывод противоречит требованию (3.13), т.е. формула $\lambda_1^\varepsilon \rightarrow \pi^2 + 0$ невозможна. Отметим, наконец, что в случае $\lambda^\varepsilon = \pi^2$ последнюю функцию из (3.18) заменяем функцией $(x_1 - 3l/2) \cos(\pi x_2)$ и сохраняем прежние выводы.

Осталось убедиться в том, что на интервале $(\pi^2 - c\varepsilon, \pi^2)$ не может быть двух собственных чисел λ_1^ε и λ_2^ε . Соответствующие собственные функции находятся в отношении

$$(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)_{\Pi^\varepsilon} = 0. \quad (3.19)$$

По теореме 3 решения $u_p^\varepsilon \in H^1(\Pi^\varepsilon) \subset W_{-\gamma}^1(\Pi^\varepsilon)$ однородной задачи (1.3) допускают разложения (3.5), в которых из-за их принадлежности пространству Соболева многие коэффициенты обращаются в нуль. Иными словами, верны формулы

$$\begin{aligned} u_p^\varepsilon(x) &= \tilde{u}_p^\varepsilon(x) + b_{p+}^\varepsilon \chi_+(x_1) \cos(\pi x_2) \exp(-x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda_1^\varepsilon}) \\ &\quad + b_{p-}^\varepsilon \chi_-(x_1) \cos(\pi(1 - \varepsilon)^{-1} x_2) \exp(-x_1 \sqrt{\pi^2(1 - \varepsilon)^{-2} - \lambda_1^\varepsilon}), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\|\tilde{u}_p^\varepsilon; W_{-\gamma}^1(\Pi^\varepsilon)\| + |b_{p+}^\varepsilon| + |b_{p-}^\varepsilon| \leq c \|u_p^\varepsilon; W_{-\gamma}^1(\Pi^\varepsilon)\| \leq C \|u_p^\varepsilon; L_2(\Pi^\varepsilon(2l))\| = C, \quad (3.21)$$

причем последняя написана при учете неравенств (3.6) и (3.11). Константа c в оценке (3.21) не зависит от ε потому, что существует почти тождественная замена координат (3.3), спрямляющая стенки волновода Π^ε , и множители при b_{p+}^ε в правой части (3.20) имеют конечный предел $\cos(\pi x_2)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ и, соответственно, $\lambda^\varepsilon \rightarrow +\pi^2$ (ср. рассуждения при доказательстве теоремы 9). Следовательно, принимая во внимание ограниченность левой части (3.21) и разрезая при необходимости последовательность $\{\varepsilon_n\}$, получаем сходимости

$$b_{p\pm}^\varepsilon \rightarrow b_{p\pm}^0, \quad \tilde{u}_p^\varepsilon \rightharpoonup \tilde{u}_p^0 \quad \text{слабо в } W_{-\gamma}^1(\Pi^0).$$

Поскольку $\tilde{u}_p^0(x) = c_3 \cos(\pi x_2)$ и коэффициент $c_3 = l^{-1/2} > 0$ не зависит от индекса p в силу нормировки (3.13), обнаруживаем, что $b_{p\pm}^0 = l^{-1/2}$ и $\tilde{u}_p^0$ – функция с компактным носителем. Итак, формула (3.19) принимает вид

$$(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)_{\Pi^\varepsilon} = \frac{1}{4} b_{1+}^\varepsilon b_{2+}^\varepsilon (\pi^2 - \lambda^\varepsilon)^{-1/2} + \frac{1}{4} b_{1-}^\varepsilon b_{2-}^\varepsilon (1 - \varepsilon)^{-1} (\pi^2 (1 - \varepsilon)^{-2} - \lambda^\varepsilon)^{-1/2} + O(1).$$

Умножим это соотношение на бесконечно малую $(\pi^2 - \lambda^\varepsilon)^{1/2}$ и перейдем к пределу вдоль подпоследовательности $\{\varepsilon_n\}$. В результате получаем абсурдное равенство $0 = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4})l^{-1}$, т.е., действительно, при малом $\varepsilon > 0$ на интервале $(\pi^2 - c\varepsilon, \pi^2)$ двух собственных чисел быть не может.

Следующее утверждение – частный случай общего достаточного условия [14] существования захваченных волн.

ТЕОРЕМА 6. Если $S_{oo}(\varepsilon) = -1$ в матрице (2.7), то задача (1.3) с параметром (2.1) имеет захваченную волну $U_\circ^\varepsilon \in H^1(\Pi^\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$|S_{oo}(\varepsilon)|^2 + |S_{o+}(\varepsilon)|^2 + |S_{o-}(\varepsilon)|^2 = 1 \quad (3.22)$$

в силу унитарности матрицы $S(\varepsilon)$, видим, что $S_{o\pm}(\varepsilon) = 0$, а значит, разложение (2.6) решения $U_\circ^\varepsilon$ принимает вид

$$U_\circ^\varepsilon(x) = \chi_+(x_1)(w_\circ^{\text{in}}(x) - w_\circ^{\text{out}}(x)) + O(\exp(\pm x_1 B_\pm(\varepsilon))), \quad x_1 \rightarrow \pm\infty. \quad (3.23)$$

Согласно формуле (2.4) имеем

$$w_\circ^{\text{in}}(x) - w_\circ^{\text{out}}(x) = O(\exp(-x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon}))$$

при $x_1 \rightarrow +\infty$, т.е. первое слагаемое в правой части (3.23) также экспоненциально затухает.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В правой части (3.23) коэффициент $2i(4(\pi^2 - \lambda^\varepsilon))^{-1/4}$ при затухающей волне $w_\circ^-$ из (2.5) отличен от нуля. Верно и обратное утверждение (точную формулировку этого факта см. в работе [14]): если у захваченной волны коэффициент при $w_\circ^-$ не равен нулю, то $S_{oo}(\varepsilon) = -1$. Таким образом, при учете дополнительной информации, полученной в теореме 4, достаточное условие из теоремы 6 превращается в критерий существования на интервале $(0, \pi^2)$ собственного числа оператора A^ε (и захваченной волны в волноводе Π^ε). В общей ситуации достаточное условие не является необходимым, и игнорирование этого обстоятельства может привести к ошибкам, уже обсуждавшимся, например, в статье [26].

ТЕОРЕМА 7. Выполнено равенство

$$s(\varepsilon) = S_{\bullet\bullet}(\varepsilon) - S_{\bullet o}(\varepsilon)(S_{oo}(\varepsilon) + 1)^{-1} S_{o\bullet}(\varepsilon), \quad (3.24)$$

в котором вычитаемое равно нулю при $S_{oo}(\varepsilon) = -1$, так как в этом случае $S_{o\bullet}(\varepsilon) = 0$ и $S_{\bullet o}(\varepsilon) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сказанное о вычитаемом обеспечено теоремами 6 и 2. Усугубив матричную запись, положим $U_\bullet^\varepsilon = (U_+^\varepsilon, U_-^\varepsilon)$ и т.п. Перепишем соотношение (2.12) следующим образом:

$$\begin{aligned} U_\circ^\varepsilon &= \chi_\circ w_\circ^{\text{in}} + \chi_\bullet w_\bullet^{\text{out}} S_{\bullet o} + \chi_\circ w_\circ^{\text{out}} S_{oo} + \dots, \\ U_\bullet^\varepsilon &= \chi_\bullet w_\bullet^{\text{in}} + \chi_\bullet w_\bullet^{\text{out}} S_{\bullet\bullet} + \chi_\circ w_\circ^{\text{out}} S_{o\bullet} + \dots. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Подразумевая под многоточием остатки, исчезающие на бесконечности с какой-либо экспоненциальной скоростью, заменим слагаемые $w_{\bullet}^{\text{in}}$ и $w_{\bullet}^{\text{out}}$ общей растущей составляющей $w_{\bullet}^{+}$ из формул (2.4) и (2.5). Умножим первую строку (3.25) на $(1 + S_{\circ\circ}(\varepsilon))^{-1} S_{\bullet\bullet}(\varepsilon)$ и вычтем из второй. В результате находим:

$$\begin{aligned} U_{\bullet}^{\varepsilon} - U_{\circ}^{\varepsilon} (1 + S_{\circ\circ}(\varepsilon))^{-1} S_{\bullet\bullet}(\varepsilon) &= \chi_{\bullet} w_{\bullet}^{\text{in}} + \chi_{\bullet} w_{\bullet}^{\text{out}} (S_{\bullet\bullet} - S_{\bullet\bullet} (1 + S_{\circ\circ}(\varepsilon))^{-1} S_{\bullet\bullet}(\varepsilon)) \\ &+ \chi_{\circ} w_{\circ}^{+} (S_{\bullet\bullet} - (1 + S_{\circ\circ}(\varepsilon))(1 + S_{\circ\circ}(\varepsilon))^{-1} S_{\bullet\bullet}(\varepsilon)) + \dots \end{aligned} \quad (3.26)$$

Множитель при $\chi_{\circ} w_{\circ}^{+}$ равен нулю. Таким образом, в разложениях (2.3) и (3.26) строк решений $u_{\bullet}^{\varepsilon} = (u_{+}^{\varepsilon}, u_{-}^{\varepsilon})$ и $U_{\bullet}^{\varepsilon} - U_{\circ}^{\varepsilon} (1 + S_{\circ\circ}(\varepsilon))^{-1} S_{\bullet\bullet}(\varepsilon)$ совпадают коэффициенты при приходящих, а значит, и при уходящих волнах, т.е. формула (3.24) установлена по тем же причинам, что и при проверке теоремы 2. Подчеркнем еще раз, что упомянутые строки решений различаются разве лишь линейными комбинациями захваченных волн, но последние благодаря затуханию на бесконечности не влияют на коэффициенты при осциллирующих волнах $w_{\bullet}^{\text{in}}$ и $w_{\bullet}^{\text{out}}$ (ср. замечание 1).

§ 4. Формальная асимптотика расширенной матрицы рассеяния

В случае спектрального параметра (2.1), близкого к порогу $\lambda = \pi^2$, примем асимптотические анзацы для составляющих матрицы (2.7)

$$\begin{aligned} S_{\circ\circ}(\varepsilon) &= S_{\circ\circ}^0 + \varepsilon^{1/2} S'_{\circ\circ} + \tilde{S}_{\circ\circ}(\varepsilon), & S_{\bullet\circ}(\varepsilon) &= \varepsilon^{1/4} S_{\bullet\circ}^0 + \tilde{S}_{\bullet\circ}(\varepsilon), \\ S_{\bullet\bullet}(\varepsilon) &= S_{\bullet\bullet}^0 + \varepsilon^{1/2} S'_{\bullet\bullet} + \tilde{S}_{\bullet\bullet}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.1)$$

и специальных решений (2.6)

$$U_{\circ}^{\varepsilon} = \varepsilon^{-1/4} U_{\circ}^0 + \varepsilon^{1/4} U'_{\circ} + \tilde{U}_{\circ}^{\varepsilon}, \quad U_{\bullet}^{\varepsilon} = U_{\bullet}^0 + \varepsilon^{1/2} U'_{\bullet} + \tilde{U}_{\bullet}^{\varepsilon}. \quad (4.2)$$

В этом параграфе вычислим главные члены асимптотики, а в предпоследнем – оценим остатки.

На конечных участках рукавов $\Pi_{\pm}^{\varepsilon}$ представим одно из решений (2.6) в виде

$$\begin{aligned} U_{\circ}^{\varepsilon}(x) &= w_{\circ}^{\text{in}}(x) + S_{\circ\circ}(\varepsilon) w_{\circ}^{\text{out}}(x) + S_{+\circ}(\varepsilon) w_{+}^{\text{out}}(x) + \dots \\ &= (4\varepsilon\mu)^{-1/4} \cos(\pi x_2) (1 + i + S_{\circ\circ}^0(1 - i) \\ &\quad + \varepsilon^{1/2} (S'_{\circ\circ}(1 - i) + x_1 \mu^{1/2} (1 - i + S_{\circ\circ}^0(1 + i)))) \\ &\quad + \varepsilon^{1/4} (2\pi)^{-1/2} S_{+\circ}^0 \exp(i\pi x_1) + \dots, \quad x_1 \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} U_{\circ}^{\varepsilon}(x) &= S_{-\circ}(\varepsilon) w_{-}^{\text{out}}(x) + C_{\circ}(\varepsilon) w_{\circ}^{-}(x) + \dots \\ &= \varepsilon^{1/4} (2\pi)^{-1/2} S_{-\circ}^0 \exp(-i\pi x_1) + \varepsilon^{-1/4} \cos(\pi x_2) (C_{\circ}^0 \\ &\quad + \varepsilon^{1/2} (C'_{\circ} + C_{\circ}^0 x_1 (2\pi^2 + \mu)^{1/2})) + \dots, \quad x_1 \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Приведем пояснения. Во-первых, в определениях волн (2.2) и (2.4) было учтено, что $\lambda_1^{\varepsilon} = \pi^2 - \varepsilon\mu$ (ср. асимптотический анзац (2.1)), а затем произведено разложение по малому параметру ε , в частности,

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda^{\varepsilon}} &= \pi + O(\varepsilon^{3/2}), & \sqrt{\pi^2 - \lambda^{\varepsilon}} &= \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\mu}, \\ \sqrt{\pi^2(1 - \varepsilon)^{-2} - \lambda^{\varepsilon}} &= \sqrt{\varepsilon}\sqrt{2\pi^2 + \mu} + O(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned}$$

Во-вторых, в разложение (4.4) по необходимости включена медленно затухающая волна (она уже фигурировала в формуле (3.20) и по своему поведению мало чем отличается от волн $w_o^{\text{out/in}}$), а множитель $C_o(\varepsilon)$ взят таким:

$$C_o(\varepsilon) = C_o^0 + \varepsilon^{1/2} C_o' + \dots$$

В-третьих, в правых частях (4.3) и (4.4) появились члены асимптотических анзацев (4.1) для элементов расширенной матрицы рассеяния. Наконец, всюду в этом параграфе многоточием обозначаются младшие члены, не существенные для предпринимаемого асимптотического анализа.

Формальный переход к $\varepsilon = 0$ в определении (1.1) волновода Π^ε и в задаче (1.3) с параметром (2.1) приводит к следующей предельной задаче в прямой полосе:

$$\begin{aligned} -\Delta U(x) - \pi^2 U(x) &= 0, & x \in \Pi^0 &= \mathbb{R} \times (-1, 0), \\ \partial_2 U(x_1, 0) &= g_0(x_1), & -\partial_2 U(x_1, -1) &= g_1(x_1), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

У однородной ($g_p = 0$) задачи (4.5) имеется четыре решения с не более чем полиномиальным ростом: две осциллирующие волны

$$w_{0\pm}^0(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(\pm i\pi x_1), \quad (4.6)$$

а также стоячая и резонансная волны

$$w^{\text{st}}(x) = \cos(\pi x_2), \quad w^{\text{re}}(x) = x_1 \cos(\pi x_2) \quad (4.7)$$

(ср. линейную комбинацию (3.14)). Поскольку U_o^ε – решение однородной задачи (1.3), разумно считать, что главный член U_o^0 анзаца оказывается решением однородной задачи (4.5).

Рассматривая разложение (4.1) как внутреннее, а разложения (4.3), (4.4) – как внешние, и намереваясь подвергнуть их сращиванию (ср. метод сращиваемых разложений, описанный, например, в монографии [27]), выделим из формулы (4.3) множитель при $\varepsilon^{-1/4}$ и в качестве функции U_o^0 возьмем линейную комбинацию решений (4.7) и (4.6), имеющую выделенный множитель главным членом асимптотики при $x_1 \rightarrow +\infty$. Понятно, что

$$U_o^0(x) = (4\mu)^{-1/4} (1 + i + S_{oo}^0(1 - i)) \cos(\pi x_2). \quad (4.8)$$

Обращаясь теперь к формуле (4.4), извлекаем аналогичный множитель $C_o^0 \cos(\pi x_2)$ – по причине производимого сращивания он обязан совпасть с выражением (4.8), т.е.

$$C_o^0 = (4\mu)^{-1/4} (1 + i + S_{oo}^0(1 - i)). \quad (4.9)$$

Функция U_o^0 оставляет невязки $O(\varepsilon)$ в уравнении Гельмгольца с параметром $\lambda_1^\varepsilon = \pi^2 - \varepsilon\mu$ на области Π^ε и в краевом условии на верхней стороне ϖ_0^ε искривленной полосы. В условиях Неймана на нижней стороне ϖ_1^ε возникает невязка порядка $\varepsilon^{1/2}$, которая простыми вычислениями, основанными на формуле (1.4) для производной вдоль внешней нормали, приводится к виду

$$\partial_{n^\varepsilon} U_o^0(x_1, -\varepsilon^{1/2} h(x_1)) = \varepsilon^{1/2} (4\mu)^{-1/4} \pi^2 h(x_1) (1 + i + S_{oo}^0(1 - i)) + O(\varepsilon).$$

Таким образом, поправочный член U_o' в анзаце (4.2), введенный именно для компенсации этой невязки, должен быть решением задачи (4.5) с правыми частями

$$f(x) = 0, \quad g_0(x_1) = 0, \quad g_1(x_1) = -(4\mu)^{-1/4} \pi^2 h(x_1) (1 + i + S_{oo}^0(1 - i)). \quad (4.10)$$

В силу общих результатов⁴ [18; § 5.3] задача (4.5), (4.10) имеет решение с линейным ростом на бесконечности, которое определено с точностью до слагаемого $(K_0 + x_1 K_1) \cos(\pi x_2)$ и допускает представления

$$\begin{aligned} U'_o(x) &= c_+ \exp(i\pi x_1) + (c_+^0 + c_+^1 x_1) \cos(\pi x_2) + O(\exp(-\pi\sqrt{3}x_1)), & x_1 \rightarrow +\infty, \\ U'_o(x) &= c_- \exp(-i\pi x_1) + (c_-^0 + c_-^1 x_1) \cos(\pi x_2) + O(\exp(\pi\sqrt{3}x_1)), & x_1 \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Анализируя множители при $\varepsilon^{1/4}$ в правых частях (4.3) и (4.4) (напоминаем про процедуру сращивания), фиксируем коэффициенты $c_\pm$ и $c_\pm^p$, а именно,

$$\begin{aligned} c_+^1 &= \mu^{1/2}(1 - i + S_{oo}^0(1 + i)), & c_-^1 &= C_o^0(2\pi^2 + \mu)^{1/2}, \\ c_+^0 &= (4\mu)^{-1/4}S_{oo}', & c_-^0 &= C_o', & c_\pm &= (2\pi)^{-1/2}S_{\pm o}^0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

С другой стороны, разности $c_+^p - c_-^p$ и величины $c_\pm$ можно вычислить при помощи метода [21], а значит, и найти предельные значения S_{oo}^0 и $S_{\pm o}^0$ элементов расширенной матрицы рассеяния.

В формулу Грина на прямоугольнике $Q(R) = (-R, R) \times (-1, 0)$ подставим функции U'_o и w^{st} . Устремив длину $2R$ к бесконечности, получим, что

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{Q(R)} (w^{\text{st}}(x)(\Delta U'_o(x) + \pi^2 U'_o(x)) - U'_o(x)(\Delta w^{\text{st}}(x) + \pi^2 w^{\text{st}}(x))) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{\pm} \pm \int_{-1}^0 \cos(\pi x_2) \partial_2 U'_o(\pm R, x_2) dx_2 - \int_{\mathbb{R}} \partial_2 U'_o(x_1, -1) w^{\text{st}}(x_1, -1) dx_1 \\ &= \frac{1}{2}(c_+^1 - c_-^1) + (4\mu)^{1/4} \pi^2 (1 + i + S_{oo}^0(1 - i)) \int_{\mathbb{R}} h(x_1) dx_1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Применив формулу Грина к функциям U'_o и w^{re} , аналогично (4.13) вычислим разность

$$(4\mu)^{-1/4} S_{oo}' - C_o' = c_+^0 - c_-^0 = (4\mu)^{1/4} \pi^2 (1 + i + S_{oo}^0(1 - i)) \int_{\mathbb{R}} x_1 h(x_1) dx_1. \quad (4.14)$$

Теперь соотношения (4.12), (4.9) и (4.13) показывают, что

$$\begin{aligned} m(1 - i + S_{oo}^0(1 + i)) &= -2\pi^2 \mathbf{h}(1 + i + S_{oo}^0(1 - i)) \\ \implies S_{oo}^0 &= -\frac{m(1 - i) + 2\pi^2 \mathbf{h}(1 + i)}{m(1 + i) + 2\pi^2 \mathbf{h}(1 - i)} = -\frac{2\pi^2 \mathbf{h}m + i(4\pi^4 \mathbf{h}^2 - m^2)}{4\pi^4 \mathbf{h}^2 + m^2}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где $\mathbf{h}$ – интеграл из (1.11) и

$$m = \mu^{1/2} + (2\pi^2 + \mu)^{1/2}. \quad (4.16)$$

Подчеркнем, что равенство $S_{oo}^0 = -1$ справедливо в случае

$$m = 2\pi^2 \mathbf{h} \implies \sqrt{\mu} = (2\mathbf{h})^{-1}(2\pi^2 \mathbf{h}^2 - 1), \quad (4.17)$$

и именно здесь возникает первое требование (1.11).

⁴Нужный вывод можно сделать и при помощи метода Фурье, разбив полосу на две полуполосы и прямоугольник, однако ссылки на результаты используемой теории доставляют формулу (4.11) без каких-либо дополнительных вычислений.

При помощи соотношений (4.14) и (4.12) можно найти связь между коэффициентами $S'_{\circ\circ}$ и $C'_{\circ}$, однако вычислить сам поправочный член $S'_{\circ\circ}$ в асимптотике элемента $S_{\circ\circ}(\varepsilon)$ расширенной матрицы рассеяния на данном этапе процедуры не получается – нужно сделать еще один шаг. Точно так же на первом этапе, т.е. при составлении выражения (4.8) удалось только обнаружить связь между $S'_{\circ\circ}$ и $C'_{\circ}$. Точные значения величин $S'_{\circ\circ}$ и $C'_{\circ}$ далее востребованы не будут.

Коэффициенты $c_{\pm}$ в разложениях (4.11) определяем посредством подстановки в формулу Грина на длинном прямоугольнике $Q(R)$ функций $U'_{\circ}$ и $\exp(\mp i x_1)$. Аналогично выкладке (4.13) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{\pm} \pm \int_{-1}^0 \exp(\pm i \pi x_1) (\partial_2 U'_{\circ}(x) \pm i \pi U'_{\circ}(x)) \Big|_{x_1 = \pm R} dx_2 \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \exp(\pm i \pi x_1) \partial_2 U'_{\circ}(x_1, -1) dx_1 \\ &= 2\pi i c_{\pm} - (4\mu)^{1/4} \pi^2 (1 + i + S'_{\circ\circ}(1 - i)) \int_{\mathbb{R}} \exp(\pm i \pi x_1) h(x_1) dx_1. \end{aligned}$$

Эта формула вместе с последней в списке (4.12) означает, что

$$S'_{\pm\circ} = -i \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} (1 + i + S'_{\circ\circ}(1 - i)) \int_{\mathbb{R}} \exp(\pm i \pi x_1) h(x_1) dx_1. \quad (4.18)$$

При этом равенства $S'_{\pm\circ} = 0$ влекут за собой первую группу условий ортогональности (1.11). Отметим, что $S'_{\pm\circ} = S'_{\circ\pm}$ благодаря теореме 2.

Приступим к построению асимптотики (4.1) элементов блока $S_{\bullet\bullet}(\varepsilon)$ матрицы (2.7). По прежней схеме при учете соотношений (2.2), (2.4) и (4.1) перепишем разложение (2.6) решения U_+^{ε} задачи (1.3) в следующей, похожей на (4.3), форме:

$$\begin{aligned} U_+^{\varepsilon}(x) &= (2\pi)^{-1/2} \exp(-i\pi x_1) + (2\pi)^{-1/2} (S_{++}^0 + S'_{++}) \exp(i\pi x_1) \\ &\quad + (4\mu)^{-1/4} \cos(\pi x_2) (S_{\circ+}^0(1 - i) + \varepsilon^{1/2} (S'_{\circ+} + S_{\circ+}^0 x_1 \mu^{1/2} (1 + i))) + \dots, \\ &\quad x_1 \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} U_+^{\varepsilon}(x) &= (2\pi)^{-1/2} (S_{-+}^0 + S'_{-+}) \exp(-i\pi x_1) \\ &\quad + \cos(\pi x_2) (C_+^0 + \varepsilon^{1/2} (C'_+ + C_+^0 x_1 (2\pi^2 + \mu)^{1/2})) + \dots, \\ &\quad x_1 \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Вспоминая про процедуру сращивания и сравнивая разложения (4.19), (4.20) и (4.2), находим:

$$\begin{aligned} U_+^0(x) &= (2\pi)^{-1/2} \exp(-i\pi x_1) + (4\mu)^{-1/4} \cos(\pi x_2) S_{\circ+}^0 (1 - i), \\ S_{++}^0 &= 0, \quad S_{-+}^0 = 1, \quad C_+^0 = (4\mu)^{-1/4} S_{\circ+}^0 (1 - i). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Заменяя индекс плюс индексом минус и повторив выкладку, обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} U_-^0(x) &= (2\pi)^{-1/2} \exp(i\pi x_1) + (4\mu)^{-1/4} \cos(\pi x_2) S_{\circ-}^0 (1 - i), \\ S_{+-}^0 &= 0, \quad S_{+-}^0 = 1, \quad C_-^0 = (4\mu)^{-1/4} S_{\circ-}^0 (1 - i). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Главные члены разложений (4.1) построены, т.е. формальная часть асимптотической процедуры завершена. Обоснование асимптотики будет проведено в § 6, а именно, будут установлены оценки

$$|\widehat{S}_{\circ\circ}(\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{1/2}, \quad |\widehat{S}_{\bullet\bullet}(\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{1/2}, \quad |\widehat{S}_{\bullet\circ}(\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{3/4} \quad (4.23)$$

для величин $\widehat{S}_{\circ\circ}(\varepsilon) = \varepsilon S'_{\circ\circ} + \widetilde{S}_{\circ\circ}(\varepsilon)$ и т.п. Иными словами, поправки $\varepsilon S'_{\circ\circ}$, $\varepsilon S'_{\bullet\bullet}$ и $\varepsilon S'_{\bullet\circ}$, использованные в формальных асимптотических конструкциях, далее не понадобятся. Впрочем, асимптотическую процедуру можно было бы продолжить и найти даже полные разложения элементов расширенной матрицы рассеяния.

§ 5. Идентификация захваченной волны

Примем ограничения (1.10), (1.11), а также в соответствии с формулой (4.17) будем считать, что

$$\mu = (2\mathbf{h})^{-2}(2\pi^2\mathbf{h}^2 - 1)^2 + \tau_0. \quad (5.1)$$

При этом $-\varepsilon\tau_0$ – малое отклонение спектрального параметра от критической точки, обеспечивающей равенство $S_{\circ\circ}^0 = -1$. Кроме того, наложим условие

$$|\vec{\tau}| := (\tau_0^2 + \tau_1^2 + \tau_2^2)^{1/2} \leq \rho\varepsilon^{1/2} \quad (5.2)$$

на вектор $\vec{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^3$ дополнительных параметров, введенных в соотношениях (5.1) и (1.10); здесь $\rho > 0$ – число, которое будет зафиксировано далее.

Сначала покажем, что для малого $\varepsilon > 0$ при введенных ограничениях требования

$$\operatorname{Re}(S_{+\circ}(\varepsilon) + S_{-\circ}(\varepsilon)) = 0, \quad \operatorname{Im}(S_{+\circ}(\varepsilon) - S_{-\circ}(\varepsilon)) = 0, \quad \operatorname{Im} S_{\circ\circ}(\varepsilon) = 0 \quad (5.3)$$

равносильны формуле $S_{\circ\circ}(\varepsilon) = -1$, которая по теореме 6 гарантирует наличие захваченной волны $U_{\circ}^{\varepsilon}$.

Из оценок (4.23) и формул (4.15), (4.21), (4.22) при учете сделанных предположений о параметрах μ и τ_q выводим, что

$$|S_{\circ\circ}(\varepsilon) + 1| \leq c(\varepsilon^{1/2} + |\vec{\tau}|) \leq C\varepsilon^{1/2}, \quad |S_{\pm\mp} - 1| \leq c\varepsilon^{1/2}, \quad |S_{\pm\pm}| \leq c\varepsilon^{1/2}. \quad (5.4)$$

Кроме того, благодаря теореме 2 и первым двум условиям (5.3) имеем

$$S_{\pm\circ}(\varepsilon) = S_{\circ\pm}(\varepsilon) = \pm F_1^{\varepsilon} + iF_2^{\varepsilon}, \quad F_p^{\varepsilon} \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

Поскольку столбцы унитарной матрицы ортогональны, в силу формул (5.5) и (5.4) справедливо соотношение

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{S_{\circ\circ}(\varepsilon)}S_{+\circ}(\varepsilon) + \overline{S_{+\circ}(\varepsilon)}S_{++}(\varepsilon) + \overline{S_{-\circ}(\varepsilon)}S_{-+}(\varepsilon) \\ &= -(F_1^{\varepsilon} + iF_2^{\varepsilon}) + (\overline{-F_1^{\varepsilon}} + i\overline{F_2^{\varepsilon}}) + O(\varepsilon^{1/4}((F_1^{\varepsilon})^2 + (F_2^{\varepsilon})^2)^{1/2}) \\ &= -2F_1^{\varepsilon} - 2iF_2^{\varepsilon} + O(\varepsilon^{1/4}((F_1^{\varepsilon})^2 + (F_2^{\varepsilon})^2)^{1/2}). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $F_1^{\varepsilon} = F_2^{\varepsilon} = 0$ при малом $\varepsilon > 0$. В итоге $S_{\pm\circ}(\varepsilon) = S_{\circ\pm}(\varepsilon) = 0$, а значит, $|S_{\circ\circ}(\varepsilon)| = 1$ и $S_{\circ\circ}(\varepsilon) = -1$ в силу равенства (3.22) и первой формулы (5.4) соответственно. Именно это и требовалось доказать.

Составим систему уравнений для определения вектора $\vec{\tau}$. Прежде всего заметим, что величина $\mathbf{m}$, вычисленная согласно формуле (4.16) по параметру (5.1), подчинена соотношению

$$|\mathbf{m} - 2\pi^2 \mathbf{h} - \pi^2 \tau_0| \leq c|\tau_0|^2. \quad (5.6)$$

Таким образом, третье равенство (5.3) в соответствии с (4.15) может быть записано следующим образом:

$$\tau_0 = T_0(\vec{\tau}) := -\frac{1}{\pi^2}(\mathbf{m} - 2\pi^2 \mathbf{h} - \pi^2 \tau_0) - \frac{1}{\pi^2} \frac{4\pi^4 \mathbf{h}^2 + \mathbf{m}^2}{2\pi^2 \mathbf{h} + \mathbf{m}} \operatorname{Im} \hat{S}_{\circ\circ}(\varepsilon). \quad (5.7)$$

Пусть вектор $\vec{\tau}$ принадлежит замкнутому шару $\overline{\mathbb{B}}_{\rho\varepsilon^{1/2}}$, заданному неравенством (5.2). В силу соотношения (5.6) и первой оценки (4.23) можно зафиксировать (большой) множитель $\rho > 0$ и (малое) число $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы при $\rho = 0$ выполнялось неравенство

$$|T_p(\vec{\tau})| \leq 3^{-1/2} \rho \varepsilon_0^{1/2}. \quad (5.8)$$

Теперь преобразуем первые два условия (5.3). Заметим, что согласно требованиям (1.10) и (1.11) параметры τ_1 и τ_2 определяются так:

$$\tau_1 = \int_0^l \cos(\pi x_1) h(x_1) dx_1, \quad \tau_2 = \int_0^l \sin(\pi x_1) h(x_1) dx_1.$$

Подставив формулы (5.1) и (4.15) в выражение (4.18), после весьма громоздких, но достаточно простых преобразований сначала получим, что

$$\begin{aligned} S_{+\circ}(\varepsilon) + S_{-\circ}(\varepsilon) &= (2\pi)^{3/2} (1+i) \frac{\pi^2 \mathbf{h} \mathbf{m} - i \mathbf{m}^2}{4\pi^4 \mathbf{h}^2 + \mathbf{m}^2} \int_0^l \cos(\pi x_1) h(x_1) dx_1, \\ S_{+\circ}(\varepsilon) - S_{-\circ}(\varepsilon) &= (2\pi)^{3/2} i (1+i) \frac{\pi^2 \mathbf{h} \mathbf{m} - i \mathbf{m}^2}{4\pi^4 \mathbf{h}^2 + \mathbf{m}^2} \int_0^l \sin(\pi x_1) h(x_1) dx_1, \end{aligned}$$

а затем составим аналогичные (5.7) уравнения

$$\begin{aligned} \tau_1 &= T_1(\vec{\tau}) := -(2\pi)^{-3/2} \frac{4\pi^4 \mathbf{h}^2 + \mathbf{m}^2}{\pi^2 \mathbf{h} \mathbf{m} + \mathbf{m}^2} \varepsilon^{-1/4} \operatorname{Re}(\hat{S}_{+\circ}(\varepsilon) + \hat{S}_{-\circ}(\varepsilon)), \\ \tau_2 &= T_2(\vec{\tau}) := -(2\pi)^{-3/2} \frac{4\pi^4 \mathbf{h}^2 + \mathbf{m}^2}{\pi^2 \mathbf{h} \mathbf{m} + \mathbf{m}^2} \varepsilon^{-1/4} \operatorname{Im}(\hat{S}_{+\circ}(\varepsilon) - \hat{S}_{-\circ}(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (5.9)$$

При необходимости уменьшив $\varepsilon_0 > 0$ и увеличив ρ , в силу последней оценки (4.23) сохраняем неравенства (5.8) при $p = 1, 2$ для всякого $\vec{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \tau_2) \in \overline{\mathbb{B}}_{\rho\varepsilon^{1/2}}$. Итак, вектор $\vec{\tau}$ удовлетворяет системе уравнений (5.7), (5.9), в которой непрерывный нелинейный оператор $T = (T_0, T_1, T_2)$ отображает замкнутый шар $\overline{\mathbb{B}}_{\rho\varepsilon^{1/2}} \subset \mathbb{R}^3$ на часть того же шара. Согласно принципу Шаудера – теореме о неподвижной точке (см., например, [28]) – эта система имеет решение в указанном шаре. Поскольку $S_{\circ\circ}(\varepsilon) = -1$ при полученных значениях параметров τ_0 и τ_1, τ_2 , по теореме 6 задача (1.3) приобретает экспоненциально затухающую собственную функцию $u_1^\varepsilon = U_\circ^\varepsilon$ (захваченную волну), отвечающего собственному числу $\lambda_1^\varepsilon = \pi^2 - (\mu + \tau_0)$, для которого верно асимптотическое представление (1.12).

ТЕОРЕМА 8. Пусть выполнены требования (1.11), а сужающийся волновод Π^ε задан формулами (1.1), (1.10). Найдутся такие положительные числа ε_0 и ρ , что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ существуют коэффициенты $\tau_p = \tau_p(\varepsilon) \in [-\rho\varepsilon, \rho\varepsilon]$ линейной комбинации (1.10) – профиля утолщения волновода на конечном участке (рис. 1), при которых задача (1.3) (или (1.7) в вариационной постановке) имеет на интервале $(0, \pi^2)$ единственное собственное число λ_1^ε с собственной функцией $u_1^\varepsilon \in H^1(\Pi^\varepsilon)$, представляющей собой захваченную волну. Для этого собственного числа справедлива асимптотическая формула

$$|\lambda_1^\varepsilon - \pi^2 + \varepsilon(2h)^{-2}(2\pi^2 h^2 - 1)^2| \leq \rho\varepsilon^{3/2}. \quad (5.10)$$

Доказательство теоремы в части обоснования асимптотик и проверки единственности будет завершено в следующих двух параграфах.

§ 6. Обоснование асимптотики расширенной матрицы рассеяния

Сначала получим равномерную относительно $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ оценку решения задачи (3.1) с условиями излучения (2.11) (ср. предложение 1, 2) и спектральным параметром

$$\lambda^\varepsilon \in [\pi^2 - C\varepsilon^2, \pi^2 - c\varepsilon^2], \quad C > c > 0. \quad (6.1)$$

При $\varepsilon \rightarrow +0$ эта задача трансформируется в предельную задачу (3.9) с параметром $\lambda^0 = \pi^2$, у которой имеются стоячая и резонансные волны (4.7), возникающие в такой – пороговой – ситуации. В статье [29] (см. также книгу [18; гл. 5]) разработаны естественные условия излучения на пороге, оперирующие с линейными (полиномиальными в общей ситуации) волнами

$$\mathbf{w}_{1\pm}^{\text{out}}(x) = (x_1 \mp i) \cos(\pi x_2), \quad \mathbf{w}_{1\pm}^{\text{in}}(x) = (x_1 \pm i) \cos(\pi x_2). \quad (6.2)$$

Отличительная черта функций (6.2), составленных из волн (4.7), заключается в том, что для них выполнены соотношения (2.9) (проверяется непосредственными вычислениями). Эти соотношения, как показано в замечании 1 (подробности см. в работе [29]), обеспечивают однозначную разрешимость задачи (4.5) с естественными условиями излучения, которые допускают в разложении решения при $x_1 \rightarrow \pm\infty$ волны $\mathbf{w}_{0\pm}^{\text{out}} = w_{0\pm}^0$ и $\mathbf{w}_{1\pm}^{\text{out}}$ (см. определения (4.6) и (6.2)) и сохраняют свойство унитарности для образованной матрицы рассеяния. Такие условия излучения отличаются от физических [1], [17], которые в разложение решения вместо $\mathbf{w}_{1\pm}^{\text{out}}$ включают стоячую w^{st} волну, разрушающую унитарность матрицы рассеяния.

Поскольку область Π^ε мало отличается от полосы Π^0 и переводится в нее почти тождественной заменой координат (3.3), хотелось бы получить информацию о разрешимости задачи в Π^ε путем возмущения оператора задачи в Π^0 (ср. проверку утверждения теоремы 4). К сожалению, такая схема доказательства в пороговой ситуации требует пересмотра только что упомянутых результатов по двум причинам: во-первых, волна $\mathbf{w}_{1+}^{\text{out}}$ не получается предельным переходом из волны w_o^{out} (ср. формулы (6.2) и (2.4)) и, во-вторых, из-за отсутствия в разложениях (4.4), (4.20) растущих волн, из условий излучения при $x_1 \rightarrow -\infty$ приходится удалить уходящую волну $\mathbf{w}_{1-}^{\text{out}}$, но ввести стоячую волну w^{st} , т.е. сделать условия излучения комбинированными.

Приступим к реализации намеченного плана. Вспомним определение (3.2) оператора $\mathcal{A}_\kappa^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$ задачи (1.3) и введем оператор $\mathcal{A}_\kappa^0(\pi^2)$ неоднородной (ср.

интегральные тождества (3.1) и (3.12)) предельной задачи (3.9)

$$(\nabla u^0, \nabla v^0)_{\Pi^0} - \pi^2(u^0, v^0)_{\Pi^0} = f^0(v^0), \quad v^0 \in C_c^\infty(\overline{\Pi^0}). \quad (6.3)$$

Подчеркнем, что при рассмотрении решения $u^0 \in W_\kappa^1(\Pi^0)$ по замыканию тождество (6.3) распространяется на все $v^0 \in W_{-\kappa}^1(\Pi^0)$ (аналогично формулировке (3.1)), однако в задаче с условиями излучения допустимы только пробные функции из линейного множества $C_c^\infty(\overline{\Pi^0})$, т.е. бесконечно дифференцируемые и обладающие компактными носителями. Указанные две постановки задачи различаются классами, в которых отыскиваются решения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Зафиксируем весовой показатель $\gamma \in (\pi^2, 3\pi^2)$.*

1) *Оператор $\mathcal{A}_\gamma^0(\pi^2)$ является фредгольмовым эпиморфизмом с коядром, которое натянуто на дефектные функционалы, порожденные волнами (4.6) и (4.7). Иными словами, задача (6.3) с правой частью $f^0 \in W_{-\gamma}^0(\Pi^0)^*$ имеет решение $u^0 \in W_\gamma^2(\Pi^0)$ в том и только том случае, если выполнены четыре условия разрешимости*

$$f^0(w) = 0 \quad \text{при } w = w_{0\pm}^0, w^{\text{st}}, w^{\text{re}} \quad (6.4)$$

(см. формулы (4.6) и (4.7)). Это решение U единственно и для него справедливо неравенство

$$\|u^0; W_\gamma^1(\Pi^0)\| \leq c_\gamma \|f^0; W_{-\gamma}^0(\Pi^0)^*\|. \quad (6.5)$$

2) *При любой правой части $f^0 \in W_{-\gamma}^0(\Pi^\varepsilon)^*$ у задачи (6.3) есть единственное решение, допускающее представление*

$$\mathbf{u}^0 = \tilde{\mathbf{u}}^0 + \chi_+(\mathbf{c}_{0+}^0 \mathbf{w}_{0+}^0 + \mathbf{c}_{1+}^0 \mathbf{w}_{1+}^{0\text{out}}) + \chi_-(\mathbf{c}_{0-}^0 \mathbf{w}_{0-}^0 + \mathbf{c}_{1-}^0 w^{\text{st}}), \quad (6.6)$$

т.е. подчиненное специальным, комбинированным, условиям излучения. Кроме того, для остатка $\tilde{\mathbf{u}}^0 \in W_\gamma^1(\Pi^0)$ и коэффициентов $\mathbf{c}_{q\pm}^0 \in \mathbb{C}$ верна оценка

$$\|\tilde{\mathbf{u}}^0; W_\gamma^1(\Pi^0)\| + \sum_{q=0}^1 \sum_{\pm} |\mathbf{c}_{q\pm}^0| \leq C_\gamma \|f^0; W_{-\gamma}^0(\Pi^0)^*\|. \quad (6.7)$$

Постоянные c_γ и C_γ в правых частях (6.5) и (6.7) не зависят от функционала f^0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение, означающее по сути, что у одно-родной задачи (4.5) нет экспоненциально затухающих решений, можно получить при помощи метода Фурье, а также найти во вводной гл. 2 книги [18]. Второе утверждение устанавливается следующим образом. В задаче (6.3) для остатка $\tilde{\mathbf{u}}^0$ из разложения (6.6) правая часть приобретает вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}(v^0) = & f(v^0) + ([\Delta, \chi_+](\mathbf{c}_{0+}^0 \mathbf{w}_{0+}^0 + \mathbf{c}_{1+}^0 \mathbf{w}_{1+}^{0\text{out}}), v^0)_{\Pi^0} \\ & + ([\Delta, \chi_-](\mathbf{c}_{0-}^0 \mathbf{w}_{0-}^0 + \mathbf{c}_{1-}^0 w^{\text{st}}), v^0)_{\Pi^0}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где $[\Delta, \chi_\pm]$ – коммутатор оператора Лапласа с оператором умножения на срезающую функцию, т.е. дифференциальный оператор первого порядка с финитными коэффициентами,

$$[\Delta, \chi_\pm]w = 2\nabla w \cdot \nabla \chi_\pm + w\Delta \chi_\pm.$$

Таким образом, последние два слагаемых в формуле (6.8) порождают функционалы из пространства $W_{-\kappa}^0(\Pi^\varepsilon)^*$ при любом $\kappa \in \mathbb{R}$. Повторяя выкладку (2.8) с понятными изменениями, трансформируем условия разрешимости (6.4) для этой задачи для $\tilde{\mathbf{u}}^0$ в систему четырех линейных уравнений для коэффициентов $\mathbf{c}_{p\pm}^0$ с неособенной матрицей

$$\begin{pmatrix} 2\pi i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & i/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

и вектором правой части, норма которого в пространстве $\mathbb{C}^4$ не превосходит $c\|f^0; W_{-\gamma}^0(\Pi^\varepsilon)^*\|$, так как волны $w_{0\pm}^0$, w^{st} и w^{re} , порождающие дефектные функционалы, попадают в класс $W_{-\gamma}^0(\Pi^\varepsilon)$ экспоненциально растущих функций. В итоге, находим коэффициенты $\mathbf{c}_{p\pm}^0$, а затем применяем к задаче для $\tilde{\mathbf{u}}^0$ неравенство (6.5) и приходим к нужной оценке (6.7).

Оператор задачи (6.3) с условиями излучения (6.6) обозначим $\mathbf{A}_\gamma^0(\pi^2)$. Он задан на пространстве $\mathbf{W}_\gamma^1(\Pi^0)$, которое образовано функциями, представимыми в виде (6.6), и снабжено нормой $\|\mathbf{u}^0; \mathbf{W}_\gamma^1(\Pi^0)\|$, совпадающей с левой частью (6.7). Этот класс называется весовым функциональным пространством с отдельной асимптотикой [23]. Пространство $\mathbf{W}_\gamma^1(\Pi^0)$ может быть отождествлено с прямым произведением

$$W_\gamma^1(\Pi^0) \times \mathbb{C}^4 \ni (\tilde{\mathbf{u}}^0, \mathbf{c}_{0+}^0, \mathbf{c}_{1+}^0, \mathbf{c}_{0-}^0, \mathbf{c}_{1-}^0). \quad (6.9)$$

Перейдем к рассмотрению задачи (1.3) с параметром (6.1) и, в частности, определим оператор $\mathbf{A}_\gamma^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$. Заметим, что волны $\mathbf{w}_{0\pm}^{\varepsilon\text{in/out}} = w_{0\pm}^{\text{in/out}}$, определенные равенствами (2.2), и волны

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{1+}^{\varepsilon\text{out}}(x) &= \frac{1}{2} \cos(\pi x_2) \left((\pi^2 - \lambda^\varepsilon)^{-1/2} (\exp(x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon}) - \exp(-x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon})) \right. \\ &\quad \left. - i(\exp(x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon}) + \exp(-x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon})) \right), \\ \mathbf{w}_{1+}^{\varepsilon\text{in}}(x) &= \frac{1}{2} \cos(\pi x_2) \left((\pi^2 - \lambda^\varepsilon)^{-1/2} (\exp(x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon}) - \exp(-x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon})) \right. \\ &\quad \left. + i(\exp(x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon}) + \exp(-x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon})) \right), \end{aligned} \quad (6.10)$$

во-первых, по-прежнему удовлетворяют условиям (2.9) и, во-вторых, на конечном участке волновода Π^ε “плавно” переходят при $\varepsilon \rightarrow +0$ в функции $\mathbf{w}_{0\pm}^{\text{in}} = w_{0\pm}^0$, $\mathbf{w}_{0\pm}^{\text{out}} = w_{0\pm}^0$ и $\mathbf{w}_{1+}^{\text{in/out}}$. Иными словами, выполнена оценка

$$\begin{aligned} &\|\chi_\pm(\mathbf{w}_{0\pm}^{\varepsilon\text{in/out}} - \mathbf{w}_{0\pm}^{\text{in/out}}); H^1((l, 2l) \times (0, 1))\| \\ &\quad + \|\chi_+(\mathbf{w}_{1+}^{\varepsilon\text{in/out}} - \mathbf{w}_{1+}^{\text{in/out}}); H^1(\Pi^\varepsilon(R))\| \leq c(R)\varepsilon. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Аналогично для функции $\mathbf{w}^{\text{de}}(x) = \cos(\pi(1 - \varepsilon)^{-1}x_2) \exp(x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon})$, затухающей при $x_1 \rightarrow -\infty$, имеем

$$\|\chi_-(\mathbf{w}^{\text{de}} - w^{\text{st}}); H^1((l, 2l) \times (0, 1))\| \leq c(R)\varepsilon. \quad (6.12)$$

Обозначим $\mathbf{W}_\gamma^1(\Pi^\varepsilon)$ пространство функций в искривленном волноводе Π^ε , которые представимы в виде

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon + \chi_+ (\mathbf{c}_{0+}^\varepsilon \mathbf{w}_{0+}^{\varepsilon\text{out}} + \mathbf{c}_{1+}^\varepsilon \mathbf{w}_{1+}^{\varepsilon\text{out}}) + \chi_- (\mathbf{c}_{0-}^\varepsilon \mathbf{w}_{0-}^{\varepsilon\text{out}} + \mathbf{c}_{1-}^\varepsilon \mathbf{w}^{\varepsilon\text{de}}), \quad (6.13)$$

и введем в нем норму

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon; \mathbf{W}_\gamma^1(\Pi^\varepsilon)\| = \|\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon; W_\gamma^1(\Pi^\varepsilon)\| + \sum_{q=0}^1 \sum_{\pm} |\mathbf{c}_{q\pm}^\varepsilon|,$$

после чего отождествим с прямым произведением

$$W_\gamma^1(\Pi^\varepsilon) \times \mathbb{C}^4 \ni (\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon, \mathbf{c}_{0+}^\varepsilon, \mathbf{c}_{1+}^\varepsilon, \mathbf{c}_{0-}^\varepsilon, \mathbf{c}_{1-}^\varepsilon)$$

(ср. включение (6.9)).

Задаче

$$(\nabla u^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)_{\Pi^\varepsilon} - \lambda^\varepsilon (u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Pi^\varepsilon} = f^\varepsilon(v^\varepsilon), \quad v^\varepsilon \in C_c^\infty(\overline{\Pi^\varepsilon}), \quad (6.14)$$

поставим в соответствие оператор $\mathbf{A}_\gamma^\varepsilon(\lambda^\varepsilon): \mathbf{W}_\gamma^1(\Pi^\varepsilon) \rightarrow W_{-\gamma}^1(\Pi^\varepsilon)^*$. При учете замены координат (3.3) оператор $\mathbf{A}_\gamma^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$ удастся интерпретировать как малое возмущение оператора $\mathbf{A}_\gamma^0(\pi^2)$. Этот вывод основан на следующих наблюдениях: во-первых, замена (3.3) и отклонение спектрального параметра (6.1) от точки π^2 порождают малое возмущение дифференциальных операторов в задаче (4.5) и, во-вторых, асимптотические члены, отделенные в разложениях (6.6) и (6.13), удовлетворяют уравнениям Гельмгольца и краевым условиям Неймана в полубесконечных рукавах $\Pi_\pm^0$ и $\Pi_\pm^\varepsilon$ волноводов Π^0 и Π^ε и близки по H^1 -норме на общем конечном участке $(l, 2l) \times (0, 1)$ волноводов в соответствии с формулами (6.11) и (6.12).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\gamma \in (\pi^2, 3\pi^2)$, а спектральный параметр λ^ε удовлетворяет включению (6.1).

1) При любой правой части $f^\varepsilon \in W_{-\gamma}^0(\Pi^\varepsilon)^*$ задача (6.14) имеет единственное решение $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbf{W}_\gamma^1(\Pi^\varepsilon)$. Верна оценка

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon; \mathbf{W}_\gamma^1(\Pi^\varepsilon)\| \leq c_\gamma \|f^\varepsilon; W_{-\gamma}^0(\Pi^\varepsilon)^*\|, \quad (6.15)$$

в которой множитель c_γ зависит, в частности, от чисел γ и C , $c > 0$ в формуле (6.1), но не от малого параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$.

2) У задачи (6.14) есть три решения $\mathbf{U}_\alpha^\varepsilon$, подчиненных условиям

$$\mathbf{U}_\alpha^\varepsilon = \chi_\alpha \mathbf{w}_\alpha^{\varepsilon\text{in}} + \sum_{\beta=\pm,1} \mathbf{S}_{\beta\alpha}^\varepsilon \chi_\beta \mathbf{w}_\beta^{\varepsilon\text{out}} + \tilde{\mathbf{U}}_\alpha^\varepsilon; \quad (6.16)$$

при этом $\alpha = 1, \pm$, остатки $\tilde{\mathbf{U}}_\alpha^\varepsilon$ принадлежат пространству Соболева $H^1(\Pi^\varepsilon)$ и экспоненциально затухают на бесконечности, χ_1 – срезающая функция χ_+ , а волны $\mathbf{w}_1^{\varepsilon\text{in/out}} = \mathbf{w}_{1+}^{\varepsilon\text{in/out}}$ и $\mathbf{w}_\pm^{\varepsilon\text{in/out}} = \mathbf{w}_{0\pm}^{\varepsilon\text{in/out}}$ определены формулами (6.10) и (2.2). Наконец, (3×3) -матрица $\mathbf{S}^\varepsilon$, составленная из коэффициентов разложений (6.16), является унитарной и удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \|\mathbf{S}^\varepsilon - \mathbf{S}^0; \mathbb{C}^{3 \times 3}\| &\leq c\varepsilon^{1/2}, \\ \mathbf{S}^0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11}^0 & \mathbf{S}_{1+}^0 & \mathbf{S}_{1-}^0 \\ \mathbf{S}_{+1}^0 & \mathbf{S}_{++}^0 & \mathbf{S}_{+-}^0 \\ \mathbf{S}_{-1}^0 & \mathbf{S}_{-+}^0 & \mathbf{S}_{--}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В комментариях нуждается только второе утверждение. В силу неравенств (6.11), (6.12) и первого утверждения теоремы существования решений (6.16) и оценка разности $\mathbf{S}^\varepsilon - \mathbf{S}^0$ очевидны. Как проверено при доказательстве теоремы 1, унитарность матрицы $\mathbf{S}^\varepsilon$ обеспечена исключительно условиями (2.9), которые были соблюдены для фигурирующих в разложениях (6.16) волн. Осталось заметить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1^0(x) &= 2i \cos(\pi x_2) = \chi_+(x) \cos(\pi x_2) (x + i + \mathbf{S}_{11}^0(x - i)) \\ &\quad + \chi_-(x) \cos(\pi x_2) + \tilde{\mathbf{S}}_1^0(x), \end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_\pm^0(x) = \exp(\pm i\pi x_1) = \chi_\pm(x) \exp(\pm i\pi x_1) + \mathbf{S}_{\mp\pm}^0 \chi_\pm(x) \exp(\pm i\pi x_1) + \tilde{\mathbf{U}}_\pm^0(x),$$

и вывести отсюда формулу для $\mathbf{S}^0$.

ТЕОРЕМА 9. В условиях предложения 2 задача (6.14) с правой частью $f^\varepsilon \in W_{-\gamma}^0(\Pi^\varepsilon)^*$ имеет единственное решение u^ε , допускающее представление

$$u^\varepsilon = \tilde{u}^\varepsilon + \chi_+(c_+^\varepsilon w_+^{\text{out}} + c_o^\varepsilon w_o^{\text{out}}) + \chi_-(c_-^\varepsilon w_-^{\text{out}} + c_{1-}^\varepsilon w_o^-), \quad (6.18)$$

в котором вновь используются обозначения (2.2) и (2.4), (2.5) из § 2. Кроме того, $\tilde{u}^\varepsilon \in W_\gamma^1(\Pi^\varepsilon)$ и, в частности, справедливо неравенство

$$|c_\pm^\varepsilon| + \varepsilon^{1/4} |c_o^\varepsilon| \leq c \|f^\varepsilon; W_{-\gamma}^0(\Pi^\varepsilon)^*\|, \quad (6.19)$$

а множитель c не зависит от функционала f^ε и от малого параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $w_\pm^{\text{out}} = \mathbf{w}_{0\pm}^{\text{out}}$ и $w_o^- = \mathbf{w}^{\text{de}}$, при переходе от решения (6.13), назначенного предложением 2, 1), к нужному решению (6.18) требуется позаботиться лишь о волне $c_o^\varepsilon w_o^{\text{out}}$. Положим

$$u^\varepsilon = \mathbf{u}^\varepsilon + b_o^\varepsilon \mathbf{U}_1^\varepsilon \quad (6.20)$$

и подберем коэффициент b_o^ε так, чтобы при некотором c_o^ε оказалось верным равенство

$$c_o^\varepsilon w_o^{\text{out}} = \mathbf{c}_{1+}^\varepsilon \mathbf{w}_{1+}^{\text{out}} + b_o^\varepsilon (\mathbf{w}_{1+}^{\text{in}} + \mathbf{S}_{11}^\varepsilon \mathbf{w}_{1+}^{\text{out}}). \quad (6.21)$$

Собирая множители при растущих и затухающих волнах в соответствии с определениями (6.10) и (2.4), выводим из соотношения (6.21) следующую систему уравнений для неизвестных c_o^ε и b_o^ε :

$$\begin{aligned} &|4(\pi^2 - \lambda^\varepsilon)|^{-1/4} c_o^\varepsilon - \frac{1}{2} ((\pi^2 - \lambda^\varepsilon)^{-1/2} + i + \mathbf{S}_{11}^\varepsilon ((\pi^2 - \lambda^\varepsilon)^{-1/2} - i)) b_o^\varepsilon \\ &= \frac{1}{2} ((\pi^2 - \lambda^\varepsilon)^{-1/2} - i) \mathbf{c}_{1+}^\varepsilon, \\ &-i|4(\pi^2 - \lambda^\varepsilon)|^{-1/4} c_o^\varepsilon + \frac{1}{2} ((\pi^2 - \lambda^\varepsilon)^{-1/2} - i + \mathbf{S}_{11}^\varepsilon ((\pi^2 - \lambda^\varepsilon)^{-1/2} + i)) b_o^\varepsilon \\ &= -\frac{1}{2} ((\pi^2 - \lambda^\varepsilon)^{-1/2} + i) \mathbf{c}_{1+}^\varepsilon. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Матрица $\mathbf{M}^\varepsilon$ системы (6.22) невырожденная, а ее определитель

$$\det \mathbf{M}^\varepsilon = \frac{1}{2} (1 - i) |4(\pi^2 - \lambda^\varepsilon)|^{-1/4} ((\pi^2 - \lambda^\varepsilon)^{-1/2} (\mathbf{S}_{11}^\varepsilon + 1) - (\mathbf{S}_{11}^\varepsilon - 1))$$

удовлетворяет неравенствам

$$0 < c \leq \varepsilon^{1/4} \det \mathbf{M}^\varepsilon \leq C.$$

При этом учтено соотношение (6.1) для λ^ε , а также формулы (6.17) для $\mathbf{S}^\varepsilon$, означающие, что

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{11}^\varepsilon - 1 &= -2 + O(\varepsilon^{1/2}), \quad 2 \operatorname{Re}(\mathbf{S}_{11}^\varepsilon + 1) = -|\mathbf{S}_{11}^\varepsilon + 1|^2 - |\mathbf{S}_{\bullet 1}^\varepsilon|^2 = O(\varepsilon) \\ \implies \operatorname{Re}(\varepsilon^{-1/2}(\mathbf{S}_{11}^\varepsilon + 1)) &= O(\varepsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

Итак, система (6.22) разрешима. Оценка

$$\varepsilon^{1/4}|c_\circ^\varepsilon| + \varepsilon^{1/2}|b_\circ^\varepsilon| \leq c|\mathbf{c}_{1+}^\varepsilon| \quad (6.23)$$

ее решения выводится так: сначала по правилу Крамера находим, что

$$|c_\circ^\varepsilon| \leq c|\det \mathbf{M}^\varepsilon|^{-1}(1 + (\pi^2 - \lambda^\varepsilon)^{-1/2})|\mathbf{c}_{1+}^\varepsilon| \leq c\varepsilon^{-1/4}|\mathbf{c}_{1+}^\varepsilon|,$$

а затем, сложив строки системы, выражаем $b_\circ^\varepsilon$ через $c_\circ^\varepsilon$, $\mathbf{c}_{1+}^\varepsilon$ и получаем, что

$$|b_\circ^\varepsilon| \leq c(|\mathbf{c}_{1+}^\varepsilon| + \varepsilon^{-1/4}|c_\circ^\varepsilon|) \leq c\varepsilon^{-1/2}|\mathbf{c}_{1+}^\varepsilon|.$$

Решение (6.20) задачи (6.14) допускает разложение (6.18). Осталось заметить, что оценка (6.19) для коэффициентов $c_\circ^\varepsilon$ и $c_\pm^\varepsilon = \mathbf{c}_{0\pm}^\varepsilon + \mathbf{S}_\pm^\varepsilon b_\circ^\varepsilon$ обеспечена неравенством (6.23), а также вытекающими из него и формул (6.17), (6.15) соотношениями

$$\begin{aligned} |c_\pm^\varepsilon| &\leq c(|\mathbf{c}_{0\pm}^\varepsilon| + |\mathbf{S}_\pm^\varepsilon| |b_\circ^\varepsilon|) \leq c(|\mathbf{c}_{0\pm}^\varepsilon| + \varepsilon^{1/2}|b_\circ^\varepsilon|) \leq c(|\mathbf{c}_{0\pm}^\varepsilon| + |\mathbf{c}_{1+}^\varepsilon|), \\ |\mathbf{c}_{0\pm}^\varepsilon| + |\mathbf{c}_{1+}^\varepsilon| &\leq c\|f^\varepsilon; W_{-\gamma}^0(\Pi^\varepsilon)^*\|. \end{aligned}$$

Приступим непосредственно к обоснованию асимптотики (4.5) элементов расширенной матрицы рассеяния. Сначала из найденных в § 4 асимптотических разложений решения $U_\circ^\varepsilon$, внутреннего (4.2) и внешних (4.3), (4.4), составим глобальное (пригодное во всем волноводе Π^ε) приближение

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0^\varepsilon(x) &= \chi_+(x_1)(w_\circ^{\text{in}}(x) + (S_{\circ\circ}^0 + \varepsilon^{1/2}S_{\circ\circ}'^0)w_\circ^{\text{out}}(x) + \varepsilon^{1/2}S_{+\circ}^0w_+^{\text{out}}(x)) \\ &\quad + \chi_-(x_1)(\varepsilon^{1/2}S_{-\circ}^0w_-^{\text{out}}(x) + (C_\circ^0 + \varepsilon^{1/2}C_\circ'^0)w_\circ^-(x)) \\ &\quad + \varepsilon^{-1/4}\widehat{U}_\circ^0(x) + \varepsilon^{1/4}\widehat{U}_\circ'(x). \end{aligned} \quad (6.24)$$

При этом $\chi_\pm$ – срезающие функции, использованные в формуле (2.3), $w_\pm^{\text{in/out}}$ и $w_\circ^{\text{in/out}}$, $w_\circ^-$ – волны (2.2) и (2.4), (2.5), $S_{\circ\circ}^0$, $C_\circ^0$ и $S_{\pm\circ}^0$ – величины (4.15), (4.9) и (4.18), рассчитанные по данным (5.1) и (1.10), причем вектор $\vec{\tau}$ параметров удовлетворяет соотношению (5.2), а величины $S_{\circ\circ}'^0$ и $C_\circ'^0$ зафиксированы произвольно при соблюдении равенства (4.14). Наконец,

$$\begin{aligned} \widehat{U}_\circ^0(x) &= (4\mu)^{-1/4}(1 + i + S_{\circ\circ}^0(1 - i))\cos(\pi x_2)(1 - \chi_+(x_1))(1 - \chi_-(x_1)), \\ \widehat{U}_\circ'(x) &= U_\circ'(x) - (1 - \chi_+(x_1))(c_+ \exp(i\pi x_1) + (c_+^0 + c_+^1 x_1)\cos(\pi x_2)) \\ &\quad - (1 - \chi_-(x_1))(c_- \exp(-i\pi x_1) + (c_-^0 + c_-^1 x_1)\cos(\pi x_2)), \end{aligned} \quad (6.25)$$

т.е. $\widehat{U}_\circ^0$ и $\widehat{U}_\circ'$ – слагаемые $U_\circ^0$ и $U_\circ'$ анзаца (4.2) с удаленными незатухающими членами их асимптотик при $x_1 \rightarrow \pm\infty$. Таким образом, $\widehat{U}_\circ^0$ – функция с компактным носителем, а $\widehat{U}_\circ'$ экспоненциально затухает на бесконечности. Коэффициенты $c_\pm$ и $c_\pm^0$, $c_\pm^1$ во второй функции (6.25) рассчитаны по формулам (4.12), а сама функция гладко продолжена с полосы $\overline{\Pi}^0$ на ее окрестность,

содержащую область (1.1). Обращаем внимание на то, что в силу разложений (4.3), (4.4) и согласно проведенной процедуре сращивания слагаемые, удаленные в формулах (6.25) из $U_{\circ}^0(x)$ и $U'_{\circ}(x)$, мало отличаются на конечном участке волновода Π^{ε} от множителей $\Sigma_{\pm}(x)$ при $\chi_{\pm}(x_1)$ (линейных комбинаций волн w_{α}^{in} и w_{α}^{out}) в правой части (6.24). Именно это обстоятельство и позволяет рассматривать функцию $\mathcal{U}_{\circ}^{\varepsilon}$ как глобальное приближение к решению $U_{\circ}^{\varepsilon}$ задачи (4.1): невязки, возникающие при коммутировании дифференциальных операторов со срезками, окажутся малыми благодаря специальной конструкции (6.24).

Разность $\mathcal{R}_{\circ}^{\varepsilon} = U_{\circ}^{\varepsilon} - \mathcal{U}_{\circ}^{\varepsilon}$ удовлетворяет задаче (6.14) с параметром $\lambda^{\varepsilon} = \pi^2 - \varepsilon^2\mu$, в которой правая часть имеет вид

$$f^{\varepsilon}(v^{\varepsilon}) = (\mathcal{F}^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})_{\Pi^{\varepsilon}} + (\mathcal{G}_0^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})_{\varpi_0^{\varepsilon}} + (\mathcal{G}_1^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})_{\varpi_1^{\varepsilon}},$$

а функции $\mathcal{F}^{\varepsilon}$ и $\mathcal{G}_0^{\varepsilon}, \mathcal{G}_1^{\varepsilon}$ заданы равенствами

$$\mathcal{F}^{\varepsilon} = \sum_{\pm} (\chi_{\pm}(\Delta + \lambda^{\varepsilon})\Sigma_{\pm} + [\Delta, \chi_{\pm}]\Sigma_{\pm}) + (\Delta + \lambda^{\varepsilon})(\varepsilon^{-1/4}\widehat{U}_{\circ}^0 + \varepsilon^{1/4}\widehat{U}'_{\circ}), \quad (6.26)$$

$$\mathcal{G}_p^{\varepsilon} = -\partial_{n^{\varepsilon}}(\varepsilon^{-1/4}\widehat{U}_{\circ}^0 + \varepsilon^{1/4}\widehat{U}'_{\circ})|_{\varpi_p^{\varepsilon}}, \quad p = 0, 1. \quad (6.27)$$

По определению функции $\Sigma_{\pm}$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца в полуполосе $\Pi_{\pm}^{\varepsilon}$ и условиям Неймана на ее боковых сторонах. Поэтому из правой части (6.26) можно убрать слагаемое $(\Delta + \lambda^{\varepsilon})\Sigma_{\pm} = 0$; кроме того, величины $\Sigma_{\pm}$ отсутствуют в формулах (6.27). Имеем

$$\begin{aligned} & (\Delta + \lambda^{\varepsilon})\varepsilon^{-1/4}\widehat{U}_{\circ}^0(x) \\ &= -\varepsilon^{7/4}\mu\widehat{U}_{\circ}^0(x) - (4\mu\varepsilon)^{-1/4}(1+i+S_{\circ\circ}^0(1-i))\sum_{\pm}[\Delta, \chi_{\pm}]\cos(\pi x_2). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Носитель первого слагаемого в правой части компактный, а значит, оно порождает функционал, $W_{-\gamma}^1(\Pi^{\varepsilon})^*$ -норма которого равна $O(\varepsilon^{7/4})$. Согласно формулам Тейлора (4.3), (4.4) и процедуре сращивания [27], проведенной в § 4, коммутаторы из равенства (6.28) обнаруживаются в коммутаторах $[\Delta, \chi_{\pm}]\Sigma_{\pm}$, т.е. в выражении (6.26) слагаемые порядка $\varepsilon^{-1/4}$ взаимно уничтожаются. Такое же упрощение происходит и для слагаемого $\varepsilon^{1/4}\widehat{U}'_{\circ}$ при анализе коммутаторов, образованных срезками $1 - \chi_+$ и $1 - \chi_-$. Кроме того,

$$\varepsilon^{1/4}(\Delta\widehat{U}'_{\circ}(x) + \lambda^{\varepsilon}\widehat{U}'_{\circ}(x)) = -\mu\varepsilon^{9/4}\widehat{U}'_{\circ}(x) + \begin{cases} 0, & x \in \Pi^0, \\ O(\varepsilon^{1/4}\varepsilon^{1/2}), & x \in \Pi^{\varepsilon} \setminus \overline{\Pi^0}, \end{cases}$$

причем множитель $\varepsilon^{1/2}$ возник из-за гладкого продолжения функции $U'_{\circ}$ на тонкие (с шириной $O(\varepsilon^{1/2})$ или $O(\varepsilon)$) области, образующие множество $\Pi^{\varepsilon} \setminus \overline{\Pi^0}$. Итак,

$$|(\mathcal{F}^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})_{\Pi^{\varepsilon}}| \leq c\varepsilon^{3/4}\|v^{\varepsilon}; W_{-\gamma}^1(\Pi^{\varepsilon})\|.$$

Благодаря формулам (1.4) для производной $\partial_{n^{\varepsilon}}$ и (4.10) для данных задачи (4.5), из которой был определен асимптотический член $U'_{\circ}$, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1^{\varepsilon}(x_1) &= (O(\varepsilon^{-1/4}|1+x_1|^2) + O(\varepsilon^{1/4}|1+x_1|))|_{x_2=-1-\varepsilon^{1/2}h(x_1)} = O(\varepsilon^{3/4}) \\ \Rightarrow |(\mathcal{G}_1^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})_{\varpi_1^{\varepsilon}}| &\leq c\varepsilon^{3/4}\|v^{\varepsilon}; W_{-\gamma}^1(\Pi^{\varepsilon})\|. \end{aligned}$$

Такая же оценка, даже с лучшей мажорантой $c\varepsilon^{5/4}$, верна и для скалярного произведения $(\mathcal{G}_0^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})_{\varpi_0^{\varepsilon}}$. В итоге приходим к неравенству

$$|f^{\varepsilon}(v^{\varepsilon})| \leq c\varepsilon^{3/4}\|v^{\varepsilon}; W_{-\gamma}^1(\Pi^{\varepsilon})\|,$$

означающему, что $\|f^\varepsilon; W_{-\gamma}^1(\Pi^\varepsilon)^*\| \leq c\varepsilon^{3/4}$. Теперь по теореме 9, точнее согласно оценке (6.19), коэффициенты при волнах $w_\pm^{\text{in/out}}$ и $w_\circ^{\text{out}}$ в разложении (6.18) разности $\mathcal{R}_\circ^\varepsilon = U_\circ^\varepsilon - \mathcal{U}_\circ^\varepsilon$ равны соответственно $O(\varepsilon^{3/4})$ и $O(\varepsilon^{1/2})$. В силу определения (6.24) названные коэффициенты совпадают с величинами $\hat{S}_{\pm\circ}(\varepsilon)$ и $\hat{S}_{\circ\circ}(\varepsilon)$, которые в конце § 4 и было обещано изучить. Желанные оценки недостающих величин $\hat{S}_{\pm\pm}(\varepsilon)$ и $\hat{S}_{\pm\mp}(\varepsilon)$ получается при рассмотрении глобальных асимптотических приближений к решениям $U_\pm^\varepsilon$. Они строятся и обрабатываются значительно проще, чем $U_\circ^\varepsilon$, и поэтому здесь не обсуждаются.

ТЕОРЕМА 10. *Остатки в построенных в § 4 асимптотиках элементов расширенной матрицы рассеяния, отвечающей спектральному параметру (6.1), удовлетворяют неравенствам (4.23).*

§ 7. Два замечания

1°. *Об отсутствии собственных чисел.* Если число $\lambda \in (0, \pi^2)$ зафиксировано, т.е. не зависит от параметра ε , то оно не может быть собственным в задаче (1.3). Этот вывод нетрудно сделать опять-таки при помощи асимптотического анализа расширенной матрицы рассеяния. В самом деле, у предельной задачи (3.9) с параметром $\lambda^0 \in (0, \pi^2)$ имеются решения

$$u_0^{\pm}(x) = \exp(\pm ix_1 \sqrt{\lambda^0}), \quad u_1^{\pm}(x) = \cos(\pi x_2) \exp(\pm ix_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^0}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} U_\pm^0(x) &= (2\lambda^0)^{-1/4} \exp(\mp ix_1 \sqrt{\lambda^0}) \implies S_{\pm\pm}^0 = 0, \quad S_{\pm\mp}^0 = 1, \\ U_\circ^0(x) &= 2(4(\pi^2 - \lambda^0))^{-1/4} \cos(\pi x_2) \exp(\pm ix_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^0}) \\ &\implies S_{\pm\circ}^0 = 0, \quad S_{\circ\circ}^0 = 1. \end{aligned}$$

Повторив со значительными упрощениями рассуждения из §§ 4 и 6, получаем, что $\|S(\varepsilon) - S^0; \mathbb{C}^{3 \times 3}\| \leq c\sqrt{\varepsilon}$, а значит, при малом $\varepsilon > 0$ критерий $S_{\circ\circ}(\varepsilon) = -1$ захвата волны (теорема 6 и замечание 2) не может быть выполнен. Вместе с теоремой 5 и замечанием 7 сделанное наблюдение заканчивает проверку теоремы 8 в части единственности.

Если нарушена первая группа условий (1.11) и

$$\mathbf{h} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{или} \quad \int_{-1}^0 \exp(\pm i\pi x_1) h_0(x_1) dx_1 \neq 0,$$

то у задачи (1.3) также нет собственного числа на интервале $(0, \pi^2)$. Действительно, в первом случае (4.10) главный член $S_{\circ\circ}^0$ асимптотики элемента $S_{\circ\circ}(\varepsilon)$ расширенной матрицы рассеяния не равен -1 при малом $\varepsilon > 0$. Во втором отличен от нуля хотя бы один из элементов $S_{\pm\circ}(\varepsilon)$ и равенство $S_{\circ\circ}(\varepsilon) = -1$ опять невозможно. В обоих случаях необходимое и достаточное условие существования захваченной волны не выполнено. Авторы не знают, что происходит в межевой ситуации $\mathbf{h} = (\sqrt{2\pi})^{-1}$.

2° *Другие формы.* Волновод, изображенный на рис. 4 и заданный равенством

$$\Pi^\varepsilon = \{x : x_1 \in \mathbb{R}, -1 + \varepsilon H_-(x_1) - \sqrt{\varepsilon} h_-(x_1) < x_2 < -\varepsilon H_+(x_1) + \sqrt{\varepsilon} h_+(x_1)\}, \quad (7.1)$$

где

$$\begin{aligned} H_{\pm}(x_1) &= h_{\pm}(x_1) = 0 \quad \text{при } x_1 > l, \\ H_{\pm}(x_1) &= H_{0\pm}, \quad h_{\pm}(x_1) = 0 \quad \text{при } x_1 < 0, \\ H_0 &= H_{0+} + H_{0-} > 0, \end{aligned}$$

исследуется по такой же схеме. При этом утверждение теоремы 8 сохраняет силу при соблюдении аналогичных (1.11) требований

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &:= \int_0^l (h_+(x_1) + h_-(x_1)) dx_1 > \frac{H_0}{\sqrt{2\pi}}, \\ \int_0^l \exp(\pm i\pi x_1) (h_+(x_1) - h_-(x_1)) dx_1 &= 0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

и замене в формулах (1.12) и (5.10) главного асимптотического члена выражением $(4\mathbf{h})^{-1}(2\pi^2\mathbf{h}^2 - H_0^2)$.

Рис. 4. Волновод с двусторонними сужениями и возмущениями

Если $H_+ = H_-$ и $h_0 := h_+ = h_-$ в определении (7.1), то волновод Π^ε приобретает ось симметрии $\{x : x_2 = -1/2\}$. В результате благодаря ортогональности в $L_2(-1, 0)$ функций 1 и $\cos(\pi x_2)$ матрица (2.7) оказывается блочно-диагональной, т.е. ее элементы $S_{\pm o}(\varepsilon) = S_{o\pm}(\varepsilon)$ заведомо обращаются в нуль. В результате вместо трех условий (5.3) достаточно удовлетворить в §5 одно условие $\text{Im } S_{oo}(\varepsilon) = 0$, а значит, дополнительные параметры τ_1 и τ_2 в формуле (1.10) не нужны (берем их нулевыми) и собственное число существует при любой функции h_0 , подчиненной первому условию (7.2) (два других выполнены автоматически). Это наблюдение полностью согласуется с результатом, который может быть получен согласно [7] на основе метода [10] постановки искусственного условия Дирихле на линии симметрии и образования положительной точки отсечки $\lambda_{\dagger} = \pi^2$.

Список литературы

- [1] Р. Миттра, С. Ли, *Аналитические методы теории волноводов*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: R. Mittra, S. W. Lee, *Analytical techniques in the theory of guided waves*, Macmillan, New York, 1971.
- [2] N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg, *Linear water waves*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [3] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Appl. Math. Sci., **49**, Springer-Verlag, New York, 1985.

- [4] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во ЛГУ, Л., 1980; англ. пер.: M. S. Birman, M. Z. Solomyak, *Spectral-theory of self-adjoint operators in Hilbert space*, Math. Appl. (Soviet Ser.), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1987.
- [5] В. П. Маслов, “Асимптотика собственных функций уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ к краевыми условиями на эквидистантных кривых и рассеяние электромагнитных волн в волноводе”, *Докл. АН СССР*, **123**:4 (1958), 631–633; англ. пер.: V. P. Maslov, “An asymptotic expression for the eigenfunctions of the equation $\Delta u + k^2 u = 0$ with boundary conditions on equidistant curves and the propagation of electromagnetic waves in a waveguide”, *Soviet Physics. Dokl.*, **3** (1959), 1132–1135.
- [6] P. Duclos, P. Exner, “Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions”, *Rev. Math. Phys.*, **7**:1 (1995), 73–102.
- [7] W. Bulla, F. Gesztesy, W. Renner, B. Simon, “Weakly coupled bound states in quantum waveguides”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**:5 (1997), 1487–1495.
- [8] Р. Р. Гадыльшин, “О локальных возмущениях квантовых волноводов”, *ТМФ*, **145**:3 (2005), 358–371; англ. пер.: R. R. Gadyl’shin, “Local perturbations of quantum waveguides”, *Theoret. and Math. Phys.*, **145**:3 (2005), 1678–1690.
- [9] С. А. Назаров, “Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:5 (2010), 1086–1101; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Variational and asymptotic methods for finding eigenvalues below the continuous spectrum threshold”, *Sib. Math. J.*, **51**:5 (2010), 866–878.
- [10] D. V. Evans, M. Levitin, D. Vasil’ev, “Existence theorems for trapped modes”, *J. Fluid Mech.*, **261** (1994), 21–31.
- [11] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, “Аномалии Вуда и поверхностные волны в задаче рассеяния на периодической границе. I”, *Матем. сб.*, **190**:1 (1999), 109–138; англ. пер.: I. V. Kamotskii, S. A. Nazarov, “Wood’s anomalies and surface waves in the problem of scattering by a periodic boundary. I”, *Sb. Math.*, **190**:1 (1999), 111–141.
- [12] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, “Аномалии Вуда и поверхностные волны в задаче рассеяния на периодической границе. II”, *Матем. сб.*, **190**:2 (1999), 43–70; англ. пер.: I. V. Kamotskii, S. A. Nazarov, “Wood’s anomalies and surface waves in the problem of scattering by a periodic boundary. II”, *Sb. Math.*, **190**:2 (1999), 205–231.
- [13] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, “Самосопряженные эллиптические задачи: операторы рассеяния и поляризации на ребрах границы”, *Алгебра и анализ*, **6**:4 (1994), 157–186; англ. пер.: S. A. Nazarov, B. A. Plamenevskij, “Selfadjoint elliptic problems: The scattering operator and the polarization operator on edges of the boundary”, *St. Petersburg Math. J.*, **6**:4 (1995), 839–863.
- [14] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, “Расширенная матрица рассеяния и экспоненциально затухающие решения эллиптической задачи в цилиндрической области”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 29, Зап. научн. сем. ПОМИ, **264**, ПОМИ, СПб., 2000, 66–82; англ. пер.: I. V. Kamotskii, S. A. Nazarov, “The augmented scattering matrix and exponentially decaying solutions of an elliptic problem in a cylindrical domain”, *J. Math. Sci. (New York)*, **111**:4 (2002), 3657–3666.
- [15] A. Aslanyan, L. Parnowski, D. Vassiliev, “Complex resonances in acoustic waveguides”, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **53**:3 (2000), 429–447.
- [16] C. M. Linton, P. McIver, “Embedded trapped modes in water waves and acoustics”, *Wave motion*, **45**:1–2 (2007), 16–29.
- [17] C. H. Wilcox, *Scattering theory for diffraction gratings*, Appl. Math. Sci., **46**, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [18] S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, de Gruyter Exp. Math., **13**, de Gruyter, Berlin, 1994.

- [19] В. А. Кондратьев, “Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками”, Тр. ММО, **16**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1963, 219–292.
- [20] S. A. Nazarov, “Properties of spectra of boundary value problems in cylindrical and quasicylindrical domains”, *Sobolev spaces in mathematics*, v. II: *Applications in analysis and partial differential equations*, Int. Math. Ser. (N. Y.), **9**, Springer-Verlag, New York, 2009, 261–309.
- [21] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками”, *Math. Nachr.*, **76**:1 (1977), 29–60.
- [22] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе”, *Math. Nachr.*, **77**:1 (1978), 25–82.
- [23] С. А. Назаров, “Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов”, *УМН*, **54**:5 (1999), 77–142; англ. пер.: S. A. Nazarov, “The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and an algebraic description of their attributes”, *Russian Math. Surveys*, **54**:5 (1999), 947–1014.
- [24] С. А. Назаров, А. В. Шанин, “Расчет характеристик захваченных волн в T -образных волноводах”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:1 (2011), 104–119; англ. пер.: S. A. Nazarov, A. V. Shanin, “Calculation of characteristics of trapped modes in T -shaped waveguides”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:1 (2011), 96–110.
- [25] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, “Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **12**:4 (1959), 623–727.
- [26] С. А. Назаров, “Искусственные краевые условия для поиска поверхностных волн в задаче дифракции на периодической границе”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:12 (2006), 2265–2276; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Artificial boundary conditions for finding surface waves in the problem of diffraction by a periodic boundary”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:12 (2006), 2164–2175.
- [27] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989; англ. пер.: А. М. Il'in, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Transl. Math. Monogr., **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [28] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977; англ. пер.: L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [29] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, “Принципы излучения для самосопряженных эллиптических задач”, *Дифференциальные уравнения. Спектральная теория*, Проблемы матем. физики, **13**, Изд-во ЛГУ, Л., 1991, 192–244.

Дж. Кардоне (G. Cardone)

University of Sannio, Department of Engineering, Italy

E-mail: giuseppe.cardone@unisannio.it

Поступила в редакцию

11.10.2010 и 28.04.2011

С. А. Назаров (S. A. Nazarov)

Институт проблем машиноведения РАН,

г. Санкт-Петербург

E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

К. Рюотсалайнен (K. Ruotsalainen)

University of Oulu, Department of Electrical and Information

Engineering, Mathematics Division, Finland

E-mail: keijo.ruotsalainen@ee.oulu.fi