Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Зорич, О мере конформного различия пространств Евклида и Лобачевского, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 12, 107–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7801>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:21:39

УДК 517.54+514.774

В. А. Зорич

О мере конформного различия пространств Евклида и Лобачевского

Известно, что пространства Евклида $\mathbb{R}^n$ и Лобачевского $\mathbb{H}^n$ не эквивалентны не только конформно, но и квазиконформно. В работе дана точная асимптотика критического роста коэффициента квазиконформности диффеоморфизма $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ на бесконечности, при которой такое отображение f становится возможным. Рассмотрен также общий случай погружений $f: M^n \rightarrow N^n$ римановых многообразий конформно-параболического типа.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: квазиконформное отображение, риманово многообразие, конформный тип риманова многообразия, пространство Евклида, пространство Лобачевского.

Одним из ярких и широко известных результатов Н. В. Ефимова является его обобщение теоремы Гильберта о нереализуемости в трехмерном евклидовом пространстве плоскости Лобачевского.¹ В теореме Ефимова кривизна поверхности уже может быть переменной, но отделенной от нуля отрицательной величиной. Определенная скорость стремления к нулю при уходе на бесконечность здесь тоже допустима (см. [1]–[3]).

При рассмотрении соотношений, инвариантных относительно локального выбора масштаба (т.е. выбора местной единицы измерения длин, что встречается в физике в качестве калибровочных преобразований), мы, говоря математическим языком, имеем дело с конформными изменениями римановой метрики: $\tilde{g} = \lambda^2(x)g$ или $d\tilde{s} = \lambda(x)ds$.

При конформных преобразованиях метрики стандартные кривизны, конечно, не инвариантны. Не инвариантна и стандартная классификация точек поверхности и самих поверхностей по знаку кривизны. Достаточно вспомнить наличие конформно-евклидовой модели Пуанкаре геометрии Лобачевского или наличие стереографической проекции евклидова пространства на сферу.

Вместе с тем хорошо известно, что, например, евклидова плоскость и плоскость Лобачевского различны даже в смысле их конформной структуры (теорема Лиувилля, если ссылаться на комплексный анализ и модель Пуанкаре), хотя локально, точнее, в пределах любой компактной части, это заметить невозможно (в силу теоремы Римана о конформном отображении области плоскости на круг). Кстати, в высших размерностях, в отличие от двумерного случая, области обычно конформно жестки и ничего подобного упомянутой теореме

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00743а, № 11-01-12033-офи-м) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3476.2010.1).

¹Я не смог участвовать в конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова, но с теплыми воспоминаниями о нем пишу эту статью.

Римана там нет (это другая теорема Лиувилля, доказанная им в 1850 г., т.е. за три года до появления знаменитой диссертации Римана).

Там, где нет конформной эквивалентности областей или иных объектов (например, конформных структур в теории Тайхмюллера пространства римановых поверхностей), рассматривают отображения, наименее неконформные в том или ином смысле. Стандартный объект здесь – так называемые *квазиконформные отображения*, которые допускают ограниченные искажения в следующем смысле. Напомню определение. Для простоты будем говорить о гладких отображениях. Линейное невырожденное отображение $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ преобразует шар в эллипсоид. Отображение L конформно лишь тогда, когда этот эллипсоид – шар. Значит, отношение $k_L \geq 1$ наибольшей полуоси эллипсоида к наименьшей (или $\log k_L$) может служить мерой отклонения линейного отображения от конформности. Это – *коэффициент квазиконформности отображения L* . В случае общего диффеоморфизма f мы в каждой точке отображаемой области находим коэффициент квазиконформности касательного отображения f' и берем верхнюю грань этих величин по всем точкам области. Ее обычно обозначают через k_f и называют *коэффициентом квазиконформности отображения в рассматриваемой области*. Если $k_f = 1$, то отображение конформно, а если $k_f < \infty$, то отображение называется *квазиконформным* (точнее, *k_f -квазиконформным*) или *отображением с ограниченным искажением*.

Ясно, что в пределах любой компактной части отображаемой области пространства любой диффеоморфизм является отображением с ограниченным искажением. Но коэффициент квазиконформности (вместе с искажениями) может расти при расширении рассматриваемой компактной части, причем может расти неограниченно, так что в целой области отображение не обязано быть квазиконформным.

Можно показать, что плоскость Евклида нельзя отобразить на (или даже в) плоскость Лобачевского не только конформно, но и с ограниченным отклонением от конформности, т.е. упомянутая выше теорема Лиувилля устойчива в смысле возможности отклонения коэффициента квазиконформности от постоянной единицы (подобно тому, как теорема Гильберта в соответствии с теоремой Ефимова устойчива относительно вариации постоянной отрицательной кривизны регулярной поверхности).

Но можно поставить вопрос о количественном описании степени конформного различия плоскостей и пространств Евклида $\mathbb{R}^n$ и Лобачевского $\mathbb{H}^n$. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ – диффеоморфизм или даже гладкое погружение. Обозначим через $k_f(r)$ коэффициент квазиконформности отображения f в пределах шара $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq r\}$ радиуса r . При $r \rightarrow +\infty$ величина $k_f(r)$, вообще говоря, растет. Если она ограничена, то, как уже было сказано, такое отображение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{H}^n$ невозможно. Какова же точная асимптотика допустимого роста функции $k_f(r)$, при которой эти пространства в указанном смысле все еще различимы?

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Если $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ – погружение евклидова пространства размерности $n \geq 2$ в пространство Лобачевского той же размерности, а $k_f(r)$ – коэффициент квазиконформности отображения f в шаре радиуса r с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^n$, то интеграл $\int_0^\infty \frac{dr}{rk_f(r)}$ сходится.*

Указанная асимптотика точна в том смысле, что если для неубывающей функции $k(r)$ этот интеграл сходится, то между пространствами $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{H}^n$ существует такой диффеоморфизм $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$, что $k_f(r) \leq k(r)$.

Таким образом, с точки зрения тех, кто считает логарифмическую функцию почти постоянной при движении аргумента к бесконечности (а порой это допущение вполне оправдано), конформное или, лучше сказать, квазиконформное различие пространств Евклида и Лобачевского может казаться не слишком сильным.

Приведенная теорема является геометрической интерпретацией результата работы [4], связанной с исследованием условий глобальной обратимости локально обратимых квазиконформных отображений евклидова пространства в себя. Вскользь (одним абзацем в [5]) мы уже обратили на это внимание, но приведенная развернутая формулировка теоремы здесь появляется впервые. Более того, теперь сам исходный вопрос можно трактовать шире и понимать глубже в следующем отношении.

Понятие квазиконформного и, в частности, конформного отображения имеет смысл и для отображений римановых многообразий (а после некоторых простых видоизменений даже и для метрических пространств). Коэффициент квазиконформности, очевидно, не меняется при конформном изменении метрики риманова многообразия. По этой причине, рассматривая квазиконформные отображения (вложения или погружения) римановых многообразий, мы вправе рассматривать целый класс метрик, конформных исходной метрике многообразия.

Напомним теперь некоторые известные факты, полезные для нас.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Локально обратимое квазиконформное отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ при $n > 2$ обратимо глобально.*

Это утверждение было сформулировано М. А. Лаврентьевым в [6] для $n = 3$ и позднее доказано в работе [7]. Затем оно было развито в нескольких направлениях (см. обзоры [8], [9]) и, в частности, в [4] была указана в определенном смысле точная асимптотика допустимого роста коэффициента квазиконформности на бесконечности, при которой еще можно гарантировать глобальную обратимость произвольного погружения $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Переход от погружений евклидова пространства к общему случаю погружений римановых многообразий (см. [10], [11]) и анализ доказательства в [7] стимулировали появление следующей конформно-инвариантной формы исходной теоремы, связанной с асимптотической геометрией и конформной классификацией римановых многообразий (см. [12]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Для глобальной инъективности квазиконформного погружения $f: M^n \rightarrow N^n$ риманова многообразия M^n в односвязное риманово многообразие N^n при $n > 2$ достаточно, чтобы многообразие M^n имело конформно-параболический тип.*

Заметим, что некомпактные римановы многообразия можно конформно инвариантно разбить на два класса: многообразия конформно-параболического типа и многообразия конформно-гиперболического типа. Пространства Евклида и Лобачевского являются представителями этих классов соответственно. О конформном типе многообразия см., например, в [9], [12], [13].

Достаточным признаком конформной параболичности полного риманова некомпактного многообразия M^n является, например, расходимость интеграла $\int_0^\infty S^{1/(1-n)}(r) dr$, где $S = S(r)$ – площадь $((n-1)$ -мера) геодезической сферы радиуса r с фиксированным центром $o \in M^n$.

Имеет место следующая теорема (см. [14] и развернутое изложение в [15]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть M^n и N^n – римановы многообразия размерности $n \geq 2$, причем M^n – полное и имеет конформно-параболический тип. Если погружение $f: M^n \rightarrow N^n$ таково, что

$$\int_0^\infty \frac{dr}{(k_f S^{1/(n-1)})(r)} = \infty,$$

то хаусдорфова размерность множества $N^n \setminus f(M^n)$ равна нулю, а если к тому же $n > 2$ и N^n односвязно, то f – вложение.

В частности, если $M^n = \mathbb{R}^n$, то $S(r) \asymp r^{n-1}$, и мы получаем уже фигурировавший выше интеграл $\int_0^\infty \frac{dr}{rk_f(r)}$.

Заметим, что из последней теоремы можно заключить (см. [15]), что при ее условиях многообразие N^n , куда идет отображение, само оказывается конформно-параболического типа, а указанная асимптотика допустимого роста коэффициента квазиконформности отвечает именно за сохранение конформного типа отображаемого многообразия. Таким образом, вопрос о степени конформного различия пространств Евклида и Лобачевского, будучи интересным сам по себе, естественно расширяется до вопроса об условиях на отображение, при которых сохраняется конформный тип отображаемого многообразия.

В этой связи отметим еще, что такие классические факты теории аналитических функций, как теорема об устранении изолированной особенности, теорема Лиувилля о постоянстве функции, голоморфной и ограниченной во всей плоскости, или даже, казалось бы, такой совсем специфически и тонко связанный с голоморфностью факт, как теорема Пикара, – все это справедливо и для квазиконформных отображений, и вообще для отображений, сохраняющих параболический конформный тип исходных областей задания функций или отображений (см. [9], [12].)

Подобно тому, как пространство Евклида ни конформно, ни даже квазиконформно не погружаемо в пространство Лобачевского (хотя обратное конформное вложение, конечно, имеется – модель Пуанкаре), так никакое многообразие конформно-параболического типа ни конформно, ни квазиконформно не погружается в многообразие конформно-гиперболического типа. Это – общий факт, лежащий в основе многих (в том числе перечисленных выше) теорем геометрической теории функций.

Проблема конформного типа, известная в теории аналитических функций со времен теорем униформизации, как видим, появляется и в многомерном случае в теории квазиконформных отображений. Возникают вопросы описания признаков конформного типа риманова многообразия в терминах его асимптотической геометрии. Один такой признак конформной параболичности риманова многообразия мы даже уже упомянули выше (перед формулировкой второй теоремы). Важную роль в этих вопросах играет также изопериметрическое

неравенство и связанная с ним изопериметрическая функция риманова многообразия. Последняя меняется при конформном изменении римановой метрики. Интересно, что на любом некомпактном римановом многообразии изопериметрическое неравенство конформной заменой метрики приводится либо к виду, который оно имеет в пространстве Евклида соответствующей размерности, либо к виду, который оно имеет в пространстве Лобачевского, в полном соответствии с конформным типом исходного многообразия (см. [13], [16], [17] и статью В. М. Кесельмана в сборнике трудов конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова, проведенной в Москве в августе 2010 г.).

Список литературы

- [1] Н. В. Ефимов, “Корректность теоремы Гильберта о поверхностях постоянной отрицательной кривизны”, *Докл. АН СССР*, **136**:6 (1961), 1283–1286; англ. пер.: N. V. Efimov, “The validity of Hilbert’s theorem on surfaces of constant negative curvature”, *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 189–192.
- [2] Н. В. Ефимов, “Невозможность в трехмерном евклидовом пространстве полной регулярной поверхности с отрицательной верхней гранью гауссовой кривизны”, *Докл. АН СССР*, **150**:6 (1963), 1206–1209; англ. пер.: N. V. Efimov, “Impossibility of a complete regular surface in Euclidean 3-space whose Gaussian curvature has a negative upper bound”, *Soviet Math. Dokl.*, **4** (1963), 843–846.
- [3] Н. В. Ефимов, “Поверхности с медленно изменяющейся отрицательной кривизной”, *УМН*, **21**:5 (1966), 3–58; англ. пер.: N. V. Efimov, “Surfaces with a slowly changing negative curvature”, *Russian Math. Surveys*, **21**:5 (1966), 1–55.
- [4] В. А. Зорич, “Допустимый порядок роста коэффициента квазиконформности в теореме М. А. Лаврентьева”, *Докл. АН СССР*, **181**:3 (1968), 530–533; англ. пер.: V. A. Zorich, “Admissible order of growth of the quasiconformality characteristic in Lavrent’ev’s theorem”, *Soviet Math. Dokl.*, **9** (1968), 866–869.
- [5] В. А. Зорич, “О степени конформного различия пространств Евклида и Лобачевского”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **94**:5 (1986), 94.
- [6] М. А. Лаврентьев, “Об одном дифференциальном признаке гомеоморфных отображений трехмерных областей”, *Докл. АН СССР*, **20** (1938), 241–242.
- [7] В. А. Зорич, “Теорема М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространств”, *Матем. сб.*, **74(116)**:3 (1967), 417–433; англ. пер.: V. A. Zorič, “A theorem of M. A. Lavrent’ev on quasiconformal space maps”, *Math. USSR-Sb.*, **3**:3 (1967), 389–403.
- [8] V. A. Zorich, “The global homeomorphism theorem for space quasiconformal mappings, its development and related open problems”, *Quasiconformal space mappings*, Lecture Notes in Math., **1508**, Springer-Verlag, Berlin, 1992, 132–148.
- [9] В. А. Зорич, “Квазиконформные отображения и асимптотическая геометрия многообразий”, *УМН*, **57**:3 (2002), 3–28; англ. пер.: V. A. Zorich, “Quasi-conformal maps and the asymptotic geometry of manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **57**:3 (2002), 437–462.
- [10] M. Gromov, “Hyperbolic manifolds, groups and actions”, *Riemann surfaces and related topics* (Stony Brook, NY, USA, 1978), Ann. of Math. Stud., **97**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981, 183–213.
- [11] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progr. Math., **152**, Birkhäuser, Boston, MA, 1999.
- [12] В. А. Зорич, “Квазиконформные погружения римановых многообразий и теорема пикаровского типа”, *Функц. анализ и его прил.*, **34**:3 (2000), 37–48; англ. пер.:

- V. A. Zorich, “Quasiconformal immersions of Riemannian manifolds and a Picard type theorem”, *Funct. Anal. Appl.*, **34**:3 (2000), 188–196.
- [13] В. А. Зорич, В. М. Кесельман, “О конформном типе риманова многообразия”, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:2 (1996), 40–55; англ. пер.: V. A. Zorich, V. M. Kesel'man, “On the conformal type of a Riemannian manifold”, *Funct. Anal. Appl.*, **30**:2 (1996), 106–117.
- [14] В. А. Зорич, “Асимптотика допустимого роста коэффициента квазиконформности в бесконечности и инъективность погружений римановых многообразий”, *УМН*, **58**:3 (2003), 191–192; англ. пер.: V. A. Zorich, “Asymptotics of the attainable growth of the quasiconformity coefficient at infinity and the injectivity of immersions of Riemannian manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **58**:3 (2003), 624–626.
- [15] V. A. Zorich, “Asymptotics of the admissible growth of the coefficient of quasiconformality at infinity and injectivity of immersions of Riemannian manifolds”, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **75(89)** (2004), 53–57.
- [16] В. М. Кесельман, “Изопериметрическое неравенство на конформно-гиперболических многообразиях”, *Матем. сб.*, **194**:4 (2003), 29–48; англ. пер.: V. M. Kesel'man, “An isoperimetric inequality on conformally hyperbolic manifolds”, *Sb. Math.*, **194**:4 (2003), 495–513.
- [17] В. М. Кесельман, “Изопериметрическое неравенство на конформно-параболических многообразиях”, *Матем. сб.*, **200**:1 (2009), 3–36; англ. пер.: V. M. Kesel'man, “The isoperimetric inequality on conformally parabolic manifolds”, *Sb. Math.*, **200**:1 (2009), 1–33.

В. А. Зорич (V. A. Zorich)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: vzor@mccme.ru

Поступила в редакцию

25.10.2010