Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Панов, Представления разрешимых алгебр Ли с фильтрациями, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 1, 77–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7799>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 06:38:13

УДК 512.554.3

А. Н. Панов

Представления разрешимых алгебр Ли с фильтрациями

В работе строится теория представлений разрешимых алгебр Ли с фильтрациями. В рамках этой теории дается классификация неприводимых представлений, решаются задачи нахождения спектра некоторых приводимых представлений.

Библиография: 9 названий.

Ключевые слова: фильтрации алгебр Ли, представления алгебр Ли, метод орбит, поляризация Вернь.

§ 1. Введение. Основные определения

Работа посвящена классификации неприводимых представлений алгебр Ли. Полная классификация известна только для алгебр Ли малой размерности (см. [1], [2]). Эта классификация не является конструктивной и не переносится на более сложные алгебры Ли. Более разумным представляется подход, когда классификация неприводимых представлений подменяется классификацией их ядер (примитивных идеалов) в универсальной обертывающей алгебре. Этому направлению были посвящены многочисленные исследования, начиная с [3].

Кроме того, можно ограничиться рассмотрением некоторой категории представлений и неприводимыми представлениями в этой категории. В качестве примера можно привести категорию представлений со старшим весом для полупростых алгебр Ли. Неприводимыми представлениями в этой категории являются неприводимые факторы модулей Верма (см. [3], [4]).

В случае разрешимых алгебр Ли хорошо известна серия неприводимых представлений $M_s(f)$, индуцированных с поляризаций Вернь (см. [5]). В настоящей работе рассматривается категория представлений алгебр Ли с фиксированными фильтрациями. Доказывается, что каждое неприводимое представление в этой категории имеет вид $M_s(f)$ для некоторого $f \in \mathfrak{g}^*$ (теорема 1), т.е. отображение $M_s: f \mapsto M_s(f)$ из $\mathfrak{g}^*$ в $\text{Irr}(\mathfrak{g}, s)$ сюръективно. Отображение M_s продолжается до биекции фактормножества $\mathfrak{g}^*/\mathfrak{R}$ на $\text{Irr}(\mathfrak{g}, s)$ (теорема 2 и определение). Заметим, что два представления вида $M_s(f)$ эквивалентны в категории представлений алгебр Ли с фильтрациями (т.е. $\mathfrak{R}$ -эквивалентны) тогда и только тогда, когда они эквивалентны в обычном смысле (теорема 2). Классы $\mathfrak{R}$ -эквивалентности описаны в теореме 3.

Используя классы $\mathfrak{R}$ -эквивалентности на $\mathfrak{g}^*$, мы находим спектр представления, индуцированного с неприводимого представления подалгебры (теорема 4), спектр ограничения неприводимого представления на подалгебру (теорема 5)

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00058).

и спектр тензорного произведения двух неприводимых представлений (теорема 6).

В §5 выясняется связь отображения $M_s: \mathfrak{g}/\mathfrak{A} \rightarrow \text{Irr}(\mathfrak{g}, s)$ с отображением Диксмье, приведены примеры. Построенная теория представляет собой аналог метода орбит Кириллова (см. [3], [6], [7]) для категории алгебр Ли с фильтрацией.

Настоящая работа была депонирована в ВИНТИ в 1979 г. (см. [8]).

Перейдем к формулировке основных определений этой работы.

1.1. Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль и $\mathfrak{g}$ – разрешимая алгебра Ли над K . *Фильтрацией* $s_{\mathfrak{g}}$ на $\mathfrak{g}$ будем называть цепочку идеалов

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_{k-1} \supset \mathfrak{g}_k \quad (1.1)$$

такую, что $\mathfrak{g}_k = \{0\}$ и коразмерность $\mathfrak{g}_i$ в $\mathfrak{g}_{i-1}$ меньше или равна 1. *Алгеброй Ли с фильтрацией* будем называть алгебру Ли $\mathfrak{g}$ вместе с фиксированной на ней фильтрацией $s_{\mathfrak{g}}$. Для упрощения записи будем обозначать фильтрацию через s , а алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с фильтрацией s – через $(\mathfrak{g}, s)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. 1) Фильтрация на $\mathfrak{g}$ всегда существует, поскольку любое конечномерное (в частности, присоединенное) представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ приводится к треугольному виду (см. [3; п. 1.3.12]).

2) В определении фильтрации мы допускаем, что каждый идеал может встречаться несколько раз. Делается это для того, чтобы ограничение фильтрации на подалгебру снова было фильтрацией (см. п. 1.6). А это дает возможность рассматривать ограничения представлений алгебр Ли с фильтрациями на подалгебру.

Две фильтрации на алгебре Ли считаем равными, если они состоят из одних и тех же идеалов, но отличаются, быть может, кратностью их вхождения в фильтрацию.

Пусть $(\mathfrak{g}', s')$ и $(\mathfrak{g}'', s'')$ – две алгебры Ли с фильтрациями. Гомоморфизм $\varphi: \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}''$, для которого $\varphi(\mathfrak{g}'_i) \subset \mathfrak{g}''_i$, назовем *гомоморфизмом алгебр Ли с фильтрациями* $\varphi: (\mathfrak{g}', s') \rightarrow (\mathfrak{g}'', s'')$.

1.2. Цепочка идеалов $\mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_k$ порождает цепочку подалгебр $U(\mathfrak{g}_0) \supset U(\mathfrak{g}_1) \supset \cdots \supset U(\mathfrak{g}_k)$ в универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$. Здесь положим $U(\mathfrak{g}_k) = K$, поскольку $\mathfrak{g}_k = \{0\}$. Универсальную обертывающую алгебру $U(\mathfrak{g})$ вместе с выбранной фильтрацией будем обозначать $U(\mathfrak{g}, s)$.

1.3. Пусть V – линейное пространство над полем K (вообще говоря, бесконечномерное). *Фильтрацией* s_V на V будем называть цепочку вложенных друг в друга подпространств

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_k.$$

Для упрощения записи будем обозначать фильтрацию через s , а линейное пространство V с фильтрацией s – через (V, s) .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Здесь не делается никаких ограничений на коразмерность V_i в V_{i-1} и размерность V_k .

Пусть для любого i задано представление ρ_i алгебры Ли $\mathfrak{g}_i$ в линейном пространстве V_i , причем ограничение ρ_i на $\mathfrak{g}_{i+1}$ оставляет инвариантным V_{i+1} и совпадает на нем с ρ_{i+1} . Тогда мы будем говорить, что *задано представление* (ρ, s) алгебры Ли с фильтрацией $(\mathfrak{g}, s)$ или что (V, s) является $U(\mathfrak{g}, s)$ -модулем.

Два представления (ρ', s) и (ρ'', s) алгебры Ли $(\mathfrak{g}, s)$ соответственно в (V, s) и (W, s) назовем *эквивалентными*, если существует изоморфизм $C: V \rightarrow W$ такой, что $C(V_i) = W_i$ и $C\rho'(x) = \rho''(x)C$ для любого $x \in \mathfrak{g}$.

1.4. Представление (ρ, s) назовем *неприводимым*, если каждое ρ_i – неприводимое представление $\mathfrak{g}_i$ в V_i . Множество классов неприводимых представлений $(\mathfrak{g}, s)$ обозначим $\text{Irr}(\mathfrak{g}, s)$.

1.5. Если (V, s) – линейное пространство с фильтрацией и W – подпространство в V , то фильтрация V индуцирует фильтрацию на W :

$$W = W_0 \supset W_1 \supset \cdots \supset W_k,$$

где $W_i = V_i \cap W$. Факторпространство V/W также снабжено естественной фильтрацией

$$(V_0 + W)/W \supset (V_1 + W)/W \supset \cdots \supset (V_k + W)/W,$$

которая совпадает с

$$V_0/W_0 \supset V_1/W_1 \supset \cdots \supset V_k/W_k.$$

Если (V, s) – модуль над $U(\mathfrak{g}, s)$, а W есть $U(\mathfrak{g})$ -подмодуль в V , то (W, s) будем называть $U(\mathfrak{g}, s)$ -подмодулем в (V, s) .

Модуль T_s над $U(\mathfrak{g}, s)$ назовем *подфактормодулем* (V, s) , если существуют два $U(\mathfrak{g}, s)$ -подмодуля (W, s) и (W', s) такие, что $W \supset W'$ и фактор (W, s) по (W', s) изоморфен T_s . Множество неприводимых подфактормодулей для (V, s) назовем *спектром* (V, s) и обозначим $\text{Spec}(V, s)$.

1.6. Пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$. Тогда фильтрация на $\mathfrak{g}$ индуцирует фильтрацию

$$\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{h} \supset \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h} \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{h}$$

на $\mathfrak{h}$. Ее также будем обозначать через s .

Если (ρ, s) – представление $(\mathfrak{g}, s)$, то ограничение представления ρ_i на $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{h}$ в V_i задает представление $(\mathfrak{h}, s)$ в (V, s) .

1.7. Пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра $\mathfrak{g}$ и (W, s) – произвольный $U(\mathfrak{h}, s)$ -модуль. Напомним, что индуцированный модуль $\text{ind}(W, \mathfrak{g})$ (см. [3; п. 5.1]) определяется как линейное пространство

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h})} W$$

с действием $U(\mathfrak{g})$ левым умножением. В $\text{ind}(W, \mathfrak{g})$ можно выбрать цепочку линейных подпространств

$$\text{ind}(W_0, \mathfrak{g}) \supset \text{ind}(W_1, \mathfrak{g}_1) \supset \cdots \supset \text{ind}(W_k, \mathfrak{g}_k).$$

Так как каждое $\text{ind}(W_i, \mathfrak{g}_i)$ является $U(\mathfrak{g}_i)$ -модулем, то $\text{ind}(W, \mathfrak{g}, s)$ является $U(\mathfrak{g}, s)$ -модулем.

1.8. Определим тензорное произведение представлений алгебр Ли с фильтрациями. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли с фильтрацией s , равной $\mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_k$. Прямую сумму двух экземпляров алгебры Ли $\mathfrak{g}$ будем обозначать $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ (вместо обычного обозначения $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$).

Алгебра Ли $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ имеет фильтрацию

$$\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_k \times \mathfrak{g}_k,$$

которую обозначим $s \times s$.

Если V, W – модули над $U(\mathfrak{g})$, то через $V \times W$ обозначим линейное пространство $V \otimes W$, рассматриваемое как $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$ -модуль.

Если (V, s) и (W, s) – модули над $U(\mathfrak{g}, s)$, то $V \times W$ является модулем над $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, s \times s)$ с фильтрацией

$$V_0 \times W_0 \supset V_0 \times W_1 \supset V_1 \times W_1 \supset \dots \supset V_k \times W_k.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ вкладывается в $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ в виде диагонали. При этом фильтрация $s \times s$ индуцирует на $\mathfrak{g}$ фильтрацию $\mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_k$, которая согласно определению равенства фильтраций совпадает с s . Ограничение представления $V \times W$ на $(\mathfrak{g}, s)$ превращает $V \times W$ в $U(\mathfrak{g}, s)$ -модуль, который обозначаем $(V, s) \otimes (W, s)$.

1.9. Пусть $\mathfrak{g}$ – произвольная алгебра Ли, $\mathfrak{g}^*$ – сопряженное пространство к $\mathfrak{g}$ и $f \in \mathfrak{g}^*$. Подалгебру $\mathfrak{p}$ называют *поляризацией* f , если $\mathfrak{p}$ является максимальным изотропным подпространством для косимметрической формы $f([x, y])$, т.е. $f([\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]) = 0$ и $\dim \mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^f)$, где $\mathfrak{g}^f$ – стабилизатор f в $\mathfrak{g}$. Отметим, что ограничение f на свою поляризацию является одномерным представлением (характером) поляризации.

Пусть $(\mathfrak{g}, s)$ – алгебра Ли с фильтрацией. Для любого элемента $f \in \mathfrak{g}^*$ можно построить поляризацию (см. [5], [3; п. 1.12.10]), которая называется *поляризацией Вернь*, по следующей формуле:

$$\mathfrak{p}\mathfrak{v}(f) = \sum_{i=0}^k \mathfrak{g}_i^{f_i},$$

где f_i – ограничение f на $\mathfrak{g}_i^*$, а $\mathfrak{g}_i^{f_i}$ – стабилизатор f_i в $\mathfrak{g}_i$.

Обозначим через $M(f)$ модуль над $U(\mathfrak{g})$, индуцированный с ограничения f на $\mathfrak{p}\mathfrak{v}(f)$. Модуль $M(f)$ неприводим (см. [3; п. 6.1.1]).

Пересечение $\mathfrak{p}\mathfrak{v}(f) \cap \mathfrak{g}_i$ совпадает с поляризацией Вернь $\mathfrak{p}\mathfrak{v}_i(f_i)$ для f_i в $\mathfrak{g}_i$ (см. [3; п. 1.12.10]). Поэтому

$$M(f) = M_0(f_0) \supset M_1(f_1) \supset \dots \supset M_k(f_k), \quad (1.2)$$

где $M_i(f_i)$ – индуцированный $U(\mathfrak{g}_i)$ -модуль с ограничения f_i на $\mathfrak{p}\mathfrak{v}_i(f_i)$. Заметим, что поскольку $\mathfrak{g}_k = \{0\}$, то $U(\mathfrak{g}_k) = K$ и $M_k(f_k) = Kl$, где $l = 1 \otimes 1 \in M(f)$.

Модуль $M(f)$ вместе с фиксированной фильтрацией (1.2) обозначим через $M_s(f)$. Отметим, что $M_s(f)$ – неприводимый $U(\mathfrak{g}, s)$ -модуль.

§ 2. Неприводимые представления алгебры Ли $(\mathfrak{g}, s)$

Основным результатом этого параграфа является теорема 1. Для доказательства нам понадобятся некоторые леммы.

Пусть $\mathfrak{g}_1$ – идеал коразмерности 1 в произвольной алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Для произвольного $f_1 \in \mathfrak{g}_1^*$ введем обозначение

$$\mathfrak{g}^{f_1} = \{x \in \mathfrak{g} \mid f_1([x, \mathfrak{g}_1]) = 0\}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $f_1 \in \mathfrak{g}_1^*$ и $\mathfrak{g}^{f_1} + \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$. Выберем $t \in \mathfrak{g}^{f_1}$ и $t \notin \mathfrak{g}_1$. Пусть $\mathfrak{p}_1$ – поляризация для f_1 в $\mathfrak{g}_1$, инвариантная относительно ad_t . Предположим, что модуль M_1 , равный $\text{ind}(f|_{\mathfrak{p}_1}, \mathfrak{g}_1)$, неприводим. Тогда любой $U(\mathfrak{g})$ -подмодуль в $\text{ind}(M_1, \mathfrak{g})$ имеет вид $U(\mathfrak{g})P(t)l$, где $P(t)$ – некоторый полином по t и $l = 1 \otimes 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В $U(\mathfrak{g})$ -модуле $\text{ind}(M_1, \mathfrak{g})$ существует естественная фильтрация $U(\mathfrak{g}_1)$ -подмодулей

$$\{0\} = M_1^{(-\infty)} \subset M_1^{(0)} \subset M_1^{(1)} \subset \dots \subset M_1^{(n)} \subset \dots, \quad (2.1)$$

где $M_1^{(n)} = \bigoplus_{i \leq n} t^i M_1$. Для любого ненулевого a из $\text{ind}(M, \mathfrak{g})$ через $\deg(a)$ обозначим наименьший номер n такой, что $a \in M_1^{(n)}$. Если $a = 0$, то положим $\deg(a) = -\infty$. Будем называть $\deg(a)$ степенью a .

1. Пусть W – ненулевой подмодуль в $\text{ind}(M_1, \mathfrak{g})$ и a – элемент наименьшей степени в W . Докажем, что $W = U(\mathfrak{g})a$.

Пусть $b \in W$. Используя индукцию по $\deg(b)$, покажем, что $b \in U(\mathfrak{g})a$. Случай, когда $\deg(b) = -\infty$ (т.е. $b = 0$), тривиален. Предположим, что всякий элемент из W степени меньше m принадлежит $U(\mathfrak{g})a$. Докажем это для элементов степени m . По условию $m \geq n$.

Пусть $b = t^m b_0 + \dots + b_m$, $a = t^n a_0 + \dots + a_n$, где $a_i, b_j \in M_1$ и $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Поскольку M_1 – неприводимый $U(\mathfrak{g}_1)$ -модуль, то существует $u \in U(\mathfrak{g}_1)$ такой, что $b_0 = u a_0$. Тогда элемент $c = t^{m-n} u a - b$ имеет степень меньше m и принадлежит W . По предположению индукции $c \in U(\mathfrak{g})a$. Отсюда $b \in U(\mathfrak{g})a$, что доказывает равенство $W = U(\mathfrak{g})a$.

2. Элемент a из п. 1 можно записать в виде

$$a = (t^n v_0 + t^{n-1} v_1 + \dots + v_n)l,$$

где $v_i \in U(\mathfrak{g}_1)$. Поскольку M_1 – неприводимый $U(\mathfrak{g}_1)$ -модуль, то существует $u_0 \in U(\mathfrak{g}_1)$ такой, что $u_0 v_0 l = l$. Элемент a' , равный $u_0 a$, принадлежит W , порождает W как $U(\mathfrak{g}_1)$ -модуль (поскольку любой элемент степени n из W порождает W) и имеет вид

$$a' = (t^n + t^{n-1} w_1 + \dots + w_n)l,$$

где $w_i \in U(\mathfrak{g}_1)$.

Так как поляризация $\mathfrak{p}_1$ инвариантна относительно ad_t и $f_1([t, \mathfrak{p}_1]) = 0$, то

$$(y - f_1(y))t^n l = (t - \text{ad}_t)^n (y - f_1(y))l = 0$$

для любого $y \in \mathfrak{p}_1$. Поэтому

$$(y - f_1(y))a' = (y - f_1(y))(t^n + t^{n-1}w_1 + \dots + w_n)l = t^{n-1}(y - f_1(y))w_1l + a',$$

где $\deg a'_1 < n - 1$. Так как степень элемента $(y - f_1(y))a'$ меньше n , то $(y - f_1(y))a' = 0$ и, следовательно, $(y - f_1(y))w_1l = 0$ для любого $y \in \mathfrak{p}_1$. Существует единственный эндоморфизм φ пространства M_1 , перестановочный с представлением $\mathfrak{g}_1$ в M_1 , для которого $\varphi(l) = w_1l$. Так как M_1 неприводим, то φ скалярен (см. [3; п. 2.6.5]). Поэтому $w_1 = \alpha_1 \in K$ и $a' = (t^n + t^{n-1}\alpha_1 + t^{n-2}w_2 + \dots + w_n)l$. Повторяя те же рассуждения, можно последовательно показать, что $w_2, \dots, w_n$ принадлежат K , т.е. $W = U(\mathfrak{g})P(t)l$ для некоторого полинома $P(t)$ над полем K .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, f_1$ те же, что в лемме 1. Тогда любой максимальный подмодуль в $\text{ind}(M_1, \mathfrak{g})$ имеет вид $U(\mathfrak{g})(t - \alpha)$ для некоторого $\alpha \in K$.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, f_1$ те же, что в лемме 1. Обозначим через π_1 проекцию ограничения $\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}_1^*$. Пусть $\mathfrak{p}_1$ – поляризация для f_1 в $\mathfrak{g}_1$. Предположим, что $\mathfrak{g}^{f_1} + \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$. Тогда:

- 1) $\mathfrak{g}^f + \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$ для любого $f \in \pi_1^{-1}(f_1)$;
- 2) если $\mathfrak{p}$ – поляризация для некоторого $f \in \pi_1^{-1}(f_1)$ и $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{p}_1$, то $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}^{f_1} + \mathfrak{p}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Достаточно доказать, что если $x \in \mathfrak{g}^{f_1}$ и $x \notin \mathfrak{g}_1$, то $x \in \mathfrak{g}^f$. Действительно,

$$f([x, \mathfrak{g}]) = f([x, Kx + \mathfrak{g}_1]) = f([x, \mathfrak{g}_1]) = f_1([x, \mathfrak{g}_1]) = 0.$$

2) Любая поляризация содержит стабилизатор $\mathfrak{g}^f$. Поэтому $\mathfrak{p} = Kx \oplus \mathfrak{p}_1$, что доказывает требуемое.

ТЕОРЕМА 1. Любой неприводимый $U(\mathfrak{g}, s)$ -модуль имеет вид $M_s(f)$ для некоторого $f \in \mathfrak{g}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже показано в п. 1.9, $M_s(f)$ – неприводимый модуль над $U(\mathfrak{g}, s)$. Доказательство теоремы проведем по индукции относительно длины фильтрации k . Для $k = 0$ утверждение очевидно. Для завершения доказательства достаточно показать справедливость следующего утверждения.

Пусть $\mathfrak{g}_1$ – первый идеал из фильтрации (1.1), $f_1 \in \mathfrak{g}_1^*$ и M_1 – неприводимый $U(\mathfrak{g}_1)$ -модуль, индуцированный с характера $f_1|_{\mathfrak{pv}_1(f_1)}$ поляризации Вернь. Пусть M – неприводимый $U(\mathfrak{g})$ -модуль, содержащий M_1 как $U(\mathfrak{g}_1)$ -подмодуль. Тогда $M = M(f)$ для некоторого $f \in \pi^{-1}(f_1)$.

Вложение M_1 в M продолжается до $U(\mathfrak{g})$ -гомоморфизма $\Psi: \text{ind}(M_1, \mathfrak{g}) \rightarrow M$. Поскольку модуль M неприводим, то $\text{Im}(\Psi) = M$.

Рассмотрим два случая: (а) $\mathfrak{g}^{f_1} \subset \mathfrak{g}_1$; (б) $\mathfrak{g}^{f_1} + \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$.

(а) $\mathfrak{g}^{f_1} \subset \mathfrak{g}_1$. Так как $\mathfrak{g}^f \subset \mathfrak{g}^{f_1}$, то $\mathfrak{pv}(f) \subset \mathfrak{g}_1$ для любого $f \in \pi^{-1}(f_1)$. Поляризация Вернь $\mathfrak{pv}(f)$ совпадает с поляризацией Вернь для f_1 в $\mathfrak{g}_1$. Следовательно, $M(f) = \text{ind}(M_1, \mathfrak{g})$ и $\Psi: M(f) \rightarrow M$. Оба модуля $M(f)$ и M неприводимы; из леммы Шура получаем, что Ψ – изоморфизм $M(f)$ на M .

(b) $\mathfrak{g}^{f_1} + \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$. Поляризация $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}\mathfrak{v}_1(f_1)$ удовлетворяет условиям леммы 1 (см. [3; пп. 1.12.10, 6.1.1]). Ядро гомоморфизма Ψ является максимальным подмодулем в $\text{ind}(M_1, \mathfrak{g})$. Из следствия 1 получаем, что ядро Ψ совпадает с $U(\mathfrak{g})(t - \alpha)l$ для некоторого $\alpha \in K$. Пусть f – элемент $\mathfrak{g}^*$ такой, что $f(t) = \alpha$ и $\pi_1(f) = f_1$. Из леммы 2 получаем $t \in \mathfrak{g}^f$ и, следовательно, $\mathfrak{p}\mathfrak{v}(f) = Kt + \mathfrak{p}\mathfrak{v}_1(f_1)$. Модуль $M(f)$ совпадает с фактором $\text{ind}(M_1, \mathfrak{g})$ по $\text{Ker}(\Psi)$ и поэтому Ψ изоморфно отображает $M(f)$ на M .

§ 3. Отображение M_s

В этом параграфе будет выяснено, когда два модуля $M_s(f')$ и $M_s(f'')$ эквивалентны.

ЛЕММА 3. *В $M(f)$ существует единственный (с точностью до константы) ненулевой элемент l такой, что*

$$(x - f(x))l = 0. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Такой элемент существует: этому свойству удовлетворяет элемент $l = 1 \otimes 1$. С другой стороны, если $\tilde{l}$ удовлетворяет (3.1), то существует перестановочный с представлением эндоморфизм φ такой, что $\varphi(l) = \tilde{l}$. Так как $M(f)$ – неприводимый $U(\mathfrak{g})$ -модуль, то φ скалярен (см. [3; п. 2.6.5]).

ЛЕММА 4. *Если l – элемент, удовлетворяющий (3.1), то из того, что $(y - \lambda)l = 0$, где $y \in \mathfrak{g}$ и $\lambda \in K$, вытекает $y \in \mathfrak{p}\mathfrak{v}(f)$ и $\lambda = f(y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта (см. [9; п. 2.7]) вытекает, что для любого базиса $x_1, \dots, x_n$ в $\mathfrak{g}$ система

$$\{x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+\}$$

– базис $U(\mathfrak{g})$. Пусть $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ – базис в $\mathfrak{g}$ такой, что $x_{m+1}, \dots, x_n$ – базис $\mathfrak{p}\mathfrak{v}(f)$. Тогда

$$\{x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m} l \mid k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}_+\}$$

– базис $M_s(f)$.

ЛЕММА 5. *Пусть $f \in \mathfrak{g}^*$ и f_1 – ограничение f на идеал $\mathfrak{g}_1$ коразмерности 1 из (1.1). Тогда:*

- (a) *если $\mathfrak{g}^f + \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$, то $M(f)$ изоморфен $M_1(f_1)$ как $U(\mathfrak{g}_1)$ -модуль;*
- (b) *если $\mathfrak{g}^f \subset \mathfrak{g}_1$, то $M(f)$ допускает бесконечную фильтрацию, каждый фактор которой изоморфен $M_1(f_1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (a) очевидно. Пусть имеет место предположение утверждения (b). Выберем $t \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_1$. Как и в доказательстве леммы 1, рассмотрим фильтрацию (2.1), в которой $M_1 = M_1(f_1)$. Рассмотрим отображение $\varphi: M_1 \rightarrow M_1^{(n)}$, для которого $\varphi(v) = t^n v$, $v \in M_1$. Для любого $u_1 \in U(\mathfrak{g}_1)$ выполняется

$$u_1 \varphi(v) = u_1 t^n v = t^n u_1 v \mod M_1^{(n-1)}.$$

Отображение φ является гомоморфизмом $U(\mathfrak{g}_1)$ -модулей и продолжается до изоморфизма M_1 на фактор $M_1^{(n)}$ по $M_1^{(n-1)}$, что доказывает утверждение пункта (b).

ТЕОРЕМА 2. *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) $M_s(f')$ и $M_s(f'')$ эквивалентны как $U(\mathfrak{g})$ -модули;
- 2) $M_s(f')$ и $M_s(f'')$ эквивалентны как $U(\mathfrak{g}, s)$ -модули;
- 3) поляризации Вернь для f' и f'' совпадают и f' совпадает с f'' при ограничении на общую поляризацию Вернь.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1)$, докажем $1) \Rightarrow 3)$. Доказывать будем индукцией по k . Для $k = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для длины фильтрации меньше k , и докажем его для k . Обозначим через s_1 ограничение фильтрации s на $\mathfrak{g}_1$.

Пусть $M_s(f')$ и $M_s(f'')$ эквивалентны как $U(\mathfrak{g})$ -модули. Тогда они эквивалентны как $U(\mathfrak{g}_1)$ -модули. Из леммы 5 вытекает, что f' и f'' одновременно удовлетворяют либо п. (a), либо п. (b) этой леммы, и $U(\mathfrak{g}_1)$ -модули $M_{s_1}(f'_1)$ и $M_{s_1}(f''_1)$ (где f'_1 и f''_1 – ограничения f' и f'' на $\mathfrak{g}_1$) изоморфны. Используем предположение индукции:

- (i) $\mathfrak{p}v_1(f'_1) = \mathfrak{p}v_1(f''_1)$ (обозначим $\mathfrak{p}_1$);
- (ii) $f'|_{\mathfrak{p}_1} = f''|_{\mathfrak{p}_1}$.

Если f' и f'' удовлетворяют п. (b) леммы 5, то $\mathfrak{p}_1$ – их общая поляризация Вернь, и (ii) доказывает п. 3).

Если f' и f'' удовлетворяют п. (a) леммы 5, то изоморфизм $\varphi: M_s(f') \rightarrow M_s(f'')$ как $U(\mathfrak{g})$ -модулей является изоморфизмом $M_{s_1}(f'_1) \rightarrow M_{s_1}(f''_1)$ как $U(\mathfrak{g}_1)$ -модулей. Из (i) и (ii) вытекает, что

$$M_{s_1}(f'_1) = M_{s_1}(f''_1) = \text{ind}(f'_1|_{\mathfrak{p}_1}, \mathfrak{g}_1).$$

Так как φ – автоморфизм неприводимого модуля, то φ скалярен. Поэтому $M_s(f')$ совпадает с $M_s(f'')$ как $U(\mathfrak{g})$ -модуль.

Пусть l – элемент этого модуля, удовлетворяющий (3.1). В силу $M_s(f') = M_s(f'')$ условие (3.1) выполняется как для $f = f'$ и $x \in \mathfrak{p}v(f')$, так и для $f = f''$ и $x \in \mathfrak{p}v(f'')$. Из леммы 4 вытекает, что $\mathfrak{p}v(f') = \mathfrak{p}v(f'')$ и f' совпадает с f'' при ограничении на общую поляризацию Вернь.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассмотрим отношение эквивалентности $\mathfrak{R}$ на $\mathfrak{g}^*$, для которого $f' \mathfrak{R} f''$, если f' и f'' имеют общую поляризацию Вернь и совпадают при ограничении на нее. Класс эквивалентности произвольного элемента $f \in \mathfrak{g}^*$ будем обозначать через $\mathfrak{R}(f)$.

По теореме 2 соответствие $M_s: f \mapsto M_s(f)$ продолжается до биекции $\mathfrak{g}^*/\mathfrak{R}$ на $\text{Irr}(\mathfrak{g}, s)$. Следующая наша цель – дать явное описание классов эквивалентности для $\mathfrak{R}$.

ЛЕММА 6. *Пусть $\mathfrak{g}_1$ – идеал коразмерности 1 в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{p}$ (соответственно $\mathfrak{p}'$) – некоторая поляризация для $f \in \mathfrak{g}^*$ (соответственно для $g \in \mathfrak{g}^*$) такая, что $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{p}_1$, где $\mathfrak{p}_1$ – общая поляризация для проекций f_1 и g_1 элементов f и g на $\mathfrak{g}_1$. Пусть $f|_{\mathfrak{p}_1} = g|_{\mathfrak{p}_1}$. Тогда $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поляризации $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}'$ можно записать в виде $\mathfrak{p} = Kx + \mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}' = Ky + \mathfrak{p}_1$ для некоторых $x, y \in \mathfrak{g}$. Так как $f|_{\mathfrak{p}_1} = g|_{\mathfrak{p}_1}$, то

$$f([y, \mathfrak{p}_1]) = g([y, \mathfrak{p}_1]) = 0.$$

Следовательно, $\mathfrak{p}'$ – изотропное подпространство не только для g , но и для f . Аналогично, $\mathfrak{p}$ – изотропное подпространство для g . Отсюда, в частности, вытекает, что не может быть как случая $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}'$, так и случая $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}$.

Поэтому либо $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_1$ (откуда сразу вытекает утверждение леммы), либо $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}_1$. Во втором случае $x, y \notin \mathfrak{g}_1$ и можно выбрать x, y так, что $x - y \in \mathfrak{g}_1$. Так как

$$f_1([x - y, \mathfrak{p}_1]) = f([x - y, \mathfrak{p}_1]) = f([x, \mathfrak{p}_1]) - f([y, \mathfrak{p}_1]) = 0,$$

то $K(x - y) + \mathfrak{p}_1$ – изотропное подпространство для f_1 в $\mathfrak{g}_1$. Поскольку $\mathfrak{p}_1$ – поляризация для f_1 , то $x - y \in \mathfrak{p}_1$ и, следовательно, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$.

ТЕОРЕМА 3. Класс эквивалентности $\mathfrak{R}(f)$ элемента $f \in \mathfrak{g}$ совпадает с $\pi^{-1}\pi(f)$, где π – проекция $\mathfrak{g}^*$ на $\mathfrak{p}\mathfrak{v}(f)^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2 вытекает, что $\mathfrak{R}(f) \subset \pi^{-1}\pi(f)$. Осталось показать, что $\mathfrak{p}\mathfrak{v}(g) = \mathfrak{p}\mathfrak{v}(f)$ для любого $g \in \pi^{-1}\pi(f)$. Применяя индукцию по длине фильтрации, получаем $\mathfrak{p}\mathfrak{v}_1(f_1) = \mathfrak{p}\mathfrak{v}_1(g_1)$. Из леммы 6 получаем, что $\mathfrak{p}\mathfrak{v}(f) = \mathfrak{p}\mathfrak{v}(g)$.

§ 4. Спектр некоторых $(\mathfrak{g}, s)$ -модулей

Пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Фильтрация s на $\mathfrak{g}$ индуцирует фильтрацию на $\mathfrak{h}$ и превращает ее в алгебру Ли $(\mathfrak{h}, s)$ с фильтрацией. Пусть h – элемент $\mathfrak{h}^*$. Через $\mathfrak{q}\mathfrak{v}(h)$ обозначим поляризацию Вернь для h в $(\mathfrak{h}, s)$ и через $N_s(h)$ – представление $\text{ind}(h|_{\mathfrak{q}\mathfrak{v}(h)}, \mathfrak{h})$. Поскольку $N_s(h)$ – представление алгебры Ли $(\mathfrak{h}, s)$, то $\text{ind}(N_s, \mathfrak{g})$ – представление $(\mathfrak{g}, s)$ (см. п. 1.7). Цель этого параграфа – дать описание спектров индуцированного представления $\text{ind}(N_s, \mathfrak{g})$, ограничения $M_s(f)|_{(\mathfrak{h}, s)}$ и представления $M_s(f') \otimes M_s(f'')$.

ЛЕММА 7. Пусть Z_s – подмодуль в $\text{ind}(N_s(h), \mathfrak{g})$ и фактормодуль по Z_s изоморфен $M_s(f)$ как $U(\mathfrak{g}, s)$ -модуль. Тогда:

- 1) $\mathfrak{p}\mathfrak{v}(f) \supset \mathfrak{q}\mathfrak{v}(h)$;
- 2) $f|_{\mathfrak{q}\mathfrak{v}(h)} = h|_{\mathfrak{q}\mathfrak{v}(h)}$;
- 3) $Z_s = \sum_{x \in \mathfrak{p}\mathfrak{v}(f)} U(\mathfrak{g})(x - f(x))l_h$, где l_h – элемент $1 \otimes 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию относительно длины фильтрации k . Для $k = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для длины фильтрации меньше k , и докажем его для длины k . Пусть $\mathfrak{g}_1$ – идеал коразмерности 1 в фильтрации (1.1). Введем следующие обозначения: $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$; h_1 (соответственно f_1) – проекция h (соответственно f) на $\mathfrak{h}_1$ (соответственно на $\mathfrak{g}_1$); $V_s = \text{ind}(N_s(h), \mathfrak{g})$; s_1 – ограничение фильтрации s на $\mathfrak{g}_1$; $V_{s_1} = \text{ind}(N_{s_1}(h_1), \mathfrak{g}_1)$; $Z_{s_1} = Z_s \cap V_{s_1}$.

По условию $V_s/Z_s \cong M_s(f)$. Отсюда $V_{s_1}/Z_{s_1} \cong M_{s_1}(f_1)$. Согласно предположению индукции:

$$1') \mathfrak{pv}(f_1) \supset \mathfrak{qv}(h_1);$$

$$2') f_1|_{\mathfrak{qv}(h_1)} = h_1|_{\mathfrak{qv}(h_1)};$$

$$3') Z_{s_1} = \sum_{x \in \mathfrak{pv}(f_1)} U(\mathfrak{g})(x - f_1(x))l_{h_1}, \text{ где } l_{h_1} = l_h = 1 \otimes 1. \text{ Рассмотрим два случая: (a) } \mathfrak{qv}(h) + \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}; \text{ (b) } \mathfrak{qv}(h) \subset \mathfrak{g}_1.$$

(a) $\mathfrak{qv}(h) + \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$. В этом случае $V_s = V_{s_1}$, и поэтому $Z_s = Z_{s_1}$, т.е. Z_{s_1} является $U(\mathfrak{g})$ -подмодулем.

Пусть $x \in \mathfrak{pv}_1(f_1)$. Тогда из 3') получаем $(x - f_1(x))l_h \in Z_{s_1}$. Поскольку Z_{s_1} является $U(\mathfrak{g})$ -модулем, то $y(x - f_1(x))l_h \in Z_{s_1}$ для любого $y \in \mathfrak{g}$. Выберем $y \in \mathfrak{qv}(h)$ и $y \notin \mathfrak{g}_1$. Из равенства

$$y(x - f_1(x))l_h = (x - f_1(x))yl_h + [y, x]l_h = h(y)(x - f_1(x))l_h + [y, x]l_h$$

вытекает, что $[y, x]l_h \in Z_{s_1}$. После факторизации по Z_{s_1} получаем, что в $M_{s_1}(f_1)$ выполняется $[y, x]l = 0$, где $l = 1 \otimes 1$. Из леммы 4 получаем $[y, \mathfrak{pv}_1(f_1)] \subset \mathfrak{pv}_1(f_1)$ и $f_1([y, \mathfrak{pv}_1(f_1)]) = 0$.

Отсюда получаем, что подалгебра $\mathfrak{p}$, равная $Ky + \mathfrak{pv}(f_1)$, является поляризацией для любого $g \in \pi_1^{-1}(f_1)$, где π_1 – проекция $\mathfrak{g}^*$ на $\mathfrak{g}_1^*$. Выберем $g \in \pi_1^{-1}(f_1)$ так, что $g(y) = h(y)$. Используя предположение индукции, получаем:

$$1'') \mathfrak{p} \supset \mathfrak{qv}(h);$$

$$2'') g|_{\mathfrak{qv}(h)} = h|_{\mathfrak{qv}(h)}.$$

Так как $y \in \mathfrak{qv}(h)$, то $(y - g(y))l_h = (y - h(y))l_h = 0$. Напомним, что в нашем случае $Z_s = Z_{s_1}$. Применяя 3'), получаем

$$3'') Z_{s_1} = \sum_{x \in \mathfrak{pv}_1(f_1)} U(\mathfrak{g})(x - f_1(x))l_h = \sum_{x \in \mathfrak{p}} U(\mathfrak{g})(x - g(x))l_h.$$

Так как $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{pv}_1(f_1)$ и $\mathfrak{pv}(g) \cap \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{pv}_1(f_1)$, то $\mathfrak{p} = \mathfrak{pv}(g)$ (лемма 6). Поскольку $V_s = \text{ind}(N_s(h), \mathfrak{g}) = \text{ind}(h|_{\mathfrak{qv}(h)}, \mathfrak{g})$ и Z_s имеет вид 3''), то $V_s/Z_s \cong M_s(g)$. По условию $V_s/Z_s \cong M_s(f)$. Следовательно, $M_s(f) \cong M_s(g)$. Используя теорему 2, получаем $\mathfrak{pv}(g) = \mathfrak{pv}(f) = \mathfrak{p}$ и $f|_{\mathfrak{p}} = g|_{\mathfrak{p}}$. Подставляя эти равенства в 1''), 2'') и 3''), получаем 1), 2) и 3), что доказывает лемму в случае (a).

(b) $\mathfrak{qv}(h) \subset \mathfrak{g}_1$. В этом случае $V_s = \text{ind}(V_{s_1}, \mathfrak{g})$, $Z_s \supset \text{ind}(Z_{s_1}, \mathfrak{g})$ и

$$V_s / \text{ind}(Z_{s_1}, \mathfrak{g}) = \text{ind}(V_{s_1}, \mathfrak{g}) / \text{ind}(Z_{s_1}, \mathfrak{g}) = \text{ind}(M_{s_1}(f_1), \mathfrak{g}).$$

Обозначим через $\bar{Z}_s$ образ Z_s в факторе V_s по $\text{ind}(Z_{s_1}, \mathfrak{g})$. Рассмотрим два случая.

(b1) $\mathfrak{g}^{f_1} \subset \mathfrak{g}_1$. В этом случае $\mathfrak{pv}(f) = \mathfrak{pv}_1(f_1)$ (что доказывает 1) и 2)) и $U(\mathfrak{g})$ -модуль $\text{ind}(M_{s_1}(f_1), \mathfrak{g})$ неприводим. Отсюда $\bar{Z}_s = 0$ и, следовательно,

$$Z_s = \text{ind}(Z_{s_1}, \mathfrak{g}) = \sum_{x \in \mathfrak{pv}(f) = \mathfrak{pv}_1(f_1)} U(\mathfrak{g})(x - f_1(x))l_h,$$

что доказывает 3).

(b2) $\mathfrak{g}^{f_1} + \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$. В этом случае поляризация Вернь $\mathfrak{pv}(f)$ будет иметь вид $Ky \oplus \mathfrak{pv}_1(f_1)$, где $y \in \mathfrak{pv}(f) \setminus \mathfrak{g}_1$ (см. лемму 6). Из следствия 1 получаем $\bar{Z}_s = U(\mathfrak{g})(y - f(y))l_h$, что доказывает утверждения 1), 2) и 3).

СЛЕДСТВИЕ 2. $U(\mathfrak{g}, s)$ -модуль $M_s(f)$ изоморфен фактору $\text{ind}(N_s(h), \mathfrak{g})$ тогда и только тогда, когда:

$$1) \mathfrak{pv}(f) \subset \mathfrak{qv}(h);$$

$$2) f|_{\mathfrak{qv}(h)} = h|_{\mathfrak{qv}(h)}.$$

Доказательство вытекает из леммы 7.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathfrak{r}(h)$ – класс эквивалентности для $h \in \mathfrak{h}^*$ и π – проекция $\mathfrak{g}^*$ на $\mathfrak{h}^*$. Тогда

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{ind}(N_s(h), \mathfrak{g})) = \{M_s(f) \mid \mathfrak{R}(f) \subset \pi^{-1}(\mathfrak{r}(h))\}.$$

Здесь, как и выше, $\mathfrak{R}(f)$ – класс эквивалентности для $f \in \mathfrak{g}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $U(\mathfrak{g}, s)$ -модуль $V_s(h)$, равный $\mathrm{ind}(N_s(h), \mathfrak{g})$, имеет фильтрацию

$$V_0(f_0) \supset V_1(f_1) \supset \cdots \supset V_k(f_k);$$

здесь $V_k(h_k) = kl$, $l = 1 \otimes 1$.

Предположим, что $M_s(f) \in \mathrm{Spec}(V_s(h))$. Это означает, что существуют $U(\mathfrak{g}, s)$ -подмодули W_s и W'_s такие, что $V_s \supset W_s \supset W'_s$ и W_s/W'_s изоморфен $M_s(f)$. Это означает, что существуют цепочки $W_0 \supset W_1 \supset \cdots \supset W_k$ и $W'_0 \supset W'_1 \supset \cdots \supset W'_k$, в которых W_0, W'_0 суть $U(\mathfrak{g})$ -модули, $W_i = W_0 \cap V_i(h_i)$, $W'_i = W'_0 \cap V_i(h_i)$, $V_i(h_i) \supset W_i \supset W'_i$ и W_i/W'_i изоморфен $M_i(f_i)$ как $U(\mathfrak{g}_i)$ -модуль. При $i = k$ получаем, что $V_k(h_k) \supset W_k \supset W'_k$ и W_k/W'_k изоморфен $M_i(f_i)$ как линейное пространство над K . Поскольку $\dim V_k(h_k) = \dim M_i(f_i) = 1$, то $W'_k = \{0\}$ и $W_k = V_k(h_k) = Kl$. Поэтому $l \in W_s$. Поскольку $V_s(h) = U(\mathfrak{g})l$, то $W_s = V_s$ и всякий $U(\mathfrak{g}, s)$ -подфактормодуль является фактормодулем.

Отсюда вытекает, что

$$M_s(f) \in \mathrm{Spec}(V_s(h))$$

тогда и только тогда, когда на f и h выполняются условия 1) и 2) следствия 2.

Так как

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(f) &= \{\xi \in \mathfrak{g}^* \mid \xi|_{\mathfrak{pv}(f)} = f|_{\mathfrak{pv}(f)}\}, \\ \pi^{-1}(\mathfrak{r}(h)) &= \{\eta \in \mathfrak{g}^* \mid \eta|_{\mathfrak{qv}(h)} = h|_{\mathfrak{qv}(h)}\}, \end{aligned}$$

то условия 1) и 2) следствия 2 равносильны $\mathfrak{R}(f) \subset \pi^{-1}(\mathfrak{r}(h))$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathfrak{r}(h)$, $\mathfrak{R}(f)$, π те же, что в теореме 4. Тогда

$$\mathrm{Spec} M_s(f)|_{(\mathfrak{h}, s)} = \{N_s(h) \mid \mathfrak{r}(h) \subset \pi(\mathfrak{R}(f))\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что

$$N_s(h) \in \mathrm{Spec}(M_s(f)|_{(\mathfrak{h}, s)}).$$

Это означает, что существуют $U(\mathfrak{h}, s)$ -подмодули C_s и C'_s такие, что $C'_s \supset C_s$ и C_s/C'_s изоморфен $N_s(h)$. Рассуждая, как в доказательстве теоремы 4, получаем $C'_k \supset C_k \supset M_k(f_k)$ и $C_k/C'_k \cong N_k(h_k)$. Поскольку $\dim M_k(f_k) = \dim N_k(h_k) = 1$, то $C'_k = \{0\}$ и $C_k = M_k(f_k) = Kl$, где $l = 1 \otimes 1$. Поэтому $l \in C_k$ и $U(\mathfrak{h})l \subset C_s$. Отсюда получаем, что $N_s(h)$ является фактором $U(\mathfrak{h}, s)$ -модуля $U(\mathfrak{h})l$, который изоморфен $\mathrm{ind}(f|_{\mathfrak{pv}(f) \cap \mathfrak{h}}, \mathfrak{h})$. Применяя следствие 2, получаем, что $N_s(h)$ содержится в $\mathrm{Spec}(M_s(f)|_{(\mathfrak{h}, s)})$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \mathfrak{qv}(h) \supset \mathfrak{pv}(f) \cap \mathfrak{h}, \\ h|_{\mathfrak{pv}(f) \cap \mathfrak{h}} = f|_{\mathfrak{pv}(f) \cap \mathfrak{h}}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Так как

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}(h) &= \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda|_{\mathfrak{qv}(h)} = h|_{\mathfrak{qv}(h)}\}, \\ \pi(\mathfrak{R}(f)) &= \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid \mu|_{\mathfrak{pv}(f) \cap \mathfrak{h}} = f|_{\mathfrak{pv}(f) \cap \mathfrak{h}}\},\end{aligned}$$

то условия (4.1) равносильны $\mathfrak{r}(h) \subset \pi(\mathfrak{R}(f))$.

Пусть $f', f'' \in \mathfrak{g}^*$. Поляризация Вернь для $f' \times f'' \in (\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})^*$ относительно фильтрации $s \times s$ (см. п. 1.8) совпадает с $\mathfrak{pv}(f') \times \mathfrak{pv}(f'')$ и

$$M_s(f') \times M_s(f'') = M_{s \times s}(f' \times f'').$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f', f'' \in \mathfrak{g}^*$. Тогда

$$\mathrm{Spec}(M_s(f') \otimes M_s(f'')) = \{M_s(g) \mid \mathfrak{R}(g) \subset \mathfrak{R}(f') + \mathfrak{R}(f'')\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $M_s(f') \otimes M_s(f'')$ есть ограничение $M_s(f') \times M_s(f'')$ на $(\mathfrak{g}, s)$. Согласно теореме 5

$$\mathrm{Spec}(M_s(f') \otimes M_s(f'')) = \{M_s(g) \mid \mathfrak{R}(g) \subset \pi(\mathfrak{R}(f' \times f''))\},$$

где π – проекция $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})^*$ на $\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{R}(f' \times f'')$ – класс эквивалентности $f' \times f''$ в $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})^*$. Легко видеть, что

$$\pi(\mathfrak{R}(f' \times f'')) = \pi(\mathfrak{R}(f') \times \mathfrak{R}(f'')) = \mathfrak{R}(f') + \mathfrak{R}(f'').$$

§ 5. Связь с отображением Диксмье. Примеры

Метод орбит А. А. Кириллова для описания неприводимых представлений разрешимых групп Ли в гильбертовых пространствах имеет алгебраический аналог. Пусть $\mathfrak{g}$, как и выше, есть разрешимая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем K характеристики 0; $\mathcal{A}$ – присоединенная алгебраическая группа для $\mathfrak{g}$. Пусть f – произвольный элемент в $\mathfrak{g}^*$ и $\mathfrak{p}$ – поляризация для f . Через $\theta_{\mathfrak{p}}$ обозначим характер подалгебры $\mathfrak{p}$, равный $\frac{1}{2} \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}$. Идеал $I(f)$, равный ядру в универсальной обертывающей алгебре для подкрученного индуцированного представления $\mathrm{ind} \sim(f|_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{g}) = \mathrm{ind}(f - \theta_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{g})$, примитивен и не зависит от выбора поляризации $\mathfrak{p}$. Соответствие $f \mapsto I(f)$ продолжается до биекции (которая обозначается $\mathrm{Dix}_{\mathfrak{g}}$ и называется отображением Диксмье) множества орбит $\mathfrak{g}^*/\mathcal{A}$ на множество $\mathrm{Prim} U(\mathfrak{g})$ примитивных идеалов в $U(\mathfrak{g})$ (см. [3; гл. 6]).

ТЕОРЕМА 7. 1) $\mathfrak{R}(f) \subset \mathcal{A}(f)$ для любого $f \in \mathfrak{g}^*$. Обозначим через $i: \mathfrak{g}^*/\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{g}^*/\mathcal{A}$ отображение вложения $\mathfrak{R}(f)$ в $\mathcal{A}(f)$.

2) Обозначим через $\mathfrak{Rer}: \mathrm{Irr}(\mathfrak{g}, s) \rightarrow \mathrm{Prim} U(\mathfrak{g})$ отображение, сопоставляющее неприводимому представлению $\mathrm{ind}(f|_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{g})$ ядро подкрученного представления $\mathrm{ind} \sim(f|_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{g})$.

Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}^*/\mathfrak{R} & \xrightarrow{i} & \mathfrak{g}^*/\mathcal{A} \\ \downarrow M_s & & \downarrow \mathrm{Dix}_{\mathfrak{g}} \\ \mathrm{Irr}(\mathfrak{g}, s) & \xrightarrow{\mathfrak{Rer}} & \mathrm{Prim} U(\mathfrak{g}) \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для любого $g \in \mathfrak{R}(f)$ выполняется $\mathfrak{p}v(g) = \mathfrak{p}v(f) = \mathfrak{p}$ и $g|_{\mathfrak{p}} = f_{\mathfrak{p}}$ (теорема 3). Отсюда отображение $g \mapsto I(g) = \text{Ker}(\text{ind}^{\sim}(f|_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{g}))$ постоянно на $\mathfrak{R}(f)$. Поэтому $\mathfrak{R}(f) \subset \mathcal{A}(f)$.

Утверждение 2) вытекает из определения отображения Диксмье.

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathfrak{g} = \text{span}\langle x, y \mid [x, y] = y \rangle$. Зафиксируем фильтрацию s вида $\mathfrak{g} \supset Ky \supset \{0\}$.

Пусть $f \in \mathfrak{g}^*$, обозначим $f(y) = y^0$. Если $y^0 \neq 0$, то $\mathfrak{R}(f) = \{g \in \mathfrak{g}^* \mid g(y) = y^0\}$; если $y^0 = 0$, то $\mathfrak{R}(f) = \{f\}$.

Если $y^0 \neq 0$, то соответствующее неприводимое представление $(\mathfrak{g}, s)$ индуцировано с характера $y \mapsto y^0$ подалгебры $\mathfrak{p} = Ky$. В случае $y_0 = 0$ линейная форма f является характером и определяет одномерное представление $(\mathfrak{g}, s)$. Отметим, что классификация всех неприводимых представлений этой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ проведена в работе [2].

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Гейзенберга $\text{span}\langle x, y, z \mid [x, y] = z \rangle$. Зафиксируем фильтрацию s вида $\mathfrak{g} \supset Ky \oplus Kz \supset Kz \supset \{0\}$.

Пусть $f \in \mathfrak{g}^*$, обозначим $f(y) = y^0$ и $f(z) = z^0$. Если $z^0 \neq 0$, то $\mathfrak{R}(f) = \{g \in \mathfrak{g}^* \mid g(z) = y^0, g(z) = z^0\}$; если $z^0 = 0$, то $\mathfrak{R}(f) = \{f\}$.

Если $z^0 \neq 0$, то соответствующее неприводимое представление $(\mathfrak{g}, s)$ индуцировано с одномерного характера $y, z \mapsto y^0, z^0$ подалгебры $\mathfrak{p} = Ky \oplus Kz$. В случае $z_0 = 0$ линейная форма f является характером и определяет одномерное представление $(\mathfrak{g}, s)$.

Что касается классификации всех неприводимых представлений алгебры Гейзенберга, то всякое неприводимое представление либо одномерно (т.е. совпадает с f для $z^0 = 0$), либо является неприводимым представлением алгебры Вейля $A_1 = \langle p, q \mid [p, q] = 1 \rangle$ (см. [1]).

Заметим, что в каждом из этих примеров неприводимые представления $(\mathfrak{g}, s)$ составляют лишь малую часть среди всех неприводимых представлений $\mathfrak{g}$ (см. [2; утверждение 6.1]).

Список литературы

- [1] R. E. Block, “The irreducible representations of the Weyl algebra A_1 ”, *Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil 31^{ème} année* (Paris, 1977–1978), *Lecture Notes in Math.*, **740**, Springer-Verlag, Berlin, 1979, 69–79.
- [2] R. E. Block, “The irreducible representations of the Lie algebra $\mathfrak{sl}(2)$ and of the Weyl algebra”, *Adv. in Math.*, **39**:1 (1981), 69–110.
- [3] Ж. Диксмье, *Универсальные обертывающие алгебры*, Мир, М., 1978; пер. с фр.: J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris–Brussels–Montreal, 1974.
- [4] И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, “Структура представлений, порожденных векторами старшего веса”, *Функц. анализ и его прил.*, **5**:1 (1971), 1–9; англ. пер.: I. N. Bernshtein, I. M. Gel'fand, S. I. Gel'fand, “Structure of representations generated by vectors of highest weight”, *Funct. Anal. Appl.*, **5**:1 (1971), 1–8.
- [5] М. Вернь, “Конструкция подалгебры, подчиненной элементу двойственного пространства разрешимой алгебры Ли I, II”, *Математика. Сборник переводов*, **15**:2 (1971), 14–15, 16–18; пер. с фр.: M. Vergne, “Construction de sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de résoluble I, II”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B*, **270** (1970), 173–175, 704–707.

- [6] А. А. Кириллов, “Унитарные представления нильпотентных групп Ли”, *УМН*, **17**:4 (1962), 57–110; англ. пер.: А. А. Kirillov, “Unitary representations of nilpotent Lie groups”, *Russian Math. Surveys*, **17**:4 (1962), 53–104.
- [7] А. А. Кириллов, *Лекции по методу орбит*, Научная книга, Новосибирск, 2002; англ. пер.: А. А. Kirillov, *Lectures on the orbit method*, Grad. Stud. Math., **64**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [8] А. Н. Панов, *Представления алгебр Ли с фильтрацией*, деп. в ВИНТИ № 3012-79.
- [9] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*. Гл. 1–3. *Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли*, Мир, М., 1976; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie. Chap. I: Algèbres de Lie. Chap. II: Algèbres de Lie libres. Chap. III: Groupes de Lie*, Hermann & Cie, Paris, 1971–1972.

А. Н. Панов (A. N. Panov)

Самарский государственный университет

E-mail: apanov@list.ru

Поступила в редакцию

13.10.2010