Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Кокарев, Об уравнении несобственной выпуклой аффинной сферы: обобщение теоремы Ёргенса, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 11, 65–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm780>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:33:19

УДК 513.0+517.946

В. Н. Кокарев

Об уравнении несобственной выпуклой аффинной сферы: обобщение теоремы Ёргенса

Доказывается, что если функция $\varphi(t)$ положительной переменной t принадлежит классу $C^{3,\alpha}$ и для достаточно малого положительного ε ($\varepsilon < 10^{-4}$) удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\leq \varphi(t) \leq 1 + \varepsilon, & t > 0, \\ |\varphi'(t)| &\leq \varepsilon \frac{\varphi(t)}{t}, & t \geq 2\sqrt{1-\varepsilon}, \\ |\varphi''(t)| &\leq \varepsilon \frac{\varphi(t)}{t^2}, & t \geq 2\sqrt{1-\varepsilon}, \\ |\varphi'''(t)| &\leq \varepsilon \frac{\varphi(t)}{t^3}, & t \geq 2\sqrt{1-\varepsilon}, \end{aligned}$$

то всякое полное решение $z(x, y)$ уравнения $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \varphi(z_{xx} + z_{yy})$ является квадратичным полиномом.

Библиография: 8 названий.

Введение

Несобственная выпуклая аффинная сфера в подходящей системе координат задается в виде $z = z(x, y)$, где функция $z(x, y)$ удовлетворяет уравнению $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 1$. В работе [1] К. Ёргенс доказал, что все полные решения этого уравнения являются квадратичными полиномами. Следовательно, все несобственные выпуклые аффинные сферы – эллиптические параболоиды, если в определение аффинной сферы включить требование полноты. Этот результат был обобщен по размерности Е. Калаби [2] и А. В. Погореловым [3].

Заметив, что $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \lambda_1\lambda_2$, где λ_1, λ_2 – собственные значения гессиана функции $z(x, y)$, естественно поставить вопрос: насколько функция $\lambda_1\lambda_2$ важна для характеристики несобственных выпуклых аффинных сфер? А именно, что можно сказать о полной поверхности, заданной в виде $z = z(x, y)$, если собственные значения λ_1, λ_2 гессиана функции $z(x, y)$ удовлетворяют уравнению $f(\lambda_1, \lambda_2) = 0$, а кривая, заданная этим уравнением в плоскости переменных λ_1, λ_2 , достаточно близка к гиперболе $\lambda_1\lambda_2 - 1 = 0$? Точное описание этой близости дадим ниже, а пока пусть $f(\lambda_1, \lambda_2)$ – регулярная, симметрическая функция положительных переменных такая, что $f_{\lambda_1}^2 + f_{\lambda_2}^2 \neq 0$, кривая, заданная уравнением $f(\lambda_1, \lambda_2) = 0$, может касаться прямых $\lambda_1 + \lambda_2 = c$ только при $\lambda_1 = \lambda_2$ и кривизна этой кривой

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00017).

при $\lambda_1 = \lambda_2$ не равна нулю. Введя функции $\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ и $\sigma_2 = \lambda_1 \lambda_2$, получим $f(\lambda_1, \lambda_2) = F(\sigma_1, \sigma_2)$. При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ находим

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_2} = \frac{f_{\lambda_2} - f_{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \neq 0.$$

Если функция f имеет класс C^2 , то при $\lambda_1 = \lambda_2$ производная $\partial F / \partial \sigma_2 = f_{\lambda_1 \lambda_2} - f_{\lambda_1 \lambda_1}$. Так как при $\lambda_1 = \lambda_2$ имеем $f_{\lambda_1} = f_{\lambda_2}$, $f_{\lambda_1 \lambda_1} = f_{\lambda_2 \lambda_2}$, то $(\partial F / \partial \sigma_2)|_{\lambda_1 = \lambda_2}$ пропорциональна $f_{\lambda_1 \lambda_1} f_{\lambda_2}^2 - 2 f_{\lambda_1 \lambda_2} f_{\lambda_1} f_{\lambda_2} + f_{\lambda_2 \lambda_2} f_{\lambda_1}^2$ и в силу необращения в нуль кривизны при $\lambda_1 = \lambda_2$ производная $\partial F / \partial \sigma_2$ и здесь существует и не обращается в нуль.

Тогда уравнение $F(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ можно разрешить относительно σ_2 :

$$\sigma_2 = \varphi(\sigma_1). \quad (1)$$

В таком виде мы и будем рассматривать соотношение между λ_1 и λ_2 , наложив на функцию φ некоторые ограничения.

§ 1. Постановка и обсуждение задачи

Нам будет удобно несколько обобщить понятие собственного значения гессiana функции, являющейся графиком поверхности. Пусть полная поверхность Φ и эллиптический параболоид Π заданы в прямоугольной системе координат $x^1, x^2, x^3 = z$ уравнениями $z = z(x^1, x^2)$ и $z = z^0(x^1, x^2) = \frac{1}{2} c_{ij} x^i x^j$ соответственно. При суммировании индексы всюду пробегают значения 1, 2. Обозначим $\partial z / \partial x^i = z_i$, $\partial^2 z / \partial x^i \partial x^j = z_{ij}$ и т.д. Через λ_1, λ_2 обозначим экстремумы формы $z_{ij} \xi^i \xi^j$ относительно формы $z_{ij}^0 \xi^i \xi^j = c_{ij} \xi^i \xi^j$. Они являются корнями уравнения

$$\det(z_{ij} - \lambda c_{ij}) = 0. \quad (2)$$

Пусть поверхность Φ такова, что λ_1, λ_2 удовлетворяют уравнению (1), где функция $\varphi(t)$ определена для $t > 0$, имеет класс $C^{3,\alpha}$ и для нее выполняются следующие условия:

$$1 - \varepsilon \leq \varphi(t) \leq 1 + \varepsilon, \quad (3)$$

$$|\varphi'(t)| \leq \varepsilon \frac{\varphi(t)}{t}, \quad (4)$$

$$|\varphi''(t)| \leq \varepsilon \frac{\varphi(t)}{t^2}, \quad (5)$$

$$|\varphi'''(t)| \leq \varepsilon \frac{\varphi(t)}{t^3} \quad (6)$$

с положительным ε . Что тогда можно сказать о поверхности Φ ? Мы доказываем, что если ε достаточно мало, то поверхность Φ будет эллиптическим параболоидом.

Если выполняются условия (3)–(5) с $\varepsilon < 1$, то функция $\ln \sigma_2 - \ln \varphi(\sigma_1)$ при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ и область $(x^1)^2 + (x^2)^2 \leq 1$ удовлетворяют всем условиям теоремы 2 из [4]. Поэтому задача Дирихле для уравнения $\ln \sigma_2 - \ln \varphi(\sigma_1) = 0$ разрешима в круге $(x^1)^2 + (x^2)^2 \leq 1$ для любого регулярного граничного условия. Значит, уравнение (1) при ограничениях (3)–(5) имеет много локальных решений.

Из наших результатов будет следовать, что те из них, которые не являются квадратичными полиномами, не могут быть продолжены до полных, по крайней мере, для достаточно малых ε .

По теореме Виета для $\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ и $\sigma_2 = \lambda_1 \lambda_2$ получаем

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}z_{22} + 2c_{12}z_{12} + c_{22}z_{11}}{\det(c_{ij})} = \tilde{c}^{ij}z_{ij}, \quad \sigma_2 = \frac{\det(z_{ij})}{\det(c_{ij})},$$

где $\tilde{c}^{ij}$ — элементы матрицы, обратной к матрице из коэффициентов c_{ij} . Из уравнения (1) получаем $\det(z_{ij}) = \det(c_{ij})\varphi(\tilde{c}^{ij}z_{ij})$. Уравнение (2) для нахождения λ_1, λ_2 инвариантно при аффинных преобразованиях координат x^1, x^2 . Значит, если аффинным преобразованием вида $(x^1, x^2, z) \mapsto (\alpha_i^1 x^i, \alpha_i^2 x^i, z)$ одновременно перевести поверхности Φ и Π в поверхности Φ' и Π' , то λ_1, λ_2 в соответствующих точках поверхностей Φ и Φ' , вычисленные по поверхностям Φ, Π и Φ', Π' , будут одинаковыми. Чтобы не усложнять вычисления, будем считать, что $\det(c_{ij}) = 1$, и будем допускать только аффинные преобразования, сохраняющие $\det(c_{ij})$. Тогда для поверхности Φ получаем уравнение

$$\det(z_{ij}) = \varphi(c_{11}z_{22} + 2c_{12}z_{12} + c_{22}z_{11}). \quad (7)$$

Может возникнуть вопрос: зачем нужно рассматривать уравнение вида (7), если унимодулярным аффинным преобразованием поверхностей можно добиться того, что $c_{ij} = \delta_{ij}$? Дело в том, что нам придется впоследствии подвергать поверхности аффинным преобразованиям, при которых уравнение с $c_{ij} = \delta_{ij}$ все равно приобретет вид (7). Поэтому нам нужно получить информацию о решениях этого уравнения. Из (3) следует, что все решения уравнения (7) строго выпуклые, а поверхности Φ и Π расположены вогнутостью в одну сторону (положим вверх).

Приступим к исследованию полных решений уравнения (7) при условиях (3)–(6).

§ 2. C^2 -оценка решения уравнения (7) в ограниченной области

Так как к функции $z(x^1, x^2)$ можно прибавлять слагаемые вида $c_1 x^1 + c_2 x^2 + c$, то без ограничения общности считаем, что прямоугольная система координат $x^1, x^2, x^3 = z$ такова, что поверхность Φ касается плоскости $z = 0$. Через G_h обозначим область на плоскости $z = 0$, где $z(x_1, x_2) \leq h$, и пусть d_h — диаметр этой области. Оценим производные z_i в области G_1 . Для случая $\varphi(t) = 1$ оценка дана в [3].

Возьмем точку $(x^1, x^2) \in G_1$ и построим конус V с вершиной в точке $S(x^1, x^2, z(x^1, x^2))$, который проектирует пересечение плоскости $z = 2$ с поверхностью Φ . Через Φ_h обозначим часть поверхности Φ , для которой $z(x^1, x^2) \leq h$. Пусть V^* и Φ_2^* — нормальные изображения V и Φ_2 соответственно (см. [3; §5, п. 1]) на плоскости p_1, p_2 . В силу выпуклости Φ_2 имеем $V^* \subset \Phi_2^*$, следовательно, для площадей получается неравенство $\sigma(V^*) \leq \sigma(\Phi_2^*)$. Так как высота конуса V не менее 1, а диаметр основания равен d_2 , то круг $p_1^2 + p_2^2 \leq 1/d_2^2$ принадлежит V^* . Точка $(p_1, p_2) = (z_1(x^1, x^2), z_2(x^1, x^2))$ тоже принадлежит V^* . Значит, в V^* лежит треугольник с основанием $2/d_2$, высотой $|z_i(x^1, x^2)|$, площадью $|z_i(x^1, x^2)|/d_2$. Значит, $\sigma(V^*) \geq |z_i(x^1, x^2)|/d_2$.

Далее,

$$\begin{aligned}\sigma(\Phi_2^*) &= \int_{\Phi_2^*} dp_1 dp_2 = \int_{G_2} \frac{\partial(p_1, p_2)}{\partial(x^1, x^2)} dx^1 dx^2 = \int_{G_2} \det(z_{ij}) dx^1 dx^2 \\ &= \int_{G_2} \varphi dx^1 dx^2 \leq \frac{1}{4}(1 + \varepsilon)\pi d_2^2.\end{aligned}$$

Из $\sigma(V^*) \leq \sigma(\Phi_2^*)$ получаем оценку сверху на $|z_i(x^1, x^2)|$ для всех точек области G_1 . Оценка зависит от ε и d_2 — диаметра сечения поверхности Φ на высоте 2.

Теперь оценим вторые производные решения уравнения (7) в области $G_{1/2}$. Модифицируя прием А.В. Погорелова (см. [5; §5, п. 2, док-во теоремы 5.1]), введем в G_1 функцию точки и направления

$$w = (1 - z)^k e^{(z_1^2 + z_2^2)/2} z_{\alpha\alpha},$$

где α означает дифференцирование в некотором направлении, а постоянная $k > 0$ будет выбрана позже. Функция w достигает максимума, равного w_0 , во внутренней точке O области G_1 для некоторого направления α_0 . Это направление является главным направлением в точке O квадратичной формы d^2z . Повернем оси x^1, x^2 так, чтобы направление оси x^1 совпало с направлением α_0 , тогда $z_{12} = 0$ в точке O . В новых координатах уравнение поверхности Φ будет по-прежнему иметь вид (7), но, вообще говоря, с другими c_{ij} . Оставим за этими коэффициентами прежние обозначения. Опять $\det(c_{ij}) = 1$.

Продифференцировав (7) в точке O по x^i и дважды по x^1 , получим после преобразований

$$\frac{z_{11i}}{z_{11}} + \frac{z_{22i}}{z_{22}} = (c_{22}z_{11i} + 2c_{12}z_{12i} + c_{11}z_{22i}) \frac{\varphi'}{\varphi}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\frac{z_{22} - \varphi' c_{22}}{z_{11} z_{22}} z_{1111} - 2 \frac{\varphi' c_{12}}{z_{11} z_{22}} z_{1112} + \frac{z_{11} - \varphi' c_{11}}{z_{11} z_{22}} z_{1122} + 2 \frac{z_{111} z_{221} - z_{112}^2}{z_{11} z_{22}} \\ = (c_{22}z_{111} + 2c_{12}z_{112} + c_{11}z_{221})^2 \frac{\varphi''}{\varphi}.\end{aligned} \quad (9)$$

Так как функция w в точке O достигает максимума, то в этой точке $d(\ln w) = 0$, $d^2(\ln w) \leq 0$. Вычислив, получим

$$(\ln w)_i = \frac{z_{11i}}{z_{11}} + z_i z_{ii} + \frac{k z_i}{z - 1} = 0, \quad (10)$$

$$(\ln w)_{ij} = \frac{z_{11ij}}{z_{11}} - \frac{z_{11i} z_{11j}}{z_{11}^2} - \frac{k z_i z_j}{(z - 1)^2} + \frac{k z_{ij}}{z - 1} + z_{1i} z_{1j} + z_{2i} z_{2j} + z_{1i} z_{1j} + z_{2i} z_{2j}. \quad (11)$$

Из условия (4) получаем

$$|\varphi' c_{11}| \leq \frac{\varepsilon \varphi c_{11}}{c_{11} z_{22} + c_{22} z_{11}} \leq \frac{\varepsilon z_{11} z_{22} c_{11}}{c_{11} z_{22}} = \varepsilon z_{11}.$$

Аналогично, $|\varphi' c_{22}| \leq \varepsilon z_{22}$. Поэтому при $\varepsilon < 1$ получаем, что

$$\det \begin{pmatrix} z_{11} - \varphi' c_{11} & -\varphi' c_{12} \\ -\varphi' c_{12} & z_{22} - \varphi' c_{22} \end{pmatrix} > 0.$$

Следовательно, форма

$$\psi = \frac{1}{z_{22}}((z_{11} - \varphi' c_{11})\xi_1^2 - 2\varphi' c_{12}\xi_1\xi_2 + (z_{22} - \varphi' c_{22})\xi_2^2) > 0. \quad (12)$$

Тогда для следа форм ψ и $d^2(\ln w)$ получаем

$$\begin{aligned} & \frac{z_{22} - \varphi' c_{22}}{z_{11}z_{22}}z_{1111} - 2\frac{\varphi' c_{12}}{z_{11}z_{22}}z_{1112} + \frac{z_{11} - \varphi' c_{11}}{z_{11}z_{22}}z_{1122} - \frac{z_{22} - \varphi' c_{22}}{z_{11}^2z_{22}}z_{111}^2 \\ & + 2\frac{\varphi' c_{12}}{z_{11}^2z_{22}}z_{111}z_{112} - \frac{z_{11} - \varphi' c_{11}}{z_{11}^2z_{22}}z_{112}^2 - \frac{(z_{22} - \varphi' c_{22})kz_1^2}{z_{22}(z-1)^2} + 2\frac{\varphi' c_{12}kz_1z_2}{z_{22}(z-1)^2} \\ & - \frac{(z_{11} - \varphi' c_{11})kz_2^2}{z_{22}(z-1)^2} + \frac{(z_{22} - \varphi' c_{22})kz_{11}}{z_{22}(z-1)} + \frac{(z_{11} - \varphi' c_{11})k}{z-1} \\ & + \frac{(z_{22} - \varphi' c_{22})(z_{11}^2 + z_1z_{111} + z_2z_{112})}{z_{22}} - 2\frac{\varphi' c_{12}(z_1z_{112} + z_2z_{122})}{z_{22}} \\ & + \frac{(z_{11} - \varphi' c_{11})(z_{22}^2 + z_1z_{122} + z_2z_{222})}{z_{22}} \leq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Вычтем из (13) почленно (9) и подставим в получившееся неравенство z_{222} и z_{221} , выразив их из (8) при $i = 1$ и $i = 2$. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{(z_{22} - \varphi' c_{22})(z_{11} + \varphi' c_{11})}{(z_{11} - \varphi' c_{11})z_{11}^2z_{22}}z_{111}^2 - 2\frac{\varphi' c_{12}(z_{11} + \varphi' c_{11})}{(z_{11} - \varphi' c_{11})z_{11}^2z_{22}}z_{111}z_{112} + \frac{z_{11} + \varphi' c_{11}}{z_{11}^2z_{22}}z_{112}^2 \\ & - \frac{(z_{22} - \varphi' c_{22})kz_1^2}{z_{22}(z-1)^2} + 2\frac{\varphi' c_{12}kz_1z_2}{z_{22}(z-1)^2} - \frac{(z_{11} - \varphi' c_{11})kz_2^2}{z_{22}(z-1)^2} \\ & + \frac{(z_{22} - \varphi' c_{22})kz_{11}}{z_{22}(z-1)} + \frac{(z_{11} - \varphi' c_{11})k}{z-1} + \frac{(z_{22} - \varphi' c_{22})z_{11}^2}{z_{22}} \\ & + (z_{11} - \varphi' c_{11})z_{22} + \frac{\varphi''}{\varphi} \left(\frac{c_{22}z_{11} - c_{11}z_{22}}{z_{11} - \varphi' c_{11}}z_{111} + 2\frac{c_{12}z_{11}}{z_{11} - \varphi' c_{11}}z_{112} \right)^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

С помощью (10) получаем неравенство

$$\frac{kz_2^2}{(z-1)^2} \leq \frac{2z_{112}^2}{kz_{11}^2} + \frac{2z_2^2z_{22}^2}{k}. \quad (15)$$

Так как

$$\begin{aligned} (c_{22}z_{11} - c_{11}z_{22})^2 & \leq (c_{22}z_{11} + c_{11}z_{22})^2, \\ (c_{22}z_{11} + c_{11}z_{22})^2 & \geq 4c_{11}c_{22}z_{11}z_{22} \geq 4c_{12}^2z_{11}z_{22}, \end{aligned}$$

то с учетом (5) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi''}{\varphi} \left(\frac{c_{22}z_{11} - c_{11}z_{22}}{z_{11} - \varphi'c_{11}} z_{111} + \frac{2c_{12}z_{11}}{z_{11} - \varphi'c_{11}} z_{112} \right)^2 \\ & \geq -\frac{2\varepsilon}{(z_{11} - \varphi'c_{11})^2} z_{111}^2 - \frac{2\varepsilon z_{11}}{z_{22}(z_{11} - \varphi'c_{11})^2} z_{112}^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как $|\varphi'c_{ii}| \leq \varepsilon z_{ii}$, то при $(1 - \varepsilon)^3 > 4\varepsilon$ ($\varepsilon < \approx 0.15$) существует такое $k > 0$, зависящее только от ε (мы еще обязательно возьмем $k \geq 2$), что квадратичная форма относительно z_{111} , z_{112} неотрицательна:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(z_{22} - \varphi'c_{22})(z_{11} + \varphi'c_{11})}{z_{11}^2 z_{22}(z_{11} - \varphi'c_{11})} - \frac{2\varepsilon}{(z_{11} - \varphi'c_{11})^2} \right) z_{111}^2 - \frac{2\varphi'c_{12}(z_{11} + \varphi'c_{11})}{z_{11}^2 z_{22}(z_{11} - \varphi'c_{11})} z_{111}z_{112} \\ & + \left(\frac{z_{11} + \varphi'c_{11}}{z_{11}^2 z_{22}} - \frac{2(z_{11} - \varphi'c_{11})}{kz_{11}^2 z_{22}} - \frac{2\varepsilon z_{11}}{z_{22}(z_{11} - \varphi'c_{11})^2} \right) z_{112}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

С помощью этого неравенства из (14)–(16) с учетом (3) и того, что

$$z_{11}z_{22} = \varphi, \quad \left| \frac{\varphi'c_{12}}{z_{22}} \right| \leq \frac{\varepsilon\varphi|c_{12}|}{z_{22}(c_{11}z_{22} + c_{22}z_{11})} \leq \frac{\varepsilon\varphi|c_{12}|}{2z_{22}\sqrt{c_{11}c_{22}z_{11}z_{22}}} \leq \frac{\varepsilon z_{11}}{2\sqrt{1-\varepsilon}},$$

получим

$$\begin{aligned} & -\frac{(1+\varepsilon)kz_1^2}{(z-1)^2} - \frac{\varepsilon k|z_1z_2|z_{11}}{\sqrt{1-\varepsilon}(z-1)^2} - \frac{2(1+\varepsilon)^2z_2^2}{k} + \frac{2(1+\varepsilon)kz_{11}}{z-1} \\ & + (1-\varepsilon)z_{11}^2 + (1-\varepsilon)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Умножив последнее неравенство на $(1-z)^{2k}e^{z_1^2+z_2^2}$, получим в точке O неравенство вида

$$(1-\varepsilon)w_0^2 + Qw_0 + R \leq 0, \quad (17)$$

где Q и R содержат $(1-z)$ в неотрицательных степенях.

Так как в области G_1 $0 \leq 1-z \leq 1$, то коэффициенты Q и R ограничены в зависимости от ε и первых производных функции z в G_1 . Из (17) получаем оценку на w_0 , которая при фиксированном ε зависит в конечном счете только от d_2 . Обозначив ее через $w_0(d_2)$, получаем для всех точек и всех направлений в области G_1

$$(1-z)^k e^{(z_1^2+z_2^2)/2} z_{\alpha\alpha} \leq w_0(d_2).$$

Отсюда для всех точек и всех направлений в области $G_{1/2}$

$$z_{\alpha\alpha} \leq 2^k w_0(d_2).$$

Постоянная k выбирается в зависимости только от ε .

Может вызвать удивление то, что оценка не зависит от коэффициентов c_{ij} . Это не значит, конечно, что поверхность Π не играет никакой роли. Например, для $\Pi = \Phi$: $z = \frac{1}{2}c_{ij}x^i x^j$ как раз $z_{ii} = c_{ii}$. Утверждается лишь, что оценка может быть выражена только через d_2 (которое, вообще говоря, зависит и от коэффициентов c_{ij}).

§ 3. Глобальная оценка для вторых производных решения уравнения (7)

Здесь мы используем несколько модифицированный метод из [3].

Через T_h обозначим пересечение плоскости $z = h$ с выпуклым телом, ограниченным поверхностью Φ . Не ограничивая общности, считаем, что плоскость $z = 0$ касается поверхности Φ в точке S , а ось z проходит через центр тяжести сечения T_h . Пусть p — параллелограмм минимальной площади, содержащий T_h , центр которого совпадает с центром тяжести T_h . Подвергнем поверхности Φ и Π унимодулярному аффинному преобразованию χ вида $(x^1, x^2, z) \mapsto (\alpha_i^1 x^i, \alpha_i^2 x^i, z)$, переводящему параллелограмм p в квадрат q со стороной b , а поверхности Φ и Π — в поверхности Φ' и Π' . Оси x^1, x^2 можно выбрать так, что это преобразование будет иметь вид $\chi: (x^1, x^2, z) \mapsto (\mu_1 x^1, \mu_2 x^2, z)$. При этом поверхности Φ', Π' удовлетворяют уравнению (7) с той же функцией φ и $\det c_{ij} = 1$. Докажем, что величина h/b^2 ограничена сверху и снизу некоторыми положительными константами, зависящими только от ε .

Для поверхности Φ' введем Φ'_h, G'_h, Φ'^*_h так же, как вводились Φ_h, G_h, Φ^*_h для поверхности Φ в § 2.

Тогда, как и в § 2,

$$\sigma(\Phi'^*_h) = \int_{\Phi'^*_h} dp_1 dp_2 = \int_{G'_h} \det(z_{ij}) dx^1 dx^2 = \int_{G'_h} \varphi dx^1 dx^2 \leq (1 + \varepsilon)b^2.$$

Площадь нормального изображения конуса, проектирующего квадрат q из точки $S' = \chi(S)$, не менее чем $2h^2/b^2$. Сравнивая ее с $\sigma(\Phi'^*_h)$, получаем $2h^2/b^2 \leq (1 + \varepsilon)b^2$ или $h/b^2 \leq \sqrt{(1 + \varepsilon)/2}$.

Подвергнем квадрат q гомотетии с коэффициентом $k = \frac{1}{3}$ относительно его центра. Известно, что полученный квадрат q' будет содержаться в $T'_h = \chi(T_h)$. Спроектируем квадрат q' конусом V из точки $(0, 0, -h)$. Часть поверхности Φ'_h , лежащую внутри этого конуса, обозначим Φ_V . Обозначим нормальные изображения Φ_V и V через Φ_V^* и V^* . Для них имеем $\Phi_V^* \subset V^*$. Для площади V^* сразу получаем $\sigma(V^*) = 288h^2/b^2$. Далее, спроектируем квадрат q' на плоскость $z = 0$, а затем подвергнем гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{2}$ относительно начала координат. Полученный квадрат обозначим $\frac{1}{2}pr(q')$. Тогда

$$\sigma(\Phi_V^*) \geq \int_{(1/2)pr(q')} \det(z_{ij}) dx^1 dx^2 = \int_{(1/2)pr(q')} \varphi dx^1 dx^2 \geq (1 - \varepsilon) \frac{b^2}{36}.$$

Из $\sigma(\Phi_V^*) \leq \sigma(V^*)$ получаем оценку снизу на h/b^2 : $h/b^2 \geq \sqrt{1 - \varepsilon}/(72\sqrt{2})$.

Подвергнем поверхности Φ' и Π' аффинному преобразованию $\nu: (x^1, x^2, z) \mapsto (x^1\sqrt{2}/\sqrt{h}, x^2\sqrt{2}/\sqrt{h}, 2z/h)$. В результате получим поверхности $\bar{\Phi}$ и $\bar{\Pi} = \Pi'$, при этом поверхность $\bar{\Phi}$ будет удовлетворять уравнению (7) и $\det(c_{ij}) = 1$. В результате композиции $\nu \circ \chi$ наших двух аффинных преобразований плоскость $z = h$ перейдет в плоскость $z = 2$, при этом сечение поверхности $\bar{\Phi}$ плоскостью $z = 2$ будет содержаться в квадрате со стороной $b\sqrt{2}/h$. Из оценки снизу на h/b^2 получаем, что диаметр этого сечения $\bar{d}_2$ ограничен сверху в зависимости только от ε .

Пусть поверхность $\bar{\Phi}$ задается графиком функции $\bar{z}(x^1, x^2)$. В соответствующих точках поверхностей Φ и $\bar{\Phi}$ для вторых производных функций $z(x^1, x^2)$ и $\bar{z}(x^1, x^2)$ имеет место соотношение

$$\mu_\alpha^2 \bar{z}_{\alpha\alpha} = z_{\alpha\alpha}. \quad (18)$$

Запишем это соотношение для точки S на поверхности Φ и соответствующей ей точки $\bar{S}$ на поверхности $\bar{\Phi}$

$$\mu_\alpha^2 \bar{z}_{\alpha\alpha}(\bar{S}) = z_{\alpha\alpha}(S).$$

Из § 2 получаем оценки сверху на $\bar{z}_{\alpha\alpha}(\bar{S})$ через $\bar{d}_2, \varepsilon$ и на $z_{\alpha\alpha}(S)$ через d_2, ε . Так как обе поверхности $\bar{\Phi}$ и Φ удовлетворяют уравнению (7), то с учетом условий (3) получаем на $\bar{z}_{\alpha\alpha}(\bar{S})$ и $z_{\alpha\alpha}(S)$ положительные оценки снизу. Следовательно, коэффициенты μ_α оцениваются сверху и снизу через d_2 и ε .

Множество точек плоскости $z = 0$, для которых $\bar{z}(x^1, x^2) \leq \frac{1}{2}$, обозначим через $\bar{G}_{1/2}$. Из результатов § 2 следует существование оценки, зависящей от $\bar{d}_2$ (значит, только от ε), на $\bar{z}_{\alpha\alpha}$ в области $\bar{G}_{1/2}$. Эта область является образом области $\bar{G}_{h/4}$ при нашем аффинном преобразовании $\nu \circ \chi$. Возвращаясь к соотношению (18), получаем, что для вторых производных $z_{\alpha\alpha}$ решения $z(x^1, x^2)$ уравнения (7) всюду в области $G_{h/4}$ существует оценка сверху. При фиксированном ε она, в конечном счете, может быть выражена только через d_2 . Так как $h > 0$ произвольно, то оценка имеет место для всех точек поверхности Φ . Из уравнения (7) с учетом условия (3) получается также положительная оценка на $z_{\alpha\alpha}$ снизу.

В силу полноты поверхности Φ и ограниченности $z_{\alpha\alpha}$ сверху мы получаем, что проекцией поверхности Φ является вся плоскость $z = 0$. Это делает возможным введение в следующем параграфе на всей плоскости $z = 0$ специальной метрики.

§ 4. Дифференциальное неравенство для решения уравнения (7)

Запишем уравнение (7) в виде $\det(z_{ij}) - \varphi(c_{11}z_{22} + 2c_{12}z_{12} + c_{22}z_{11}) = 0$. Рассматривая левую часть как функцию от производных z_{ij} , обозначим $\det(z_{ij}) - \varphi(c_{11}z_{22} + 2c_{12}z_{12} + c_{22}z_{11}) = \Omega(z_{ij})$. Если допускать только аффинные преобразования переменных x^1, x^2 , то производные $\partial\Omega/\partial z_{ij}$ являются координатами симметричного тензора типа $(0, 2)$. Введем метрику на плоскости $z = 0$, выбрав $g^{ij} = \partial\Omega/\partial z_{ij}$ в качестве координат контравариантного метрического тензора. Тогда для кокасательного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ величина $g^{ij}\xi_i\xi_j$ является инвариантом при допустимых преобразованиях координат. Для любой точки $x = (x^1, x^2)$ поворотом осей можно добиться, чтобы $z_{12}(x) = 0$. Из соотношения (12), где как раз $z_{12} = 0$, видно, что введенная метрика положительно определенная. Производные $z_{ij}, z_{ijk}, z_{ijkl}$ относительно допустимых преобразований координат являются координатами симметричных ковариантных тензоров соответствующих рангов. Будем поднимать и опускать индексы у тензоров с помощью введенной метрики, в частности,

$$z_{jk}^i = g^{ia} z_{ajk}, \quad z^{ijk} = g^{ia} g^{jb} g^{kc} z_{abc}.$$

Рассмотрим тензоры

$$P_{ijkl} = z_{il}^a z_{ajk} - z_{ik}^a z_{ajl}, \quad P_{ik} = z_{hi}^j z_{jk}^h$$

и инвариант $P = z_{ijk} z^{ijk}$. Очевидно, $P \geq 0$. Причем, если $P(x) = 0$ в точке $x = (x^1, x^2)$, то все третьи производные $z_{ijk}(x)$ обращаются в нуль.

Пусть Δ – оператор Лапласа–Бельтрами относительно введенной метрики, ковариантные производные будем обозначать с помощью запятой. Сначала получим некоторую инвариантную оценку для $\Delta(\sqrt{P})$ в произвольной точке $x = (x^1, x^2)$, где $P(x) \neq 0$.

Имеем (см. [2])

$$\Delta(\sqrt{P}) = \frac{\Delta P}{2P^{1/2}} - \frac{g^{ij}P_{,i}P_{,j}}{4P^{3/2}}, \quad (19)$$

$$\frac{1}{2}\Delta P = z^{ijk}\Delta z_{ijk} + z^{ijk,l}z_{ijk,l}. \quad (20)$$

Обозначив $B_{abcijkl} = \frac{1}{2}(z_{abc,i}z_{jkl} - z_{abc}z_{jkl,i})$, получим

$$\frac{2B_{abcijkl}B^{abcijkl}}{P^{3/2}} = \frac{z_{abc,i}z^{abc,i}}{P^{1/2}} - \frac{g^{ij}P_{,i}P_{,j}}{4P^{3/2}} \geq 0.$$

Из соотношений (19), (20) и последнего неравенства следует

$$\Delta(\sqrt{P}) \geq \frac{z^{ijk}\Delta z_{ijk}}{P^{1/2}}. \quad (21)$$

Дифференцируя уравнение $\det(z_{ij}) - \varphi(c_{11}z_{22} + 2c_{12}z_{12} + c_{22}z_{11}) = 0$ по x^k , получим

$$z_{ijk}g^{ij} = 0. \quad (22)$$

Следовательно, $g^{lq}z_{iql,jk} = 0$. Тогда

$$\Delta z_{ijk} = g^{lq}z_{ijk,lq} = g^{lq}(z_{ijl,kq} - z_{ijl,qk}) + g^{lq}(z_{ijl,q} - z_{iql,j})_{,k} + g^{lq}(z_{ijk,l} - z_{ijl,k})_{,q}.$$

Вычисляя, имеем

$$\begin{aligned} z^{ijk}\Delta z_{ijk} = & z^{ijk}g^{lq} \left(-5z_{ijh}\Gamma_{qp}^h\Gamma_{kl}^p + 6z_{ihl}\Gamma_{kp}^h\Gamma_{qj}^p - z_{ijh}\Gamma_{kp}^h\Gamma_{ql}^p \right. \\ & - 2z_{hjl}\Gamma_{qp}^h\Gamma_{ki}^p + 4z_{hqp}\Gamma_{ij}^h\Gamma_{lk}^p - 4z_{phk}\Gamma_{jl}^h\Gamma_{iq}^p - 2z_{hjl}\Gamma_{ik}^h - z_{ijhk}\Gamma_{lk}^h \\ & + 3z_{hql}\Gamma_{ij}^h - 3z_{jk}^h \left(\frac{1}{2}\partial_{lq}g_{ih} - \Gamma_{il}^a\partial_qg_{ah} \right) \\ & \left. + 2z_{jl}^h \left(\frac{1}{2}\partial_{ik}g_{qh} - \Gamma_{qi}^a\partial_kg_{ah} \right) \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь Γ_{ij}^k – символы Кристоффеля для введенной метрики.

Сделаем унимодулярную аффинную замену координат x^1, x^2 , чтобы стало $c_{11} = c_{22} = 1, c_{12} = 0$ и $z_{12} = 0$ в точке x . Тогда в этой точке получим $g^{11} = z_{22} - \varphi', g^{22} = z_{11} - \varphi', g^{12} = 0$.

Следовательно, в силу диагональности метрики в точке x для всех i, j, k

$$P \geq z_{ijk}^2 g^{ii}g^{jj}g^{kk}, \quad P \geq (z_{ij}^k)^2 g^{ii}g^{jj}g_{kk}, \quad P \geq (z^{ijk})^2 g_{ii}g_{jj}g_{kk}$$

(без суммирования). Поэтому

$$|z_{ijk}| \leq \left(\frac{P}{g^{ii}g^{jj}g^{kk}} \right)^{1/2}, \quad |z_{ij}^k| \leq \left(\frac{P}{g^{ii}g^{jj}g^{kk}} \right)^{1/2}, \quad |z^{ijk}| \leq \left(\frac{P}{g^{ii}g^{jj}g^{kk}} \right)^{1/2}. \quad (24)$$

Так как на всей плоскости

$$\partial_p g_{ii} = \frac{z_{iip}}{D} + \frac{(z_{11p} + z_{22p})(z_{ii} - \varphi' + z_{12}^2)\varphi''}{D^2}, \quad (25)$$

где $D = \det(g^{ij})$, то используя (22), получаем в точке x

$$\partial_p g_{ii} = \frac{z_{iip}}{D} + \varphi'' \frac{z_{iip}(z_{ii} - z_{jj})}{D(z_{jj} - \varphi')}, \quad (26)$$

где $j = i + 1 \pmod{2}$. А так как в силу (5) $|\varphi''| \leq \varepsilon \varphi / (z_{11} + z_{22})^2$, то, учитывая, что $|z_{jj} - \varphi'| \geq (1 - \varepsilon)z_{jj}$, $D \geq (1 - \varepsilon)^3$, запишем

$$\partial_p g_{ii} = \frac{z_{iip}}{D} + \varepsilon_{iip} z_{iip}, \quad (27)$$

где ε_{iip} не зависит от p и $|\varepsilon_{iip}| \leq \varepsilon / (1 - \varepsilon)^4$.

Суммирование по повторяющимся индексам будем проводить только в случае, когда один из них верхний, а другой нижний. Если вверху или внизу стоит несколько одинаковых индексов, то при суммировании они рассматриваются как один, например, $g^{qq}z_{qqh}\varepsilon_{qhq} = \sum_q g^{qq}z_{qqh}\varepsilon_{qhq}$. В точке x получаем также $\partial_p g_{12} = z_{12p}/D$, для удобства запишем это в виде

$$\partial_p g_{12} = \frac{z_{12p}}{D} + \varepsilon_{12p} z_{12p}, \quad (28)$$

где $\varepsilon_{12p} = 0$.

Дифференцируя (22) по x^r в точке x , получаем

$$g^{ii}z_{iikr} = -z_{ijk}\partial_r g^{ij}, \quad (29)$$

а так как

$$\begin{aligned} |\partial_r g^{11}| &= |z_{22r} - (z_{22r} + z_{11r})\varphi''| = |z_{22r}| \left| 1 - \varphi'' \frac{z_{22} - z_{11}}{z_{22} - \varphi'} \right| \\ &\leq \frac{|z_{22r}|}{1 - \varepsilon} \leq \left(\frac{P}{g^{22}g^{22}g^{rr}} \right)^{1/2} \frac{1}{1 - \varepsilon} \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$|\partial_r g^{22}| \leq \left(\frac{P}{g^{11}g^{11}g^{rr}} \right)^{1/2} \frac{1}{1 - \varepsilon}, \quad |\partial_r g^{12}| = |z_{12r}| \leq \left(\frac{P}{g^{11}g^{22}g^{rr}} \right)^{1/2},$$

то

$$|g^{ii}z_{iikr}| \leq \frac{4P}{(1 - \varepsilon)D(g^{kk}g^{rr})^{1/2}}. \quad (30)$$

Для вторых производных метрики в точке x с учетом (27)–(30) и (6) получаем

$$\partial_{pq}g_{ij} = \frac{z_{ijpq}}{D} + \varepsilon_{ijpq}z_{ijpq} + \bar{\varepsilon}_{ijpq}, \quad (31)$$

где $\varepsilon_{ijpq} = \varepsilon_{ijp}$, т.е. те же, что в (27), (28), а

$$|\bar{\varepsilon}_{ijpq}| \leq \frac{10(1+\varepsilon)^2\varepsilon P}{(g^{ii}g^{jj}g^{pp}g^{qq})^{1/2}(1-\varepsilon)^9}.$$

Из (22) и симметрии z^{ijk} и g^{lq} следует

$$z^{ijk}g^{lq} \left(-z_{hjl}z_{ik}^h - \frac{1}{2}z_{ijhk}z_{lq}^h + \frac{3}{2}z_{hqlk}z_{ij}^h - \frac{3}{2}z_{jk}^h z_{lqih} + z_{jl}^h z_{qhik} \right) = 0.$$

Отсюда и из (27)–(31) получаем

$$\begin{aligned} & z^{ijk}g^{lq} \left(-2z_{hjl} \Gamma_{iq}^h - z_{ijhk} \Gamma_{lq}^h + 3z_{hqlk} \Gamma_{ij}^h - \frac{3}{2}z_{jk}^h \partial_{lq}g_{ih} + z_{jl}^h \partial_{ik}g_{qh} \right) \\ &= z^{ijk}g^{qq}g^{hh} \left(-\frac{1}{2}z_{ijkh}z_{qqh}(2\varepsilon_{qh} - \varepsilon_{qqh}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{3}{2}z_{qqhk}z_{ijh}(2\varepsilon_{ih} - \varepsilon_{ijh} - \varepsilon_{khqq}) - \frac{3}{2}z_{hjk}\bar{\varepsilon}_{ihqq} + z_{hjq}\bar{\varepsilon}_{qhik} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Далее, так как $P_{,h} = 2z^{ijk}z_{ijk,h} = 2z^{ijk}(z_{ijkh} - 3z_{pj} \Gamma_{ih}^p)$, то

$$z^{ijk}z_{ijkh} = \frac{1}{2}P_{,h} + 3z_{pj} \Gamma_{ih}^p z^{ijk}. \quad (33)$$

Используя неравенство Коши для каждого слагаемого, получаем

$$|P_{,h}g^{qq}g^{hh}z_{qqh}(2\varepsilon_{qh} - \varepsilon_{qqh})| \leq \frac{2P_{,h}^2g^{hh}}{\varepsilon_1 P} + \frac{4P\varepsilon^2\varepsilon_1}{(1-\varepsilon)^8}. \quad (34)$$

Здесь ε_1 может быть любым положительным числом.

В силу диагональности метрики в точке x

$$|\text{grad } \sqrt{P}|^2 = \frac{g^{hh}P_{,h}^2}{4P}. \quad (35)$$

Учитывая, что ε_{khqq} одинаковы для всех q , из (30) получаем, используя (24) и оценки для ε_{ijk} и ε_{ijkl} , что

$$|z^{ijk}g^{qq}g^{hh}z_{qqhk}z_{ijh}(2\varepsilon_{ih} - \varepsilon_{ijh} - \varepsilon_{khqq})| \leq \frac{128\varepsilon P^2}{(1-\varepsilon)^8}. \quad (36)$$

Соотношения (32)–(36) позволяют оценить слагаемые в (23), содержащие четвертые производные функции $z(x^1, x^2)$:

$$\begin{aligned} & \left| z^{ijk}g^{lq} \left(-2z_{hjl} \Gamma_{iq}^h - z_{ijhk} \Gamma_{lq}^h + 3z_{hqlk} \Gamma_{ij}^h - \frac{3}{2}z_{jk}^h \partial_{lq}g_{ih} + z_{jl}^h \partial_{ik}g_{qh} \right) \right| \\ & \leq \frac{2|\text{grad } \sqrt{P}|^2}{\varepsilon_1} + \left(\frac{144}{(1-\varepsilon)^4} + \frac{128}{(1-\varepsilon)^8} + \frac{800(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^9} + \frac{4\varepsilon\varepsilon_1}{(1-\varepsilon)^8} \right) P^2\varepsilon. \end{aligned} \quad (37)$$

Подставив вместо символов Кристоффеля их выражение через метрику, используя неравенства (27), (28), (24) и учитывая, что

$$|\varepsilon_{h p q} z_{h p q} + \varepsilon_{h q p} z_{h q p} - \varepsilon_{q p h} z_{q p h}| \leq \frac{\varepsilon P^{1/2}}{(1 - \varepsilon)^4 (g^{h h} g^{p p} g^{q q})^{1/2}}$$

для любых $h, p, q = 1, 2$, получаем оценку

$$\begin{aligned} & z^{i j k} g^{l q} (-5 z_{i j h} \Gamma_{q p}^h \Gamma_{k l}^p + 6 z_{i h l} \Gamma_{k p}^h \Gamma_{q j}^p - z_{i j h} \Gamma_{k p}^h \Gamma_{q l}^p - 2 z_{h j l} \Gamma_{q p}^h \Gamma_{k i}^p \\ & + 4 z_{h q p} \Gamma_{i j}^h \Gamma_{l k}^p - 4 z_{p h k} \Gamma_{j l}^h \Gamma_{i q}^p + 3 z_{j k}^h \Gamma_{i l}^a \partial_q g_{a h} - 2 z_{j l}^h \Gamma_{q i}^a \partial_k g_{a h}) \\ & \geq \frac{1}{4 D^2} (3 z^{i j k} z_{i j}^s z_{l s q} z_k^{l q} - 2 z^{i j k} z_l^{s q} z_{l s k} z_{q j}^l) - 2^6 \left(\frac{16 \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^4} + \frac{8 \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon)^8} \right) P^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Хотя тензоры $P_{i j k l}$, $P_{i k}$ у нас не имеют непосредственного геометрического смысла, для них выполняются все алгебраические свойства соответствующих тензоров из [2]. В частности,

$$\begin{aligned} g^{i k} P_{i k} &= P, \quad P_{i k} P^{i k} \geq \frac{1}{2} P^2, \quad P_{i j k l} P^{i j k l} = 2 P_{i j} P^{i j}, \\ P_{i j k l} P^{i j k l} + P_{i k} P^{i k} &= 3 z^{i j k} z_{i j}^s z_{l s q} z_k^{l q} - 2 z^{i j k} z_l^{s q} z_{l s k} z_{q j}^l. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$3 z^{i j k} z_{i j}^s z_{l s q} z_k^{l q} - 2 z^{i j k} z_l^{s q} z_{l s k} z_{q j}^l \geq \frac{3}{2} P^2. \quad (39)$$

Для краткости введем обозначение

$$A = \frac{3}{8(1 + \varepsilon)^6} - \varepsilon \left(\frac{1168}{(1 - \varepsilon)^4} + \frac{800(1 + \varepsilon)^2}{(1 - \varepsilon)^9} + \frac{128 + 4\varepsilon\varepsilon_1 + 512\varepsilon}{(1 - \varepsilon)^8} \right). \quad (40)$$

Из (21), (23), (37)–(39), учитывая, что $D \leq (1 + \varepsilon)^3$, получаем

$$\Delta(\sqrt{P}) \geq A P^{3/2} - \frac{2 |\operatorname{grad} \sqrt{P}|^2}{\varepsilon_1 \sqrt{P}}. \quad (41)$$

Эта оценка выполняется в любой точке $x = (x^1, x^2)$, где $P(x) \neq 0$, с любым $\varepsilon_1 > 0$ и является инвариантной относительно допустимых преобразований координат x^1, x^2 .

§ 5. Доказательство теоремы об уравнении для несобственных выпуклых аффинных сфер

Пусть в прямоугольной системе координат параболоид Π удовлетворяет условию $\det(c_{ij}) = 1$ и для поверхностей Π и Φ выполняется уравнение (7). Тогда из результатов § 3 следует, что для вторых производных z_{ii} решения уравнения (7) существуют положительные абсолютные оценки сверху и снизу, зависящие только от ε и d_2 (при $(1 - \varepsilon)^3 > 4\varepsilon$).

Отсюда следует, что метрическая топология на плоскости $z = 0$ относительно введенной метрики эквивалентна стандартной евклидовой.

Рассмотрим на положительной полуоси t обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' + \frac{B}{t}y' + \frac{y'^2}{\varepsilon_0 y} = c_0 y^3 \quad (42)$$

с начальными условиями

$$y(0) = a, \quad y'(0) = 0, \quad (43)$$

где $B > 0, \varepsilon_0 > 0, c_0 > 0, a > 0$ – некоторые константы.

В работе [6] доказано, что если $y(t)$ – решение уравнения (42) для $t \geq 0$ с начальными условиями (43), то существует такое число $d > 0$, зависящее от a, B, ε_0, c_0 , что $\lim_{t \rightarrow d} y(t) = +\infty$. Кроме того, $y'(t) > 0$ при $t \in (0, d)$.

Предположим, что в некоторой точке значение инварианта P не равно нулю. Чтобы не вводить новых обозначений, обозначим эту точку за O и положим $\sqrt{P(O)} = 2a$. Предположим, что нам удалось найти положительную функцию $v(x^1, x^2)$ обладающую следующими свойствами:

- 1) функция v определена в области Σ такой, что Σ содержит точку O и множество $\bar{\Sigma}$ компактно;
- 2) $v(O) = a$;
- 3) $\Delta v \leq (A - H)v^3 + HP^{3/2} - 4|\text{grad } v|^2/(\varepsilon_1 v) + 2|\text{grad } v|^2/(\varepsilon_1 \sqrt{P})$, где A, ε_1 те же, что в неравенстве (41), и положительные числа ε_1 и H таковы, что $A - H > 0$; если $P(x) = 0$, то считаем, что правая часть последнего дифференциального неравенства принимает значение $+\infty$;
- 4) $v(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \partial\Sigma$.

Тогда функция $\sqrt{P} - v$ достигает максимума в точке $\tilde{x} \in \Sigma$, где $\text{grad}(\sqrt{P} - v) = 0$; это означает, что $\text{grad } \sqrt{P}(\tilde{x}) = \text{grad } v(\tilde{x})$. Кроме того, в точке $\tilde{x}$ имеем $\sqrt{P(\tilde{x})} - v(\tilde{x}) \geq a$, следовательно, $\sqrt{P(\tilde{x})} > v(\tilde{x}) > 0$. Отсюда в точке $\tilde{x}$ будем иметь

$$\Delta v \leq (A - H)v^3 + HP^{3/2} - \frac{2|\text{grad } \sqrt{P}|^2}{\varepsilon_1 \sqrt{P}}. \quad (44)$$

Вычитая из неравенства (41) неравенство (44), получаем в точке $\tilde{x}$

$$\Delta(\sqrt{P} - v) \geq (A - H)(P^{3/2} - v^3) > 0.$$

Противоречие с тем, что в этой точке достигается максимум функции $\sqrt{P(x)} - v(x)$. Следовательно, $P(x) \equiv 0$ и все третьи производные функции $z(x^1, x^2)$ тоже тождественно равны нулю. Значит, $z(x^1, x^2)$ – квадратичный полином.

В тех точках, где $P(x) = 0$, функция $\sqrt{P(x)}$ не принадлежит классу C^2 . Но в этих точках функция $\sqrt{P} - v$ не может достигать максимума, и предыдущие рассуждения являются законными.

Приступим к построению функции v со свойствами 1)–4).

Возьмем точку O за начало аффинной системы координат на плоскости $z = 0$. Введем “аффинное расстояние” $s(x) = \sqrt{c_{ij}x^i x^j}$ от точки O до точки $x = (x^1, x^2)$. На любом луче, исходящем из точки O , s изменяется от 0 до $+\infty$. Пусть $y(t)$ – решение уравнения (42) с начальными условиями (43) при $t \geq 0$. Тогда функция $v(x) = y(s(x))$, очевидно, обладает свойствами 1), 2), 4). Докажем, что можно так подобрать постоянные B, ε_0, c_0 , чтобы выполнялось свойство 3). Заметим, что

функция $v(x)$ принадлежит только классу C^1 , поэтому дифференциальные неравенства с участием $v(x)$ мы понимаем в расширенном смысле, как это делается в работе [7]. Там дано определение, которое в нашем случае будет иметь следующий вид.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что Δv (слабо) $\leq u$ на множестве Σ , если для каждой точки $x_0 \in \Sigma$ и каждого числа $\delta > 0$ существуют окрестность V_{δ, x_0} точки x_0 и функция $v_{\delta, x_0}(x) \in C^2$ в V_{δ, x_0} , которая удовлетворяет следующим условиям:

- а) $v(x) - v_{\delta, x_0}(x)$ достигает максимального значения на V_{δ, x_0} в точке x_0 ;
- б) $\Delta v_{\delta, x_0}(x_0) < u(x_0) + \delta$.

При этом (см. [7]) принцип максимума имеет место в обычной формулировке. Всюду в области Σ за исключением точки O имеем

$$\Delta v = g^{ij} v_{,ij} = g^{ij} \frac{\partial s}{\partial x^i} \frac{\partial s}{\partial x^j} y'' + y' \Delta s. \quad (45)$$

Так как функция $s(x)$ инвариантна при замене базисных векторов аффинной системы координат на плоскости $z = 0$, то можно вычислять $\Delta s(x)$ и $(g^{ij} \partial s / \partial x^i \partial s / \partial x^j)|_x$ в такой аффинной системе координат, где матрица (c_{ij}) единичная, а матрица (z_{ij}) диагональная в точке x . При таком преобразовании координат вторые производные z_{ii} функции $z(x^1, x^2)$ изменятся не более чем в λ_0 раз, где λ_0 – максимальное собственное значение матрицы (c_{ij}) . Значит, по-прежнему, z_{ii} имеют абсолютные оценки сверху и снизу, зависящие от ε и d_2 . Обозначим их через M_1 и M_2 :

$$0 < M_2(\varepsilon, d_2) \leq z_{ii} \leq M_1(\varepsilon, d_2).$$

Из (22), (24), (27), (28) получаем (здесь $x_q = x^q$)

$$\Delta s = g^{ij} s_{,ij} = \frac{g^{11}(x^2)^2 + g^{22}(x^1)^2}{s((x^1)^2 + (x^2)^2)} - g^{ii} \frac{x_q}{s} \Gamma_{ii}^q \leq \frac{1}{s} \max_i g^{ii} + \frac{2\varepsilon P^{1/2}}{(1-\varepsilon)^4} \max_i \sqrt{g^{ii}}.$$

А так как $g^{ii} = z_{jj} - \varphi' \leq (1+\varepsilon)z_{jj}$, $j = i+1 \pmod{2}$, то

$$\Delta s \leq \frac{(1+\varepsilon)M_1}{s} + \frac{2\varepsilon(P(1+\varepsilon)M_1)^{1/2}}{(1+\varepsilon)^4}. \quad (46)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} |\text{grad } v|^2 &= y'^2 g^{ij} \frac{\partial s}{\partial x^i} \frac{\partial s}{\partial x^j}, \\ g^{ij} \frac{\partial s}{\partial x^i} \frac{\partial s}{\partial x^j} &= \frac{g^{11}(x^1)^2 + g^{22}(x^2)^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}. \end{aligned} \quad (47)$$

Следовательно,

$$(1-\varepsilon)M_2 \leq g^{ij} \frac{\partial s}{\partial x^i} \frac{\partial s}{\partial x^j} \leq (1+\varepsilon)M_1. \quad (48)$$

Теперь подставим в (45) выражение для $y''(s)$, полученное из (42), воспользуемся оценками (48), (46), равенством (47), учтем, что $y'(s) > 0$, и возьмем

$$B = \frac{(1+\varepsilon)M_1}{(1-\varepsilon)M_2}, \quad c_0 = \frac{A-H}{(1+\varepsilon)M_1}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1}{4},$$

где $H > 0$ выберем чуть позже так, чтобы выполнялось условие $A - H > 0$. Тогда получим в точке x

$$\Delta v \leq (A-H)v^3 - \frac{4|\operatorname{grad} v|^2}{\varepsilon_1 v} + \frac{2\varepsilon(P(1+\varepsilon)M_1)^{1/2}}{(1-\varepsilon)^4} y'. \quad (49)$$

Используя неравенство Коши с постоянной $\varepsilon_1 \sqrt{P}/(2M_2(1-\varepsilon))$, получаем

$$\frac{2\varepsilon(P(1+\varepsilon)M_1)^{1/2} y'}{(1-\varepsilon)^4} \leq \frac{2y'^2(1-\varepsilon)M_2}{\varepsilon_1 \sqrt{P}} + \frac{(1+\varepsilon)\varepsilon^2 M_1 P^{3/2} \varepsilon_1}{2(1-\varepsilon)^9 M_2}.$$

Из (47) и (48) следует $y'^2 \leq |\operatorname{grad} v|^2 / ((1-\varepsilon)M_2)$.

Теперь введем H . Положим

$$\frac{(1+\varepsilon)\varepsilon^2 M_1 \varepsilon_1}{2(1-\varepsilon)^9 M_2} = H,$$

где ε_1 еще нужно будет подобрать. Из последних двух неравенств получим

$$\frac{2\varepsilon(P(1+\varepsilon)M_1)^{1/2}}{(1-\varepsilon)^4} y' \leq \frac{2|\operatorname{grad} v|^2}{\varepsilon_1 \sqrt{P}} + HP^{3/2}.$$

Отсюда и из (49)

$$\Delta v \leq (A-H)v^3 + HP^{3/2} - \frac{4|\operatorname{grad} v|^2}{\varepsilon_1 v} + \frac{2|\operatorname{grad} v|^2}{\varepsilon_1 \sqrt{P}}.$$

Из определения H и A видно, что при

$$\frac{3}{8(1+\varepsilon)^6} - \varepsilon \left(\frac{1168}{(1-\varepsilon)^4} + \frac{128}{(1-\varepsilon)^8} + \frac{800(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^9} + \frac{512\varepsilon}{(1-\varepsilon)^8} \right) > 0 \quad (50)$$

($\varepsilon \approx 10^{-4}$) найдется такое ε_1 , что $A - H > 0$ и условие 3) для функции v выполняется во всей ее области определения за исключением, быть может, точки O .

Теперь проверим, что функция v удовлетворяет условию 3) и в точке O . Заметим, что в точке O правая часть неравенства в 3) равна $a^3(A + 7H)$. Поэтому берем

$$v_{\delta,O}(x^1, x^2) = a + \frac{1}{2} \frac{a^3(A + 7H) + \delta}{g^{11}(O) + g^{22}(O)} ((x^1)^2 + (x^2)^2).$$

Тогда условие б) определения выполняется. Далее, из (42) получаем $y''(0) = c_0 a^3 / (1+B)$ и проверяем, что $c_0 a^3 / (1+B) < (a^3(A + 7H) + \delta) / (g^{11} + g^{22})$. Теперь выполнимость условия а) определения следует из разложения Тейлора $y(s) = a + \frac{1}{2} y''(0) s^2 + \dots$.

Функция $v(x^1, x^2)$ построена.

В процессе построений нам потребовалась пятикратная дифференцируемость функции $z(x^1, x^2)$. По теореме 11.3 из [8] о гладкости решений эллиптических уравнений для выполнения этого условия достаточно потребовать, чтобы $\varphi(t) \in C^{3,\alpha}$.

Отметим еще, что так как $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} = 2\sqrt{\varphi} \geq 2\sqrt{1-\varepsilon}$, то выполнимость условий (4)–(6) достаточно потребовать при $t \geq 2\sqrt{1-\varepsilon}$.

Итак, доказана

ТЕОРЕМА. Пусть функция $\varphi(t)$ определена для $t > 0$, имеет класс $C^{3,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\leq \varphi(t) \leq 1 + \varepsilon, & t > 0, \\ |\varphi'(t)| &\leq \varepsilon \frac{\varphi(t)}{t}, & t \geq 2\sqrt{1 - \varepsilon}, \\ |\varphi''(t)| &\leq \varepsilon \frac{\varphi(t)}{t^2}, & t \geq 2\sqrt{1 - \varepsilon}, \\ |\varphi'''(t)| &\leq \varepsilon \frac{\varphi(t)}{t^3}, & t \geq 2\sqrt{1 - \varepsilon}, \end{aligned}$$

с положительным ε , для которого выполняется неравенство (50). Тогда всякая полная поверхность, заданная в прямоугольной системе координат в виде $z = z(x^1, x^2)$, где функция $z(x^1, x^2)$ удовлетворяет уравнению

$$\det(z_{ij}) = \varphi(z_{11} + z_{22}),$$

является эллиптическим параболоидом.

Условиям теоремы удовлетворяет, например, функция

$$\varphi(t) = 1 + \frac{\varepsilon}{14} \sin \frac{1}{t}, \quad t > 0.$$

Список литературы

1. Jörgens K. Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$ // Math. Ann. 1954. V. 127. P. 130–134.
2. Calabi E. Improper affine hyperspheres of convex type and a generalizations of a theorem by K. Jörgens // Michigan Math. J. 1958. V. 5. №2. P. 105–126.
3. Погорелов А. В. Многомерная проблема Минковского. М.: Наука, 1975.
4. Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian // Acta Math. 1985. V. 155. №3, 4. P. 261–301.
5. Погорелов А. В. Многомерное уравнение Монжа–Ампера $\det(z_{ij}) = \varphi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$. М.: Наука, 1988.
6. Кокарев В. Н. О полных выпуклых решениях уравнения $\text{spur}_m(z_{ij}) = 1$ // Матем. физика, анализ, геом. 1996. Т. 3. №1/2. С. 102–117.
7. Calabi E. An extension of E. Hopf's maximum principle with an application to Riemannian geometry // Duke Math. J. 1958. V. 25. P. 45–56.
8. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях.1. М.: ИЛ, 1962.

Самарский государственный университет
E-mail: kokarev@ssu.samara.ru

Поступила в редакцию
12.11.2001 и 26.08.2002