Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Михайлов, О существовании граничных значений
у решений эллиптических уравнений в полосе, *Матем.
сб.*, 2012, том 203, номер 1, 61–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7800>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 18:08:12

УДК 517.956.2

В. П. Михайлов

О существовании граничных значений у решений эллиптических уравнений в полосе

Для решений линейного эллиптического уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами получен критерий существования пределов в среднем квадратичном на границе двумерной полосы.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, граничное значение, гильбертово пространство, проекционный оператор.

В настоящей работе приводится доказательство результата, анонсированного в заметке [1].

В полосе $Q = \{x \in \mathbb{R}, 0 < y < 1\}$ пространства $\mathbb{R}^2$ рассматривается эллиптическое уравнение порядка $2m$

$$\mathcal{L}u = \prod_{s=1}^k \left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda_s \frac{\partial}{\partial x} \right)^{m_s} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \bar{\lambda}_s \frac{\partial}{\partial x} \right)^{m_s} u = 0, \quad (x, y) \in Q, \quad (1)$$

в котором $\lambda_s, s = 1, \dots, k$, – попарно различные комплексные числа, $\operatorname{Im} \lambda_s > 0$, $m_s \geq 1, s = 1, \dots, k$, – целые числа, $m_1 + \dots + m_k = m \geq 1$. В работе рассматриваются лишь те решения $u(x, y)$ этого уравнения, которые при любом $a \in (0, 1/2)$ принадлежат пространству $W_2^{2m}(x \in \mathbb{R}, a < y < 1 - a)$.

Нас интересует вопрос, какие условия нужно наложить на функцию $u(x, y)$, чтобы она имела L_2 -пределы на границе

$$\partial Q = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \quad \Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}, y = 0\}, \quad \Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}, y = 1\},$$

т.е. чтобы для нее существовали такие принадлежащие $L_2(\mathbb{R})$ функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$, что

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +0} \|u(\cdot, y) - u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} &= 0, \\ \lim_{y \rightarrow 1-0} \|u(\cdot, y) - u_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} &= 0. \end{aligned}$$

Работа посвящена доказательству следующего утверждения.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы решение $u(x, y)$ уравнения (1) имело L_2 -пределы на границе ∂Q , необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия:*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00144а) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3224.2008.1).

- (a) $\sup_{0 < y < 1} \|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty$;
 (b) $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 < y < 1} \|P_N u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0$, где P_N , $N > 0$, – проекционный оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, $P_N = F^{-1} \chi_N F$, F и F^{-1} – оператор преобразования Фурье и его обратный соответственно, а χ_N – оператор умножения на характеристическую функцию множества $\{N < |\xi| < 2N\}$.

Для произвольной функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$

$$(P_N f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{N < |\xi| < 2N} e^{ix\xi} \tilde{f}(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\tilde{f}(\xi) = (Ff)(\xi)$.

Отметим, что сформулированный результат относится к любому решению уравнения (1) и не зависит ни от порядка $2m \geq 2$ этого уравнения, ни от конкретного вида его коэффициентов. Поэтому сформулированная теорема справедлива и для всех решений более общего уравнения

$$\prod_{s=1}^K \left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda_s \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0, \quad (x, y) \in Q, \quad (1')$$

в котором λ_s – произвольные комплексные числа, $\text{Im } \lambda_s \neq 0$, $s = 1, \dots, K$, поскольку любое решение этого уравнения является также и решением уравнения

$$\prod_{s=1}^K \left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda_s \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + \bar{\lambda}_s \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0, \quad (x, y) \in Q,$$

относящимся к уравнениям вида (1).

Условие (а) теоремы есть условие ограниченности в метрике $L_2(\mathbb{R})$ множества следов исследуемого решения на семействе параллельных границ прямых, а условие (b) является в определенном смысле условием равномерного по $y \in (0, 1)$ изменения в метрике $L_2(\mathbb{R})$ этих следов.

Утверждение о необходимости в сформулированной теореме доказывается легко. Если функция $u(x, y)$ имеет L_2 -пределы на ∂Q , то, будучи доопределенной на Γ_0 и Γ_1 этими предельными значениями, она становится функцией из $C([0, 1] \rightarrow L_2(\mathbb{R}))$ и, тем самым, ограниченной по $y \in [0, 1]$ функцией со значениями в $L_2(\mathbb{R})$, т.е. удовлетворяющей условию (а). Далее, в силу равномерной непрерывности этой функции по любому $\varepsilon > 0$ найдется целое $M = M(\varepsilon)$ такое, что

$$\left\| u(\cdot, y) - u\left(\cdot, \frac{r}{M}\right) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} < \varepsilon, \quad y \in \left[\frac{r-1}{M}, \frac{r}{M} \right], \quad r = 1, \dots, M,$$

и, следовательно,

$$\sup_{0 < y < 1} \|P_N u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \max_{1 \leq r \leq M} \sup_{y \in [(r-1)/M, r/M]} \|P_N u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max_{1 \leq r \leq M} \sup_{y \in [(r-1)/M, r/M]} \left(\left\| P_N \left(u(\cdot, y) - u\left(\cdot, \frac{r}{M}\right) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \right. \\
&\quad \left. + \left\| P_N u\left(\cdot, \frac{r}{M}\right) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \right) \\
&\leq \varepsilon + \max_{1 \leq r \leq M} \sup_{y \in [(r-1)/M, r/M]} \left\| P_N u\left(\cdot, \frac{r}{M}\right) \right\|_{L_2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

При больших значениях N второе слагаемое в правой части последнего неравенства становится меньше, чем ε , поскольку для любой функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$

$$\|P_N f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \int_{N < |\xi| < 2N} |\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Таким образом, в доказательстве теоремы нуждается лишь утверждение о достаточности.

Пусть $u(x, y)$ – исследуемое решение уравнения (1). Преобразование Фурье $\tilde{u}(\xi, y)$ этого решения по переменной x является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\prod_{s=1}^k \left(\frac{d}{dy} + i\xi \lambda_s \right)^{m_s} \left(\frac{d}{dy} + i\xi \bar{\lambda}_s \right)^{m_s} \tilde{u}(\xi, y) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad y \in (0, 1),$$

т.е. решением уравнения

$$\prod_{s=1}^k \left(\frac{d}{dy} - \mu_s \right)^{m_s} \left(\frac{d}{dy} + \bar{\mu}_s \right)^{m_s} \tilde{u}(\xi, y) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad y \in (0, 1), \quad (2)$$

где

$$\mu_s = \mu_s(\xi) = b_s |\xi| - i a_s \xi, \quad a_s = \operatorname{Re} \lambda_s, \quad b_s = \operatorname{Im} \lambda_s, \quad s = 1, \dots, k. \quad (3)$$

В качестве фундаментальной для всех $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$, системы решений этого уравнения будем пользоваться обычной системой

$$v_1(\xi, y), \dots, v_{2m}(\xi, y), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
v_1(\xi, y) &= e^{-\bar{\mu}_1 y}, \quad \dots, \quad v_{m_1}(\xi, y) = y^{m_1-1} e^{-\bar{\mu}_1 y}, \\
v_{m_1+1}(\xi, y) &= e^{-\bar{\mu}_2 y}, \quad \dots, \quad v_{m_1+m_2}(\xi, y) = y^{m_2-1} e^{-\bar{\mu}_2 y}, \quad \dots, \\
v_{m_1+\dots+m_k}(\xi, y) &= y^{m_k-1} e^{-\bar{\mu}_k y}, \\
v_{m_1+\dots+m_k+1}(\xi, y) &= e^{\mu_1 y}, \quad \dots, \quad v_{2m_1+\dots+m_k}(\xi, y) = y^{m_1-1} e^{\mu_1 y}, \quad \dots, \\
v_{2m}(\xi, y) &= y^{m_k-1} e^{\mu_k y}.
\end{aligned}$$

Поскольку система функций (4) становится линейно зависимой при $\xi = 0$, то наряду с этой системой мы будем использовать при $\xi \in (-1, 1)$ и более сложную систему функций, являющуюся фундаментальной при всех $\xi \in \mathbb{R}$:

$$w_1(\xi, y), \dots, w_{2m}(\xi, y), \quad (5)$$

где при $s \in [1, m_1]$

$$w_s(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R|\xi|+1} \frac{e^{zy} dz}{(z + \bar{\mu}_1)^s} = \frac{1}{(s-1)!} v_s(\xi, y)$$

(число R равно $\max_{1 \leq s \leq k} |\lambda_s|$), при $s \in (m_1, 2m_1]$

$$w_s(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R|\xi|+1} \frac{e^{zy} dz}{(z + \bar{\mu}_1)^{m_1} (z - \mu_1)^{s-m_1}}$$

и т.д., для $2(m_1 + \dots + m_p) < s \leq 2(m_1 + \dots + m_p) + m_{p+1}$ при любом $p \in [1, k-1]$

$$w_s(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \times \int_{|z|=R|\xi|+1} \frac{e^{zy} dz}{(z + \bar{\mu}_1)^{m_1} (z - \mu_1)^{m_1} \dots (z + \bar{\mu}_p)^{m_p} (z - \mu_p)^{m_p} (z + \bar{\mu}_{p+1})^{s-2(m_1+\dots+m_p)}}$$

и для $2(m_1 + \dots + m_p) + m_{p+1} < s \leq 2(m_1 + \dots + m_{p+1})$, $p \in [1, k-1]$

$$w_s(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \times \int_{|z|=R|\xi|+1} \frac{e^{zy} dz}{((z + \bar{\mu}_1)(z - \mu_1))^{m_1} \dots (z + \bar{\mu}_{p+1})^{m_{p+1}} (z - \mu_{p+1})^{s-2(m_1+\dots+m_p)-m_{p+1}}}.$$

Интересующее нас решение $\tilde{u}(\xi, y)$ уравнения (2) можно представить как в виде

$$\tilde{u}(\xi, y) = \sum_{s=1}^k \sum_{p=0}^{m_s-1} A_{sp}(\xi) y^p e^{-\bar{\mu}_s y} + \sum_{s=1}^k \sum_{p=0}^{m_s-1} B_{sp}(\xi) y^p e^{\mu_s y}, \quad (6)$$

$$\xi \in \mathbb{R}, \quad \xi \neq 0, \quad y \in (0, 1),$$

так и в виде

$$\tilde{u}(\xi, y) = \sum_{s=1}^{2m} C_s(\xi) w_s(\xi, y), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad y \in (0, 1), \quad (7)$$

при некоторых (измеримых) функциях $A_{sp}(\xi)$, $B_{sp}(\xi)$, $p = 0, \dots, m_s - 1$, $s = 1, \dots, k$, и $C_s(\xi)$, $s = 1, \dots, 2m$.

ЛЕММА 1. 1) При всех $s = 1, \dots, 2m$ функции $C_s(\xi)$ принадлежат $L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R})$.

2) При любом $\varepsilon > 0$ существует функция $F_\varepsilon(\xi) \in L_2(|\xi| > 1)$ такая, что

$$|A_{sp}(\xi)| \leq e^{\varepsilon|\xi|} F_\varepsilon(\xi) \quad \text{для всех } |\xi| > 1, \quad p = 0, \dots, m_s - 1, \quad s = 1, \dots, k.$$

3) При любом $\varepsilon > 0$ существует функция $F_\varepsilon(\xi) \in L_2(|\xi| > 1)$, такая, что

$$|B_{sp}(\xi)| \leq e^{-(b_s - \varepsilon)|\xi|} F_\varepsilon(\xi) \quad \text{для всех } |\xi| > 1, \quad p = 0, \dots, m_s - 1, \quad s = 1, \dots, k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что в доказательстве не используются условия (а) и (б) теоремы. Вместе с равенствами (6) и (7) имеют место также равенства

$$\sum_{s=1}^k \sum_{p=0}^{m_s-1} A_{sp}(\xi) \frac{\partial^r}{\partial y^r} (y^p e^{-\bar{\mu}_s y}) + \sum_{s=1}^k \sum_{p=0}^{m_s-1} B_{sp}(\xi) \frac{\partial^r}{\partial y^r} (y^p e^{\mu_s y}) = \frac{\partial^r \tilde{u}(\xi, y)}{\partial y^r}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \xi \neq 0, \quad y \in (0, 1), \quad 0 \leq r \leq 2m-1, \quad (8)$$

$$\sum_{s=1}^{2m} C_s(\xi) \frac{\partial^r w_s(\xi, y)}{\partial y^r} = \frac{\partial^r \tilde{u}(\xi, y)}{\partial y^r}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad y \in (0, 1), \quad 0 \leq r \leq 2m-1, \quad (9)$$

которые будем рассматривать как линейные алгебраические системы $2m$ уравнений с $2m$ неизвестными $A_{sp}(\xi)$, $B_{sp}(\xi)$, $p = 0, \dots, m_s - 1$, $s = 1, \dots, k$, и соответственно $C_s(\xi)$, $s = 1, \dots, 2m$. Все компоненты $2m$ -мерного вектора правых частей этих систем при любом $y \in (0, 1)$ принадлежат (по ξ) пространству $L_2(\mathbb{R})$, а определители этих систем являются определителями Вронского $W(\xi, y)$ и $\tilde{W}(\xi, y)$ систем (4) и (5) соответственно.

Поскольку при любых комплексных α_i , $|\alpha_i| < R|\xi| + 1$, $i = 1, \dots, l$, $l \geq 1$, и целых неотрицательных $p, r_1, \dots, r_l$ интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R|\xi|+1} \frac{z^p dz}{(z - \alpha_1)^{r_1} \dots (z - \alpha_l)^{r_l}}$$

равен 1 при $p = r_1 + \dots + r_l - 1$ и равен 0 при $p < r_1 + \dots + r_l - 1$, то функции системы (5) обладает свойствами

$$\left. \frac{\partial^p w_s(\xi, y)}{\partial y^p} \right|_{y=0} = 0 \quad \text{при } p < s-1, \quad \left. \frac{\partial^{s-1} w_s(\xi, y)}{\partial y^{s-1}} \right|_{y=0} = 1.$$

Поэтому $\tilde{W}(\xi, 0) = 1$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$ и согласно теореме Лиувилля–Остроградского для всех $y \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\tilde{W}(\xi, y) = \exp \left\{ -y \sum_{s=1}^k (\bar{\mu}_s - \mu_s) \right\} = \exp \left\{ -2iy\xi \sum_{s=1}^k a_s \right\},$$

т.е.

$$|\tilde{W}(\xi, y)| = 1 \quad \text{для всех } y \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, решение $C_1(\xi), \dots, C_{2m}(\xi)$ системы (9), взятой, например, при $y = 1/2$, принадлежит $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Решение $A_{10}(\xi), \dots, A_{1,m_1-1}(\xi), \dots, A_{k,m_k-1}(\xi)$, $B_{10}(\xi), \dots, B_{k,m_k-1}(\xi)$ системы (8), взятой при некотором $y = y_0 \in (0, 1)$, имеет вид

$$A_{sp}(\xi) = \frac{\sum_{r=0}^{2m-1} A_{spr}(\xi, y_0) \frac{\partial^r \tilde{u}(\xi, y_0)}{\partial y^r}}{W(\xi, y_0)}, \quad B_{sp}(\xi) = \frac{\sum_{r=0}^{2m-1} B_{spr}(\xi, y_0) \frac{\partial^r \tilde{u}(\xi, y_0)}{\partial y^r}}{W(\xi, y_0)},$$

$$\xi \in \mathbb{R}, \quad \xi \neq 0, \quad p = 0, \dots, m_s - 1, \quad s = 1, \dots, k,$$

где $A_{spr}(\xi, y_0)$ – алгебраическое дополнение элемента $\frac{\partial^r}{\partial y^r}(y^p e^{-\bar{\mu}_s y})|_{y=y_0}$, а $B_{spr}(\xi, y_0)$ – алгебраическое дополнение элемента $\frac{\partial^r}{\partial y^r}(y^p e^{\mu_s y})|_{y=y_0}$ в определителе $W(\xi, y_0)$.

Значение определителя Вронского $W(\xi, y)$ системы (4) при $y = 0$, как нетрудно подсчитать, равно $C\xi^\sigma$, где $\sigma = 2m^2 - m_1^2 - \dots - m_k^2 > 0$, а постоянная C не равна нулю. Следовательно, $W(\xi, y) = C\xi^\sigma \exp\{-2iy\xi \sum_{s=1}^k a_s\}$, и, тем самым,

$$|W(\xi, y)| = |C||\xi|^\sigma \geq |C| > 0 \quad \text{для всех } |\xi| \geq 1, \quad y \in [0, 1]. \quad (10)$$

При оценке миноров $A_{spr}(\xi, y_0)$ и $B_{spr}(\xi, y_0)$ достаточно воспользоваться грубыми неравенствами (см. определение (3) функции $\mu_s(\xi)$)

$$\begin{aligned} |A_{spr}(\xi, y_0)| &\leq A_{spr}|\xi|^{\sigma_r} e^{(-b_1 m_1 |\xi| - \dots - b_r(m_r - 1)|\xi| - \dots - b_k m_k |\xi| + b_1 m_1 |\xi| + \dots + b_k m_k |\xi|)y_0} \\ &= A_{spr}|\xi|^{\sigma_r} e^{b_3 |\xi| y_0}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad p = 0, \dots, m_s - 1, \quad s = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} |B_{spr}(\xi, y_0)| &\leq B_{spr}|\xi|^{\sigma_r} e^{(-b_1 m_1 |\xi| - \dots - b_k m_k |\xi| + b_1 m_1 |\xi| + \dots + b_s(m_s - 1)|\xi| + \dots + b_k m_k |\xi|)y_0} \\ &= B_{spr}|\xi|^{\sigma_r} e^{-b_s |\xi| y_0}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad p = 0, \dots, m_s - 1, \quad s = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (12)$$

в которых A_{spr} , B_{spr} , $p = 0, \dots, m_s - 1$, $s = 1, \dots, k$, $r = 0, \dots, 2m - 1$, – некоторые положительные постоянные, а σ_r , $r = 0, \dots, 2m - 1$, – некоторые неотрицательные целые числа.

Поскольку компоненты $2m$ -мерного вектора, стоящего в правой части системы (8), при любом $y_0 \in (0, 1)$ принадлежат $L_2(\mathbb{R})$, то из (11) и (10) при $y_0 = \varepsilon > 0$ вытекает существование функции $F_\varepsilon(\xi) \in L_2(|\xi| > 1)$ такой, что

$$|A_{sp}(\xi)| \leq e^{\varepsilon|\xi|} F_\varepsilon(\xi), \quad |\xi| \geq 1, \quad p = 0, \dots, m_s - 1, \quad s = 1, \dots, k,$$

а из (12) и (10) при $y_0 = 1 - \varepsilon$ вытекает существование функции $F_\varepsilon(\xi) \in L_2(|\xi| > 1)$ такой, что

$$|B_{sp}(\xi)| \leq e^{(-b_s + \varepsilon)|\xi|} F_\varepsilon(\xi), \quad |\xi| \geq 1, \quad p = 0, \dots, m_s - 1, \quad s = 1, \dots, k.$$

Лемма 1 доказана.

Представим рассматриваемое решение $u(x, y)$, $(x, y) \in Q$, уравнения (1) в виде суммы трех решений этого уравнения:

$$u(x, y) = u_0(x, y) + u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

преобразования Фурье по x которых задаются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(\xi, y) &= \chi(\xi) \sum_{s=1}^{2m} C_s(\xi) w_s(\xi, y), \\ \tilde{u}_1(\xi, y) &= (1 - \chi(\xi)) \sum_{s=1}^k \sum_{p=0}^{m_s-1} A_{sp}(\xi) y^p e^{-\bar{\mu}_s(\xi)y}, \end{aligned}$$

$$\tilde{u}_2(\xi, y) = (1 - \chi(\xi)) \sum_{s=1}^k \sum_{p=0}^{m_s-1} B_{sp}(\xi) y^p e^{\mu_s(\xi)y},$$

где $\chi(\xi)$ – характеристическая функция интервала $(-1, 1)$.

Из утверждения 1) леммы 1 вытекает, что решение $u_0(x, y)$ имеет L_2 -пределы на обоих участках границы Γ_0 и Γ_1 , равные соответственно

$$\left(F^{-1} \chi(\cdot) \sum_{s=1}^{2m} C_s(\cdot) w_s(\cdot, 0) \right)(x), \quad \left(F^{-1} \chi(\cdot) \sum_{s=1}^{2m} C_s(\cdot) w_s(\cdot, 1) \right)(x),$$

и, тем самым, в силу доказанного выше утверждения о необходимости в формулировке теоремы функция $u_0(x, y)$ удовлетворяет соответствующим условиям (a) и (b).

Покажем, что из утверждения 2) леммы 1 вытекает, что функция $u_1(x, y)$ имеет L_2 -предел

$$f(x) = \left(F^{-1}(1 - \chi(\cdot)) \sum_{s=1}^k \sum_{p=0}^{m_s-1} A_{sp}(\cdot) e^{-\bar{\mu}_s(\cdot)} \right)(x)$$

на границе $\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}, y = 1\}$; аналогично с помощью утверждения 3) леммы 1 доказывается, что функция $u_2(x, y)$ имеет L_2 -предел

$$\left(F^{-1}(1 - \chi(\cdot)) \sum_{s=1}^k B_{s0}(\cdot) \right)(x)$$

на границе $\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}, y = 0\}$.

Действительно, при $\varepsilon \in (0, \min_{1 \leq s \leq k} b_s)$ для всех $p = 0, \dots, m_s - 1$, $s = 1, \dots, k$, $|\xi| > 1$

$$|A_{sp}(\xi) e^{-\bar{\mu}_s(\xi)}| \leq F_\varepsilon(\xi) e^{-b_s|\xi|} e^{\varepsilon|\xi|} \leq F_\varepsilon(\xi) \in L_2(|\xi| > 1).$$

Поэтому $\tilde{f}(\xi) = (Ff)(\xi) \in L_2(|\xi| > 1)$ и, тем самым, $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$.

Далее, по теореме Лебега

$$\begin{aligned} & \|A_{sp}(\xi) y^p e^{-\bar{\mu}_s(\xi)y} - A_{sp}(\xi) e^{-\bar{\mu}_s(\xi)}\|_{L_2(|\xi|>1)}^2 \\ & \leq \int_{|\xi|>1} (F_\varepsilon(\xi))^2 e^{2\varepsilon|\xi|} |y^p e^{-\bar{\mu}_s(\xi)y} - e^{-\bar{\mu}_s(\xi)}|^2 d\xi \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $y \rightarrow 1 - 0$, поскольку подынтегральное выражение для п.в. ξ , $|\xi| > 1$, стремится к нулю при $y \rightarrow 1 - 0$, а

$$e^{\varepsilon|\xi|} |y^p e^{-\bar{\mu}_s(\xi)y} - e^{-\bar{\mu}_s(\xi)}| \leq e^{(-b_s y + \varepsilon)|\xi|} + e^{(-b_s + \varepsilon)|\xi|} \leq 2$$

при $y > 1 - \varepsilon$.

Следовательно, функция $u_1(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$(a_1) \sup_{1/2 < y < 1} \|u_1(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty,$$

$$(b_1) \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{1/2 < y < 1} \|P_N u_1(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0,$$

а функция $u_2(x, y)$ – условиям

$$(a_0) \sup_{0 < y < 1/2} \|u_2(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty,$$

$$(b_0) \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 < y < 1/2} \|P_N u_2(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0$$

(заметим, что условие (а) на функцию $u(x, y)$ эквивалентно совокупности условий (a_0) и (a_1) на эту функцию, а условие (b) – совокупности условий (b_0) и (b_1) на нее).

Из сказанного вытекает, что для доказательства сформулированной теоремы достаточно установить, что функция $u_1(x, y)$ при выполнении условий (a_0) и (b_0) имеет L_2 -предел на границе Γ_0 , а функция $u_2(x, y)$ при выполнении условий (a_1) и (b_1) имеет L_2 -предел на Γ_1 . Поскольку оба эти утверждения доказываются по существу одинаково, то для доказательства теоремы нам следует установить справедливость следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Удовлетворяющее условиям (а) и (b) решение $U(x, y)$ уравнения (1), преобразование Фурье которого по x имеет вид*

$$\tilde{U}(\xi, y) = (1 - \chi(\xi)) \sum_{s=1}^k \sum_{p=0}^{m_s-1} A_{sp}(\xi) y^p e^{-\bar{\mu}_s(\xi)y} \quad (13)$$

($\chi(\xi)$ – характеристическая функция интервала $(-1, 1)$), имеет L_2 -предел на границе $\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}, y = 0\}$.

Для доказательства этого предложения нам следует усилить найденные в лемме 1 оценки функций $A_{sp}(\xi)$, $p = 0, \dots, m_s - 1$, $s = 1, \dots, k$.

В силу (а) существует постоянная $M > 0$ такая, что при всех $y \in (0, 1)$

$$\int_{|\xi| > 1} \left| \sum_{s=1}^k \sum_{p=0}^{m_s-1} A_{sp}(\xi) y^p e^{-\bar{\mu}_s(\xi)y} \right|^2 d\xi < M.$$

Следовательно, при произвольном $N > 1$ для всех $y \in (0, 1)$

$$\int_{N > |\xi| > 1} \left| \sum_{s=1}^k \sum_{p=0}^{m_s-1} A_{sp}(\xi) y^p e^{-\bar{\mu}_s(\xi)y} \right|^2 d\xi < M$$

и, тем самым, после перехода к пределу при $y \rightarrow 0$ в последнем неравенстве для всех $N > 1$

$$\int_{N > |\xi| > 1} \left| \sum_{s=1}^k A_{s0}(\xi) \right|^2 d\xi < M,$$

т.е.

$$\sum_{s=1}^k A_{s0}(\xi) = R(\xi) \in L_2(|\xi| > 1). \quad (14)$$

Равенство (13) с помощью (14) можно переписать в виде

$$\tilde{U}(\xi, y) = \tilde{U}_1(\xi, y) + \tilde{U}_2(\xi, y), \quad (15)$$

где

$$\tilde{U}_1(\xi, y) = (1 - \chi(\xi))R(\xi)e^{-\bar{\mu}_k(\xi)y}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_2(\xi, y) = (1 - \chi(\xi)) & \left(\sum_{s=1}^{k-1} A_{s0}(\xi)(e^{-\bar{\mu}_s(\xi)y} - e^{-\bar{\mu}_k(\xi)y}) \right. \\ & \left. + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} A_{sp}(\xi)y^p e^{-\bar{\mu}_s(\xi)y} \right); \end{aligned} \quad (17)$$

здесь

$$\sum_{p=1}^{m_s-1} A_{sp}(\xi)y^p e^{-\bar{\mu}_s(\xi)y} \equiv 0, \quad m_s = 1.$$

ЛЕММА 2. *Решение $U_1(x, y)$ уравнения (1), преобразование Фурье по x которого задается формулой (16), имеет L_2 -пределы на границе ∂Q .*

Эта лемма является следствием утверждения 1) леммы 1. Действительно, в силу этого утверждения функция $f(x) = (F^{-1}(1 - \chi(\cdot))R(\cdot))(x)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, поскольку ее преобразование Фурье $(1 - \chi(\xi))R(\xi) \in L_2(\mathbb{R})$. Эта функция является L_2 -пределом функции $U_1(x, y)$ на Γ_0 : на основании теоремы Лебега

$$\|U_1(\cdot, y) - f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \int_{|\xi|>1} |e^{-\bar{\mu}_k(\xi)y} - 1|^2 |R(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0$$

при $y \rightarrow 0$, поскольку $|e^{-\bar{\mu}_k(\xi)y} - 1| \leq 2$ при $|\xi| > 1$.

Из этой леммы в силу доказанного утверждения о необходимости в теореме вытекает, что функция $U_1(x, y)$ удовлетворяет условиям (а) и (б). Следовательно, этим условиям удовлетворяет и функция $U_2(x, y)$, чье преобразование Фурье по x задается формулой (17). Воспользуемся этим для получения нужных оценок коэффициентов $A_{sp}(\xi)$, $p = 0, \dots, m_s - 1$, $s = 1, \dots, k$.

ЛЕММА 3. *При всех $p = 0, \dots, m_s - 1$, $s = 1, \dots, k$ справедливы равенства*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{N < |\xi| < 2N} \frac{|A_{sp}(\xi)|^2}{|\xi|^{2p}} d\xi = 0. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия (б), примененного к функции $U_2(x, y)$ (см. (17)), по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $N_0 > 1$, что для всех $N > N_0$ при всех $y \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$\int_{N < |\xi| < 2N} \left| \sum_{s=1}^{k-1} A_{s0}(\xi)(e^{-\bar{\mu}_s(\xi)y} - e^{-\bar{\mu}_k(\xi)y}) + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} A_{sp}(\xi)y^p e^{-\bar{\mu}_s(\xi)y} \right|^2 d\xi < \varepsilon,$$

а вместе с ним и неравенство

$$\int_{N < |\xi| < 2N} \left| \sum_{s=1}^{k-1} A_{s0}(\xi) \frac{e^{-\bar{\mu}_s(\xi)y} - e^{-\bar{\mu}_k(\xi)y}}{y} + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} A_{sp}(\xi) y^{p-1} e^{-\bar{\mu}_s(\xi)y} \right|^2 d\xi < \frac{\varepsilon}{y^2}.$$

Интегрируя последнее соотношение по y от y до 1, получим неравенство

$$\begin{aligned} \int_y^1 d\eta \int_{N < |\xi| < 2N} & \left| \sum_{s=1}^{k-1} A_{s0}(\xi) \frac{e^{-\bar{\mu}_s(\xi)\eta} - e^{-\bar{\mu}_k(\xi)\eta}}{\eta} \right. \\ & \left. + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} A_{sp}(\xi) \eta^{p-1} e^{-\bar{\mu}_s(\xi)\eta} \right|^2 d\xi < \frac{\varepsilon}{y}, \end{aligned}$$

которое при $y = 1/N$ превращается в справедливое для всех $N > N_0$ неравенство

$$\begin{aligned} \int_{N < |\xi| < 2N} & \left(\frac{1}{N} \int_{1/N}^1 \left| \sum_{s=1}^{k-1} A_{s0}(\xi) \frac{e^{-\bar{\mu}_s(\xi)\eta} - e^{-\bar{\mu}_k(\xi)\eta}}{\eta} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} A_{sp}(\xi) \eta^{p-1} e^{-\bar{\mu}_s(\xi)\eta} \right|^2 d\eta \right) d\xi \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

После замены во внутреннем интеграле переменной η на переменную ζ , $|\xi|\eta = \zeta$, получим неравенство

$$\begin{aligned} \int_{N < |\xi| < 2N} & \left(\frac{1}{N} \int_{|\xi|/N}^{|\xi|} \left| \sum_{s=1}^{k-1} A_{s0}(\xi) \frac{e^{-\bar{\sigma}_s(\xi)\zeta} - e^{-\bar{\sigma}_k(\xi)\zeta}}{\zeta} \right| |\xi| \right. \\ & \left. + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} \frac{A_{sp}(\xi)}{|\xi|^p} |\xi| \zeta^{p-1} e^{-\bar{\sigma}_s(\xi)\zeta} \right|^2 \frac{d\zeta}{|\xi|} \Big) d\xi \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

где

$$\sigma_s(\xi) = \frac{\mu_s(\xi)}{|\xi|} = b_s - ia_s \operatorname{sgn} \xi, \quad s = 1, \dots, k, \quad (19)$$

или, с учетом того, что ξ и N связаны соотношениями $N < |\xi| < 2N$, неравенство

$$\begin{aligned} \int_{N < |\xi| < 2N} & \left(\int_{|\xi|/N}^{|\xi|} \left| \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{A}_{s0}(\xi) \frac{e^{-\bar{\sigma}_s(\xi)\zeta} - e^{-\bar{\sigma}_k(\xi)\zeta}}{\zeta} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} \tilde{A}_{sp}(\xi) \zeta^{p-1} e^{-\bar{\sigma}_s(\xi)\zeta} \right|^2 d\zeta \right) d\xi \leq \varepsilon \quad \text{при } N > N_0, \end{aligned}$$

в котором

$$\tilde{A}_{sp}(\xi) = \frac{A_{sp}(\xi)}{|\xi|^p}, \quad p = 0, \dots, m_s - 1, \quad s = 1, \dots, k. \quad (20)$$

Из последнего неравенства вытекают два неравенства

$$\int_{N < \xi < 2N} \left(\int_{\xi/N}^{\xi} \left| \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{A}_{s0}(\xi) \frac{e^{-i\bar{\lambda}_s \zeta} - e^{-i\bar{\lambda}_k \zeta}}{\zeta} + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} \tilde{A}_{sp}(\xi) \zeta^{p-1} e^{-i\bar{\lambda}_s \zeta} \right|^2 d\zeta \right) d\xi \leq \varepsilon \quad \text{при } N > N_0, \quad (21_1)$$

$$\int_{-2N < \xi < -N} \left(\int_{|\xi|/N}^{|\xi|} \left| \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{A}_{s0}(\xi) \frac{e^{i\lambda_s \zeta} - e^{i\lambda_k \zeta}}{\zeta} + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} \tilde{A}_{sp}(\xi) \zeta^{p-1} e^{i\lambda_s \zeta} \right|^2 d\zeta \right) d\xi \leq \varepsilon \quad \text{при } N > N_0, \quad (21_2)$$

в которых λ_s , $s = 1, \dots, k$, — числа, определяющие уравнение (1).

В пространстве $\mathbb{C}^{m-1}$ векторов

$$(C_{1,0}, \dots, C_{k-1,0}, C_{1,1}, \dots, C_{1,m_1-1}, \dots, C_{k,m_k-1}),$$

$$\|C\|_{\mathbb{C}^{m-1}}^2 = \sum_{s=1}^k |C_{s,0}|^2 + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} |C_{s,p}|^2,$$

рассмотрим квадратичные формы

$$\mathfrak{K}_1(\xi, N, C) = \int_{|\xi|/N}^{|\xi|} \left| \sum_{s=1}^{k-1} C_{s,0} \frac{e^{-i\bar{\lambda}_s \zeta} - e^{-i\bar{\lambda}_k \zeta}}{\zeta} + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} C_{s,p} \zeta^{p-1} e^{-i\bar{\lambda}_s \zeta} \right|^2 d\zeta, \quad (22_1)$$

$$\mathfrak{K}_2(\xi, N, C) = \int_{|\xi|/N}^{|\xi|} \left| \sum_{s=1}^{k-1} C_{s,0} \frac{e^{i\lambda_s \zeta} - e^{i\lambda_k \zeta}}{\zeta} + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} C_{s,p} \zeta^{p-1} e^{i\lambda_s \zeta} \right|^2 d\zeta, \quad (22_2)$$

коэффициенты которых зависят от параметров N и ξ , $N \geq N_0$, $N < |\xi| < 2N$.

Имеет место

ЛЕММА 4. *Квадратичные формы $\mathfrak{K}_i(\xi, N, C)$, $i = 1, 2$, положительно определены, т.е.*

$$\Lambda_i = \inf_{\mathfrak{M}} \mathfrak{K}_i(\xi, N, C) > 0, \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

где $\mathfrak{M} = \{N \geq N_0, N \leq |\xi| \leq 2N, \|C\|_{\mathbb{C}^{m-1}} = 1\}$.

Воспользуемся результатом этой леммы для того, чтобы закончить доказательство леммы 3. Продолжая в силу леммы 4 неравенства (21₁) и (21₂), получим, что по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $N_0 = N_0(\varepsilon) > 1$, что для всех $N \geq N_0$

$$\Lambda_1 \int_{N < \xi < 2N} \left(\sum_{s=1}^{k-1} |\tilde{A}_{s0}(\xi)|^2 + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} |\tilde{A}_{sp}(\xi)|^2 \right) d\xi \leq \varepsilon,$$

$$\Lambda_2 \int_{-2N < \xi < -N} \left(\sum_{s=1}^{k-1} |\tilde{A}_{s0}(\xi)|^2 + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} |\tilde{A}_{sp}(\xi)|^2 \right) d\xi \leq \varepsilon,$$

т.е. в силу соотношения (14) и равенств (20) для всех $N \geq N_0$

$$\int_{N < |\xi| < 2N} \sum_{s=1}^k \sum_{p=0}^{m_s-1} \frac{|A_{sp}(\xi)|^2}{|\xi|^{2p}} d\xi \leq \frac{\varepsilon}{\min(\Lambda_1, \Lambda_2)},$$

откуда и вытекает утверждение леммы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Поскольку квадратичные формы $\mathfrak{K}_1(\xi, N, C)$ и $\mathfrak{K}_2(\xi, N, C)$, очевидно, неотрицательно определенные, то следует проверить, что $\Lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2$. Докажем это для Λ_1 (доказательство того, что $\Lambda_2 \neq 0$, аналогично).

Предположим, что $\Lambda_1 = 0$. Тогда существуют такие последовательности

$$\{N_n, n = 1, 2, \dots\}, \quad \{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}, \quad \{C^n, n = 1, 2, \dots\},$$

для которых $\mathfrak{K}_i(\xi_n, N_n, C^n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Если последовательность $\{N_n, n = 1, 2, \dots\}$ ограничена, то ее можно считать сходящейся при $n \rightarrow \infty$ к некоторому числу M , $N_n \rightarrow M$, последовательность $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ – сходящейся к некоторому $\xi_0 \in [M, 2M]$, а последовательность $\{C^n, n = 1, 2, \dots\}$ – сходящейся к некоторому вектору $C^0 \in \mathbb{C}^{m-1}$, $\|C^0\|_{\mathbb{C}^{m-1}} = 1$. В этом случае в силу сделанного предположения

$$\int_{\xi_0/M}^{\xi_0} \left| \sum_{s=1}^{k-1} C_{s,0}^0 \frac{e^{-i\bar{\lambda}_s \zeta} - e^{-i\bar{\lambda}_k \zeta}}{\zeta} + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} C_{s,p}^0 \zeta^{p-1} e^{-i\bar{\lambda}_s \zeta} \right|^2 d\zeta = 0,$$

откуда следует, что

$$\sum_{s=1}^{k-1} C_{s,0}^0 e^{-i\bar{\lambda}_s \zeta} - \left(\sum_{s=1}^{k-1} C_{s,0}^0 \right) e^{-i\bar{\lambda}_k \zeta} + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} C_{s,p}^0 \zeta^p e^{-i\bar{\lambda}_s \zeta} \equiv 0, \quad \zeta \in \left[\frac{\xi_0}{M}, \xi_0 \right],$$

чего быть не может, поскольку $\|C^0\|_{\mathbb{C}^{m-1}} = 1$.

Если последовательность $\{N_n, n = 1, 2, \dots\}$ не ограничена, то можно считать, что $N_n \rightarrow \infty$, $\xi_n \rightarrow \infty$, $\xi_n/N_n \rightarrow \alpha \in [1, 2]$, $C^n \rightarrow C^0 \in \mathbb{C}^{m-1}$ при $n \rightarrow \infty$, $\|C^0\|_{\mathbb{C}^{m-1}} = 1$. В этом случае получаем равенство

$$\int_{\alpha}^{\infty} \left| \sum_{s=1}^{k-1} C_{s,0}^0 \frac{e^{-i\bar{\lambda}_s \zeta} - e^{-i\bar{\lambda}_k \zeta}}{\zeta} + \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^{m_s-1} C_{s,p}^0 \zeta^{p-1} e^{-i\bar{\lambda}_s \zeta} \right|^2 d\zeta = 0,$$

которое также невозможно при $\|C^0\|_{\mathbb{C}^{m-1}} = 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Для всех $p = 0, \dots, m_s - 1$, $s = 1, \dots, k$ имеют место равенства

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{1 < |\xi| < N} \frac{|A_{sp}(\xi)|^2}{|\xi|^{2p-1}} d\xi = 0. \quad (24)$$

Лемма 5 вытекает из леммы 3 в силу утверждения, доказанного в работе [2] (см. [2; лемма 6]).

В следующих двух леммах под функцией $A(\xi)$ понимается какая-либо из функций $A_{sp}(\xi)$, $p = 0, \dots, m_s - 1$, $s = 1, \dots, k$.

ЛЕММА 6. *Если*

$$\frac{1}{N} \int_{1 < |\xi| < N} |\xi| |A(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad (25)$$

то при любых вещественных $a, b, c, d, b > 0, d > 0$,

$$\int_{|\xi| > 1} |A(\xi)|^2 |e^{-(b|\xi| + ia\xi)y} - e^{-(d|\xi| + ic\xi)y}|^2 d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow 0. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (25) следует, что

$$\frac{1}{N} \int_1^N \xi |A(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad (25_1)$$

$$\frac{1}{N} \int_{-N}^{-1} |\xi| |A(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (25_2)$$

Покажем, что из (25₁) вытекает соотношение

$$\int_1^\infty |A(\xi)|^2 |e^{-(b+ai)\xi y} - e^{-(d+ci)\xi y}|^2 d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow 0; \quad (26_1)$$

поскольку аналогично доказывается, что из (25₂) вытекает соотношение

$$\int_{-\infty}^{-1} |A(\xi)|^2 |e^{(b-ia)\xi y} - e^{(d-ic)\xi y}|^2 d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow 0, \quad (26_2)$$

то этого достаточно для доказательства леммы.

Имеем

$$\begin{aligned} J(y) &= \int_1^\infty |A(\xi)|^2 |e^{-(b+ai)\xi y} - e^{-(d+ci)\xi y}|^2 d\xi \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{\xi} |e^{-(b+ai)\xi y} - e^{-(d+ci)\xi y}|^2 d \left(\int_1^\xi \rho |A(\rho)|^2 d\rho \right) \\ &= - \int_1^\infty \left(\frac{1}{\xi} \int_1^\xi \rho |A(\rho)|^2 d\rho \right) \psi(\xi, y) d\xi, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi(\xi, y) &= -2y (be^{-2b\xi y} + de^{-2d\xi y} - (b+d)e^{-(b+d)\xi y} \cos(a-c)\xi y \\ &\quad - (a-c)e^{-(b+d)\xi y} \sin(a-c)\xi y) \\ &\quad - \frac{e^{-2b\xi y} + e^{-2d\xi y} - 2e^{-(b+d)\xi y} \cos(a-c)\xi y}{\xi}. \end{aligned}$$

По произвольному $\varepsilon > 0$ в силу (25₁) найдется такое $N_0 > 1$, что

$$\frac{1}{\xi} \int_1^\xi \rho |A(\rho)|^2 d\rho < \varepsilon \quad \text{для всех } \xi \geq N_0$$

и, тем самым,

$$J(y) \leq \int_1^{N_0} \left(\frac{1}{\xi} \int_1^\xi \rho |A(\rho)|^2 d\rho \right) |\psi(\xi, y)| d\xi + \varepsilon \int_{N_0}^\infty |\psi(\xi, y)| d\xi.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\psi(\xi, y)| d\xi &\leq \int_0^\infty \left(2be^{-2b\xi} + 2de^{-2d\xi} + 2(b+d)e^{-2(b+d)\xi} + 2|a-c|e^{-(b+d)\xi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-2b\xi} + e^{-2d\xi} - 2e^{-(b+d)\xi} \cos(a-c)\xi}{\xi} \right) d\xi = C_0 < \infty \end{aligned}$$

и при любом $N_0 \geq 1$

$$\psi(\xi, y) \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow 0, \quad 1 \leq \xi \leq N_0,$$

то при y , достаточно близких к нулю,

$$J(y) \leq \varepsilon + \varepsilon C_0 = (1 + C_0)\varepsilon,$$

откуда вытекает (26₁). Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Если при некотором целом $p > 0$

$$\frac{1}{N} \int_{1 < |\xi| < N} \frac{|A(\xi)|^2}{|\xi|^{2p-1}} d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad (27)$$

то при любых вещественных a и b , $b > 0$, $y \in (0, 1)$,

$$y^{2p} \int_{|\xi| > 1} |A(\xi)|^2 |e^{-(b|\xi| + ia\xi)y}|^2 d\xi = y^{2p} \int_{|\xi| > 1} |A(\xi)|^2 e^{-2b|\xi|y} d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow 0. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь, как и в доказательстве леммы 6, достаточно проверить, что из вытекающего из (27) условия

$$\frac{1}{N} \int_1^N \frac{|A(\xi)|^2}{\xi^{2p-1}} d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty \quad (27_1)$$

вытекает соотношение

$$y^{2p} \int_1^\infty |A(\xi)|^2 e^{-2b\xi y} d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow 0. \quad (28_1)$$

Так как

$$\begin{aligned} J_1(y) &= y^{2p} \int_1^\infty |A(\xi)|^2 e^{-2b\xi y} d\xi = y^{2p} \int_1^\infty \xi^{2p-1} e^{-2b\xi y} d \left(\int_1^\xi \frac{|A(\rho)|^2}{\rho^{2p-1}} d\rho \right) \\ &= \int_1^\infty \left(\frac{1}{\xi} \int_1^\xi \frac{|A(\rho)|^2}{\rho^{2p-1}} d\rho \right) \psi_1(\xi, y) d\xi, \end{aligned}$$

где

$$\psi_1(\xi, y) = -y^{2p} \xi^{2p-1} e^{-2b\xi y} (2p - 1 - 2b\xi y).$$

В силу (27₁) по любому $\varepsilon > 0$ найдется $N_0 > 1$ такое, что

$$\frac{1}{N} \int_1^N \frac{|A(\rho)|^2}{\rho^{2p-1}} d\rho < \varepsilon \quad \text{при } N > N_0.$$

Поэтому

$$J_1(y) \leq \int_1^{N_0} \left(\frac{1}{\xi} \int_1^\xi \frac{|A(\rho)|^2}{\rho^{2p-1}} d\rho \right) |\psi_1(\xi, y)| d\xi + \varepsilon \int_{N_0}^\infty |\psi_1(\xi, y)| d\xi.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\psi_1(\xi, y)| d\xi &\leq \int_0^\infty y(y\xi)^{2p-1} e^{-2by\xi} (2p-1+2by\xi) d\xi \\ &= \int_0^\infty \zeta^{2p-1} e^{-2b\zeta} (2p-1+2b\zeta) d\zeta = C_1 < \infty \end{aligned}$$

и поскольку при любом $N_0 \geq 1$

$$\psi_1(\xi, y) \Rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow 0, \quad 1 \leq \xi \leq N_0,$$

то для y , достаточно близких к нулю,

$$J_1(y) \leq \varepsilon + C_1 \varepsilon,$$

откуда следует (28₁). Лемма доказана.

Как уже отмечалось, для доказательства сформулированной теоремы достаточно установить справедливость приведенного выше предложения: доказать существование L_2 -предела на границе Γ_0 специального решения $U(x, y)$ уравнения (1), преобразование Фурье $\tilde{U}(\xi, y)$ по x которого задается формулой (13), или, что то же самое, доказать существование $L_2(\mathbb{R})$ -предела при $y \rightarrow 0$ функции $\tilde{U}(\xi, y) = \tilde{U}_1(\xi, y) + \tilde{U}_2(\xi, y)$. (см. (15)). По лемме 2 функция $\tilde{U}_1(\xi, y)$ имеет $L_2(\mathbb{R})$ -предел при $y \rightarrow 0$. Покажем, что функция $\tilde{U}_2(\xi, y)$ имеет нулевой $L_2(\mathbb{R})$ -предел при $y \rightarrow 0$, а точнее, что каждое слагаемое суммы (17), из которых состоит функция $\tilde{U}_2(\xi, y)$, имеет нулевой $L_2(\mathbb{R})$ -предел при $y \rightarrow 0$. Слагаемое

$$(1 - \chi(\xi)) A_{s0}(\xi) (e^{-\bar{\mu}_s(\xi)y} - e^{-\bar{\mu}_k(\xi)y}), \quad s = 1, \dots, k-1,$$

имеет нулевой $L_2(\mathbb{R})$ -предел при $y \rightarrow 0$ на основании леммы 5 и с учетом леммы 6, в которой положено

$$A(\xi) = A_{s0}(\xi), \quad a = a_s, \quad b = b_s, \quad s = 1, \dots, k-1, \quad c = a_k, \quad d = b_k,$$

а слагаемое

$$(1 - \chi(\xi)) A_{sp}(\xi) y^p e^{-\bar{\mu}_s(\xi)y}, \quad p = 1, \dots, m_k - 1, \quad s = 1, \dots, k,$$

– на основании леммы 5 и с учетом леммы 7, в которой положено

$$A(\xi) = A_{sp}(\xi), \quad a = a_s, \quad b = b_s, \quad p = 1, \dots, m_k - 1, \quad s = 1, \dots, k.$$

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] В. П. Михайлов, “О существовании граничных значений у решений эллиптического уравнения в полосе”, *Докл. РАН*, **427**:2 (2009), 165–167.
- [2] В. П. Михайлов, “О существовании граничных значений у метагармонических функций”, *Матем. сб.*, **190**:10 (1999), 17–48; англ. пер.: V. P. Mikhailov, “Existence of boundary values for metaharmonic functions”, *Sb. Math.*, **190**:10 (1999), 1417–1448.

В. П. Михайлов (V. P. Mikhailov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: drozzin@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

14.10.2010