Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ведерников, Конечные группы с холловыми π -подгруппами, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 3, 23–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7803>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 11:58:55

УДК 512.542

В. А. Ведерников

Конечные группы с холловыми π -подгруппами

В работе построены и изучены новые классы конечных групп с холловыми π -подгруппами, обладающие силовскими свойствами. Существенно расширены классы групп C_π и D_π , введенные Ф. Холлом. Установлены необходимые и достаточные условия, при которых конечная группа обладает холловыми π -подгруппами. Получены D -теоремы, обобщающие D -теоремы Ф. Холла, Виландта, Бэра и Хартли.

Библиография: 30 названий.

Ключевые слова: конечная группа, холлова π -подгруппа, класс групп, формация.

§ 1. Введение

В работе [1] Ф. Холл для множества простых чисел π ввел следующие классы групп: E_π – класс всех конечных групп G , обладающих S_π -подгруппами, т.е. такими π -подгруппами, индекс которых в G является π' -числом; C_π – класс всех конечных E_π -групп, в которых любые две S_π -подгруппы сопряжены; D_π – класс всех конечных C_π -групп G , в которых каждая π -подгруппа содержится в некоторой S_π -подгруппе. S_π -подгруппа группы G также называется холловой π -подгруппой в G .

Исследованию строения этих классов групп были посвящены работы многих алгебраистов. В ряде работ (см., например, [2]–[4]) С. А. Чунихин создал π -метод исследования конечных групп, определил и описал основные свойства π -разрешимых, π -сверхразрешимых, π -отделимых групп, установил ряд свойств отмеченных классов групп, в частности, он доказал, что расширение C_π -группы с помощью C_π -группы является C_π -группой.

Х. Виландт в работе [5] доказал, что каждая E_π -группа с нильпотентной S_π -подгруппой является D_π -группой, т.е. в обозначениях Ф. Холла имеем $E_\pi^n = D_\pi^n$. Аналогичный результат был получен Р. Бэром [6]: если группа G обладает S_π -подгруппой с циклическими силовскими p -подгруппами для любого $p \in \pi$, то группа G является D_π -группой, т.е. $E_\pi^z = D_\pi^z$. Результаты Виландта и Бэра были объединены и обобщены Л. А. Шеметковым в работе [7] (см. также [8; гл. IV]). Исследованию строения класса E_π был посвящен ряд работ Ф. Гросса (см., например, [9]–[11]).

Центральной здесь явилась проблема Виландта [12]: доказать, что расширение D_π -группы A с помощью D_π -группы B является D_π -группой (см. также [8; проблема 22], [13; вопрос 3.62]). В работе [1] Ф. Холл доказал, что расширение E_π^n -группы A с помощью D_π^s -группы B является D_π^s -группой, где D_π^s – класс всех конечных D_π -групп с разрешимой S_π -подгруппой. Эта теорема была развита и обобщена Л. А. Шеметковым в ряде работ (см., например, [14]–[15]),

сводное изложение которых содержится в монографии [8; гл. IV]. В работе [16] В. Д. Мазуров, Д. О. Ревин получили ключевой результат, позволяющий свести решение этой проблемы к случаю, когда A – простая неабелева группа, а B – группа ее внешних автоморфизмов, и в качестве следствия показали, что проблема Виландта имеет положительное решение, если силовские 2-подгруппы всех композиционных факторов группы A абелевы. Дальнейшее продвижение в решении этой проблемы было совершено с применением классификации конечных простых групп. В работах [17], [18] Е. П. Вдовин и Д. О. Ревин получили положительное решение этой проблемы. Ими также была решена другая важная проблема, а именно доказано, что нормальная подгруппа D_π -группы является D_π -группой (см. [9], [13; вопрос 13.33]).

Изучение класса D_π играет важную роль для приложений в теории конечных групп в связи с тем, что каждая D_π -группа обладает силовскими свойствами для всех π -подгрупп. Это обстоятельство позволяет многие результаты для конечных групп, связанные с силовскими p -подгруппами, распространить на D_π -группы и их S_π -подгруппы. Из теоремы Виландта (см. [5]) следует, что если конечная группа G обладает нильпотентной S_π -подгруппой, то каждая π -подгруппа группы G является нильпотентной. Это, по-видимому, и послужило Ф. Холлу основанием для такого определения D_π -группы. Однако существует бесконечное множество конечных простых неабелевых групп, каждая из которых содержит неизоморфные S_π -подгруппы и обладает силовскими свойствами для всех π -подгрупп лишь с определенными свойствами. Так в группе $G = \text{PSL}(2, 61)$ при $\pi = \{2, 3, 5\}$ существуют S_π -подгруппы порядка 60, причем они образуют в G два класса сопряженных подгрупп, изоморфных простой неабелевой группе A_5 , и один класс сопряженных подгрупп, изоморфных диэдральной группе D_{60} . Если $\mathfrak{F} = QS(D_{60})$, то нетрудно показать, что все $\mathfrak{F}$ -подгруппы группы G обладают силовскими свойствами. На этом пути можно существенно расширить класс D_π таким образом, чтобы в новом классе групп $D_\pi(\mathfrak{F})$ выполнялись силовские свойства для всех π -подгрупп, принадлежащих некоторому классу $\mathfrak{F}$, и доказать новые D -теоремы.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс конечных групп и π – некоторое множество простых чисел. Группа, принадлежащая классу $\mathfrak{F}$, называется $\mathfrak{F}$ -группой. Обозначим через $\mathfrak{F}_\pi$ класс всех π -групп, принадлежащих классу $\mathfrak{F}$. S_π -подгруппу группы G , принадлежащую классу $\mathfrak{F}$, будем называть $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппой группы G . Определим следующие классы групп: $E_\pi(\mathfrak{F})$ – класс всех конечных групп G , обладающих $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппами; $C_\pi(\mathfrak{F})$ – класс всех конечных $E_\pi(\mathfrak{F})$ -групп, в которых любые две $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппы сопряжены; $D_\pi(\mathfrak{F})$ – класс всех конечных $C_\pi(\mathfrak{F})$ -групп G , в которых каждая $\mathfrak{F}_\pi$ -подгруппа содержится в некоторой $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппе группы G .

Цель настоящей работы – получить новые D -теоремы, установить ряд свойств классов групп $E_\pi(\mathfrak{F})$, $C_\pi(\mathfrak{F})$ и $D_\pi(\mathfrak{F})$, найти необходимые и достаточные условия, при которых группа обладает холловыми π -подгруппами, доказать, что $E_\pi(\mathfrak{F})$ и $C_\pi(\mathfrak{F})$ являются локальными формациями для любой наследственной замкнутой относительно расширений формации $\mathfrak{F}$, расширить основные результаты работ [1], [5], [9] и [19].

Пусть $G = \text{PSL}(2, q)$, $q \equiv -11 \pmod{24}$, $\pi = \pi(q - 1)$. Тогда группа G содержит диэдральную холлову π -подгруппу D_{q-1} порядка $q - 1$. Пусть

$\mathfrak{F} = QS(D_{q-1})$. Тогда $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$ (см. следствие 5.1). Так как G содержит подгруппу $H \cong \mathbf{A}_4$ и H не содержится ни в одной S_π -подгруппе группы G , сопряженной с D_{q-1} , то $G \notin D_\pi$. Аналогично, при $q \equiv 11 \pmod{24}$, $\pi = \pi(q+1)$ и $\mathfrak{F}_1 = QS(D_{q+1})$ в силу теоремы Дирихле получим другое бесконечное множество $D_\pi(\mathfrak{F}_1)$ -групп, не являющихся D_π -группами.

Рассматриваются лишь конечные группы. Не приведенные в работе обозначения и определения можно найти в монографиях [8], [20]. Основные результаты работы доказаны по модулю классификации конечных простых групп (см. [21]).

§ 2. Обозначения. Вспомогательные результаты

Далее в работе $\mathfrak{F}$ – непустой класс конечных групп, π – некоторое множество простых чисел и $\pi \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.

Для классов групп будем применять следующие обозначения:

$\mathfrak{E}$ – класс всех конечных групп;

$\mathfrak{D}^\varphi$ – класс всех конечных φ -дисперсивных групп;

$\mathfrak{N}$ – класс всех конечных нильпотентных групп;

$\mathfrak{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп;

$\mathfrak{U}$ – класс всех конечных сверхразрешимых групп;

$\mathfrak{Z}$ – класс всех конечных групп с циклическими силовскими подгруппами.

В обозначение класса $E_\pi(\mathfrak{F})$ включены круглые скобки, подчеркивающие функциональную зависимость его от $\mathfrak{F}$ и во избежание путаницы с произведением классов E_π и $\mathfrak{F}$ (ср. [8; § 16]). Отметим, что при $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$ классы $E_\pi(\mathfrak{F})$, $C_\pi(\mathfrak{F})$, $D_\pi(\mathfrak{F})$ совпадают соответственно с классами E_π , C_π , D_π ; Q -замкнутый класс групп называется гомоморфом; D -замкнутый класс – класс групп, замкнутый относительно конечных прямых произведений; Ext-замкнутый класс – класс групп, замкнутый относительно расширений, т.е. из $N \triangleleft G$ и $\{N, G/N\} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

В дальнейшем без дополнительных ссылок будем применять, следуя [20], определения, обозначения и отмеченные ниже свойства произведений классов групп. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы групп. Тогда

$$\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (G : G \text{ имеет нормальную подгруппу } N \in \mathfrak{X} \text{ с } G/N \in \mathfrak{Y}).$$

Отметим, что если $1 \in \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Пусть $\mathfrak{H}$ – класс групп и $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} = (G : G^\mathfrak{F} \in \mathfrak{H})$ называется формационным произведением классов $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$. Отметим, что если $1 \in \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \circ \mathfrak{F}$; если $S_n \mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{F}$.

Через $\mathbf{A}_n$ и $\mathbf{S}_n$ будем обозначать соответственно знакопеременную и симметрическую группы подстановок n -й степени. Пусть G – группа и $M \subseteq G$ обозначим через $M^G = \{M^g : g \in G\}$. Для групп A и B символы $A \times B$ и $A \circ B$ обозначают прямое и центральное произведения соответственно, а символы $A : B$ и $A.B$ обозначают соответственно расщепляемое и произвольное расширения группы A с помощью группы B . Следуя [22], обозначим через $\text{Hall}_{\pi, \mathfrak{F}}(G)$ множество всех $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгрупп в группе G . Пусть $A \triangleleft G$, полагаем

$$\text{Hall}_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A) = \{H \cap A : H \in \text{Hall}_{\pi, \mathfrak{F}}(G)\}.$$

Если $\text{Hall}_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A) \neq \emptyset$, то A действует на каждом из множеств $\text{Hall}_{\pi, \mathfrak{F}}(A)$ и $\text{Hall}_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A)$ через сопряжение. Обозначим соответственно через $k_{\pi, \mathfrak{F}}(A)$ и $k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A)$ число орбит при этих действиях. Пусть $K_{\pi, \mathfrak{F}}(A)$ – множество всех классов сопряженных $S_{\pi}(\mathfrak{F})$ -подгрупп в группе A и $K_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A)$ – множество всех классов сопряженных G -индуцированных $S_{\pi}(\mathfrak{F})$ -подгрупп в группе A . Тогда $|K_{\pi, \mathfrak{F}}(A)| = k_{\pi, \mathfrak{F}}(A)$ и $|K_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A)| = k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A)$. При $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$ буква $\mathfrak{F}$ в приведенных обозначениях опускается и получим обозначения, как в [22].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Группу G назовем $\mathfrak{F}_{\pi}$ -обособленной, если каждый главный фактор группы G является либо $\mathfrak{F}_{\pi}$ -группой, либо π' -группой.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп. Если G является $\mathfrak{F}_{\pi}$ -обособленной группой, то $G \in D_{\pi} \cap D_{\pi}(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что G – контрпример минимального порядка. Если G – π' -группа, то $G \in D_{\pi}$ с S_{π} -подгруппой $S = 1$. Так как $\mathfrak{F}$ является Q -замкнутым классом, то $1 \in \mathfrak{F}$ и, значит, $G \in D_{\pi}(\mathfrak{F})$. Пусть G не является π' -группой и M – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда по индукции $G/M \in D_{\pi} \cap D_{\pi}(\mathfrak{F})$. Пусть H/M – S_{π} -подгруппа группы G/M . Тогда $H/M \in \mathfrak{F}_{\pi}$. Если $M \in \mathfrak{F}_{\pi}$, то в силу Ext -замкнутости $\mathfrak{F}$ получаем, что H – $S_{\pi}(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G . Если M – π' -группа, то по теореме Шура–Цассенхауза $H = M : S$ и S – $S_{\pi}(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G . Пусть Q – π -подгруппа группы G . Тогда существует $xM \in G/M$ такой, что $QM/M \leq (H/M)^{xM}$. Поэтому $QM \leq H^x$ и $Q \leq S^{xh}$ для некоторого $h \in H^x$. Следовательно, $G \in D_{\pi} \cap D_{\pi}(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2 (см. [23; лемма 1.1]). Пусть группа $M = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$ – прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп P_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (возможно, и бесконечных). Тогда $\text{Aut}(M)$ содержит нормальную подгруппу $K = \text{Aut}(P_1) \times \text{Aut}(P_2) \times \cdots \times \text{Aut}(P_n)$ такую, что $\text{Aut}(M)/K \cong S_n$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп и $\pi \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является S -замкнутой формацией, $\mathfrak{S}_{\pi} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathfrak{F}$ – Ext -замкнутый класс, то $\mathfrak{F}$ является также D -замкнутым классом. Из $\{Q, S, D\}$ -замкнутости класса $\mathfrak{F}$ следует, что $\mathfrak{F}$ является S -замкнутой формацией. Так как $\pi \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то для любого $p \in \pi$ существует группа $G \in \mathfrak{F}$ такая, что $p \in \pi(G)$. В силу S -замкнутости $\mathfrak{F}$ следует $Z_p \in \mathfrak{F}$, а из Ext -замкнутости $\mathfrak{F}$ получим, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $p \in \pi$ и, значит, $\mathfrak{N}_{\pi} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть H – разрешимая π -группа. Индукцией по $|H|$, применяя $\{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутость $\mathfrak{F}$, нетрудно доказать, что $H \in \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathfrak{S}_{\pi} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

В работе [9] установлено, что для доказательства существования S_{π} -подгрупп в конечной непростой группе существенно применяется понятие композиционного ряда, являющегося уплотнением некоторого главного ряда; такой композиционный ряд будем называть *правильным* или, коротко, *гс-рядом*.

Пусть H и A – подгруппы группы G и $B \triangleleft A$. Следуя [9], по определению полагаем

$$\begin{aligned} N_H(A/B) &= N_H(A) \cap N_H(B), \\ C_H(A/B) &= \{x \in H : Ba = Bx^{-1}ax \text{ для всех } a \in A\}, \\ \text{Aut}_H(A/B) &\cong N_H(A/B)/C_H(A/B). \end{aligned}$$

В частности, $\text{Aut}_A(A/B) = \text{Inn}(A/B)$.

Следуя Виландту, неединичную субнормальную подгруппу A группы G назовем *атомом* в G , если $A = A'$ и A обладает единственной максимальной нормальной подгруппой A^* . В частности, каждая простая неабелева субнормальная подгруппа группы G является атомом в G . Обозначим через $\mathcal{A}(G)$ множество всех атомов группы G .

ЛЕММА 2.4 (см. [9; утверждение 2.1]). *Пусть H/K является неабелевым композиционным фактором группы G . Тогда существует, причем единственный, атом $A \in \mathcal{A}(G)$ такой, что $H = AK$. Кроме того, $A^* = A \cap K$, $H/K \cong A/A^*$, $N_G(H/K) \leq N_G(A)$ и $\text{Aut}_G(H/K) \cong L$, где $\text{Inn}(A/A^*) \leq L \leq \text{Aut}_G(A/A^*)$.*

ЛЕММА 2.5 (см. [9; лемма 2.4]). *Пусть $M \triangleleft G$ и $H/M \in \mathcal{A}(G/M)$. Тогда существует единственный атом $A \in \mathcal{A}(G)$ такой, что $H = AM$. Кроме того, $\text{Aut}_{G/M}((H/M)/(H/M)^*) \cong \text{Aut}_G(A/A^*)$.*

ЛЕММА 2.6 (см. [9; лемма 2.5]). *Пусть $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ является gc -рядом группы G . Если $A \in \mathcal{A}(G)$, то $A/A^* \cong G_i/G_{i-1}$ для некоторого i , $1 \leq i \leq n$, и $\text{Aut}_G(A/A^*) \cong \text{Aut}_G(G_i/G_{i-1})$.*

ЛЕММА 2.7 (см. [9; лемма 2.6]). *Пусть $A \in \mathcal{A}(G)$. Тогда группа G содержит подгруппу H такую, что $H^{(\infty)} = A$ и $\text{Aut}_G(A/A^*)$ является гомоморфным образом H .*

ЛЕММА 2.8 (Виландт; см. [19; лемма 2]). *Пусть H – нормальная подгруппа группы G и либо каждая π -подгруппа из G/H разрешима, либо группа внешних автоморфизмов каждой простой секции группы H разрешима. Если S – максимальная π -подгруппа группы G и T – π -подгруппа из H , содержащая $S \cap H$, то $S \cap H = N_T(S \cap H)$.*

§ 3. $E_\pi(\mathfrak{F})$ -группы

ЛЕММА 3.1. *Пусть $M \triangleleft G$ и $\mathfrak{F}$ – гомоморф. Если S является $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппой группы G , то SM/M является $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппой группы G/M , а $E_\pi(\mathfrak{F})$ – гомоморфом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $|G : S|$ – π' -число, то $|G : SM|$ – π' -число и, значит, $|G/M : SM/M|$ – π' -число. В силу того, что $SM/M \cong S/S \cap M$ – π -группа, получаем что SM/M является S_π -подгруппой группы G/M . Так как $\mathfrak{F}$ – Q -замкнутый класс, то $S/S \cap M \in \mathfrak{F}$ и, значит, $SM/M = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G/M . Поэтому $G/M \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутый класс групп, S – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G и $K \triangleleft \triangleleft G$. Тогда $S \cap K$ – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы K . В частности, если K является π -группой, то $K \leq S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По [9; лемма 2.8] $S \cap K$ есть S_π -подгруппа группы K . Так как $S \in \mathfrak{F}$, $S \cap K \triangleleft \triangleleft S$ и $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутый класс, то $S \cap K \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $S \cap K$ – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G . Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. Пусть группа $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ – прямое произведение подгрупп G_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и $\mathfrak{F} = \{S_n, D\}$ -замкнутый класс групп. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) S является $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $S = S_1 \times \cdots \times S_n$, где $S_i = S \cap G_i$ – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G_i , $1 \leq i \leq n$.

2) Пусть $H = H_1 \times \cdots \times H_n$ – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G , где $H_i = H \cap G_i$ – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G_i , $1 \leq i \leq n$. Подгруппы S и H сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда S_i сопряжена H_i в группе G_i для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть S есть $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G . Тогда по лемме 3.2 $S_i = S \cap G_i$ – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G_i для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть S_i есть $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G_i , $1 \leq i \leq n$. Тогда в силу D -замкнутости класса $\mathfrak{F}$ получаем, что $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ является $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппой группы G .

2) Пусть $g = g_1 \cdots g_n \in G$, где $g_i \in G_i$, $1 \leq i \leq n$. Имеем $S^g = H$ тогда и только тогда, когда $H_1 \times \cdots \times H_n = (S_1)^{g_1} \times \cdots \times (S_n)^{g_n}$, причем $H_i = H \cap G_i = S^g \cap G_i = (S \cap G_i)^g = (S_i)^g = (S_i)^{g_i}$, $1 \leq i \leq n$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп и N – нормальная подгруппа группы G . Если $G/N \in E_\pi(\mathfrak{F})$ и $N \in C_\pi(\mathfrak{F})$, то $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что группа G – контрпример минимального порядка. Тогда $1 \neq N \neq G$. Пусть P_1 – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы N . Тогда для любого $g \in G$ существует $n \in N$ такой, что $(P_1)^g = (P_1)^n$. Отсюда следует, что $G = N_G(P_1)N$. Допустим, что $U = N_G(P_1) < G$. Так как $G/N \cong U/N_N(P_1) \in E_\pi(\mathfrak{F})$ и $U_1 = N_N(P_1) \in C_\pi(\mathfrak{F})$, то по индукции $U \in E_\pi(\mathfrak{F})$. В силу того, что $|G : U|$ – π' -число, получаем, что $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Получили противоречие.

Пусть $G = N_G(P_1)$. Тогда $N/P_1 \triangleleft G/P_1$, $(G/P_1)/(N/P_1) \cong G/N \in E_\pi(\mathfrak{F})$ и $N/P_1 \in C_\pi(\mathfrak{F})$. По индукции $G/P_1 \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Пусть P/P_1 – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G/P_1 . Тогда P – S_π -подгруппа группы G . Так как $P_1 \in \mathfrak{F}$, $P/P_1 \in \mathfrak{F}$ и класс $\mathfrak{F}$ Ext-замкнут, то $P \in \mathfrak{F}$ и P является $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппой группы G . Получили противоречие. Лемма доказана.

Следующие леммы 3.5–3.9 несколько расширяют результаты из [9; § 3].

ЛЕММА 3.5. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S\}$ -замкнутый класс групп, M – нормальная подгруппа группы G , $M \leq H \leq G$, $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$, $H/M \in E_\pi(\mathfrak{F})$ и $G/M \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Тогда $H \in E_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G . Тогда по лемме 3.1 AM/M есть $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G/M . Так как $G/M \in D_\pi(\mathfrak{F})$

и $H/M \in E_\pi(\mathfrak{F})$, то $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы H/M содержится в некоторой $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппе группы G/M , причем каждая подгруппа группы G/M сопряжена с AM/M . Поэтому, заменяя при необходимости AM/M на сопряженную в G/M , можем считать, что $(AM/M) \cap (H/M) = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы H/M . Из того, что $|H : (H \cap AM)| = |H : M(A \cap H)|$ является π' -числом, следует, что $B = A \cap H$ является S_π -подгруппой группы H . Так как $A \in \mathfrak{F}$, $B \leq A$ и класс $\mathfrak{F}$ S -замкнут, то $B \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $B = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы H . Лемма доказана.

ЛЕММА 3.6. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S\}$ -замкнутый класс групп, $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$ и $G^{(\infty)} \leq H \leq G$. Тогда $H \in E_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = G^{(\infty)}$ и $A = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G . Тогда по лемме 3.1 $AM/M = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G/M . Из разрешимости G/M по теореме Ф. Холла следует, что $G/M \in D_\pi(\mathfrak{F})$, причем каждая S_π -подгруппа в G/M сопряжена с AM/M . Так как $H/M \leq G/M$, то по теореме Ф. Холла H/M содержит S_π -подгруппу C/M , причем существует $gM \in G/M$ такой, что $C/M \leq (AM/M)^{gM} \in \mathfrak{F}$. В силу S -замкнутости класса $\mathfrak{F}$ получаем, что $C/M \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $H/M \in E_\pi(\mathfrak{F})$ и по лемме 3.5 $H \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.7. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S\}$ -замкнутый класс групп, $A \in \mathcal{A}(G)$, $A \leq H \leq G$ и $\text{Aut}_G(A/A^*) \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\text{Aut}_H(A/A^*) \in E_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как A/A^* – простая неабелева группа, то по гипотезе Шрейера $\text{Out}(A/A^*)$ разрешима и, значит,

$$(\text{Aut}_G(A/A^*))^{(\infty)} \leq \text{Inn}(A/A^*) = \text{Aut}_A(A/A^*) \leq \text{Aut}_H(A/A^*) \leq \text{Aut}_G(A/A^*).$$

Теперь, применяя лемму 3.6, получим $\text{Aut}_H(A/A^*) \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.8. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S_n, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп, M – нормальная подгруппа группы G . Если $M \in E_\pi(\mathfrak{F})$, $G/M \in E_\pi(\mathfrak{F})$, но $G \notin E_\pi(\mathfrak{F})$, то G имеет неабелев композиционный фактор $H/K \in E_\pi(\mathfrak{F})$ такой, что $H \leq M$, $K \triangleleft G$ и $\text{Aut}_G(H/K) \notin E_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что G – контрпример, в котором число $t = |G| + |M|$ является наименьшим. Как и при доказательстве теоремы 3.4 в [9], применяя леммы 2.5 и 3.2, по индукции нетрудно показать, что M – минимальная нормальная подгруппа группы G , причем $M = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, где $\{S_1, \dots, S_n\}$ – класс сопряженных подгрупп с $S = S_1$ в G , S – простая неабелева группа. По лемме 3.3, 1) получаем, что $S_i \in E_\pi(\mathfrak{F})$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Если $\text{Aut}_G(S_i) \notin E_\pi(\mathfrak{F})$, то заключение леммы выполняется при $H = S_i$ и $K = 1$. Следовательно, $\text{Aut}_G(S_i) \in E_\pi(\mathfrak{F})$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. По индукции получим, что $G/M \in \mathfrak{F}_\pi$.

Пусть $K = S_2 \times \cdots \times S_n$, $N = N_G(S)$ и $C = C_G(S)$. Тогда $N/C \cong \text{Aut}_G(S) \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Пусть $L/C = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы N/C . Тогда $N = LM = LS$, $K \leq C \leq L$. Как и при доказательстве теоремы 3.4 в [9], можно показать, что $G = BM$, B является S_π -подгруппой группы G , $L = (B \cap N)K$, $B \cap S = L \cap S$ и $B \cap M = (B \cap S_1) \times (B \cap S_2) \times \cdots \times (B \cap S_n)$, причем $\{B \cap S_1, B \cap S_2, \dots, B \cap S_n\}$ является классом сопряженных подгрупп в B . Так как $N/C = (L/C)(SC/C)$ и

$SC/C \triangleleft N/C$, то по лемме 3.2 $(SC/C) \cap (L/C) = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы SC/C . В силу того, что $(SC \cap L)/C = (S \cap L)C/C \cong S \cap L$ есть $\mathfrak{F}_\pi$ -группа, получаем, что $B \cap S = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы $S = S_1$. В силу Ext-замкнутости $\mathfrak{F}$ следует D-замкнутость $\mathfrak{F}$ и, значит, по лемме 3.3, 1) $B \cap M$ является $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппой группы M . Так как $G/M \cong B/B \cap M = \mathfrak{F}_\pi$ -группа и $\mathfrak{F}$ является Ext-замкнутым классом, то $B \in \mathfrak{F}$ и, значит, $B = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G . Получили противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.9. Пусть $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ является rc -рядом группы G и $\mathfrak{F} = \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (a) $H \in E_\pi(\mathfrak{F})$ для всех H таких, что $H \leq G$ и $H^{(\infty)} \triangleleft \triangleleft G$;
- (b) $\text{Aut}_G(A/A^*) \in E_\pi(\mathfrak{F})$ для всех $A \in \mathcal{A}(G)$;
- (c) $\text{Aut}_G(G_i/G_{i-1}) \in E_\pi(\mathfrak{F})$ для всех $i, 1 \leq i \leq n$;
- (d) $\text{Aut}_G(H/K) \in E_\pi(\mathfrak{F})$ для всех композиционных факторов H/K группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) $\implies$ (b) в силу лемм 2.7 и 3.1.

(b) $\implies$ (d) в силу лемм 2.4 и 3.5.

(d) $\implies$ (c) – это очевидно.

(c) $\implies$ (b) в силу леммы 2.6.

(b) $\implies$ (a). Пусть $\text{Aut}_G(A/A^*) \in E_\pi(\mathfrak{F})$ для всех $A \in \mathcal{A}(G)$. Покажем, что $H \in E_\pi(\mathfrak{F})$ для всех H таких, что $H \leq G$ и $H^{(\infty)} \triangleleft \triangleleft G$. Ясно, что $\mathcal{A}(H) \subseteq \mathcal{A}(G)$, и по лемме 3.7 получим $\text{Aut}_H(A/A^*) \in E_\pi(\mathfrak{F})$ для всех $A \in \mathcal{A}(H)$. Поэтому можем считать, что $H = G$. Допустим, что группа G – контрпример минимального порядка. Пусть M – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда в силу леммы 2.5 по индукции $G/M \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Применяя лемму 3.4, получим, что $M = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ – прямое произведение простых неабелевых подгрупп A_i , причем $A_i \in \mathcal{A}(G)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Так как $A_i \cong \text{Inn}(A_i) \triangleleft \triangleleft \text{Aut}_G(A_i)$ и $\text{Aut}_G(A_i) \in E_\pi(\mathfrak{F})$, то по лемме 3.2 $A_i \in E_\pi(\mathfrak{F})$, $i = 1, 2, \dots, n$, и, значит, по лемме 3.3, 1) $M \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Из леммы 3.8 следует, что $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Для доказательства основных результатов работы нам потребуются следующие леммы, при доказательстве которых существенно используются методы исследования E_π -групп, полученные в работах [18], [22], [24], [25].

ЛЕММА 3.10. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп, A – нормальная подгруппа $E_\pi(\mathfrak{F})$ -группы G , $H = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G и $S = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы A . Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если $HAC_G(A) \triangleleft G$, то A -класс S^A сопряженных $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгрупп группы A является классом G -индуцированных $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгрупп тогда и только тогда, когда A -класс S^A является H -инвариантным.

2) Если $HA \triangleleft G$, то A -класс S^A сопряженных $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгрупп группы A является классом G -индуцированных $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгрупп тогда и только тогда, когда A -класс S^A является H -инвариантным.

3) Если $HAC_G(A) = G$, то A -класс S^A сопряженных $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгрупп группы A является классом G -индуцированных $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгрупп тогда и только тогда, когда $S^A = S^G$.

4) Если $HA = G$, то A -класс S^A сопряженных $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгрупп группы A является классом G -индуцированных $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгрупп тогда и только тогда, когда $S^A = S^G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть A -класс S^A сопряженных $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгрупп группы A является классом G -индуцированных $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгрупп. Тогда существует подгруппа $K \in \text{Hall}_{\pi, \mathfrak{F}}(G)$ такая, что $S = K \cap A$. Так как $HAC_G(A) \triangleleft G$ и $|G : HAC_G(A)| - \pi'$ -число, то $HAC_G(A) = KAC_G(A)$. В силу того, что $S^A = \{K^a \cap A : a \in A\}$, получаем, что класс S^A является K -инвариантным, а значит и $KAC_G(A)$ -инвариантным. Поэтому класс S^A является $HAC_G(A)$ -инвариантным, а значит и H -инвариантным.

Пусть класс S^A является H -инвариантным. Тогда $S^A = S^{AH}$ и, по рассуждению Фраттини, $AH = AN_{AH}(S)$. Тогда в силу $AH/A \cong N_{AH}(S)/N_A(S) \in \mathfrak{F}_\pi$ получаем, что $N_{AH}(S)$ является $\mathfrak{F}_\pi$ -обособленной группой, и по лемме 2.1 $T = N_{AH}(S) \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, существует $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа K в группе T , содержащая S . Так как $|AH : T| = |A : N_A(S)| - \pi'$ -число, то $K - S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G и $S = K \cap A$. Следовательно, A -класс $S^A = \{K^a \cap A : a \in A\}$ является классом G -индуцированных $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгрупп.

2) Так как $A \triangleleft G$, то $C_G(A) \triangleleft G$. Теперь в силу $HA \triangleleft G$ получаем, что $HAC_G(A) \triangleleft G$, и утверждение следует из 1).

3) По 1) A -класс S^A является H -инвариантным, а значит и $AC_G(A)H$ -инвариантным. Следовательно, $S^A = S^G$.

4) По 2) A -класс S^A является H -инвариантным, а значит и AH -инвариантным. Следовательно, $S^A = S^G$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.11. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп, A – нормальная простая $E_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G , $A < G \leq \text{Aut}(A)$ и $G \notin E_\pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\{2, 3\} \subseteq \pi \cap \pi(A)$ и в G существует примарный $\{2, 3\}$ -элемент g такой, что $\langle g, A \rangle \notin E_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $A \in E_\pi(\mathfrak{F})$ и группа G выбрана так, что $A < G \leq \text{Aut}(A)$, $G \notin E_\pi(\mathfrak{F})$ и G – группа наименьшего порядка с такими свойствами. Так как по гипотезе Шрейера группа $\text{Aut}(A)/A$ разрешима, то G/A разрешима. По лемме 2.3 S_π -подгруппа S/A группы G/A принадлежит $\mathfrak{F}$. Допустим, что $S/A < G/A$. Тогда $S < G$ и в силу выбора G имеем $S \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Так как $|G : S| - \pi'$ -число, то $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Получили противоречие. Следовательно, G/A – разрешимая $\mathfrak{F}_\pi$ -группа.

Пусть $G \in E_\pi$ и $H_1 - S_\pi$ -подгруппа группы G . Тогда $G = H_1 A$, $H = A \cap H_1 - S_\pi$ -подгруппа A и $H_1 \notin \mathfrak{F}$. Так как $G/A \cong H_1/H \in \mathfrak{F}$ и класс $\mathfrak{F}$ замкнут относительно расширений, то $H \notin \mathfrak{F}$. Следовательно, по лемме 2.3 группа H – неразрешимая и, значит, $2 \in \pi(H) \subseteq \pi$. По условию группа A содержит $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппу K , причем $K \not\cong H$. Тогда по [18; теорема 4.3] A не изоморфна знакопеременной группе $\mathbf{A}_n$, $n \geq 5$.

Допустим, что $3 \notin \pi$. Если A – группа лиевого типа и $A \neq {}^2G_2(q)$, $q = 3^{2n+1}$, то по [18; теорема 5.2] $A \in C_\pi$, что невозможно. Если $A = {}^2G_2(q)$, $q = 3^{2n+1}$, то по [18; лемма 5.1] каждая S_π -подгруппа группы A разрешима и по лемме 2.3 принадлежит $\mathfrak{F}$, что невозможно. Если A изоморфна одной из спорадических простых групп, то по [26; теорема 4.1] каждая S_π -подгруппа группы A разрешима и, значит, принадлежит $\mathfrak{F}$, что невозможно.

Следовательно, $\{2, 3\} \subseteq \pi$. Тогда по [22; лемма 8.1] выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) $k_\pi(A) \in \{2, 3, 4\}$;
- 2) $k_\pi(A) = 9$, $A \cong \text{PSp}_{2n}(q)$, q – степень простого числа $p \notin \pi$ и либо $n \in \{5, 7\}$, $\pi \cap \pi(A) = \{2, 3\} \subseteq \pi(q^2 - 1)$ и $(q^2 - 1)_\pi = 48$, либо $n = 7$, $\pi \cap \pi(A) = \{2, 3, 5\} \subseteq \pi(q^2 - 1)$ и $(q^2 - 1)_\pi = 120$.

Если $k_\pi(A) = 2$, то A содержит единственный класс сопряженных $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгрупп с представителем K . Тогда, по рассуждению Фраттини, $G = AN_G(K)$. Так как $G/A \cong N_G(K)/N_A(K) \in \mathfrak{F}_\pi$, то $N_G(K)$ является $\mathfrak{F}_\pi$ -обособленной группой и по лемме 2.1 $T = N_G(K) \in E_\pi(\mathfrak{F})$. В силу того, что $|G : T| = |A : N_A(H)| - \pi'$ -число, получаем, что $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Противоречие.

Пусть $k_\pi(A) = 3$. Если A содержит единственный класс сопряженных $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгрупп, то, как и выше, получим противоречие. Следовательно, $k_{\pi, \mathfrak{F}}(A) = 2$. По лемме 3.10 из $G \notin E_\pi(\mathfrak{F})$ следует, что группа G через сопряжение действует на множестве $K_{\pi, \mathfrak{F}}(A)$ без неподвижных точек. Тогда получим гомоморфизм $\varphi : G \rightarrow \mathbf{S}_{k_{\pi, \mathfrak{F}}(A)} \cong \text{Sym}(K_{\pi, \mathfrak{F}}(A))$, причем G^φ является подгруппой симметрической группы $\mathbf{S}_{k_{\pi, \mathfrak{F}}(A)}$ и действует без неподвижных точек. Следовательно, $G^\varphi = \mathbf{S}_2$ и существует элемент $g \in G$ такой, что $g^\varphi = (1, 2)$. Поэтому можем считать, что g является 2-элементом и по лемме 3.10 получим $\langle g, A \rangle \notin E_\pi(\mathfrak{F})$.

Пусть $k_\pi(A) = 4$. Из рассуждений выше следует, что $k_{\pi, \mathfrak{F}}(A) > 2$ и, значит, $k_{\pi, \mathfrak{F}}(A) = 3$. Так как G действует без неподвижных точек на $K_{\pi, \mathfrak{F}}(A)$, то существует $g \in G$ такой, что $g^\varphi = (1, 2, 3)$. Поэтому можем считать, что g является 3-элементом и $\langle g, A \rangle \notin E_\pi(\mathfrak{F})$.

Пусть $k_\pi(A) = 9$, $A \cong \text{PSp}_{2n}(q)$, как в п. 2). Так как $A \cong \text{Sp}_{2n}(q)/Z(\text{Sp}_{2n}(q))$, то по [22; лемма 4.4] каждая S_π -подгруппа H группы A является S_π -подгруппой группы $M = L \cdot \mathbf{S}_n$, где $L = L_1 \circ \dots \circ L_n \cong \text{SL}_2(q) \circ \dots \circ \text{SL}_2(q)$. Кроме того, $H = (H_1 \circ \dots \circ H_n) \cdot T$, где H_i является S_π -подгруппой группы $L_i \cong \text{SL}_2(q)$, $i = 1, \dots, n$, а T является S_π -подгруппой группы $\mathbf{S}_n$. Так как A содержит неразрешимую S_π -подгруппу, то из п. 2) следует, что $n = 7$, $\pi \cap \pi(A) = \{2, 3, 5\} \subseteq \pi(q^2 - 1)$ и $(q^2 - 1)_\pi = 120$. Тогда $\pi \cap \pi(\mathbf{S}_7) = \{2, 3, 5\} = \pi(6!)$ и S_π -подгруппы группы $\mathbf{S}_7$ изоморфны $\mathbf{S}_6$. Если $\mathbf{S}_6 \in \mathfrak{F}$, то в силу $\{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутости класса $\mathfrak{F}$ и с учетом леммы 3.1 из [22] получаем, что все S_π -подгруппы группы A принадлежат $\mathfrak{F}$. Получили противоречие. Если $\mathbf{S}_6 \notin \mathfrak{F}$, то каждая S_π -подгруппа группы A не принадлежит $\mathfrak{F}$, что невозможно.

Пусть $G \notin E_\pi$. Тогда по лемме 10 из [25] в группе G существует примарный $\{2, 3\}$ -элемент g такой, что $\langle g, A \rangle \notin E_\pi$. Так как $E_\pi(\mathfrak{F}) \subseteq E_\pi$, то $\langle g, A \rangle \notin E_\pi(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

Следующая лемма доказывается, как и теорема 4 из [25]. Приведем его лишь для полноты изложения.

ЛЕММА 3.12. Пусть $\mathfrak{F}$ – $\{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп и K/L – композиционный фактор группы G . Если $\text{Aut}_G(K/L) \notin E_\pi(\mathfrak{F})$, то $G \notin E_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Тогда по лемме 3.2 $K \in E_\pi(\mathfrak{F})$ и по лемме 3.1 $K/L \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Так как $\text{Aut}_G(K/L) \notin E_\pi(\mathfrak{F})$, то K/L – простая неабелева группа, $K/L \cong \text{Inn}(K/L) \triangleleft \text{Aut}_G(K/L)$. Тогда по лемме 3.11 $\{2, 3\} \subseteq \pi \cap \pi(K/L)$ и существует p -элемент $g \in \text{Aut}_G(K/L)$, $p \in \{2, 3\}$, такой,

что $\langle g, \text{Inn}(K/L) \rangle \notin E_\pi(\mathfrak{F})$. Отметим, что группа $N_G(K/L)$ действует через сопряжение на множестве K/L , причем существует гомоморфизм $\varphi: N_G(K/L) \rightarrow \text{Aut}(K/L)$ с ядром $\text{Ker } \varphi = C_G(K/L)$ и $\varphi(N_G(K/L)) = \text{Aut}_G(K/L)$. Пусть h – прообраз g в $N_G(K/L)$, причем h можем выбрать так, чтобы h был p -элементом, где $p \in \{2, 3\}$. Следовательно, h принадлежит некоторой силовой p -подгруппе группы G , $p \in \{2, 3\}$. Так как $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$, то в G существует $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа H . Заменяя при необходимости H на сопряженную, можем считать, что $h \in H$. В силу лемм 3.2 и 3.1 получаем, что $(H \cap K)L/L$ – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы K/L , причем $h \in N_G((H \cap K)L/L)$ и, значит, $h^{-1}((H \cap K)L/L)h = (H \cap K)L/L$. Отсюда следует, что

$$\varphi((h^{-1}((H \cap K)L/L)h) = \varphi((H \cap K)L/L).$$

Поэтому $g = \varphi(h)$ нормализует $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппу группы $\text{Inn}(K/L)$. Тогда по лемме 3.10 $\langle g, \text{Inn}(K/L) \rangle \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Получили противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.13. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S_n, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп. Если группа G – подпрямое произведение $E_\pi(\mathfrak{F})$ -групп G_i , $i = 1, 2$, и G_2 – π -группа, то $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как G – подпрямое произведение групп G_i , $i = 1, 2$, то в G существуют нормальные подгруппы N_i такие, что $G/N_i \cong G_i$, $i = 1, 2$, и $N_1 \cap N_2 = 1$. По условию $G_1 \in E_\pi(\mathfrak{F})$ и, значит, в группе G/N_1 существует $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа P/N_1 . Поскольку $G/N_2 \cong G_2 \in \mathfrak{F}_\pi$, $N_1 \cong N_1 N_2 / N_2 \triangleleft G/N_2$, то $N_1 \in \mathfrak{F}_\pi$. В силу $P/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $N_1 \in \mathfrak{F}$ и Ext-замкнутости $\mathfrak{F}$ получаем, что $P \in \mathfrak{F}_\pi$. Тогда P – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G и, значит, $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.14. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп, H – подгруппа $E_\pi(\mathfrak{F})$ -группы G , $M \triangleleft H$ и $M \triangleleft \triangleleft G$. Если $H/M \in E_\pi(\mathfrak{F})$, то $H \in E_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что группа G – контрпример, в котором $t = |G| + |H| + |M|$ является наименьшим. Пусть S/M – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы H/M . Допустим, что $S < H$. Так как $|G| + |S| + |M| < t$, то по индукции $S \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Так как $|H : S|$ – π' -число, получаем, что $H \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $H = S$ и $H/M \in \mathfrak{F}_\pi$.

Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть $M \triangleleft G$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в M . Допустим, что $N < M$. Так как по лемме 3.1 $G/N \in E_\pi(\mathfrak{F})$, $M/N \triangleleft G/N$, $M/N \leq H/N \leq G/N$, $(H/N)/(M/N) \in E_\pi(\mathfrak{F})$ и $|G/N| + |H/N| + |M/N| < t$, то по индукции следует, что $H/N \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Пусть Q/N – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы H/N . Поскольку $|G| + |Q| + |N| < t$, то по индукции $Q \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Из того, что $|H : Q|$ – π' -число, следует, что $H \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, M – минимальная нормальная подгруппа группы G .

Допустим, что группа G содержит минимальную нормальную подгруппу L , отличную от M . Пусть $L \leq H$. Так как $L \cap M = 1$ и H/M – $\mathfrak{F}_\pi$ -группа, то L является $\mathfrak{F}_\pi$ -группой. Тогда $G/L \in E_\pi(\mathfrak{F})$, $ML/L \triangleleft G/L$, $ML/L \leq H/L \leq G/L$

и $(H/L)/(ML/L) \cong H/ML \cong (H/M)/(ML/M) \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Так как $|G/L| + |H/L| + |ML/L| < t$, то по индукции $H/L \in E_\pi(\mathfrak{F})$ и, значит, $H \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, L не содержится в H . Пусть $\overline{G} = G/L$, $\overline{M} = ML/L$ и $\overline{H} = HL/L$. Тогда $\overline{G} \in E_\pi(\mathfrak{F})$, $\overline{H}/\overline{M} \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Поскольку $|\overline{G}| + |\overline{H}| + |\overline{M}| < t$, то по индукции $\overline{H} \in E_\pi(\mathfrak{F})$ и, значит, $H/H \cap L \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Из $M \cap (H \cap L) = 1$ следует, что H является подпрямым произведением $E_\pi(\mathfrak{F})$ -группы $H/H \cap L$ и $\mathfrak{F}_\pi$ -группы H/M . Тогда по лемме 3.13 $H \in E_\pi(\mathfrak{F})$.

Следовательно, M – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . По лемме 3.4 $M \notin C_\pi(\mathfrak{F})$. Тогда $M = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$ – прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп P_i , $1 \leq i \leq n$. Так как $C_G(M) = 1$, то G изоморфна подгруппе группы $\text{Aut}(M)$. По лемме 2.2 $\text{Aut}(M)$ содержит нормальную подгруппу

$$K = \text{Aut}(P_1) \times \text{Aut}(P_2) \times \cdots \times \text{Aut}(P_n).$$

Можно считать, что $G \leq \text{Aut}(M)$. Тогда $G \cap K \triangleleft G$ и, значит, $G \cap K \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Поскольку в силу гипотезы Шрейера

$$K/M \cong \text{Out}(P_1) \times \text{Out}(P_2) \times \cdots \times \text{Out}(P_n)$$

– разрешимая группа и по лемме 3.1 $G/M \in E_\pi(\mathfrak{F})$, то $G \cap K/M \in D_\pi(\mathfrak{F})$. В силу того, что $H/M \in E_\pi(\mathfrak{F})$, по лемме 3.2 получаем, что $H \cap K/M \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Тогда по лемме 3.5 $H \cap K \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Так как $\text{Aut}(P_i) \triangleleft K$, то $(H \cap K) \cap \text{Aut}(P_i) = H \cap \text{Aut}(P_i) \triangleleft H \cap K$ и, значит, $H \cap \text{Aut}(P_i) \in E_\pi(\mathfrak{F})$, $1 \leq i \leq n$.

Допустим, что $n = 1$. Тогда $H \leq G \leq \text{Aut}(P_1)$ и, значит, $H = H \cap \text{Aut}(P_1) \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Получили противоречие. Следовательно, $n > 1$.

Пусть

$$1 = H_0 < H_1 < \cdots < H_n = M < H_{n+1} < \cdots < H_s = H$$

– rc -ряд группы H , проходящий через M .

Пусть $N_i = N_G(H_i/H_{i-1})$ и $C_i = C_G(H_i/H_{i-1})$, $1 \leq i \leq s$. Тогда $N_i/C_i \cong \text{Aut}_G(H_i/H_{i-1})$ и $(N_i \cap H)C_i/C_i \cong N_i \cap H/C_i \cap H \cong \text{Aut}_H(H_i/H_{i-1})$, $1 \leq i \leq s$.

Пусть $n+1 \leq i \leq s$. Тогда $M \leq C_i \cap H$, $N_i \cap H/C_i \cap H \in \mathfrak{F}_\pi$ и, значит, $\text{Aut}_H(H_i/H_{i-1}) \in E_\pi(\mathfrak{F})$ для любого i , $n+1 \leq i \leq s$.

Пусть $1 \leq i \leq n$. Тогда H_i/H_{i-1} является композиционным фактором группы G . Так как $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$, то по лемме 3.12 $N_i/C_i \cong \text{Aut}_G(H_i/H_{i-1}) \in E_\pi(\mathfrak{F})$. В силу $n > 1$ получаем, что $N_i < G$ для любого i , $1 \leq i \leq n$. Так как

$$|N_i/C_i| + |(N_i \cap H)C_i/C_i| + |MC_i/C_i| < t, \\ ((N_i \cap H)C_i/C_i)/(MC_i/C_i) \cong N_i \cap H/M(C_i \cap H) \in \mathfrak{F}_\pi,$$

то по индукции $(N_i \cap H)C_i/C_i \in E_\pi(\mathfrak{F})$, а значит, и $\text{Aut}_H(H_i/H_{i-1}) \in E_\pi(\mathfrak{F})$ для любого i , $1 \leq i \leq s$.

Следовательно, для H выполняется утверждение (с) леммы 3.9. Тогда для H выполняется утверждение (а) леммы 3.9 и, значит, $H \in E_\pi(\mathfrak{F})$.

2) Пусть M не является нормальной подгруппой в G .

Пусть $L = \langle M^G \rangle$. Тогда $L \triangleleft G$ и по лемме 3.2 $L \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Так как $M \triangleleft \triangleleft G$, то $L < G$. Допустим, что $H \leq L$. Так как $|L| + |H| + |M| < t$, то по индукции $H \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $H \not\leq L$.

Пусть $U = HL$. Допустим, что $U < G$. Так как по лемме 3.1 $G/L \in E_\pi(\mathfrak{F})$ и $U/L \cong H/H \cap L \cong (H/M)/(H \cap L/M) \in E_\pi(\mathfrak{F})$, то $L < U < G$, $L \triangleleft G$ и по п. 1) $U \in E_\pi(\mathfrak{F})$. В силу $|U| + |H| + |M| < t$ по индукции получаем, что $H \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Противоречие.

Следовательно, $G = HL$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в L . Тогда $MN/N \triangleleft HN/N$, $MN/N \triangleleft G/N$, $G/N \in E_\pi(\mathfrak{F})$ и

$$\begin{aligned} (HN/N)/(MN/N) &\cong HN/MN \cong H/H \cap MN = H/M(H \cap N) \\ &\cong (H/M)/(M(H \cap N)/M) \in E_\pi(\mathfrak{F}). \end{aligned}$$

В силу $|G/N| + |HN/N| + |MN/N| < t$ по индукции получаем, что $HN/N \in E_\pi(\mathfrak{F})$ и, значит, $H/H \cap N \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Так как $H/M \in \mathfrak{F}_\pi$ и $H/H \cap N \in E_\pi(\mathfrak{F})$, то по лемме 3.13 $H/M \cap H \cap N = H/M \cap N \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Допустим, что $M \cap N < M$. Так как $|G| + |H| + |M \cap N| < t$, то по индукции $H \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $M \cap N = M$ и, значит, $M \leq N = L$. В силу $G = HN$, $M \triangleleft H$ и $M \triangleleft N$ получаем, что $M \triangleleft G$. Противоречие. Лемма доказана.

Из лемм 3.9 и 3.14 получим следующие критерии для $E_\pi(\mathfrak{F})$ -групп.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ является rc -рядом группы G , $\mathfrak{F} = \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$;
- 2) $\text{Aut}_G(A/A^*) \in E_\pi(\mathfrak{F})$ для всех $A \in \mathcal{A}(G)$;
- 3) $\text{Aut}_G(G_i/G_{i-1}) \in E_\pi(\mathfrak{F})$ для всех i , $1 \leq i \leq n$;
- 4) $\text{Aut}_G(H/K) \in E_\pi(\mathfrak{F})$ для всех композиционных факторов H/K группы G .

СЛЕДСТВИЕ 3.1 (см. [25; следствие 5]). Пусть $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ является rc -рядом группы G . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $G \in E_\pi$;
- 2) $\text{Aut}_G(A/A^*) \in E_\pi$ для всех $A \in \mathcal{A}(G)$;
- 3) $\text{Aut}_G(G_i/G_{i-1}) \in E_\pi$ для всех i , $1 \leq i \leq n$;
- 4) $\text{Aut}_G(H/K) \in E_\pi$ для всех композиционных факторов H/K группы G .

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ является rc -рядом группы G . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $G \in E_\pi(\mathfrak{S})$;
- 2) $\text{Aut}_G(A/A^*) \in E_\pi(\mathfrak{S})$ для всех $A \in \mathcal{A}(G)$;
- 3) $\text{Aut}_G(G_i/G_{i-1}) \in E_\pi(\mathfrak{S})$ для всех i , $1 \leq i \leq n$;
- 4) $\text{Aut}_G(H/K) \in E_\pi(\mathfrak{S})$ для всех композиционных факторов H/K группы G .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В теореме 3.1 и следствиях 3.1, 3.2 установлены необходимые и достаточные условия, при которых конечная группа обладает холловой π -подгруппой. Теорема 3.1 усиливает теорему Гросса (см. [9; теорема 3.5]).

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп. Тогда класс групп $E_\pi(\mathfrak{F})$ является локальной формацией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.1 класс $\mathfrak{H} = E_\pi(\mathfrak{F})$ является гомоморфом. Покажем, что класс $\mathfrak{H}$ замкнут относительно конечных подпрямых произведений. Пусть T – подпрямое произведение $\mathfrak{H}$ -групп G_1, G_2 . Покажем, что T является $\mathfrak{H}$ -группой.

Допустим, что T – контрпример минимального порядка. По [27; теорема 5.5.1] и [20; теорема A.19.1] существуют эпиморфизмы φ_i групп G_i на группу $F \cong G_i^{\varphi_i}$, $i = 1, 2$, такие, что $T = \{(g_1, g_2) : g_1^{\varphi_1} = g_2^{\varphi_2}, g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$. Переходя от внешнего прямого произведения к внутреннему и не меняя обозначений, по [27; теорема 5.5.1] и [20; теорема A.19.1] получим, что $\text{Ker}(\varphi_i) = N_i = T \cap G_i \triangleleft T$, $T/N_i \cong G_{3-i}$, $i = 1, 2$, $T/N_1 N_2 \cong F$. Так как $T/N_1 \cong G_2 \in E_\pi(\mathfrak{F})$, то $T/N_1 N_2 \cong (T/N_1)/(N_1 N_2/N_1)$ является $\mathfrak{H}$ -группой. Пусть $R/N_1 N_2 = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы $T/N_1 N_2$. Пусть H_i – проекция R в G_i , $i = 1, 2$. Тогда R – подпрямое произведение групп H_i , причем $R \cap H_i = N_i$, $H_i/N_i \cong R/N_1 N_2$ и $H_i/N_i = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G_i/N_i , $i = 1, 2$. Теперь по лемме 3.14 H_i является $\mathfrak{H}$ -группой, $i = 1, 2$.

Допустим, что $|R| < |G|$. Но тогда по индукции $R \in \mathfrak{H}$. Так как $|T : R| = \pi'$ -число, то и T является $E_\pi(\mathfrak{F})$ -группой. Получили противоречие. Следовательно, $T = R$ и $F \cong G_i/N_i = \mathfrak{F}_\pi$ -группа, $i = 1, 2$.

Пусть $(G_2)_\pi = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G_2 и α_2 – ограничение φ_2 на $(G_2)_\pi$. Тогда α_2 – гомоморфизм $(G_2)_\pi$ в F , причем $\text{Ker}(\alpha_2) = N_2 \cap (G_2)_\pi = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы N_2 . Так как $G_2/N_2 \cong F$ – π -группа, то $|F| = |(G_2)_\pi|/|(N_2)_\pi|$ и, значит, α_2 – эпиморфизм $(G_2)_\pi$ на F . Тогда подпрямое произведение S групп G_1 и $(G_2)_\pi$ относительно эпиморфизмов φ_1, α_2 является подгруппой группы T , причем по лемме 3.13 $S \in \mathfrak{H}$. Поскольку $|T| = |F| \cdot |N_1| \cdot |N_2|$ и $|S| = |F| \cdot |N_1| \cdot |N_2|_\pi$, то $|T : S| = \pi'$ -число и, значит, T является $E_\pi(\mathfrak{F})$ -группой. Так как класс $\mathfrak{H}$ является $\{Q, R_0\}$ -замкнутым, то $\mathfrak{H}$ является формацией.

Покажем, что $\mathfrak{H}$ является локальной формацией. Пусть $G/\Phi(G) \in \mathfrak{H}$ и $\Phi = \Phi(G)$. Тогда G/Φ содержит $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппу H/Φ . Пусть $\Phi = A \times B$, где A – π -группа и B – π' -группа. Тогда $B \triangleleft H$ и по теореме Шура–Цассенхауза $H = [B]P$, причем $P = S_\pi$ -подгруппа группы G . Так как $H/\Phi = BP/AB \cong P/P \cap AB = P/A \in \mathfrak{F}$ и $A \in \mathfrak{N}_\pi$, то по лемме 2.3 $P \in \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и, значит, $\mathfrak{H}$ – насыщенная формация. По [20; теорема IV.4.6] получаем, что $\mathfrak{H}$ – локальная формация. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.3 (см. [25; следствие 8]). *Класс E_π является локальной формацией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$. Тогда $E_\pi(\mathfrak{F}) = E_\pi$. Так как $\mathfrak{E}$ является $\{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутым классом групп, то по теореме 3.2 E_π является локальной формацией. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Класс $E_\pi(\mathfrak{S})$ является локальной формацией.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Л. А. Шеметков поставил следующий вопрос (см. [13; вопрос 5.65], [8; проблема 18]): замкнут ли относительно конечных подпрямых произведений класс E_π ? В заметке [28] по модулю гипотезы Шрейера был получен положительный ответ на этот вопрос. Однако при доказательстве леммы 3 в [28] было применено ошибочное равенство $H \cap \text{Aut}(P_i) = \text{Aut}_H(P_i)$, на которое внимание автора обратил Е. П. Вдовин. В теореме 3.2 и следствиях 3.3, 3.4

получено расширение основного результата из [28]. Отметим, что лемма 3.14 обобщает лемму 3 из [28], а ее доказательство устраняет ошибку в доказательстве леммы 3 из [28] по модулю классификации конечных простых групп.

Автор благодарен Е. П. Вдовину и рецензенту за замечания, способствовавшие устранению пробела в доказательстве леммы 3.14.

§ 4. $C_\pi(\mathfrak{F})$ -группы

ЛЕММА 4.1. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп. Если $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in C_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$, то по лемме 3.1 $G/N \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Пусть A/N и B/N являются $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппами группы G/N . Тогда по лемме 3.14 $\{A, B\} \subseteq E_\pi(\mathfrak{F})$. Пусть A_1 и B_1 являются $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппами соответственно в A и B , а значит, и в G . Так как $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$, то существует $g \in G$ такой, что $A_1^g = B_1$. Из $A = A_1N$ и $B = B_1N$ следует, что $(A/N)^{gN} = B/N$. Следовательно, $G/N \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S_n, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп и $N \triangleleft G$. Если $N \in C_\pi(\mathfrak{F})$ и $G/N \in C_\pi(\mathfrak{F})$, то $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что G – контрпример минимального порядка. По лемме 3.4 $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Ясно, что $N \neq 1$ и $N \neq G$. Пусть P и Q являются $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппами группы G . Тогда по лемме 3.1 PN/N и QN/N являются $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппами группы G/N . Так как $G/N \in C_\pi(\mathfrak{F})$, то существует $gN \in G/N$ такой, что $QN/N = (PN/N)^{gN} = P^gN/N$ и, значит, $QN = P^gN$. Допустим, что $QN < G$. Тогда по индукции $QN \in C_\pi(\mathfrak{F})$ и, значит, существует $a \in QN$ такой, что $Q = P^{ga}$ и $ga \in G$. Следовательно, $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Получили противоречие.

Поэтому $G = QN = PN$. Допустим, что N – π' -группа. Тогда по теореме Шура–Цассенхауза P и Q сопряжены в G и, значит, $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Получили противоречие. Следовательно, N не является π' -группой. Ясно, что N не является π -группой, так как в противном случае $Q = P$. Тогда $P_1 = P \cap N$ и $Q_1 = Q \cap N$ являются S_π -подгруппами группы N . Так как $P_1 \triangleleft P \in \mathfrak{F}$ и класс $\mathfrak{F}$ S_n -замкнут, то $P_1 \in \mathfrak{F}$. Аналогично, $Q_1 \in \mathfrak{F}$. Следовательно, P_1 и Q_1 являются $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппами группы N . Так как $N \in C_\pi(\mathfrak{F})$, то P_1 и Q_1 сопряжены в N . Следовательно, существует $n \in N$ такой, что $Q_1 = (P_1)^n$. По рассуждению Фраттини, $G = N_G(Q_1)N$.

Допустим, что $N_G(Q_1) < G$. Тогда

$$G/N \cong N_G(Q_1)/N_N(Q_1) \in C_\pi(\mathfrak{F}), \quad N_N(Q_1) \in C_\pi(\mathfrak{F})$$

и по индукции $N_G(Q_1) \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Так как $Q \leq N_G(Q_1) = N_G(P_1^n)$ и $P^n \leq N_G(Q_1)$, то существует $b \in N_G(Q_1)$ такой, что $Q = P^{nb}$ и $nb \in G$ и, значит, $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Противоречие.

Следовательно, $N_G(Q_1) = G$. Так как $N/Q_1 \triangleleft G/Q_1$, $(G/Q_1)/(N/Q_1) \cong G/N \in C_\pi(\mathfrak{F})$ и $N/Q_1 \in C_\pi(\mathfrak{F})$, то по индукции $G/Q_1 \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Тогда P/Q_1 и Q/Q_1 сопряжены в G/Q_1 , т.е. существует $cQ_1 \in G/Q_1$ такой, что $Q/Q_1 = (P/Q_1)^{cQ_1} = P^c/Q_1$, и, значит, $Q = P^c$. Следовательно, $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Получили противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. Пусть группа $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ – прямое произведение подгрупп G_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и $\mathfrak{F} - \{S_n, D\}$ -замкнутый класс групп. Группа G принадлежит $C_\pi(\mathfrak{F})$ и S является $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $G_i \in C_\pi(\mathfrak{F})$ и $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, где $S_i = S \cap G_i - S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G_i для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$ и $S - S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G . Тогда по лемме 3.2 $S_i = S \cap G_i - S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G_i для любого $i = 1, 2, \dots, n$, причем $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$. Пусть $H_i - S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G_i для некоторого $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда по лемме 3.3, 1) $H = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{i-1} \times H_i \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$ есть $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G , причем $H \cap G_i = H_i$. Так как $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$, то существует $g = g_1 g_2 \dots g_n \in G$ такой, что $g_i \in G_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $H^g = S$. Тогда $(H_i)^{g_i} = H^g \cap G_i = S \cap G_i = S_i$. Следовательно, $G_i \in C_\pi(\mathfrak{F})$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $G_i \in C_\pi(\mathfrak{F})$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда, как и выше, нетрудно показать, что $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathfrak{F} - \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп. Если для группы G выполняется одно из следующих условий:

- 1) G обладает субнормальным рядом $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$ таким, что $G_i/G_{i-1} \in C_\pi(\mathfrak{F})$ для любого $1 \leq i \leq n$;
 - 2) $A \in C_\pi(\mathfrak{F})$ для всех $A \in \mathcal{A}(G)$;
- то группа G принадлежит $C_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Применим индукцию по n . При $n = 1$ утверждение верно. Пусть $n > 1$. Тогда по индукции $G_{n-1} \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Так как $G/G_{n-1} \in C_\pi(\mathfrak{F})$, то по лемме 4.2 $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$.

2) Допустим, что G – контрпример минимального порядка. Если G – простая группа, то $G \in \mathcal{A}(G)$ и, значит, $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Пусть N – максимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда G/N – простая группа. Так как $\mathcal{A}(N) \subseteq \mathcal{A}(G)$ и $|N| < |G|$, то по индукции $N \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Если G/N – абелева простая группа, то в силу леммы 2.3 $G/N \in C_\pi(\mathfrak{F})$ и по лемме 4.2 $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Получили противоречие. Если G/N – простая неабелева группа, то по лемме 2.4 существует атом $A \in \mathcal{A}(G)$ такой, что $G = AN$. Тогда $G/N \cong A/A \cap N$. Так как $A \in C_\pi(\mathfrak{F})$, то по лемме 4.1 $A/A \cap N \in C_\pi(\mathfrak{F})$ и, значит, $G/N \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Тогда по лемме 4.2 $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Получили противоречие. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Если для группы G выполняется одно из следующих условий:

- 1) G обладает субнормальным рядом $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$ таким, что $G_i/G_{i-1} \in C_\pi$ для любого $1 \leq i \leq n$;
 - 2) $A \in C_\pi$ для всех $A \in \mathcal{A}(G)$;
- то группа G принадлежит C_π .

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Если для группы G выполняется одно из следующих условий:

- 1) G обладает субнормальным рядом $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$ таким, что $G_i/G_{i-1} \in C_\pi(\mathfrak{S})$ для любого $1 \leq i \leq n$;
 - 2) $A \in C_\pi(\mathfrak{S})$ для всех $A \in \mathcal{A}(G)$;
- то группа G принадлежит $C_\pi(\mathfrak{S})$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $\mathfrak{F} - \{Q, S_n, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп и N есть $\mathfrak{F}_\pi$ -обособленная нормальная подгруппа группы G . Если $G/N \in C_\pi(\mathfrak{F})$, то $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$.

ЛЕММА 4.4. Пусть $\mathfrak{F} - \{Q, S_n, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп. Если группа G – подпрямое произведение $C_\pi(\mathfrak{F})$ -групп G_i , $i = 1, 2$, и G_2 – π -группа, то $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.13 $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Пусть P и Q являются $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппами группы G . Так как G – подпрямое произведение групп G_i , $i = 1, 2$, то в G существуют нормальные подгруппы N_i такие, что $G/N_i \cong G_i$, $i = 1, 2$, и $N_1 \cap N_2 = 1$. По лемме 3.1 PN_1/N_1 и QN_1/N_1 являются $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппами группы G/N_1 . Тогда существует $gN_1 \in G/N_1$ такой, что

$$QN_1/N_1 = (PN_1/N_1)^{gN_1} = P^g N_1/N_1$$

и, значит, $QN_1 = P^g N_1$. По условию $N_1 \cong N_1 N_2 / N_2 \triangleleft G / N_2 \cong G_2$ есть π -группа. Следовательно, N_1 – π -группа и, значит, $Q = P^g$, $g \in G$. Следовательно, $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.5. Пусть $\mathfrak{F} - \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп, A – нормальная простая подгруппа $E_\pi(\mathfrak{F})$ -группы G , $A \leq G \leq \text{Aut}(A)$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- 1) если $2 \notin \pi$, то $k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A) = 1$;
- 2) если $3 \notin \pi$, то $k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A) \in \{1, 2\}$;
- 3) если $\{2, 3\} \subseteq \pi$, то
 - (а) либо $k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A) \in \{1, 2, 3, 4\}$,
 - (б) либо $k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A) = 9$, $A \cong \text{PSp}_{2n}(q)$, q – степень простого числа $p \notin \pi$ и $n \in \{5, 7\}$;
- 4) $k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A)$ является π -числом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По [22; теорема 1.1] если $2 \notin \pi$, то $k_\pi(A) = 1$; если $3 \notin \pi$, то $k_\pi(A) \in \{1, 2\}$; если $\{2, 3\} \subseteq \pi$, то $k_\pi(A) \in \{1, 2, 3, 4, 9\}$. Так как $1 \leq k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A) \leq k_\pi(A)$, то утверждения 1) и 2) леммы выполняются.

Пусть $\{2, 3\} \subseteq \pi$. Если $k_\pi(A) \in \{1, 2, 3, 4\}$, то $k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A) \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Пусть $k_\pi(A) = 9$. По [22; лемма 8.1] $A \cong \text{PSp}_{2n}(q)$, q – степень простого числа $p \notin \pi$ и

- (а) либо $n \in \{5, 7\}$, $\pi \cap \pi(A) = \{2, 3\} \subseteq \pi(q^2 - 1)$ и $(q^2 - 1)_\pi = 48$,
- (б) либо $n = 7$, $\pi \cap \pi(A) = \{2, 3, 5\} \subseteq \pi(q^2 - 1)$, $(q^2 - 1)_\pi = 120$.

Тогда по [22; лемма 4.4] каждая S_π -подгруппа H группы A является S_π -подгруппой группы $M = L.S_n$, где $L = L_1 \circ \dots \circ L_n \cong \text{SL}_2(q) \circ \dots \circ \text{SL}_2(q)$. Кроме того, $H = (H_1 \circ \dots \circ H_n).T$, где H_i является S_π -подгруппой группы $L_i \cong \text{SL}_2(q)$, $i = 1, \dots, n$, а T является S_π -подгруппой группы S_n .

Рассмотрим всевозможные случаи для $\pi \cap \pi(S_n)$, учитывая, что $n \in \{5, 7\}$.

Если $\pi \cap \pi(S_n) = \{2, 3\}$, то в силу [22; лемма 2.3, (d)] S_π -подгруппы в группе S_n разрешимы. По [22; лемма 3.1] в этом случае все S_π -подгруппы группы $\text{SL}_2(q)$ также разрешимы и, значит, все S_π -подгруппы группы A разрешимы. Так как по лемме 2.3 $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, то каждая S_π -подгруппа группы A является $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппой группы A и по [22; лемма 8.2] $k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A) = k_\pi^G(A) \in \{1, 9\}$.

Пусть $n = 7$ и $\pi \cap \pi(\mathbf{S}_7) = \pi(6!)$. Тогда S_π -подгруппы группы $\mathbf{S}_7$ будут изоморфны $\mathbf{S}_6$. Если $\mathbf{S}_6 \in \mathfrak{F}$, то, учитывая $\{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутость класса $\mathfrak{F}$ и применяя [22; лемма 3.1], получим, что все S_π -подгруппы группы A принадлежат $\mathfrak{F}$, и по [22; лемма 8.2] $k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A) = k_\pi^G(A) \in \{1, 9\}$. Если $\mathbf{S}_6 \notin \mathfrak{F}$, то каждая S_π -подгруппа группы A не принадлежит $\mathfrak{F}$ и, значит, $k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A) = 0$, что невозможно.

Пусть $\pi(\mathbf{S}_n) \subseteq \pi$ и $n \geq 5$. Так как $\pi \cap \pi(A) = \{2, 3, 5\}$, то $n = 5$ и, как и в предшествующем случае, получим, что $k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A) \in \{1, 9\}$.

Утверждение 4) непосредственно следует из утверждений 1)–3).

Лемма доказана.

Аналогично леммам 13, 14, 15, 16 и теореме 1 из работы [24] с применением лемм 3.10 и 4.5 доказываются соответственно утверждения следующей леммы.

ЛЕММА 4.6. Пусть $\mathfrak{F}$ – $\{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп, $A = A_1 \times \dots \times A_s$ – нормальная подгруппа группы G и H – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G . Тогда выполняются следующие утверждения.

1) Если $HA \triangleleft G$, то следующие утверждения эквивалентны:

(a) $k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A) = 1$;

(b) $HA \in C_\pi(\mathfrak{F})$;

(c) любые две $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппы группы G сопряжены элементом из A .

2) Если $G = HAC_G(A)$, то для любого $i = 1, \dots, s$ имеют место следующие утверждения:

(a) $N_G(A_i) = N_H(A_i)AC_G(A)$;

(b) $N_H(A_i)$ является $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппой группы $N_G(A_i)$;

(c) $k_{\pi, \mathfrak{F}}^{\text{Aut}_G(A_i)}(\text{Inn}(A_i)) = k_{\pi, \mathfrak{F}}^{N_G(A_i)}(A_i)$.

3) Если $G = HAC_G(A)$ и $A_1, \dots, A_s$ нормальны в G , то

$$k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A) = k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A_1) \cdots k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A_s).$$

4) Если $G = HAC_G(A)$ и G действует сопряжениями транзитивно на множестве $\{A_1, \dots, A_s\}$, то $k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A) = k_{\pi, \mathfrak{F}}^G(A_i)$ для любого $i = 1, \dots, s$.

5) Если $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$, то $HA \in C_\pi(\mathfrak{F})$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – $\{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп. Тогда класс $C_\pi(\mathfrak{F})$ является локальной формацией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.1 класс $C_\pi(\mathfrak{F})$ является Q -замкнутым. Покажем, что класс $C_\pi(\mathfrak{F})$ является замкнутым относительно конечных подпрямых произведений. Пусть группа G содержит нормальные подгруппы A и B такие, что $G/A \in C_\pi(\mathfrak{F})$, $G/B \in C_\pi(\mathfrak{F})$, $A \cap B = 1$, и G – контрпример минимального порядка. По теореме 3.2 $G \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Пусть P и Q являются $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппами группы G . Тогда по лемме 3.1 $S_1/A = AP/A$ и $S_2/B = QB/B$ являются $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппами соответственно групп G/A и G/B . Так как $|G : S_1B|$ является π' -числом и $S_1B/AB \cong S_1/A(S_1 \cap B)$ является $\mathfrak{F}$ -группой, то S_1B/AB – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G/AB . Аналогично, S_2A/AB – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G/AB . Так как $G/AB \cong (G/A)/(AB/A)$, то по лемме 4.1 $G/AB \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, S_1B/AB и S_2A/AB сопряжены в G/AB . Тогда существует $gAB \in G/AB$ такой, что $S_2A/AB = (S_1B/AB)^{gAB} = S_1^gB/AB$.

Пусть $T = S_2A = S_1^gB$. Тогда группа T является подпрямым произведением групп $T/A = S_1^gB/A = (S_1^g/A)(AB/A)$ и $T/B = S_2A/B = (S_2/B)(AB/B)$. По лемме 4.6, 5) имеем $T/A \in C_\pi(\mathfrak{F})$ и $T/B \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Допустим, что $T < G$. Тогда по индукции $T \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Так как P^g и Q — $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппы группы T , то существует $t \in T$ такой, что $Q = P^{gt}$ и $gt \in G$. Следовательно, $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$.

Пусть $G = T$. Тогда $G = PAB = QAB$. Так как AP/A и AQ/A являются $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппами группы G/A , то существует $xA \in G/A$ такой, что $AP/A = (AQ/A)^{xA}$. Отсюда следует, что $AP = AQ^x$, $x \in G$. Пусть $L = AP$. Так как $L/A \cong P/P \cap A$ есть $\mathfrak{F}_\pi$ -группа, $L/L \cap B \cong LB/B = G/B \in C_\pi$ и $A \cap (L \cap B) = 1$, то по лемме 4.4 $L \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Поскольку P и Q^x являются $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппами группы L , то существует $y \in L$ такой, что $P = Q^{xy}$ и $xy \in G$. Следовательно, $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$.

Так как класс $C_\pi(\mathfrak{F})$ является $\{Q, R_0\}$ -замкнутым, то $C_\pi(\mathfrak{F})$ является формацией. Пусть $G/\Phi(G) \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Тогда по лемме 4.2 $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$ и, значит, $C_\pi(\mathfrak{F})$ является насыщенной формацией. По [20; теорема IV.4.6] $C_\pi(\mathfrak{F})$ является локальной формацией. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.4 (см. [29; теорема 1]). *Класс C_π является локальной формацией.*

СЛЕДСТВИЕ 4.5. *Класс $C_\pi(\mathfrak{S})$ является локальной формацией.*

СЛЕДСТВИЕ 4.6. *Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп. Тогда $E_\pi(\mathfrak{F}) \cap C_\pi$ является локальной формацией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3.2 класс групп $E_\pi(\mathfrak{F})$ является локальной формацией. Тогда $C_\pi \mathfrak{F} = E_\pi(\mathfrak{F}) \cap C_\pi$ является локальной формацией по [8; лемма 3.7 и § 16]. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4.7. *Класс $E_\pi(\mathfrak{S}) \cap C_\pi$ является локальной формацией.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Леммы 4.5 и 4.6, а значит, теорема 4.2 и ее следствия доказаны с использованием классификации конечных простых групп. Теорема 4.2 и ее следствия дают положительное решение задачи Л. А. Шеметкова (см. [8; § 16, проблема 19]) для $\{S, \text{Ext}\}$ -замкнутых локальных формаций $\mathfrak{F}$.

§ 5. $D_\pi(\mathfrak{F})$ -группы

ЛЕММА 5.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — гомоморф такой, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{F}$. Если $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$ и $M \triangleleft G$, то $G/M \in D_\pi(\mathfrak{F})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$, S является $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппой группы G и R/M — $\mathfrak{F}_\pi$ -подгруппа группы G/M . По лемме 3.1 SM/M является $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппой группы G/M . Пусть T — минимальное добавление к M в R . Тогда по [8; лемма 11.1] $R = MT$ и $M \cap T \subseteq \Phi(T)$. Так как $R/M \cong T/T \cap M$ есть $\mathfrak{F}_\pi$ -группа, то в силу [8; лемма 11.2] T является π -группой. В силу того, что $T/T \cap M \in \mathfrak{F}$, $M \cap T \in \mathfrak{N}_\pi$, получаем $T \in \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Поэтому T есть $\mathfrak{F}_\pi$ -подгруппа группы G . Так как $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$, то T содержится в некоторой $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппе группы G , причем каждая $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G сопряжена с S . Следовательно, существует $g \in G$ такой, что $T \leq S^g$ и, значит, $R/M = TM/M \leq S^gM/M = (SM/M)^{gM}$. В частности, если R/M — $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа

группы G/M , то $R/M = (SM/M)^{gM}$. Следовательно, $G/M \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\pi = \sigma \cup \tau \subseteq \pi(G)$ и $\sigma \cap \tau = \emptyset$. Если $G \in E_\pi(\mathfrak{Z}_\sigma \mathfrak{N}_\tau)$, то $G \in D_\pi(\mathfrak{Z}_\sigma \mathfrak{N}_\tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{Z}_\sigma \mathfrak{N}_\tau$. По условию в группе G существует $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа S такая, что $S = [P]Q$, где $P \in \mathfrak{Z}_\sigma$ и Q – нильпотентная τ -группа, причем $(|P|, |Q|) = 1$. Пусть $H = [P_1]Q_1 \leq G$, где $P_1 \in \mathfrak{Z}_\sigma$ и Q_1 – нильпотентная τ -группа. Покажем, что H содержится в некоторой $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппе группы G . Допустим, что группа G – контрпример, в котором $t = |G| + |\pi|$ является наименьшим.

Пусть $P_1 = 1$. Тогда H является нильпотентной τ -подгруппой группы G . По [8; следствие 18.5.1] $G \in D_\tau$ и, значит, каждая τ -подгруппа группы G содержится в некоторой S_τ -подгруппе из G , причем любые две S_τ -подгруппы из G сопряжены в G . Следовательно, существует $a \in G$ такой, что $H = Q_1 \leq Q^a \leq S^a$. Допустим, что $Q_1 = 1$. Тогда $H = P_1 \in \mathfrak{Z}_\sigma$. Так как P является S_σ -подгруппой с циклическими силовскими подгруппами в группе G и $|P_1|$ делит $|P|$, то по [8; теорема 18.7] существует $b \in G$ такой, что $H = P_1 \leq P^b \leq S^b$.

Пусть $P_1 \neq 1 \neq Q_1$. Применяя [27; теорема 9.4.3], получим $P = [Z_1]Z_2$, где Z_i – циклическая σ_i -группа, $i = 1, 2$, причем $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ и $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$. Так как $|P_1|$ делит $|P|$, то по [8; теорема 18.7] существует элемент $c \in G$ такой, что $P_1^c \leq P$. Отсюда следует, что $P_1^c = [C_1]C_2$, где C_i – циклическая σ_i -группа, $i = 1, 2$, причем $C_1 = P_1^c \cap Z_1$.

Пусть $C_1 \neq 1$. Тогда $C_1 \triangleleft H^c$. Так как Z_1 характеристична в P , то $Z_1 \triangleleft S$ и, значит, $C_1 \triangleleft S$. Следовательно, $T = N_G(C_1) \supseteq S \cup H^c$.

Допустим, что $T < G$. Так как $T \in E_\pi(\mathfrak{Z}_\sigma \mathfrak{N}_\tau)$ и $|T| + |\pi| < t$, то по индукции $T \in D_\pi(\mathfrak{Z}_\sigma \mathfrak{N}_\tau)$. Следовательно, существует $d \in T$ такой, что $H^c \leq S^d$ и, значит, $H \leq S^{dc^{-1}}$, $dc^{-1} \in G$. Получили противоречие.

Пусть $T = G$. Тогда $C_1 \triangleleft G$ и $S/C_1 = [P/C_1](QC_1/C_1)$ – S_π -подгруппа группы G/C_1 . Так как $P/C_1 \in \mathfrak{Z}_\sigma$ и $Q \cong QC_1/C_1 \in \mathfrak{N}_\tau$, то $G/C_1 \in E_\pi(\mathfrak{Z}_\sigma \mathfrak{N}_\tau)$ и $H/C_1 = [P_1/C_1](Q_1C_1/C_1) \in \mathfrak{Z}_\sigma \mathfrak{N}_\tau$. По индукции существует $fC_1 \in G/C_1$ такой, что $H/C_1 \leq (S/C_1)^{fC_1}$ и, значит, $H \leq S^f$, $f \in G$. Получили противоречие.

Пусть $C_1 = 1$. Тогда $P_1^c = C_2 \neq 1 \neq Q_1$. Если $Z_1 = 1$, то, рассуждая, как выше при $C_1 \neq 1$, получим противоречие. Пусть $Z_1 \neq 1$. В силу теоремы Шура–Цассенхауза, по рассуждению Фраттини, получим $S = PN_S(Z_2) = Z_1N_S(Z_2)$. Заменяя при необходимости Z_2 на сопряженную в S , можно считать, что $R = [Z_2]Q \leq S$ и $G \in E_{\sigma_2 \cup \tau}(\mathfrak{Z}_{\sigma_2} \mathfrak{N}_\tau)$. Так как $|G| + |\sigma_2 \cup \tau| < t$, то по индукции $G \in D_{\sigma_2 \cup \tau}(\mathfrak{Z}_{\sigma_2} \mathfrak{N}_\tau)$ и, значит, существует $g \in G$ такой, что $H \leq R^g \leq S^g$. Получили противоречие. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Если группа G содержит холлову диэдральную подгруппу D и $\pi = \pi(D)$, то $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F} = QS(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диэдральная группа D содержит нормальную подгруппу N такую, что $D = [N]P$, где P – силовская 2-подгруппа группы D . Пусть $\pi(D) = \pi = \sigma \cup \tau$, $\sigma \cap \tau = \emptyset$ и $\tau = \{2\}$. Тогда $G \in E_\pi(\mathfrak{Z}_\sigma \mathfrak{N}_\tau)$. Так как класс $\mathfrak{Z}_\sigma \mathfrak{N}_\tau$ является S -замкнутым гомоморфом, то, применяя теорему 5.1, нетрудно показать, что $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F} = QS(D)$. Следствие доказано.

ВОПРОС 5.1. Для каких классов групп $\mathfrak{F}$ выполняется равенство $E_\pi(\mathfrak{F}) = D_\pi(\mathfrak{F})$?

ВОПРОС 5.2. Будут ли выполняться равенства $E_\pi(\mathfrak{U}) = D_\pi(\mathfrak{U})$ и $E_\pi(\mathfrak{D}^\varphi) = D_\pi(\mathfrak{D}^\varphi)$?

ЛЕММА 5.2. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S_n, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп и A – нормальная $\mathfrak{F}_\pi$ -обособленная подгруппа группы G . Если $G/A \in D_\pi(\mathfrak{F})$, то $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что группа G – контрпример минимального порядка. Ясно, что $A \neq 1$. Пусть M – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в A . Тогда A/M – $\mathfrak{F}_\pi$ -обособленная нормальная подгруппа группы G/M и $(G/M)/(A/M) \cong G/A \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Если $M < A$, то по индукции $G/M \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Поэтому можем считать, что $A = M$, причем $A \in \mathfrak{F}_\pi$ или A – π' -группа. В силу леммы 4.2 $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$.

Пусть $S = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G и Q – $\mathfrak{F}_\pi$ -подгруппа группы G . По лемме 3.1 $SA/A = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G/A и $QA/A \cong Q/Q \cap A \in \mathfrak{F}_\pi$. Так как $G/A \in D_\pi(\mathfrak{F})$, то существует $gA \in G/A$ такой, что $QA/A \leq (SA/A)^{gA}$ и, значит, $QA \leq S^g A$. Пусть $A \in \mathfrak{F}_\pi$. Тогда $S^g A = S^g$, $QA \leq S^g$ и $Q \leq S^g$. Пусть A – π' -группа. Тогда $QA = A(S^g \cap QA)$ и по теореме Шура–Цассенхауза существует $x \in QA$ такой, что $Q = (S^g \cap QA)^x$ и, значит, $Q \leq S^{gx}$, $gx \in G$. Следовательно, $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S_n, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп. Тогда расширение $E_\pi(\mathfrak{Z})$ -группы с помощью $D_\pi(\mathfrak{F})$ -группы является $D_\pi(\mathfrak{F})$ -группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что группа G – контрпример минимального порядка. Тогда в G существует нормальная подгруппа $N \in E_\pi(\mathfrak{Z})$ такая, что $G/N \in D_\pi(\mathfrak{F})$. В силу [8; следствие 18.7.1] и леммы 4.2 $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Пусть $H = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа и Q – максимальная $\mathfrak{F}_\pi$ -подгруппа группы G . Покажем, что Q содержится в некоторой $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппе группы G , сопряженной с H . По лемме 3.2 $N \cap H = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы N . Если $Q \leq N$, то по [8; теорема 18.7] существует $x \in N$ такой, что $Q \leq (N \cap H)^x = N \cap H^x$ и, значит, $Q \leq H^x$. Пусть $Q \not\leq N$. Тогда $QN/N \cong Q/Q \cap N \in \mathfrak{F}_\pi$ и по лемме 3.1 $HN/N = S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G/N . Так как $G/N \in D_\pi(\mathfrak{F})$, то существует $yN \in G/N$ такой, что $QN/N \leq (HN/N)^{yN} = H^y N/N$ и, значит, $QN \leq H^y N$. По индукции $G = HN$. Пусть $2 \in \pi$. Если $2 \notin \pi(N)$, то N разрешима. Если $2 \in \pi(N)$, то силовская 2-подгруппа в N циклическая и N разрешима. Тогда по лемме 5.2 $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Пусть $2 \notin \pi$. Тогда G/N разрешима и, значит, $G/N \in D_\pi^s$. Так как $N \in E_\pi(\mathfrak{Z})$, то по [8; теорема 18.9] N принадлежит π -классу Виландта. Тогда по [8; теорема 18.14] $G \in D_\pi^s$. Следовательно, существует $g \in G$ такой, что $Q \leq H^g$ и, значит, $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.2 (см. [8; теорема 18.17]). Всякое расширение $E_\pi(\mathfrak{Z})$ -группы с помощью D_π -группы является D_π -группой.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Всякое расширение $E_\pi(\mathfrak{Z})$ -группы с помощью $D_\pi(\mathfrak{S})$ -группы является $D_\pi(\mathfrak{S})$ -группой.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп. Тогда всякое расширение $E_\pi(\mathfrak{N})$ -группы с помощью $D_\pi(\mathfrak{F})$ -группы является $D_\pi(\mathfrak{F})$ -группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S и T являются максимальными $\mathfrak{F}_\pi$ -подгруппами группы G . Достаточно показать, что S и T сопряжены в G . По условию в G существует нормальная $E_\pi(\mathfrak{N})$ -подгруппа H такая, что $G/H \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Тогда SH/H и TH/H являются $\mathfrak{F}_\pi$ -подгруппами группы G/H , которые содержатся соответственно в $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппах U/H и V/H группы G/H , причем существует xH такой, что $(U/H)^{xH} = V/H$ и, значит, $\langle S^xH/H, TH/H \rangle \leq V/H$. Поэтому можем считать, что $G/H \in \mathfrak{F}_\pi$.

Пусть S_1 является максимальной π -подгруппой из H , содержащей $S \cap H$. Так как $H \in E_\pi^n$, то по теореме Виландта S_1 – $S_\pi(\mathfrak{N})$ -подгруппа группы H . Применяя [21; теорема 1.46], по лемме 2.8 получим $S \cap H = N_{S_1}(S \cap H)$. Следовательно, $S \cap H = S_1$ есть $S_\pi(\mathfrak{N})$ -подгруппа группы H . Аналогично, $T \cap H$ – $S_\pi(\mathfrak{N})$ -подгруппа группы H . Тогда по [8; следствие 18.5.1] $S \cap H = T^h \cap H$ для некоторого $h \in H$. Поэтому можем считать, что $S \cap H = T \cap H$. Так как $S \cap H \triangleleft S$ и $T \cap H \triangleleft T$, то $S \cap H \triangleleft L = \langle S, T \rangle$, причем $S \cap H$ является нормальной $S_\pi(\mathfrak{N})$ -подгруппой группы $L \cap H$. Поэтому $L \cap H / S \cap H$ – π' -группа. Заметим, что $LH/H \cong L / L \cap H$ является π -группой. Так как $LH/H \leq G/H \in \mathfrak{F}_\pi$, то в силу S -замкнутости $\mathfrak{F}$ получаем, что $LH/H \in \mathfrak{F}_\pi$. Тогда L является $\mathfrak{F}_\pi$ -обособленной группой. По лемме 2.1 $L \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $S = T^a$ для некоторого $a \in L$ и $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.4 (см. [19; теорема]). *Всякое расширение $E_\pi(\mathfrak{N})$ -группы с помощью D_π -группы является D_π -группой.*

СЛЕДСТВИЕ 5.5. *Всякое расширение $E_\pi(\mathfrak{N})$ -группы с помощью $D_\pi(\mathfrak{S})$ -группы является $D_\pi(\mathfrak{S})$ -группой.*

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. При доказательстве теорем 5.1 и 5.2, а также их следствий не применяется классификация конечных простых групп. Теорема 5.3 и ее следствия доказаны по модулю гипотезы Шрейера (см. [21; теорема 1.46]). Следствие 5.5 расширяет основной результат из [1; теорема D5].

ВОПРОС 5.3. Для каких классов групп $\mathfrak{F}$ расширение $D_\pi(\mathfrak{F})$ -группы с помощью $D_\pi(\mathfrak{F})$ -группы является $D_\pi(\mathfrak{F})$ -группой?

Следующая лемма доказывается аналогично теореме 3.3.1 из [30] (первоначальное доказательство см. [18; теорема 7.7]). Ввиду важности этой леммы для дальнейшего изучения класса $D_\pi(\mathfrak{F})$ -групп приведем ее полное доказательство.

ЛЕММА 5.3. *Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп, $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$ и $A \triangleleft G$. Тогда $A \in D_\pi(\mathfrak{F})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – $\mathfrak{F}_\pi$ -подгруппа группы A . Так как $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$, то в G существует $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа H такая, что $L \leq H$. Тогда $L \leq H \cap A$, причем по лемме 3.2 $H \cap A$ – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы A . Осталось доказать, что любые две $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппы группы A сопряжены в A .

Предположим, что группа G – контрпример, в котором $t = |G| + |A|$ является наименьшим. Тогда $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$, $A \notin C_\pi(\mathfrak{F})$ и, значит, A – неразрешимая группа. Пусть M – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в A . Допустим, что $M < A$. В силу $|G| + |M| < t$ по индукции получаем $M \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Так как по лемме 5.1 $G/M \in D_\pi(\mathfrak{F})$, $A/M \triangleleft G/M$ и $|G/M| + |A/M| < t$, то по

индукции $A/M \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Из $A/M \in C_\pi(\mathfrak{F})$ и $M \in C_\pi(\mathfrak{F})$ по лемме 4.2 следует, что $A \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Получили противоречие.

Следовательно, $A = M$. Тогда $A = A_1 \times \cdots \times A_m$ – прямое произведение попарно изоморфных простых неабелевых групп A_i , $1 \leq i \leq m$, и по лемме 3.2 $A \in E_\pi(\mathfrak{F})$. Пусть $\text{Hall}_{\pi, \mathfrak{F}}(A)$ – множество всех $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгрупп группы A . Так как каждая $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы A содержится в некоторой $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппе группы G и G на множестве $\text{Hall}_{\pi, \mathfrak{F}}(G)$ через сопряжение действует транзитивно, то G через сопряжение действует транзитивно и на множестве $\text{Hall}_{\pi, \mathfrak{F}}(A)$, а значит, и на множестве $\Omega = K_{\pi, \mathfrak{F}}(A)$ всех сопряженных классов $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгрупп группы A . По лемме 4.5 $k = k_{\pi, \mathfrak{F}}(A_i)$ является π -числом для любого i , $1 \leq i \leq m$. В силу леммы 3.3 получаем, что $k_{\pi, \mathfrak{F}}(A) = k^m$ также является π -числом.

Пусть H – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G . Тогда $\Delta = \{(H \cap A)^a : a \in A\} \in \Omega$. Так как для любых $a \in A$ и $h \in H$ имеем $(H \cap A)^{ah} = (H \cap A)^{a_1}$, где $a_1 = h^{-1}ah \in A$, то H содержится в стабилизаторе G_Δ класса Δ относительно действия G на множестве Ω . Тогда $k_{\pi, \mathfrak{F}}(A) = |\Omega| = |G : G_\Delta|$ является π' -числом. Так как $k_{\pi, \mathfrak{F}}(A)$ является π -числом и π' -числом, то $k_{\pi, \mathfrak{F}}(A) = 1$ и $A \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Получили противоречие. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.6. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп, $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$ и $A \triangleleft \triangleleft G$. Тогда $A \in D_\pi(\mathfrak{F})$.

Следующие леммы 5.4–5.6 и теорема 5.4 несколько расширяют результаты из работы [9; § 4].

ЛЕММА 5.4. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп, M – субнормальная подгруппа группы G , $M \triangleleft H \leq G$. Если $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$ и $H/M \in D_\pi(\mathfrak{F})$, то $H \in D_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 5.6 $M \in D_\pi(\mathfrak{F})$ и, значит, по лемме 4.2 $H \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Пусть A – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы H и B – $\mathfrak{F}_\pi$ -подгруппа группы H . Покажем, что B содержится в некоторой $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппе группы H . Так как $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$, то в G существует $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа S такая, что $B \leq S$. По лемме 3.2 $S \cap M$ и $A \cap M$ являются $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппами группы $M \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Поэтому $S \cap M$ и $A \cap M$ сопряжены в M . Заменяя A на сопряженную в H , можем считать, что $S \cap M = A \cap M = P$ есть $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа в M , причем $P \triangleleft A$ и $P \triangleleft S$. Если $P \triangleleft M$, то M – $\mathfrak{F}_\pi$ -обособленная нормальная подгруппа группы H и по лемме 5.2 $H \in D_\pi(\mathfrak{F})$.

Пусть P не нормальна в M . По рассуждению Фраттини, $H = MN_H(P)$. Из $B \leq S$ следует, что $BP \leq S \leq N_G(P)$. Тогда $BP \leq H = H \cap N_G(P) = N_H(P)$ и $H/M \cong N_H(P)/N_M(P) \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Так как $N_M(P)$ – $\mathfrak{F}_\pi$ -обособленная нормальная подгруппа группы $N_H(P)$, то по лемме 5.2 $N_H(P) \in D_\pi(\mathfrak{F})$ и $A \cup B \leq N_H(P)$. Тогда существует $x \in N_H(P)$ такой, что $B \leq A^x$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.5. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп, $A \leq H \leq G$, $A \in \mathcal{A}(G)$ и $\text{Aut}_G(A/A^*) \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\text{Aut}_H(A/A^*) \in D_\pi(\mathfrak{F})$.

Доказательство непосредственно следует из леммы 5.4 с заменой M , H и G соответственно на $\text{Inn}(A/A^*)$, $\text{Aut}_H(A/A^*)$ и $\text{Aut}_G(A/A^*)$.

ЛЕММА 5.6. Пусть $\mathfrak{F} = \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп, M – минимальная нормальная $C_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G . Если $G/M \in D_\pi(\mathfrak{F})$, но $G \notin D_\pi(\mathfrak{F})$, то M содержит нормальную простую неабелеву подгруппу S такую, что $S \in C_\pi(\mathfrak{F})$, но $\text{Aut}_G(S) \notin D_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.2 $G \in C_\pi(\mathfrak{F})$, а в силу леммы 5.2 $M = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ – прямое произведение простых неабелевых попарно изоморфных групп $S = S_1, S_2, \dots, S_n$. Так как $G \notin D_\pi(\mathfrak{F})$, то в G существуют $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа H и $\mathfrak{F}_\pi$ -подгруппа A такие, что A не содержится ни в одной $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппе группы G , сопряженной с H в G . Так как $G/M \in D_\pi(\mathfrak{F})$, то AM/M содержится в $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппе группы G/M , сопряженной с HM/M в G/M . Заменяя H на сопряженную в G , можем считать, что $AM/M \leq HM/M$ и, значит, $A \leq HM$. Тогда $AM = (H \cap AM)M$, причем $H \cap AM$ является S_π -подгруппой и в силу S -замкнутости $\mathfrak{F}$ $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппой группы AM . Допустим, что $AM \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Тогда существует $x \in AM$ такой, что $A \leq (H \cap AM)^x \leq H^x$. Получили противоречие. Следовательно, $AM \notin D_\pi(\mathfrak{F})$.

Предположим, что $AM < G$. Так как $AM \notin D_\pi(\mathfrak{F})$, а $AM/M \in D_\pi(\mathfrak{F})$, то в группе AM найдется главный фактор K/L такой, что $K \leq M$, $AM/L \notin D_\pi(\mathfrak{F})$ и $AM/K \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Тогда K/L – минимальная нормальная подгруппа группы AM/L и K/L – прямое произведение простых неабелевых групп, изоморфных S , и по лемме 4.3 $K/L \in C_\pi(\mathfrak{F})$. Так как $(AM/L)/(K/L) \in D_\pi(\mathfrak{F})$, то, применяя лемму 2.5, по индукции получим $\text{Aut}_{AM/L}(S_i L/L) \cong \text{Aut}_{AM}(S_i) \notin D_\pi(\mathfrak{F})$. Тогда по лемме 5.5 $\text{Aut}_G(S_i) \notin D_\pi(\mathfrak{F})$ для некоторого i , $1 \leq i \leq n$.

Следовательно, $AM = G$. Пусть $K = S_2 \times \cdots \times S_n$, $N = N_G(S)$ и $C = C_G(S)$. Как и при доказательстве теоремы 4.5 в [9], можно показать, что $N/C \notin D_\pi(\mathfrak{F})$ и, значит, $\text{Aut}_G(S) \notin D_\pi(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$ является rs -рядом группы G , $\mathfrak{F} = \{Q, S, \text{Ext}\}$ -замкнутый класс групп. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$;
- 2) $\text{Aut}_G(A/A^*) \in D_\pi(\mathfrak{F})$ для всех $A \in \mathcal{A}(G)$;
- 3) $\text{Aut}_G(G_i/G_{i-1}) \in D_\pi(\mathfrak{F})$ для всех i , $1 \leq i \leq n$;
- 4) $\text{Aut}_G(H/K) \in D_\pi(\mathfrak{F})$ для всех композиционных факторов H/K группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in \mathcal{A}(G)$. Тогда $A^{(\infty)} = A \triangleleft G$.

1) $\implies$ 2) в силу лемм 2.7, 5.4 и 5.1.

2) $\implies$ 4) в силу лемм 2.4 и 5.5.

4) $\implies$ 3) – это очевидно.

3) $\implies$ 2) в силу леммы 2.6.

2) $\implies$ 1). Допустим, что группа G – контрпример минимального порядка. Пусть M – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда в силу леммы 2.5 по индукции $G/M \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Применяя лемму 5.2, получим, что $M = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ – прямое произведение простых неабелевых подгрупп A_i , причем $A_i \in \mathcal{A}(G)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Так как $A_i \cong \text{Inn}(A_i) \triangleleft \text{Aut}_G(A_i)$, $\text{Aut}_G(A_i) \in D_\pi(\mathfrak{F})$ и по лемме 5.3 $A_i \in D_\pi(\mathfrak{F})$, $i = 1, 2, \dots, n$, то по лемме 4.3 $M \in C_\pi(\mathfrak{F})$ и из леммы 5.6 следует, что $G \in D_\pi(\mathfrak{F})$. Получили противоречие. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.7. Пусть $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ является rc -рядом группы G . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $G \in D_\pi$;
- 2) $\text{Aut}_G(A/A^*) \in D_\pi$ для всех $A \in \mathcal{A}(G)$;
- 3) $\text{Aut}_G(G_i/G_{i-1}) \in D_\pi$ для всех i , $1 \leq i \leq n$;
- 4) $\text{Aut}_G(H/K) \in D_\pi$ для всех композиционных факторов H/K группы G .

СЛЕДСТВИЕ 5.8. Пусть $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ является rc -рядом группы G . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $G \in D_\pi(\mathfrak{S})$;
- 2) $\text{Aut}_G(A/A^*) \in D_\pi(\mathfrak{S})$ для всех $A \in \mathcal{A}(G)$;
- 3) $\text{Aut}_G(G_i/G_{i-1}) \in D_\pi(\mathfrak{S})$ для всех i , $1 \leq i \leq n$;
- 4) $\text{Aut}_G(H/K) \in D_\pi(\mathfrak{S})$ для всех композиционных факторов H/K группы G .

Список литературы

- [1] P. Hall, "Theorems like Sylow's", *Proc. London Math. Soc.* (3), **6**:22 (1956), 286–304.
- [2] С. А. Чунихин, "Об ослаблении условий в теоремах типа Силова", *Докл. АН СССР*, **83**:5 (1952), 663–665.
- [3] С. А. Чунихин, "О существовании и сопряженности подгрупп у конечной группы", *Матем. сб.*, **33(75)**:1 (1953), 111–132.
- [4] С. А. Чунихин, *Подгруппы конечных групп*, Наука и техника, Минск, 1964; англ. пер.: S. A. Chunikhin, *Subgroups of finite groups*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1969.
- [5] H. Wielandt, "Zum Satz von Sylow", *Math. Z.*, **60**:1 (1954), 407–408.
- [6] R. Baer, "Verstreute Untergruppen endlicher Gruppen", *Arch. Math.*, **9**:1–2 (1958), 7–17.
- [7] Л. А. Шеметков, " D -строение конечных групп", *Матем. сб.*, **67(109)**:3 (1965), 384–407.
- [8] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Наука, М., 1978.
- [9] F. Gross, "On the existence of Hall subgroups", *J. Algebra*, **98**:1 (1986), 1–13.
- [10] F. Gross, "On a conjecture of Philip Hall", *Proc. London Math. Soc.* (3), **52**:3 (1986), 464–494.
- [11] F. Gross, "Conjugacy of odd order Hall subgroups", *Bull. London Math. Soc.*, **19**:4 (1987), 311–319.
- [12] Г. Виландт, "Пути развития структурной теории конечных групп", *Обзорные доклады международного математического конгресса в Эдинбурге*, Физматгиз, М., 1962, 263–276.
- [13] *Коуровская тетрадь*, Нерешенные вопросы теории групп, 15-е изд., Ин-т мат. СО РАН, Новосибирск, 2002.
- [14] Л. А. Шеметков, "Силовские свойства конечных групп", *Матем. сб.*, **76(118)**:2 (1968), 271–287; англ. пер.: L. A. Semetkov, "Sylow properties of finite groups", *Math. USSR-Sb.*, **5**:2 (1968), 261–274.
- [15] Л. А. Шеметков, "О силовских свойствах конечных групп", *Докл. АН БССР*, **16**:10 (1972), 881–883.
- [16] В. Д. Мазуров, О. Д. Ревин, "О холловом D_π -свойстве для конечных групп", *Сиб. матем. журн.*, **38**:1 (1997), 125–134; англ. пер.: V. D. Mazurov, D. O. Revin, "On the Hall D_π -property for finite groups", *Siberian Math. J.*, **38**:1 (1997), 106–113.

- [17] О. Д. Ревин, “Характеризация конечных D_π -групп”, *Докл. РАН*, **417**:5 (2007), 601–604; англ. пер.: D. O. Revin, “A characterization of finite D_π -groups”, *Dokl. Math.*, **76**:3 (2007), 925–928.
- [18] D. O. Revin, E. P. Vdovin, “Hall subgroups of finite groups”, *Ischia group theory* (Naples, Italy, 2004), *Contemp. Math.*, **402**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 229–265.
- [19] B. A. Hartley, “A theorem of Sylow type for finite groups”, *Math. Z.*, **122**:3 (1971), 223–226.
- [20] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite soluble groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, de Gruyter, Berlin–New York, 1992.
- [21] Д. Горенштейн, *Конечные простые группы. Введение в их классификацию*, Мир, М., 1985; пер. с англ.: D. Gorenstein, *Finite simple groups. An introduction to their classification*, Plenum Press, New York–London, 1982.
- [22] D. O. Revin, E. P. Vdovin, “On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups”, *J. Algebra*, **324**:12 (2010), 3614–3652.
- [23] M. Aschbacher, L. Scott, “Maximal subgroups of finite groups”, *J. Algebra*, **92**:1 (1985), 44–80.
- [24] Е. П. Вдовин, Д. О. Ревин, “Критерий сопряженности холловых подгрупп в конечных группах”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:3 (2010), 506–516; англ. пер.: E. P. Vdovin, D. O. Revin, “A conjugacy criterion for Hall subgroups in finite groups”, *Siberian Math. J.*, **51**:3 (2010), 402–409.
- [25] D. O. Revin, E. P. Vdovin, “An existence criterion for Hall subgroups of finite groups”, *J. Group Theory*, **14**:1 (2011), 93–101.
- [26] О. Д. Ревин, “Свойство D_π в одном классе конечных групп”, *Алгебра и логика*, **41**:3 (2002), 335–370; англ. пер.: D. O. Revin, “The D_π -property in a class of finite groups”, *Algebra and Logic*, **41**:3 (2002), 187–206.
- [27] М. Холл, *Теория групп*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: M. Hall, *The theory of groups*, Macmillan, New York, 1959.
- [28] В. А. Ведерников, “Подпрямые произведения конечных групп с холловыми π -подгруппами”, *Матем. заметки*, **59**:2 (1996), 311–314; англ. пер.: V. A. Vedernikov, “Subdirect products of finite groups with Hall π -subgroups”, *Math. Notes*, **59**:2 (1996), 219–221.
- [29] Е. П. Вдовин, О. Д. Ревин, Л. А. Шеметков, “Формации конечных S_π -групп”, *Тезисы докладов X Белорусской математической конференции*, Ин-т матем. НАН Беларуси, Минск, 2008, 12–13.
- [30] О. Д. Ревин, *Холловы подгруппы конечных групп*, Дис. . . . докт. физ.-матем. наук, Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 2008.

В. А. Ведерников (V. A. Vedernikov)
 Московский городской педагогический университет
E-mail: vavedernikov@mail.ru

Поступила в редакцию
 22.10.2010 и 23.08.2011