Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Волосивец, Модифицированные **P**-интеграл и **P**-производная и их приложения, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 5, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7804>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:32:11

УДК 517.51

С. С. Волосивец

Модифицированные $\mathbf{P}$ -интеграл и $\mathbf{P}$ -производная и их приложения

Изучаются некоторые свойства модифицированного $\mathbf{P}$ -интеграла и модифицированной $\mathbf{P}$ -производной, которые задаются как мультипликаторы относительно обобщенного преобразования Фурье–Уолша. Приводятся критерии представимости функции в виде $\mathbf{P}$ -интеграла или $\mathbf{P}$ -производной от функции класса L^p , доказываются прямые и обратные теоремы приближения для функций, обладающих $\mathbf{P}$ -производной. Устанавливается связь между аппроксимативными свойствами функции и поведением $\mathbf{P}$ -производных подходящей аппроксимативной единицы. Доказаны аналоги результатов П. И. Лизоркина и М. Тэйблсона о вложениях области определения $\mathbf{P}$ -производной и классов Гельдера–Бесова друг в друга. Установлены некоторые результаты о вложениях в пространства ВМО, Липшица и Морри.

Библиография: 40 названий.

Ключевые слова: модифицированный $\mathbf{P}$ -интеграл, модифицированная $\mathbf{P}$ -производная, мультипликативное преобразование Фурье, прямые и обратные теоремы приближения, пространства Гельдера–Бесова.

§ 1. Введение

Как известно, изучение двоичных производной и интеграла с точки зрения теории функций и теории приближений началось с работы П. Л. Бутцера и Х. Й. Вагнера [1], в которой исследовались функции на двоичной группе G , изоморфной модифицированному отрезку $[0, 1]^*$. Затем в [2] была введена сильная двоичная производная $\overline{D}(f)$ для функций $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и получено равенство $(\overline{D}(f))^\wedge(x) = x\hat{f}(x)$. Здесь $\hat{f}(x)$ – преобразование Фурье–Уолша функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, частный случай мультипликативных $\mathbf{P}$ -преобразований Фурье (см. § 2 или [3; гл. 6]). Е. Пал в [4] показал, что при $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и $xf(x) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ верно равенство $\overline{D}(\hat{f})(y) = (xf(x))^\wedge(y)$. Х. Й. Вагнер в [5] определил сильный двоичный интеграл $\overline{I}(f)$ и показал взаимную обратимость операторов $\overline{D}(f)$ и $\overline{I}(f)$ при дополнительном условии $\hat{f}(0) = 0$. Многие из отмеченных результатов работ [1], [2], [4], [5] изложены в [6; гл. 9]. В работах [7] и [8] Б. И. Голубов доказал ряд свойств модифицированных сильных двоичных интеграла и производной произвольного порядка $\alpha > 0$ для $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Затем в работах [9] и [10] им были изучены взаимосвязи между сильными и поточечными модифицированными интегралами и производными. В работах автора [11] и [12]

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00270-а) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-4383.2010.1).

многие результаты из [7] и [8] были перенесены на случай $\mathbf{P}$ -ичных модифицированных сильных интеграла и производной. Были установлены также условия существования указанных интегралов и производных, изучена связь между поведением структурных характеристик самой функций и ее производной (интеграла). Для локальных полей близкие операторы изучал К. Оневир (см. [13]). Свойствами, аналогичными свойствам модифицированного сильного оператора дифференцирования, обладает оператор В. С. Владимирова (см. [14; § 9]). Следует отметить также монографию М. Тэйблсона [15], в которой изучались аналоги потенциалов Рисса и Бесселя в локальных полях.

Настоящая работа является продолжением статьи [12]. В § 2 даются основные определения, в § 3 приводятся вспомогательные утверждения, некоторые из которых (леммы 6, 7) обобщают результаты из [12], а лемма 9 дает новое удобное описание обобщенных классов Бесова на полупрямой. В § 4 приводятся критерии представления функции в виде $\mathbf{P}$ -производной или $\mathbf{P}$ -интеграла в терминах распределительного преобразования Фурье и дается описание пространства $\mathcal{S}^\alpha(L^p(\mathbb{R}_+))$ образов $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, при действии оператора $\mathbf{P}$ -интегрирования порядка $\alpha \in (0, 1/p)$. Кроме того, характеризуется класс насыщения для процесса, определяющего $\mathbf{P}$ -производную.

В § 5 рассматриваются приложения $\mathbf{P}$ -производной к вопросам аппроксимации. Из основного результата, являющегося аналогом теорем М. Ф. Тимана (см. [16], [17]) о приближении в $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, целыми функциями экспоненциального типа выводятся достаточное условие существования $\mathbf{P}$ -производной и оценка ее модуля непрерывности в терминах $\mathbf{P}$ -производных приближающих функций (теорема типа Суноути–Жука–Натансона). С помощью обратного результата (теорема типа Заманского) получается описание классов функций, $\mathbf{P}$ -производная которых принадлежит обобщенному классу $\text{Lip}(\beta, p)$.

В § 5 изучается взаимосвязь $\mathbf{P}$ -производной и классов Гёльдера–Бесова. При $1 < p \leq 2$ для локальных полей часть этих результатов была получена К. Оневиром в [13]. В этой части работы активно используется лемма 9.

В § 6 аналог классического неравенства Соболева, доказанный в [12], распространяется на случаи $\alpha = 1/p$ и $\alpha > 1/p$. Кроме того, дается достаточное условие ограниченности $\mathbf{P}$ -интеграла как оператора из одного обобщенного пространства Морри в другое. Для классического потенциала Рисса аналогичные результаты доказали И. Стейн и А. Зигмунд в [18] и Е. Накаи в [19].

§ 2. Основные определения

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, где $p_j \in \mathbb{N}$, $2 \leq p_j \leq N$ для некоторого фиксированного N , $p_{-j} = p_j$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Положим $m_j = p_1 \cdots p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, $m_0 = 1$ и $m_{-l} = 1/m_l$ при $l \in \mathbb{N}$. Тогда каждому $x \in \mathbb{R}_+$ можно сопоставить разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}, \quad x_j \in \mathbb{Z} \cap [0, p_j), \quad |j| \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Здесь первая сумма всегда конечна и разложение определяется однозначно, если при $x = k/m_n$, $k, n \in \mathbb{N}$, брать разложения с конечным числом $x_j \neq 0$.

Для $x \in [m_{n-1}, m_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, положим $|x|_{\mathbf{P}} = m_n$, $|0|_{\mathbf{P}} = 0$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} B_k &= \{x \in \mathbb{R}_+ : |x|_{\mathbf{P}} \leq m_k\} = [0, m_k), \\ S_k &= \{x \in \mathbb{R}_+ : |x|_{\mathbf{P}} = m_k\} = [m_{k-1}, m_k), \\ k &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Если $x, y \in [0, +\infty)$ записаны в виде (2.1), то по определению

$$z = x \oplus y = \sum_{j=1}^{\infty} z_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_j}{m_j},$$

где $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$, $z_j \in [0, p_j) \cap \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Аналогично определяется операция $x \ominus y$. Если $x, y \in \mathbb{R}_+$ записаны в виде (2.1), определим ядро $\chi(x, y)$ равенством

$$\chi(x, y) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j y_{-j} + x_{-j} y_j}{p_j}\right).$$

Основными свойствами этого ядра являются равенства (см. [3; § 1.5])

$$\chi(x \oplus z, y) = \chi(x, y)\chi(z, y), \quad \chi(x \ominus z, y) = \chi(x, y)\overline{\chi(z, y)},$$

справедливые для почти всех пар $(x, z) \in \mathbb{R}_+^2$ при фиксированном $y \in \mathbb{R}$.

Далее $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, определяется как пространство измеримых на $\mathbb{R}_+$ функций с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Считаем, что $1/p + 1/p' = 1$. Для функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ мультипликативное $\mathbf{P}$ -преобразование Фурье определим формулой

$$\hat{f}(x) = \int_0^{\infty} f(y) \overline{\chi(x, y)} dy,$$

где интеграл справа понимается в смысле Лебега. Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq 2$, то $\hat{f}(x)$ определяется как предел $\int_0^a f(y) \overline{\chi(x, y)} dy$ в $L^{p'}(\mathbb{R}_+)$ при $a \rightarrow +\infty$.

Обратное $\mathbf{P}$ -преобразование Фурье для $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ задается равенством

$$\check{f}(x) = \int_0^{\infty} f(y) \chi(x, y) dy.$$

Условия обращения $\mathbf{P}$ -преобразования Фурье и его свойства см. в [3; гл. 6].

Важную роль далее играет функция

$$D_y(x) = \int_0^y \chi(x, t) dt.$$

Известно, что $D_{m_n} = m_n X_{[0, 1/m_n)}$ при $n \in \mathbb{Z}$ (см. [3; § 1.5 и § 11.1]), кроме того, $\hat{D}_{m_n} = X_{[0, m_n)}$. Здесь X_E – индикатор множества E . Отсюда следует, что

$$\|D_{m_n}\|_p = m_n^{1-1/p}, \quad \|D_{m_n} - D_{m_{n-1}}\|_p \geq C m_n^{1-1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Пусть $\Omega = \{I_k^n = [k/m_n, (k+1)/m_n) : k \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}\}$, $I^n(x)$ совпадает с единственным полуинтервалом I_k^n , содержащим x , а $\text{supp}(f) = \{x \in \mathbb{R}_+ : f(x) \neq 0\}$. Если f постоянна на всех I_k^n , $k \in \mathbb{Z}_+$, то по определению $f \in G_n$; если же $\text{supp}(f) \subset B_n$, то $f \in G^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Если $g \in G_n \cap G^k$ при некоторых $n, k \in \mathbb{Z}$, то g принадлежит пространству тест-функций $\mathcal{D}$. По определению $f_i \rightarrow f$ в $\mathcal{D}$, если f_i сходится равномерно к f и носители всех f_i содержатся в одном шаре B_n .

Из результатов [3; § 6.2] вытекает, что при $f \in G_k \cap G^n$ имеем $\widehat{f} \in G^{-k} \cap G_{-n}$, в частности $\mathcal{D}$ инвариантно относительно $\mathbf{P}$ -ичного преобразования Фурье. Через $\mathcal{D}'$ обозначим пространство линейных непрерывных функционалов (распределений) на $\mathcal{D}$, а через $\langle f, \varphi \rangle$ – значение $f \in \mathcal{D}'$ на $\varphi \in \mathcal{D}$ (или, в более общем смысле, значение $f \in X'$ на $\varphi \in X$). Для $f \in D'$ преобразование Фурье вводится равенством $\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Произведение $f \in \mathcal{D}'$ и $\varphi \in \mathcal{D}$ (или $\varphi \in G_n$) определяется равенством $\langle f\varphi, \psi \rangle = \langle f, \varphi\psi \rangle$ для всех $\psi \in \mathcal{D}$. Сходимость в $\mathcal{D}'$ определяется как слабая сходимость. Изложение свойств $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}$ для функций, определенных на множестве p -адических чисел, можно найти в [14; § 6, § 7] и [15; гл. 2, § 3].

Хорошо известно, что для $f \in L^q(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq q < \infty$, $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$, свертка

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x \ominus y)g(y) dy$$

существует почти всюду, принадлежит $L^q(\mathbb{R}_+)$ и при этом $\|f * g\|_q \leq \|f\|_q \|g\|_1$. Согласно [15; гл. 3, § 3] или [14; § 7] можно определить $f * g$ как элемент $\mathcal{D}'$, где $f \in \mathcal{D}'$, $g \in G_n$ или даже g – распределение с компактным носителем (т.е. $X_{[0, m_k)}g = g$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$), равенством $(f * g)^\sim = \widehat{f}\widehat{g}$. При этом для $g \in G_n$ получаем $f * g \in G_n$ (см. [15; гл. 3, теорема 3.15]). Кроме того, для $f \in \mathcal{D}'$ всегда $(\widehat{f})^\sim = f$ в $\mathcal{D}'$. Легко видеть, что $S_{m_n}(f) := f * D_{m_n} \in G_n$. Пусть

$$f \in L^p(\mathbb{R}_+), \quad \mathcal{E}_{m_n}(f)_p = \inf_{g_n \in G_n} \|f - g_n\|_p,$$

$$\omega_n(f)_p = \sup_{0 < h < 1/m_n} \|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_p, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Эти величины связаны между собой неравенствами А. В. Ефимова (см. [3; § 10.5])

$$\mathcal{E}_{m_n}(f)_p \leq \|f - S_{m_n}(f)\|_p \leq \omega_n(f)_p \leq 2\mathcal{E}_{m_n}(f)_p, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

Пространство Гёльдера–Бесова $\Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, $0 < s < \infty$, состоит из $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ с конечной (квази)нормой

$$\|f\|_{\Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})}^{(1)} = \|f\|_p + \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha s} \mathcal{E}_{m_l}(f)_p \right)^{1/s}.$$

При $s = \infty$ по определению $\|f\|_{\Lambda(\alpha, p, \infty; \mathbf{P})}^{(1)} = \|f\|_p + \sup_{l \in \mathbb{Z}} m_l^\alpha \mathcal{E}_{m_l}(f)_p$. В силу неравенств (2.2) при замене $\mathcal{E}_{m_l}(f)_p$ на $\|f - S_{m_l}(f)\|_p$ или $\omega_l(f)_p$ получаются эквивалентные нормы. Менее тривиальным является известный факт (см. [20; лемма 11]), что нормы

$$\|f\|_{\Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})}^{(1)}, \quad \|f\|_{\Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})}^{(2)} = \|f\|_p + \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha s} \|S_{m_l}(f) - S_{m_{l+1}}(f)\|_p^s \right)^{1/s}$$

также эквивалентны при $1 \leq s < \infty$. Еще одна норма $\Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$ введена в лемме 9.

Пусть $I \in \Omega$, $|I|$ – мера Лебега I , и для $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ пусть $f_I = |I|^{-1} \int_I f(t) dt$. Если $\|f\|_* = \sup_{I \in \Omega} |f - f_I|_I < \infty$ или $\|f\|_* = \sup_{I \in \Omega} \inf_{c \in \mathbb{C}} |f - c|_I < \infty$, то $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Известно (см., например, [21; гл. 6], где приведена история вопроса и доказан классический аналог неравенства (2.3)), что

$$\|f\|_* \leq \|f\|_* \leq 2\|f\|_*. \quad (2.3)$$

Пусть $w: \Omega \rightarrow (0, +\infty)$ – весовая функция на множестве $I \in \Omega$. Если

$$f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{p,w} = \sup_{I \in \Omega} \left((w(I))^{-1} \int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

то f принадлежит обобщенному пространству Морри $L^{p,w}(\mathbb{R}_+) = L^{p,w}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Классическое пространство Морри $L^{p,\lambda}(\mathbb{R})$ введено в [22], где I – произвольные интервалы и $w(I) = |I|^\lambda$, $0 < \lambda < 1$. Максимальная функция $M(f)(x)$ определяется для $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и даже для $f \in \mathcal{D}'$ равенством $M(f)(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |f * D_{m_n}(x)|$.

Для $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим

$$W_n^\alpha(x) = \int_{m_{-n}}^\infty |y|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \chi(x, y) dy.$$

Поскольку $|y|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \downarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$ и

$$|D_y(x)| = \left| \int_0^y \chi(x, t) dt \right| \leq \frac{N+1}{x}$$

(см. [23; формула (10)]), то интеграл, определяющий W_n^α , существует как несобственный. Его можно вычислять так:

$$W_n^\alpha(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{m_{-n}}^{m_k} |y|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \chi(x, y) dy = \sum_{i=-n+1}^\infty m_i^{-\alpha} (D_{m_i}(x) - D_{m_{i-1}}(x)). \quad (2.4)$$

Ясно, что $\text{supp}(W_n^\alpha) \subset [0, m_n]$ и $W_n^\alpha \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Введем также $W^\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n^\alpha(x)$ как поточечный предел. Тогда для $x \in S_l = [m_{l-1}, m_l)$, $l \in \mathbb{Z}$, с помощью несложных вычислений находим, что

$$W^\alpha(x) = \sum_{i=-\infty}^{-l} m_i^{1-\alpha} (1 - p_i^{-1}) - p_{1-l}^{-\alpha} m_l^{\alpha-1} \quad (2.5)$$

и при $0 < \alpha < 1$ ряд справа сходится, а при $\alpha \geq 1$ расходится. Из формулы (2.5) ясно, что при $0 < \alpha < 1$ верно неравенство

$$W^\alpha(x) \leq C_1(\alpha, N) x^{\alpha-1} \leq C_2(\alpha, N) |x|_{\mathbf{P}}^{\alpha-1}.$$

С помощью формулы (2.4) такое же неравенство доказывается для $W_n^\alpha(x)$. Обратное неравенство имеет место в важном случае $p_i \equiv q$ и ряде других случаев. В силу [12; лемма 10] имеем $(W_n^\alpha)^\wedge = |x|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} X_{[m_{-n}, +\infty)}$. Если $\alpha > 0$ и для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, существует $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * W_n^\alpha - g\|_p = 0,$$

то g называется модифицированным сильным мультипликативным $\mathbf{P}$ -интегралом (МСМИ) порядка $\alpha > 0$ для f и обозначается через $\mathcal{I}_p^\alpha(f)$. Поскольку $|\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ при $0 < \alpha < 1$, то эта функция принадлежит $\mathcal{D}'$ и справедливо равенство $|\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} = \widehat{d}$ для некоторого $d \in \mathcal{D}'$. Можно показать, что $\widehat{g} = |\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \widehat{f}$ в смысле распределений при $p > 2$ и $0 < \alpha < 1/p$ (см. теорему 2) или почти всюду при $1 \leq p \leq 2$ и всех $\alpha > 0$ (см. [12; теоремы 1 и 10]).

Пусть теперь $\alpha > 0$ и

$$\Lambda_n^\alpha(x) = (|\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha X_{[0, m_n)}(\cdot))^\wedge(x) = \sum_{k=-\infty}^n m_k^\alpha (D_{m_k}(x) - D_{m_{k-1}}(x)), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Так как $\|D_{m_k}\|_1 = 1$, то $\Lambda_n^\alpha \in L^1(\mathbb{R}_+)$ при $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\widehat{\Lambda}_n^\alpha = |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha X_{[0, m_n)}$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, и существует функция $\varphi \in L^p(\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * \Lambda_n^\alpha - \varphi\|_p = 0,$$

то φ называется модифицированной сильной мультипликативной $\mathbf{P}$ -производной порядка α функции f и обозначается через $D_p^\alpha(f)$. Поскольку из сходимости в $L^p(\mathbb{R}_+)$ следует сходимость в $\mathcal{D}'$, то из определения следует, что $\widehat{\varphi} = |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha \widehat{f}$ в $\mathcal{D}'$ и почти всюду при $1 \leq p \leq 2$ (см. теорему 1 и [12; теоремы 6 и 11]).

§ 3. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. 1) Пусть $f, g \in \mathcal{D}'$. Тогда из $\widehat{f} = \widehat{g}$ в $\mathcal{D}'$ следует, что $f = g$ в $\mathcal{D}'$.

2) Пусть $f, g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ и $\widehat{f} = \widehat{g}$ в $\mathcal{D}'$. Тогда $f(x) = g(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По условию $\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle \widehat{g}, \varphi \rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}$, откуда $\langle f, \widehat{\varphi} \rangle = \langle g, \widehat{\varphi} \rangle$. Из результатов [3; § 6.2] следует, что $\mathbf{P}$ -преобразование Фурье отображает $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}$ взаимно однозначно, поэтому $f = g$ в $\mathcal{D}'$.

2) Поскольку $X_{I_k^n} \in \mathcal{D}$ для любых $n, k \in \mathbb{Z}_+$, то в силу 1) имеем

$$\int_{I_k^n} (f(x) - g(x)) dx = 0.$$

Назовем $x_0 \in \mathbb{R}_+$ $\mathbf{P}$ -ичной точкой Лебега для $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$, если

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n \int_{I^n(x_0)} |f(t) - f(x_0)| dt = 0.$$

Легко видеть, что обычная точка Лебега является $\mathbf{P}$ -ичной точкой Лебега, т.е. для почти всюду точек $x_0 \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m_n \int_{I^n(x_0)} f(t) dt.$$

В частности, для $f, g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ со свойством $\int_{I_k^n} (f(x) - g(x)) dx = 0$ при всех $n, k \in \mathbb{Z}_+$ имеем $f(x) = g(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_{m-n}(f)\|_p = 0$. Если при некотором $\alpha > 0$ существует $g = \mathcal{J}_p^\alpha(f)$ (соответственно $g = D_p^\alpha(f)$), то существует и $D_p^\alpha(g) = f$ (соответственно $\mathcal{J}_p^\alpha(g) = f$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $g = \mathcal{J}_p^\alpha(f)$ теорема доказана в [12; теорема 13]. Для $g = D_p^\alpha(f)$ доказательство аналогично. Приведем его для полноты изложения. Пусть $g = D_p^\alpha(f)$; тогда

$$\lim_{r,s \rightarrow +\infty} \left\| g - f * \int_{m-s}^{m_r} \chi(\cdot, y) |y|_{\mathbf{P}}^\alpha dy \right\|_p = 0.$$

Из сравнения преобразований Фурье при больших r, s имеем

$$\begin{aligned} f * \int_{m-n}^{m_k} \chi(\cdot, y) |y|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} dy * \int_{m-s}^{m_r} \chi(\cdot, y) |y|_{\mathbf{P}}^\alpha dy \\ = f * \int_{m-n}^{m_k} \chi(\cdot, y) dy = S_{m_k}(f) - S_{m-n}(f). \end{aligned}$$

При $r, s \rightarrow +\infty$ получаем

$$g * \int_{m-n}^{m_k} \chi(\cdot, y) |y|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} dy = S_{m_k}(f) - S_{m-n}(f)$$

и в силу условия правая часть стремится к f при $k, n \rightarrow +\infty$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$, откуда следует существование $\mathcal{J}_p^\alpha(g) = f$. Лемма доказана.

Следующая лемма доказана К. Оневиром (см. [24]).

ЛЕММА 3. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} C_1 \left\| \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |S_{m_{i+1}}(f) - S_{m_i}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p &\leq \|f\|_p \\ &\leq C_2 \left\| \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |S_{m_{i+1}}(f) - S_{m_i}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4 (см. [25]). Пусть $\mathbf{g} = \{g_k\}_{k=1}^\infty$, где $g_k \in L_p(\mathbb{R}_+)$, $k \in \mathbb{N}$, и

$$\|\mathbf{g}\|_{L^p(l^q)} = \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty |g_k|^q \right)^{1/q} \right\|_p, \quad \|\mathbf{g}\|_{l^q(L^p)} = \left(\sum_{k=1}^\infty \|g_k\|_p^q \right)^{1/q}.$$

Тогда при $1 < p \leq 2$ верно неравенство $\|\mathbf{g}\|_{L^p(l^2)} \geq \|\mathbf{g}\|_{l^2(L^p)}$. При $p \geq 2$ справедливо неравенство $\|\mathbf{g}\|_{L^p(l^2)} \leq \|\mathbf{g}\|_{l^2(L^p)}$.

Пусть X – банахово пространство, Y – его банахово подпространство,

$$K(t, f) = K(t, f; X, Y) = \inf \{ \|f_1\|_X + t \|f_2\|_Y : f = f_1 + f_2, f_2 \in Y \},$$

где $f \in X$. Множество элементов $f \in X$ с конечной нормой

$$\|f\|_{\theta, q; K} := \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{(t^{-\theta} K(t, f))^q dt}{t} \right)^{1/q}, \quad \theta > 0, \quad q \geq 1,$$

обозначается через $(X, Y)_{\theta, q; K}$. П.Л. Бутцер и К. Шерер (см. [26]) доказали следующий результат.

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha > 0$, $\{U_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность ограниченных коммутирующих линейных операторов в X такая, что:

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|U_k(f) - f\|_X = 0$ для всех $f \in X$;
- 2) $\|U_k(f) - f\|_X \leq Ck^{-\alpha} \|f\|_Y$ для всех $f \in Y$;
- 3) $U_k(f) \in Y$ и $\|U_k(f)\|_Y \leq Ck^\alpha \|f\|_X$.

Если $0 < \beta < \alpha$ и $1 \leq s < \infty$, то следующие условия равносильны:

- (а) $f \in (X, Y)_{\beta/\alpha, s; K}$;
- (б) $\|f\|_X + \left(\sum_{k=1}^\infty (k^\beta \|U_k(f) - f\|_X)^s k^{-1}\right)^{1/s} < \infty$.

Следующая лемма доказана в [12; следствие 11] при излишнем требовании существования $D_p^\alpha(f)$ и $1 \leq p \leq 2$.

ЛЕММА 6. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+) \cap G_n$, $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $D_p^\alpha(f) \in G_n$ и $\|D_p^\alpha(f)\|_p \leq C m_n^\alpha \|f\|_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Рассмотрим $S_{m_n}(f) \in G_n$. Тогда

$$D_p^\alpha(S_{m_n}(f)) = (L^p) \lim_{k \rightarrow +\infty} \Lambda_k^\alpha * D_{m_n} * f.$$

Но

$$\Lambda_k^\alpha * D_{m_n} = \sum_{i=-\infty}^k m_i^\alpha (D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) * D_{m_n} = \sum_{i=-\infty}^n m_i^\alpha (D_{m_i} - D_{m_{i-1}})$$

при $k \geq n$ и

$$\|\Lambda_k^\alpha * D_{m_n}\|_1 \leq \sum_{i=-\infty}^n 2m_i^\alpha \leq C_1(\alpha) m_n^\alpha.$$

Отсюда легко получить, что $\|D_p^\alpha(S_{m_n}(f))\|_p \leq C_1(\alpha) m_n^\alpha \|f\|_p$. Осталось отметить, что для $f \in L^p(\mathbb{R}_+) \cap G_n$ верно равенство $S_{m_n}(f) = f$, откуда вытекает утверждение леммы.

Согласно теореме 2 и следствию 9 из [12] операторы $\mathcal{J}_p^\alpha$ и D_p^α не являются ограниченными на своих областях определения $\mathfrak{D}(\mathcal{J}_p^\alpha)$ и $\mathfrak{D}(D_p^\alpha)$. Распространением теоремы 4 из [12] о замкнутости $\mathcal{J}_1^\alpha$ при $\alpha > 0$ на более общий случай.

ЛЕММА 7. Пусть $f_n, f, g \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, $f_n \in \mathfrak{D}(\mathcal{J}_p^\alpha)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - \mathcal{J}_p^\alpha(f_n)\|_p = 0$. Тогда $g = \mathcal{J}_p^\alpha(f)$. Аналогичный результат верен для оператора D_p^α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разберем случай $\mathcal{J}_p^\alpha$. Аналогично доказательству теоремы 3 (см. ниже) запишем

$$\mathcal{J}_p^\alpha(f_n) = f_n * \int_{m_{-j}}^{m_i} |t|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \chi(\cdot, t) dt + \delta_{ij}(n),$$

где $\lim_{i,j \rightarrow +\infty} \|\delta_{ij}(n)\|_p = 0$. Далее, при $k \geq i$, $l \geq j$ имеем

$$\begin{aligned} f * \int_{m_{-j}}^{m_i} |t|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \chi(\cdot, t) dt \\ = f_n * \int_{m_{-l}}^{m_k} |t|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \chi(\cdot, t) dt * \int_{m_{-j}}^{m_i} \chi(\cdot, t) dt + (f - f_n) * \int_{m_{-j}}^{m_i} |t|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \chi(\cdot, t) dt. \end{aligned}$$

Здесь использовано равенство $\check{\varphi} * \check{\psi} = (\varphi\psi)^\sim$ для $\varphi = X_{[m_{-l}, m_k]}| \cdot |_{\mathbf{P}}^{-\alpha}$ и $\psi = X_{[m_{-j}, m_i]}$. При $k, l \rightarrow +\infty$ получаем

$$f * \int_{m_{-j}}^{m_i} |t|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \chi(\cdot, t) dt = \mathcal{J}_p^\alpha(f_n) * (D_{m_i} - D_{m_{-j}}) + (f - f_n) * \int_{m_{-j}}^{m_i} |t|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \chi(\cdot, t) dt,$$

откуда при $n \rightarrow +\infty$ приходим к равенству

$$f * \int_{m_{-j}}^{m_i} |t|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \chi(\cdot, t) dt = g * (D_{m_i} - D_{m_{-j}}).$$

Наконец, при $i, j \rightarrow +\infty$ находим, что $\mathcal{J}_p^\alpha(f) = g$, поскольку $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|g * D_{m_{-j}}\|_p = 0$ и $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|f * D_{m_i} - f\|_p = 0$. В самом деле, имеем

$$\|\mathcal{J}_p^\alpha(f_n) * D_{m_{-j}} - g * D_{m_{-j}}\|_p \leq \|\mathcal{J}_p^\alpha(f_n) - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.1)$$

при $n \geq n_0$. Пусть n , удовлетворяющее (3.1), фиксировано. Найдём $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\|\mathcal{J}_p^\alpha(f_n) - f_n * W_k^\alpha\| < \varepsilon/2$, а по нему найдём j_0 со свойством $W_k^\alpha * D_{m_{-j}} = 0$ при $j \geq j_0$ (т.е. $W_k^\alpha * D_{m_{-j}} = (X_{[m_{-k}, \infty)}| \cdot |_{\mathbf{P}}^{-\alpha} X_{[0, m_{-j}]})^\sim = 0$ при больших j). Имеем при $j \geq j_0$

$$\|g * D_{m_{-j}}\|_p \leq \|\mathcal{J}_p^\alpha(f_n) * D_{m_{-j}} - g * D_{m_{-j}}\|_p + \|(\mathcal{J}_p^\alpha(f_n) - f_n * W_k^\alpha) * D_{m_{-j}}\|_p < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. Для D_p^α доказательство полностью аналогично. Лемма доказана.

Следующее неравенство, принадлежащее Л. Лейндлеру (см. [27]) и являющееся обобщением неравенства Харди–Литтлвуда (см. [28; теорема 346]), применяется при доказательстве леммы 9 и теоремы 6.

ЛЕММА 8. Пусть $a_n \geq 0$, $\lambda_n > 0$ при $n \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i \right)^p \leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^p a_n^p.$$

Результат леммы 9 является аналогом критерия Т.И. Аманова (см. [29]) принадлежности функции обычным классам Бесова. Для мультипликативных систем на $[0, 1)$ соответствующее утверждение доказано Е.С. Смаиловым и З.Р. Сулейменовой (см. [30]).

ЛЕММА 9. Пусть $1 \leq p < \infty$, $1 \leq s \leq \infty$ и $\alpha > 0$. Тогда $f \in \Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$ в том и только том случае, когда существуют $t_n \in G_n \cap L^p(\mathbb{R}_+)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для которых верно равенство $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} t_n$ (в $L^p(\mathbb{R}_+)$), конечна величина $M_{s,p}(f) = (\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} m_n^{\alpha s} \|t_n\|_p^s)^{1/s}$ при $s < \infty$ и $M_{\infty,p} = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} m_n^\alpha \|t_n\|_p$ при $s = \infty$. При этом нормы в $\Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$ эквивалентны $\inf M_{s,p}(f)$ по всем представлениям $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} t_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разберем случай $s < \infty$.

Необходимость. Пусть $f \in \Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$, $t_0 = S_1(f)$, $t_n = S_{m_n}(f) - S_{m_{n-1}}(f)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} t_n$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$ и в силу (2.2) имеем $\|t_n\|_p \leq 2\mathcal{E}_{m_{n-1}}(f)_p$, $n \in \mathbb{N}$, $\|t_0\|_p \leq \|f\|_p$. Значит,

$$M_{s,p}(f) \leq \left(\|f\|_p^s + \sum_{i=1}^{\infty} 2^s m_i^{\alpha s} \mathcal{E}_{m_{i-1}}^s(f)_p \right)^{1/s} \leq C_1 \|f\|_{\Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})}^{(1)}.$$

Достаточность. Пусть $\|f\|_{\Lambda(\alpha,p,s;\mathbf{P})}^{(3)} = \inf M_{s,p}(f)$ по всем разложениям $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} t_n$, $t_n \in G_n \cap L^p(\mathbb{R}_+)$. Выберем такое разложение, что

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} m_n^{\alpha s} \|t_n\|_p^s \right)^{1/s} \leq \|f\|_{\Lambda(\alpha,p,s;\mathbf{P})}^{(3)} + \varepsilon.$$

Тогда $\mathcal{E}_{m_i}(f)_p \leq \sum_{k=i+1}^{\infty} \|t_k\|_p$. Поэтому с учетом леммы 8 имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda(\alpha,p,s;\mathbf{P})}^{(1)} &= \|f\|_p + \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} m_n^{\alpha s} \mathcal{E}_{m_n}^s(f)_p \right)^{1/s} \\ &\leq \|f\|_p + \left(\sum_{i=0}^{\infty} m_i^{\alpha s} \mathcal{E}_{m_i}^s(f)_p \right)^{1/s} + C_2(\alpha) \|f\|_p \\ &\leq (1 + C_2(\alpha)) \|f\|_p + \left(\sum_{i=0}^{\infty} m_i^{\alpha s} \left(\sum_{k=i}^{\infty} \|t_k\|_p \right)^s \right)^{1/s} \\ &\leq (1 + C_2(\alpha)) \|f\|_p + C_3 \left(\sum_{i=0}^{\infty} m_i^{\alpha s(1-s)} \left(\sum_{j=0}^i m_j^{\alpha s} \right)^s \|t_i\|_p^s \right)^{1/s} \\ &\leq (1 + C_2) \sum_{i=0}^{\infty} \|t_i\|_p + C_4 \left(\sum_{i=0}^{\infty} m_i^{\alpha s} \|t_i\|_p^s \right)^{1/s} \\ &\leq C_5 \left(\sum_{i=0}^{\infty} m_i^{\alpha s} \|t_i\|_p^s \right)^{1/s} \leq C_5 (\|f\|_{\Lambda(\alpha,p,s;\mathbf{P})}^{(3)} + \varepsilon). \end{aligned}$$

В предпоследнем неравенстве использовано неравенство Гёльдера. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем искомое утверждение. При $s = \infty$ необходимость доказывается так же, а достаточность следует из цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \sup_{i \in \mathbb{Z}_+} m_i^{\alpha} \mathcal{E}_{m_i}(f)_p &\leq \sup_{i \in \mathbb{Z}_+} m_i^{\alpha} \sum_{k=i+1}^{\infty} \|t_k\|_p \\ &\leq \sup_{i \in \mathbb{Z}_+} m_i^{\alpha} \sup_{k \geq i+1} m_k^{\alpha} \|t_k\|_p \sum_{k=i+1}^{\infty} m_k^{-\alpha} \leq C_6 \sup_{k \in \mathbb{N}} m_k^{\alpha} \|t_k\|_p, \end{aligned}$$

поскольку

$$\sup_{i < 0} m_i^{\alpha} \mathcal{E}_{m_i}(f)_p \leq \|f\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|t_n\|_p \leq C_7 \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} m_n^{\alpha} \|t_n\|_p,$$

где $C_7 = \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{-\alpha}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. 1) Пусть $1 < p < q < \infty$, $\alpha = 1/p - 1/q$. Тогда $\mathcal{J}_p^{\alpha}$ продолжается до ограниченного оператора $\mathcal{J}^{\alpha}$ из $L^p(\mathbb{R}_+)$ в $L^q(\mathbb{R}_+)$.

2) Пусть $p = 1 < q$, $\alpha = 1 - 1/q$. Тогда $\mathcal{J}_1^{\alpha}$ продолжается до оператора $\mathcal{J}^{\alpha}$ со свойством

$$|\{x \in \mathbb{R}_+ : |\mathcal{J}^{\alpha}(f)(x)| > \lambda\}| \leq C \left(\frac{\|f\|_1}{\lambda} \right)^q$$

для всех $\lambda > 0$, $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Утверждение 1) леммы доказано в [12; теорема 15], при этом доказательство опирается на тот факт, что продолжение $\mathcal{J}_p^\alpha$, $\alpha = 1/p - 1/q$, имеет слабый тип (p, q) при всех $1 \leq p < \infty$, откуда следует утверждение 2).

ЛЕММА 11. Пусть весовая функция $w(x)$ удовлетворяет для некоторого $\delta \in (0, 1)$ условию

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{m_{n-l}}{m_n} \right)^{\delta} w(I^{(n-l)}(x)) = O(w(I^n(x))), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

Тогда для любого $I \in \Omega$ и $f \in L^{p,w}(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p (M(X_I)(x))^{\delta} dx \leq C w(I) \|f\|_{p,w}^p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I \in \Omega$, $I = I^n(x)$, $y \in I^{n-l}(x) \setminus I^{n-l+1}(x)$, где $l \in \mathbb{N}$ (т.е. $y \notin I^n(x)$). Ясно, что $M(X_I)(y)$ равно усреднению по $I^{n-l}(x)$, т.е.

$$M(X_I)(y) = |I^{n-l}(x)|^{-1} \int_I 1 dx = \frac{m_{n-l}}{m_n}.$$

Далее, обозначая $I^{n-l}(x) \setminus I^{n-l+1}(x)$ через G_l , имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} |f(y)|^p (M(X_I)(y))^{\delta} dy &= \int_I |f(x)|^p dx + \sum_{l=1}^{\infty} \int_{G_l} \left(\frac{m_{n-l}}{m_n} \right)^{\delta} |f(x)|^p dx \\ &\leq w(I) \|f\|_{p,w}^p + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{m_{n-l}}{m_n} \right)^{\delta} w(I^{n-l}(x)) \|f\|_{p,w}^p \leq C_1 w(I) \|f\|_{p,w}^p \end{aligned}$$

в силу условия (3.2). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $w(I) = |I|^{\lambda}$, $0 < \lambda < 1$, то условие (3.2) переписывается в виде $\sum_{l=0}^{\infty} m_n^{\delta-\lambda} = O(m_n^{\delta-\lambda})$ и, очевидно, выполняется при $0 < \lambda < \delta$.

ЛЕММА 12. Если условие (3.2) из леммы 11 выполняется при $\delta = \gamma > 0$, то оно выполняется и при $\delta = \gamma - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем условие (3.2) при $\delta = \gamma$ в виде

$$R_n(x) := \sum_{l=-\infty}^n m_l^{\gamma} w(I^l(x)) \leq C_1 m_n^{\gamma} w(I^n(x)).$$

Тогда $w(I^l(x)) = (R_l(x) - R_{l-1}(x)) m_l^{-\gamma}$. В силу преобразования Абеля и теоремы Лагранжа о среднем имеем

$$\begin{aligned} \sum_{l=-M}^n m_l^{\gamma-\varepsilon} w(I^l(x)) &= \sum_{l=-M}^n m_l^{\gamma-\varepsilon-\gamma} (R_l(x) - R_{l-1}(x)) \\ &= \sum_{l=-M}^{n-1} (m_l^{-\varepsilon} - m_{l+1}^{-\varepsilon}) R_l(x) + m_n^{-\varepsilon} R_n(x) - m_{-M}^{-\varepsilon} R_{-M-1}(x) \\ &\leq C_1 \left(m_n^{\gamma-\varepsilon} w(I^n(x)) + \sum_{l=-M}^{n-1} m_l^{\gamma} \varepsilon (m_{l+1} - m_l) m_l^{-\varepsilon-1} w(I^l(x)) \right) \\ &\leq C_1 \left(m_n^{\gamma-\varepsilon} w(I^n(x)) + \varepsilon (N-1) \sum_{l=-\infty}^{n-1} m_l^{\gamma-\varepsilon} w(I^l(x)) \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь $p_i \leq N$ при всех $i \in \mathbb{N}$ (см. § 2). Так как правая часть (3.3) не зависит от M , в левой части также можно поставить $\sum_{l=-\infty}^n$ вместо $\sum_{l=-M}^n$. В итоге при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = ((N-1)C_1)^{-1}$ получаем для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}_+$

$$\sum_{l=-\infty}^n m_l^{\gamma-\varepsilon} w(I^l(x)) \leq (1 - \varepsilon(N-1)C_1)^{-1} C_1 m_n^{\gamma-\varepsilon} w(I^n(x)).$$

Лемма доказана.

§ 4. Критерии представимости в виде Р-интеграла или Р-производной

В [12] доказано, что функции $a_{k,n}(x) = m_n^{-1} \chi(k/m_n, x) X_{[0, m_n)}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, обладают свойством $\widehat{a}_{k,n} = X_{I_k^n}$ и являются собственными функциями $\mathcal{J}_1^\alpha$, причем $\mathcal{J}_1^\alpha(a_{k,n}) = m_r^{-\alpha} a_{k,n}$, где $I_k^n \subset S_r = [m_{r-1}, m_r)$. В самом деле,

$$(a_{k,n} * W_l^\alpha)^\wedge = X_{I_k^n} | \cdot |_{\mathbf{P}}^{-\alpha} X_{[m_{-l}, +\infty)} = X_{I_k^n} | \cdot |_{\mathbf{P}}^{-\alpha}$$

при больших l . Поскольку при $k \geq 1$ промежуток I_k^n лежит в некотором S_r , то получаем $(a_{k,n} * W_l^\alpha)^\wedge = m_r^{-\alpha} \widehat{a}_{k,n}$ при больших l , откуда $a_{k,n} * W_l^\alpha = m_r^{-\alpha} a_{k,n}$ и $\mathcal{J}_1^\alpha(a_{k,n}) = m_r^{-\alpha} a_{k,n}$. Вместо m_r можно писать $|k/m_n|_{\mathbf{P}}$. Было показано также, что линейная оболочка $\{a_{k,n} : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}\}$ плотна в $\mathfrak{D}(\mathcal{J}_1^\alpha)$. Что касается $a_{0,n} = D_{m_{-n}}$, то для них имеем $(a_{0,n} * W_l^\alpha)^\wedge = X_{[0, m_{-n})} X_{[m_{-l}, +\infty)} | \cdot |_{\mathbf{P}}^{-\alpha}$ и при $l > n$ находим, что

$$a_{0,n} * W_l^\alpha = \int_{m_{-l}}^{m_{-n}} |y|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \chi(x, y) dy = \sum_{i=-l+1}^{-n} m_i^{-\alpha} (D_{m_i} - D_{m_{i-1}}).$$

Ясно, что $a_{0,n} * W_l^\alpha$ сходится в $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $l \rightarrow +\infty$, если сходится ряд

$$\sum_{i=-\infty}^{-n} m_i^{-\alpha} \|D_{m_i} - D_{m_{i-1}}\|_p = O\left(\sum_{i=-\infty}^{-n} m_i^{1-1/p-\alpha}\right),$$

что возможно при $\alpha < 1/p'$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При $1 < p < \infty$ и $\alpha < 1/p'$ область определения $\mathcal{J}_p^\alpha$ плотна в $L^p(\mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как указано выше, в условиях данного предложения оператор $\mathcal{J}_p^\alpha$ определен на всех $a_{k,n}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, линейная оболочка $\{\widehat{a}_{k,n} : k \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}\}$ плотна в $L^2(\mathbb{R}_+)$, и поскольку Р-преобразование Фурье есть изометрия $L^2(\mathbb{R}_+)$, то линейная оболочка $\{a_{k,n} : k \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}\}$ плотна в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и во всех $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 1. 1) Для любой $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, и $\alpha > 0$ существует распределение $| \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha \widehat{f}$, определяемое равенством

$$\langle | \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha \widehat{f}, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle (\Lambda_n^\alpha * f)^\wedge, \varphi \rangle$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ (т.е. $(\Lambda_n^\alpha * f)^\wedge \rightarrow | \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha \widehat{f}$ в $\mathcal{D}'$).

2) Пусть $f, g \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$. Тогда $g = D_p^\alpha(f)$ в том и только том случае, когда $\widehat{g} = | \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha \widehat{f}$ в $\mathcal{D}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$ и $\text{supp}(\varphi) \subset B_l = [0, m_l)$, $k > n \geq l$. Тогда имеем

$$\langle (\Lambda_l^\alpha * f - \Lambda_n^\alpha * f)^\wedge, \varphi \rangle = \langle X_{[m_n, m_k]} | \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle \widehat{f}, X_{[m_n, m_k]} | \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha \varphi \rangle = \langle \widehat{f}, 0 \rangle = 0,$$

поскольку $X_{[m_n, m_k]} | \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha \in \mathcal{D}$. Значит, последовательность $\langle (\Lambda_n^\alpha * f)^\wedge, \varphi \rangle$ стационарна при $n \geq l$ и имеет предел.

2) Пусть $g = D_p^\alpha(f)$. Тогда $\Lambda_n^\alpha * f \rightarrow g$ при $n \rightarrow +\infty$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$ и тем более в $\mathcal{D}'$. Поэтому $(\Lambda_n^\alpha * f)^\wedge = \widehat{f} | \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha X_{[0, m_n]} \rightarrow \widehat{g}$ при $n \rightarrow +\infty$ в $\mathcal{D}'$. В силу 1) получаем $\widehat{g} = \widehat{f} | \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha$ в $\mathcal{D}'$.

Обратно, пусть $\widehat{g} = | \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha \widehat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Lambda_n^\alpha * f)^\wedge$ в $\mathcal{D}'$, где $g, f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. При $l > n$ имеем

$$(f * \Lambda_l^\alpha - f * \Lambda_n^\alpha)^\wedge = \widehat{f} | \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha X_{[m_n, m_l]} = \widehat{g}(D_{m_l} - D_{m_n})^\wedge$$

и по лемме 1 получаем $f * \Lambda_l^\alpha - f * \Lambda_n^\alpha = g * D_{m_l} - g * D_{m_n}$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Ясно, что L^p -норма правой части стремится к нулю при $n, l \rightarrow +\infty$, так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g - g * D_{m_n}\|_p = 0$. Поэтому $\{f * \Lambda_n^\alpha\}_{n=0}^\infty$ фундаментальна в $L^p(\mathbb{R}_+)$ и существует $D_p^\alpha(f)$ с преобразованием Фурье $| \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha \widehat{f}$. Теорема доказана.

В следующей теореме через $\mathcal{J}^\alpha$ обозначим продолжение соответствующего оператора $\mathcal{J}_p^\alpha$, существующее по лемме 10.

ТЕОРЕМА 2. 1) При $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, и $0 < \alpha < 1/p$ существует расширение $| \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha \widehat{f}$, определяемое так: пусть $\varphi_k \in \mathcal{D}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k - f\|_p = 0$. Тогда

$$\langle | \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha \widehat{f}, \psi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle (\mathcal{J}^\alpha(\varphi_k))^\wedge, \psi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle | \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha \widehat{\varphi}_k, \psi \rangle$$

для всех $\psi \in \mathcal{D}$.

2) Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1/p$, $1/q = 1/p - \alpha$, $g \in L^q(\mathbb{R}_+)$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g * D_{m_n}\|_q = 0$. Тогда $g = \mathcal{J}^\alpha(f)$ в том и только том случае, когда $\widehat{g} = | \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha \widehat{f}$ в $\mathcal{D}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как $\varphi_k \in \mathcal{D} \subset L^r(\mathbb{R}_+)$, $1 < r \leq 2$, то по теореме 10 из [12] $(\mathcal{J}^\alpha(\varphi_k))^\wedge = | \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha \widehat{\varphi}_k$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$. С другой стороны, по лемме 10 $\mathcal{J}^\alpha(\varphi_k) \rightarrow \mathcal{J}^\alpha(f)$ в $L^q(\mathbb{R}_+)$, $1/q = 1/p - \alpha$, откуда следует, что $(\mathcal{J}^\alpha(\varphi_k))^\wedge$ сходятся в $\mathcal{D}'$ и предел $\langle | \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha \widehat{\varphi}_k, \psi \rangle$ существует для всех $\psi \in \mathcal{D}$. Стандартным образом показывается, что этот предел не зависит от последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$.

2) Пусть $g = \mathcal{J}^\alpha(f)$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и $A_l(f) = W_l^\alpha * f$. При $f = a_{k,n}$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, и больших l имеем $A_l(f) = |k/m_n|_{\mathbf{P}}^\alpha f$, причем $|k/m_n|_{\mathbf{P}} \geq 1/m_n$. Поэтому

$$\|A_l(a_{k,n})\|_q \leq m_n^\alpha \|a_{k,n}\|_q = m_n^\alpha m_n^{1/q-1} = m_n^{1/p-1} = \|a_{k,n}\|_p.$$

Если же $k = 0$, то $A_l(a_{0,n}) = \sum_{i=-l+1}^{-n} m_i^{-\alpha} (D_{m_i} - D_{m_{i-1}})$ и

$$\|A_l(a_{0,n})\|_q \leq \sum_{i=-\infty}^{-n} C_1 m_i^{1-1/q-\alpha} = C_1 \sum_{i=-\infty}^{-n} m_i^{1-1/p} \leq C_2 m_n^{1-1/p} = C_2 \|a_{0,n}\|_p.$$

С помощью аналогичной оценки доказывается фундаментальность в $L^q(\mathbb{R}_+)$ последовательности $\{A_l(a_{0,n})\}_{l=1}^\infty$. Таким образом, на элементах линейной оболочки $\{a_{k,n} : k \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}\}$ операторы A_l сходятся в $L^q(\mathbb{R}_+)$. Как следует из § 2,

$$|A_l(f)(x)| \leq C_3 \int_{\mathbb{R}_+} |x \ominus y|_{\mathbf{P}}^{\alpha-1} |f(y)| dy$$

и для свертки в правой части верен аналог леммы 10 (см., например, [31; теорема 1] при $v = w = 1$). Поэтому нормы $\|A_l\|_{L^p \rightarrow L^q}$ ограничены и по известной теореме функционального анализа $A_l(f)$ сходятся к $\mathcal{S}^\alpha(f) = g$ в $L^q(\mathbb{R}_+)$ для любой $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$.

Если $\varphi_k \in \mathcal{D}$ и $\varphi_k \rightarrow f$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \|W_n^\alpha * \varphi_k - W_n^\alpha * f\|_q = 0$, откуда при $n, k \rightarrow +\infty$ имеем $\|W_n^\alpha * \varphi_k - g\|_q \rightarrow 0$. Из последнего соотношения в свою очередь следует, что $W_n^\alpha * \varphi_k \rightarrow g$ и $(W_n^\alpha * \varphi_k)^\wedge \rightarrow \widehat{g}$ в $\mathcal{D}'$ при $n, k \rightarrow +\infty$. Если $n \rightarrow +\infty$, то получаем $|\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \widehat{\varphi}_k \rightarrow \widehat{g}$ при $k \rightarrow \infty$ и согласно 1) справедливо равенство $\widehat{g} = |\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \widehat{f}$ в $\mathcal{D}'$.

Обратно, пусть $\widehat{g} = |\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \widehat{f}$ в $\mathcal{D}'$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $g \in L^q(\mathbb{R}_+)$. Тогда при $l > n$ получаем

$$(f * W_l^\alpha - f * W_n^\alpha)^\wedge = \widehat{f} |\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} X_{[m_{-l}, m_{-n})} = \widehat{g} (D_{m_{-n}} - D_{m_{-l}})^\wedge.$$

В самом деле,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle |\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \widehat{\varphi}_k X_{[m_{-l}, m_{-n})}, \psi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle |\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \widehat{\varphi}_k, X_{[m_{-l}, m_{-n})} \psi \rangle = \langle \widehat{g}, X_{[m_{-l}, m_{-n})} \psi \rangle.$$

По лемме 1 $f * W_l^\alpha - f * W_n^\alpha = g * (D_{m_{-n}} - D_{m_{-l}})$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$. По условию правая часть последнего равенства стремится к нулю в $L^q(\mathbb{R}_+)$, откуда следует, что левая часть тоже стремится к нулю. Таким образом, существует $\mathcal{S}^\alpha(f)$ и по доказанному выше $(\mathcal{S}^\alpha(f))^\wedge = \widehat{g}$, благодаря чему $\mathcal{S}^\alpha(f) = g$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Теорема доказана.

Как следует из леммы 10, образ $\mathcal{S}^\alpha(L^p)$ пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$ при отображении $\mathcal{S}^\alpha$, являющемся продолжением $\mathcal{S}_p^\alpha$, содержится в $L^q(\mathbb{R}_+)$, где $1/q = 1/p - \alpha$. Дадим более точное описание $\mathcal{S}^\alpha(L^p)$, являющееся в определенном смысле аналогом результата С. Г. Самко для потенциала Рисса (см. [32]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1/p$, $1/q = 1/p - \alpha$. Измеримая на $\mathbb{R}_+$ функция g принадлежит $\mathcal{S}^\alpha(L^p)$ тогда и только тогда, когда:

- 1) $g \in L^q(\mathbb{R}_+)$;
- 2) $\|\Lambda_n^\alpha * g\|_p$ ограничены;
- 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_{m_{-n}}(g)\|_q = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Как уже установлено при доказательстве теоремы 2, из равенства $g = \mathcal{S}^\alpha(f)$, где $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|W_n^\alpha * f - g\|_q = 0$. Отсюда в свою очередь следует, что

$$\lim_{k, n \rightarrow +\infty} \left\| \mathcal{S}^\alpha(f) - f * \int_{m_{-n}}^{m_k} \chi(\cdot, y) |y|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} dy \right\|_q = 0.$$

Из сравнения преобразований Фурье при $k > r$, $n > s$ получаем, что

$$f * \int_{m_{-n}}^{m_k} \chi(\cdot, y) |y|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} dy * \int_{m_{-s}}^{m_r} \chi(\cdot, y) |y|_{\mathbf{P}}^\alpha dy = f * \int_{m_{-s}}^{m_r} \chi(\cdot, y) dy.$$

Имеем

$$g * \int_{m-s}^{m_r} \chi(\cdot, y) |y|_{\mathbf{P}}^\alpha dy = f * \int_{m-s}^{m_r} \chi(\cdot, y) dy + \delta_{kn} * \int_{m-s}^{m_r} \chi(\cdot, y) dy, \quad (4.1)$$

где $\lim_{k,n \rightarrow +\infty} \|\delta_{kn}\|_q = 0$ в $L^q(\mathbb{R}_+)$. При фиксированных r, s второе слагаемое правой части (4.1) стремится к нулю при $k, n \rightarrow +\infty$ в силу неравенства Юнга. Здесь мы используем равенство $1/p = 1/q + 1 - 1/a = 1/q + \alpha$ и включение

$$\int_{m-s}^{m_r} \chi(\cdot, y) dy = D_{m_r} - D_{m-s} \in L^a(\mathbb{R}_+).$$

Таким образом,

$$\left\| g * \int_{m-s}^{m_r} \chi(\cdot, y) |y|_{\mathbf{P}}^\alpha dy \right\|_p \leq \|f\|_p \|D_{m_r} - D_{m-s}\|_1 \leq 2\|f\|_p$$

и при $s \rightarrow +\infty$ та же оценка получается для $\|g * \Lambda_r^\alpha\|_p$. Свойство 2) доказано. Наконец, пусть $\|f * W_n^\alpha - g\|_p < \varepsilon$ при $n \geq n_0$. Тогда при тех же n и всех $l \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\|f * W_n^\alpha * D_{m-l} - g * D_{m-l}\|_p \leq \|f * W_n^\alpha - g\|_p < \varepsilon.$$

Но при $l \geq n$ мы находим $(W_n^\alpha * D_{m-l})^\wedge = |\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} X_{[m-n, \infty)} X_{[0, m-l)} = 0$, что по теореме единственности дает $W_n^\alpha * D_{m-l} = 0$. Значит, при всех $l \geq n_0$ имеем $\|g * D_{m-l}\|_p < \varepsilon$, и свойство 3) также установлено.

Достаточность. Пусть $g \in L^q(\mathbb{R}_+)$ и $\|\Lambda_n^\alpha * g\|_p$ ограничены. По теореме о слабой компактности шара в сопряженном пространстве существуют $\{\Lambda_{n_i}^\alpha\}_{i=1}^\infty$ и $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ такие, что $\Lambda_{n_i}^\alpha * g$ слабо сходится в $L^p(\mathbb{R}_+)$ к f и, следовательно, сходится к f в $\mathcal{D}'$. Отсюда вытекает, что $(\Lambda_{n_i}^\alpha * g)^\wedge$ сходится к $\hat{f}$ в $\mathcal{D}'$, т.е. $|\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha X_{[0, m_{n_i})} \hat{g} \rightarrow \hat{f}$ в $\mathcal{D}'$. По определению получаем, что $\hat{f} = |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha \hat{g}$ в $\mathcal{D}'$. Поэтому при $l > n$ находим, что

$$\begin{aligned} (W_l^\alpha * f - W_n^\alpha * f)^\wedge &= |\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \hat{f} X_{[m-l, m-n)} \\ &= \hat{g} X_{[m-l, m-n)} = (g * (D_{m-n} - D_{m-l}))^\wedge. \end{aligned}$$

По лемме 1 получаем $W_l^\alpha * f - W_n^\alpha * f = g * (D_{m-n} - D_{m-l})$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$ и, как и в теореме 2, $\mathcal{S}^\alpha(f) = g$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. (а) Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, то выполнение равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda_n^\alpha * f\|_p = 0$ равносильно тому, что $f(x) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

(б) Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, то соотношение $\|\Lambda_n^\alpha * f\|_p = O(1)$ равносильно существованию $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$ со свойством $\hat{g} = |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha \hat{f}$ в $\mathcal{D}'$ при $p > 2$ и почти всюду на $\mathbb{R}_+$ при $1 < p \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda_n^\alpha * f\|_p = 0,$$

т.е. существует $D_p^\alpha(f) = 0$. По лемме 2 существует $\mathcal{S}_p^\alpha(0) = f$. Но $\mathcal{S}_p^\alpha(0) = 0$ и $f = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Обратное утверждение очевидно.

(б) Пусть $\|\Lambda_n^\alpha * f\|_p = O(1)$. Аналогично доказательству теоремы 3 найдется подпоследовательность $\{\Lambda_{n_i}^\alpha\}_{i=1}^\infty$ такая, что $\Lambda_{n_i}^\alpha * f$ слабо сходится к $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$, причем $\hat{g} = |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha \hat{f}$ в $\mathcal{D}'$. При $1 < p \leq 2$ выражения $\hat{f}, \hat{g}$ являются функциями, поэтому равенство выполнено почти всюду. Обратно, пусть существует $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$ со свойством $\hat{g} = |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha \hat{f}$ в $\mathcal{D}'$; тогда по теореме 1 получаем, что $g = D_p^\alpha(f)$ и тогда $\|\Lambda_n^\alpha * f\|_p = O(1)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогичный результат верен при $p = 1$ для локальной компактной группы G из бесконечных последовательностей $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, где $x_i \in \mathbb{Z} \cap [0, p_i)$, $x_i = 0$ при $i \geq i_0$ и сложение покоординатное по модулю p_i . Вместо g надо рассматривать меру μ (см. [33], где содержится аналог теоремы 4 для компактной группы целых p -адических чисел).

§ 5. Приложения понятия $\mathbf{P}$ -производной к аппроксимации

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, такова, что существует $D_p^\alpha(f) = g$. Тогда при $1 < p \leq 2$ справедливы неравенства

$$C_1 \left(\sum_{i=n}^{\infty} m_i^{2\alpha} \mathcal{E}_{m_i}^2(f)_p \right)^{1/2} \leq \mathcal{E}_{m_n}(g)_p \leq \omega_n(g)_p \leq C_2 \left(\sum_{i=n}^{\infty} m_i^{p\alpha} \mathcal{E}_{m_i}^p(f)_p \right)^{1/p}, \quad (5.1)$$

а при $p \geq 2$

$$C_3 \left(\sum_{i=n}^{\infty} m_i^{p\alpha} \mathcal{E}_{m_i}^p(f)_p \right)^{1/p} \leq \mathcal{E}_{m_n}(g)_p \leq \omega_n(g)_p \leq C_4 \left(\sum_{i=n}^{\infty} m_i^{2\alpha} \mathcal{E}_{m_i}^2(f)_p \right)^{1/2}. \quad (5.2)$$

Везде $n \in \mathbb{Z}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем

$$D_p^\alpha(f) = f * \int_0^{m_n} |t|_{\mathbf{P}}^\alpha \chi(\cdot, t) dt + \delta_n = f * \int_{m-k}^{m_n} |t|_{\mathbf{P}}^\alpha \chi(\cdot, t) dt + \delta_{nk}, \quad (5.3)$$

где $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\delta_n\|_p = \lim_{n,k \rightarrow +\infty} \|\delta_{nk}\|_p = 0$. В самом деле,

$$\Lambda_n^\alpha - \int_{m-k}^{m_n} |t|_{\mathbf{P}}^\alpha \chi(\cdot, t) dt = \int_0^{m-k} |t|_{\mathbf{P}}^\alpha \chi(\cdot, t) dt = \sum_{i=-\infty}^{-k} m_i^\alpha (D_{m_i} - D_{m_{i-1}}),$$

откуда

$$\left\| \Lambda_n^\alpha - \int_{m-k}^{m_n} |t|_{\mathbf{P}}^\alpha \chi(\cdot, t) dt \right\|_1 \leq C_1(\alpha) m_k^{-\alpha} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty,$$

и (5.3) доказано. Поэтому

$$\begin{aligned} & S_{m_{i+1}}(D_p^\alpha(f)) - S_{m_i}(D_p^\alpha(f)) \\ &= f * \int_{m-k}^{m_n} |t|_{\mathbf{P}}^\alpha \chi(\cdot, t) dt * \int_{m_i}^{m_{i+1}} \chi(\cdot, t) dt + \delta_{nk} * (D_{m_{i+1}} - D_{m_i}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Последнее слагаемое правой части (5.4) стремится к нулю в $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $n, k \rightarrow +\infty$. Что касается первого слагаемого, то в силу равенства $(\check{h} * \check{g})^\wedge = hg$ при $h = X_{[m-k, m_n]} \cdot |_{\mathbf{P}}^\alpha$, $g = X_{[m_i, m_{i+1}]}$ для достаточно больших n и k получаем

$$\begin{aligned} & \int_{m-k}^{m_n} |t|_{\mathbf{P}}^\alpha \chi(\cdot, t) dt * \int_{m_i}^{m_{i+1}} \chi(\cdot, t) dt = (hg)^\vee \\ &= \int_{m_i}^{m_{i+1}} |t|_{\mathbf{P}}^\alpha \chi(\cdot, t) dt = m_{i+1}^\alpha (D_{m_{i+1}} - D_{m_i}) \end{aligned}$$

сначала в $\mathcal{D}'$, а потом (по лемме 1) и почти всюду на $\mathbb{R}_+$. В итоге

$$S_{m_{i+1}}(D_p^\alpha(f)) - S_{m_i}(D_p^\alpha(f)) = m_{i+1}^\alpha (S_{m_{i+1}}(f) - S_{m_i}(f)), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (5.5)$$

Пусть $1 < p \leq 2$ и $g = D_p^\alpha(f)$. В силу леммы 3, неравенства Йенсена и (5.5) имеем

$$\begin{aligned} \|g - S_{m_n}(g)\|_p &\leq C_2 \left\| \left(\sum_{i=n}^{\infty} |S_{m_{i+1}}(g) - S_{m_i}(g)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \\ &\leq C_2 \left\| \left(\sum_{i=n}^{\infty} |S_{m_{i+1}}(g) - S_{m_i}(g)|^p \right)^{1/p} \right\|_p = C_2 \left(\sum_{i=n}^{\infty} \|S_{m_{i+1}}(g) - S_{m_i}(g)\|_p^p \right)^{1/p} \\ &\leq C_2 \left(\sum_{i=n}^{\infty} m_{i+1}^{\alpha p} (2\mathcal{E}_{m_i}(f)_p)^p \right)^{1/p} \leq C_3 \left(\sum_{i=n}^{\infty} m_i^{\alpha p} \mathcal{E}_{m_i}^p(f)_p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

При $p \geq 2$, используя лемму 4, находим, что

$$\begin{aligned} \|g - S_{m_n}(g)\|_p &\leq C_2 \left(\sum_{i=n}^{\infty} \|S_{m_{i+1}}(g) - S_{m_i}(g)\|_p^2 \right)^{1/2} \\ &= C_2 \left(\sum_{i=n}^{\infty} m_{i+1}^{2\alpha} \|S_{m_{i+1}}(f) - S_{m_i}(f)\|_p^2 \right)^{1/2} \leq C_3 \left(\sum_{i=n}^{\infty} m_i^{2\alpha} \mathcal{E}_{m_i}^2(f)_p \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, правые неравенства в (5.1) и (5.2) установлены.

Пусть снова $1 < p \leq 2$. Тогда, используя лемму 3, оценим выражение из левой части (5.1):

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{\infty} m_i^{2\alpha} \mathcal{E}_{m_i}^2(f)_p &\leq \sum_{i=n}^{\infty} m_i^{2\alpha} \|f - S_{m_i}(f)\|_p^2 \\ &\leq C_2 \sum_{i=n}^{\infty} m_i^{2\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \left(\sum_{j=i}^{\infty} |S_{m_{j+1}}(f)(t) - S_{m_j}(f)(t)|^2 \right)^{p/2} dt \right)^{2/p} \\ &\leq C_2 \sum_{i=n}^{\infty} \left\| m_i^{2\alpha} \sum_{j=i}^{\infty} |S_{m_{j+1}}(f) - S_{m_j}(f)|^2 \right\|_{p/2}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\|f\|_{p/2} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^{p/2} dt \right)^{2/p}$$

– квазинорма, так как $0 < p/2 \leq 1$, и неравенство Минковского в ней для неотрицательных функций верно с противоположным знаком (см. [28; теорема 198]). Учитывая этот факт, (5.5), лемму 3 и оценку $\sum_{i=n}^j m_i^{2\alpha} = O(m_j^{2\alpha})$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{\infty} m_i^{2\alpha} \mathcal{E}_{m_i}^2(f)_p &\leq C_2 \left\| \sum_{i=n}^{\infty} m_i^{2\alpha} \sum_{j=i}^{\infty} |S_{m_{j+1}}(f) - S_{m_j}(f)|^2 \right\|_{p/2} \\ &= C_2 \left\| \sum_{j=n}^{\infty} \sum_{i=n}^j m_i^{2\alpha} |S_{m_{j+1}}(f) - S_{m_j}(f)|^2 \right\|_{p/2} \leq C_3 \left\| \sum_{j=n}^{\infty} |S_{m_{j+1}}(g) - S_{m_j}(g)|^2 \right\|_{p/2} \\ &= C_3 \left\| \left(\sum_{j=n}^{\infty} |S_{m_{j+1}}(g) - S_{m_j}(g)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^2 \leq C_4 \|g - S_{m_n}(g)\|_p^2. \end{aligned}$$

Наконец, при $p \geq 2$, используя неравенство Йенсена, лемму 3 и перестановку порядка суммирования, имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n}^{\infty} m_i^{p\alpha} \mathcal{E}_{m_i}^p(f)_p &\leq C_2 \sum_{i=n}^{\infty} m_i^{\alpha p} \left\| \left(\sum_{j=i}^{\infty} |S_{m_{j+1}}(f) - S_{m_j}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p \\
&= C_2 \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i=n}^{\infty} \left(\sum_{j=i}^{\infty} m_i^{2\alpha} |S_{m_{j+1}}(f)(t) - S_{m_j}(f)(t)|^2 \right)^{p/2} dt \\
&\leq C_2 \int_{\mathbb{R}_+} \left(\sum_{i=n}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} m_i^{2\alpha} |S_{m_{j+1}}(f)(t) - S_{m_j}(f)(t)|^2 \right)^{p/2} dt \\
&\leq C_5 \int_{\mathbb{R}_+} \left(\sum_{j=n}^{\infty} m_j^{2\alpha} |S_{m_{j+1}}(f)(t) - S_{m_j}(f)(t)|^2 \right)^{p/2} dt \\
&= C_5 \left\| \left(\sum_{j=n}^{\infty} |S_{m_{j+1}}(g) - S_{m_j}(g)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p \leq C_6 \|g - S_{m_n}(g)\|_p^p.
\end{aligned}$$

Используя неравенства А. В. Ефимова (2.2), доказываем левые неравенства (5.1) и (5.2). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для приближений целыми функциями экспоненциального типа аналогичные теореме 3 утверждения доказаны М. Ф. Тиманом (см. [16], [17]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ такова, что существует $D_p^\alpha(f) = g$. Тогда для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_{m_n}(f)_p \leq C m_n^{-\alpha} \mathcal{E}_{m_n}(g)_p \leq C m_n^{-\alpha} \|g\|_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Например, при $1 < p \leq 2$ в силу (5.1) имеем

$$m_n^\alpha \mathcal{E}_{m_n}(f)_p \leq \left(\sum_{i=n}^{\infty} m_i^{2\alpha} \mathcal{E}_{m_i}^2(f)_p \right)^{1/2} \leq C_1 \mathcal{E}_{m_n}(g)_p, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $1 < p < \infty$, $\gamma = \min(p, 2)$, $\alpha > r \geq 0$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Если сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} m_i^{(r-\alpha)\gamma} \|D_p^\alpha(S_{m_{i+1}}(f))\|_p^\gamma$, то существует $D_p^r(f)$ и справедлива оценка

$$\mathcal{E}_{m_n}(D_p^r(f))_p \leq C \left(\sum_{i=n}^{\infty} m_i^{(r-\alpha)\gamma} \|D_p^\alpha(S_{m_{i+1}}(f))\|_p^\gamma \right)^{1/\gamma}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (2.2) и следствие 1, находим, что при $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\|f - S_{m_k}(f)\|_p - \|f - S_{m_{k+1}}(f)\|_p &\leq \|S_{m_{k+1}}(f) - S_{m_k}(f)\|_p \\
&= \|S_{m_{k+1}}(f) - S_{m_k}(S_{m_{k+1}}(f))\|_p \leq 2 \mathcal{E}_{m_k}(S_{m_{k+1}}(f))_p \\
&\leq C_1 m_k^{-\alpha} \|D_p^\alpha(S_{m_{k+1}}(f))\|_p.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Пусть $D_p^r(f)$ существует. Складывая неравенства (5.6) по k от i до ∞ и применяя теорему 5 и лемму 8, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m_n}(D_p^r(f))_p &\leq C_2 \left(\sum_{i=n}^{\infty} m_i^{r\gamma} \mathcal{E}_{m_i}^\gamma(f)_p \right)^{1/\gamma} \\ &\leq C_3 \left(\sum_{i=n}^{\infty} m_i^{r\gamma} \left(\sum_{k=i}^{\infty} m_k^{-\alpha} \|D_p^\alpha(S_{m_{k+1}}(f))\|_p \right)^\gamma \right)^{1/\gamma} \\ &\leq C_4 \left(\sum_{i=n}^{\infty} m_i^{r\gamma(1-\gamma)} \left(\sum_{k=n}^i m_k^{r\gamma} \right)^\gamma m_i^{-\alpha\gamma} \|D_p^\alpha(S_{m_{i+1}}(f))\|_p^\gamma \right)^{1/\gamma} \\ &\leq C_5 \left(\sum_{i=n}^{\infty} m_i^{(r-\alpha)\gamma} \|D_p^\alpha(S_{m_{i+1}}(f))\|_p^\gamma \right)^{1/\gamma}. \end{aligned}$$

Если заменить (5.5) на равенство

$$D_p^r(S_{m_{i+1}}(f)) - D_p^r(S_{m_i}(f)) = m_{i+1}^r (S_{m_{i+1}}(f) - S_{m_i}(f)) \quad (5.7)$$

(оно доказывается также путем сравнения преобразований Фурье), то аналогично доказательству правых неравенств (5.1) и (5.2) получаем при $l > n$

$$\begin{aligned} \left\| D_p^r(S_{m_l}(f)) - D_p^r(S_{m_n}(f)) \right\|_p &= \left\| \sum_{i=n}^{l-1} m_{i+1}^r (S_{m_{i+1}}(f) - S_{m_i}(f)) \right\|_p \\ &\leq C_6 \left\| \left(\sum_{i=n}^{l-1} m_{i+1}^{2r} |S_{m_{i+1}}(f) - S_{m_i}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \\ &\leq C_6 \left(\sum_{i=n}^{l-1} m_{i+1}^{\gamma r} \|S_{m_{i+1}}(f) - S_{m_i}(f)\|_p^\gamma \right)^{1/\gamma}. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее неравенство (5.6), находим, что $\{D_p^r(S_{m_n}(f))\}_{n=0}^\infty$ фундаментальна в $L^p(\mathbb{R}_+)$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_{m_n}(f)\|_p = 0$, то по лемме 7 получаем, что $D_p^r(f)$ существует. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В тригонометрическом случае похожие результаты установлены Г. Суноути (см. [34]) и В. В. Жуком и Г. И. Натансоном (см. [35; гл. 3, § 7]) для полиномов наилучшего приближения вместо $S_{m_n}(f)_p$. Кроме того, в этих работах $\gamma = 1$, что делает наши результаты более точными. Аналог теоремы 6 можно доказать для ортонормированной системы $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^\infty = \{\chi(n, x)\}_{n=0}^\infty$ на $[0, 1)$.

Теперь получим утверждение, обратное к теореме 6. В тригонометрическом случае при $\alpha \in \mathbb{N}$, $r = 0$, $\gamma = 1$ и $p = \infty$ близкий результат принадлежит М. Заманскому (см. [36]).

ТЕОРЕМА 7. Пусть $0 \leq r < \alpha$, $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и существует $D_p^r(f)$. Тогда справедлива оценка

$$\|D_p^\alpha(S_{m_n}(f))\|_p \leq C \left(\left(\sum_{i=0}^n m_i^{\gamma(\alpha-r)} \mathcal{E}_{m_i}^\gamma(D_p^r(f))_p \right)^{1/\gamma} + \|D_p^r(f)\|_p \right), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (5.8)$$

где $\gamma = \min(p, 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сравнения преобразований Фурье по лемме 1 легко видеть, что $D_p^r(S_{m_n}(f)) = S_{m_n}(D_p^r(f))$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$, поскольку $\widehat{S_{m_n}(h)} = X_{[0, m_n)} \widehat{h}$. Из тех же соображений находим, что $D_p^\alpha(S_{m_n}(f)) = D_p^{\alpha-r}(S_{m_n}(g))$, где $g = D_p^r(f)$. С помощью леммы 3, леммы 4 при $p \geq 2$ и неравенства Йенсена при $1 < p \leq 2$ получаем

$$\begin{aligned} \|D_p^\alpha(S_{m_n}(f)) - D_p^\alpha(S_{m_0}(f))\|_p &\leq C_1 \left\| \left(\sum_{i=1}^n |D_p^{\alpha-r}(S_{m_i}(g) - S_{m_{i-1}}(g))|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \\ &\leq C_1 \left(\sum_{i=1}^n \|D_p^{\alpha-r}(S_{m_i}(g) - S_{m_{i-1}}(g))\|_p^\gamma \right)^{1/\gamma}. \end{aligned}$$

В силу леммы 6 и неравенств $\|S_{m_n}(g)\|_p \leq \|g\|_p$ и $\|S_{m_i}(g) - S_{m_{i-1}}(g)\|_p \leq 4\mathcal{E}_{m_{i-1}}(g)_p$ имеем

$$\|D_p^\alpha(S_{m_n}(f))\|_p - C_2\|g\|_p \leq C_3 \left(\sum_{i=1}^n m_i^{\gamma(\alpha-r)} \mathcal{E}_{m_{i-1}}^\gamma(D_p^r(f))_p \right)^{1/\gamma}.$$

Из последнего неравенства легко получаем (5.8). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $0 \leq r < \alpha$, $1 < p < \infty$, $0 < \beta < \alpha - r$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Тогда равносильны следующие утверждения:

- 1) существует $D_p^r(f)$ и $\mathcal{E}_{m_n}(D_p^r(f))_p \leq C m_n^{-\beta}$, $n \in \mathbb{Z}_+$;
- 2) $\|D_p^\alpha(S_{m_n}(f))\|_p \leq C m_n^{\alpha-r-\beta}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. С помощью неравенства треугольника при $p = 1$ можно доказать неравенство (5.8) с $\gamma = 1$.

§ 6. Р-производная, Р-интеграл и пространства Гёльдера–Бесова

Следующая интерполяционная теорема при $1 \leq p \leq 2$ и для локальных полей принадлежит К. Оневиру (см. [13]).

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, $\mathfrak{D}(D_p^\alpha)$ – область определения D_p^α с нормой $\|f\|_{\mathfrak{D}(D_p^\alpha)} = \|D_p^\alpha(f)\|_p + \|f\|_p$. Тогда при всех $\beta \in (0, \alpha)$ и $s \in [1, \infty)$ имеем $(L^p(\mathbb{R}_+), \mathfrak{D}(D_p^\alpha))_{\beta/\alpha, s; K} = \Lambda(\beta, p, s; \mathbf{P})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = L^p(\mathbb{R})$, $Y = \mathfrak{D}(D_p^\alpha)$ и U_k из леммы 5 определяются так: $U_k(f) = S_{m_n}(f)$ при $m_{n-1} \leq k < m_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\|f - U_k(f)\|_p \leq 2\mathcal{E}_{m_n}(f)_p$ и сходимости ряда из п. (b) леммы 5 равносильна неравенству

$$\|f\|_p + \left(\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{\beta s} \mathcal{E}_{m_n}^s(f)_p \right)^{1/s} < \infty,$$

которое в свою очередь равносильно условию $f \in \Lambda(\beta, p, s; \mathbf{P})$. В самом деле,

$$\sum_{n \leq 0} m_n^{\beta s} \mathcal{E}_{m_n}^s(f)_p \leq \sum_{n \leq 0} m_n^{\beta s} \|f\|_p < \infty$$

при всех $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Условия 1)–3) леммы 5 выполнены в силу неравенства А. В. Ефимова (2.2), следствия 1 и леммы 6. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 9. 1) Пусть $f \in \Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$, $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq s \leq \infty$. Если $0 < \beta < \alpha$, то существует $D_p^\beta(f) \in \Lambda(\alpha - \beta, p, s; \mathbf{P})$.

2) Пусть $f \in \Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$, $\alpha, \beta > 0$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq s \leq \infty$ и существует $\mathcal{J}_p^\beta(f)$. Тогда $\mathcal{J}_p^\beta(f) \in \Lambda(\alpha + \beta, p, s; \mathbf{P})$.

3) Вложение из п. 1) при $1 \leq s < \infty$ неумлучшаемо в следующем смысле: для любого $\varepsilon \in (0, \min(\beta, s))$ найдется $f_\varepsilon \in \Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$ такая, что $D_p^\beta(f_\varepsilon) \notin \Lambda(\alpha - \beta + \varepsilon, p, s; \mathbf{P})$ и $D_p^\beta(f_\varepsilon) \notin \Lambda(\alpha - \beta, p, s - \varepsilon; \mathbf{P})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $f \in \Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$, $1 \leq p, s < \infty$. Тогда по лемме 9 имеем $f = \sum_{i=0}^{\infty} t_i$, где $t_i \in G_i \cap L^p(\mathbb{R}_+)$ и $(\sum_{i=0}^{\infty} m_i^{\alpha s} \|t_i\|_p^s)^{1/s} = C_1 < \infty$. Согласно лемме 6 имеем $\|D_p^\beta(t_i)\|_p \leq C_2 m_i^\beta \|t_i\|_p$, поэтому

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} m_i^{(\alpha-\beta)s} \|D_p^\beta(t_i)\|_p^s \right)^{1/s} \leq C_1 C_2 < \infty.$$

С помощью неравенства Гёльдера получаем, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|D_p^\beta(t_i)\|_p \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} m_i^{(\alpha-\beta)s} \|D_p^\beta(t_i)\|_p^s \right)^{1/s} \left(\sum_{i=0}^{\infty} m_i^{(\beta-\alpha)s'} \right)^{1/s'} < \infty,$$

где $1/s + 1/s' = 1$, откуда по лемме 7 получаем, что $\sum_{i=0}^{\infty} D_p^\beta(t_i)$ сходится к $D_p^\beta(f)$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$. Снова применяя лемму 9, получаем $D_p^\beta(f) \in \Lambda(\alpha - \beta, p, s; \mathbf{P})$.

При $s = \infty$ в силу леммы 6 находим, что

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} m_n^{\alpha-\beta} \|D_p^\beta(t_n)\|_p \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} m_n^{\alpha-\beta} C_2 m_n^\beta \|t_n\|_p < \infty,$$

откуда по лемме 9 получаем $D_p^\beta(f) \in \Lambda(\alpha - \beta, p, \infty; \mathbf{P})$.

2) Пусть $1 \leq s < \infty$. Так как $\mathcal{J}_p^\beta(f) = g$ существует, то из сравнения преобразований Фурье

$$\begin{aligned} (S_{m_i}(g) - S_{m_{i-1}}(g))^\wedge &= \widehat{g} X_{[m_{i-1}, m_i]} \\ &= \widehat{f} m_i^{-\beta} X_{[m_{i-1}, m_i]} = m_i^{-\beta} (f * D_{m_i} - f * D_{m_{i-1}})^\wedge \end{aligned}$$

по лемме 1 получаем $S_{m_i}(g) - S_{m_{i-1}}(g) = m_i^{-\beta} (f * D_{m_i} - f * D_{m_{i-1}})$, $i \in \mathbb{Z}$, почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|g\|_{\Lambda(\alpha+\beta, p, s; \mathbf{P})}^{(2)} &= \|g\|_p + \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} m_i^{(\alpha+\beta)s} m_i^{-\beta s} \|S_{m_i}(f) - S_{m_{i-1}}(f)\|_p^s \right)^{1/s} \\ &= \|g\|_p + \|f\|_{\Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})}^{(2)} < \infty. \end{aligned}$$

Значит, $g = \mathcal{J}_p^\beta(f) \in \Lambda(\alpha + \beta, p, s; \mathbf{P})$.

При $s = \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{Z}} m_n^{\alpha+\beta} \mathcal{E}_{m_n}(g)_p &\leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} m_n^{\alpha+\beta} \sum_{k=n}^{\infty} \|S_{m_{k+1}}(g) - S_{m_k}(g)\|_p \\ &\leq C_3 \sup_{n \in \mathbb{Z}} m_n^{\alpha+\beta} \sum_{k=n}^{\infty} m_k^{-\alpha-\beta} m_k^\alpha \|S_{m_{k+1}}(f) - S_{m_k}(f)\|_p \\ &\leq 2C_3 \sup_{n \in \mathbb{Z}} m_n^{\alpha+\beta} \left(\sum_{k=n}^{\infty} m_k^{-\alpha-\beta} \right) \sup_{k \geq n} m_k^\alpha \mathcal{E}_{m_k}(f)_p \leq C_4 \sup_{n \in \mathbb{Z}} m_n^\alpha \mathcal{E}_{m_n}(f)_p, \end{aligned}$$

откуда следует, что $g \in \Lambda(\alpha + \beta, p, \infty; \mathbf{P})$.

3) Рассмотрим

$$f_\varepsilon = \sum_{i=2}^{\infty} m_i^{-\alpha+1/p-1} i^{-1/s} \ln^\gamma i (D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) =: \sum_{i=2}^{\infty} t_i,$$

где $\gamma < -1$. Тогда

$$\sum_{i=2}^{\infty} m_i^{\alpha s} \|t_i\|_p^s = \sum_{i=2}^{\infty} m_i^{(\alpha-\alpha+1/p-1)s} i^{-1} (\ln i)^{\gamma s} (2m_i^{1-1/p})^s < \infty$$

и по лемме 9 $f_\varepsilon \in \Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$. Из сравнения преобразований Фурье получаем, что

$$D_p^\beta(f_\varepsilon) = \sum_{i=2}^{\infty} m_i^{\beta-\alpha+1/p-1} i^{-1/s} \ln^\gamma i (D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) =: \sum_{i=2}^{\infty} r_i \in L^p(\mathbb{R}_+)$$

в силу $\beta - \alpha < 0$. С другой стороны, имеем

$$\sum_{i=2}^{\infty} m_i^{(\alpha-\beta+\varepsilon)s} \|r_i\|_p^s \geq \sum_{i=2}^{\infty} m_i^{\varepsilon s + (1/p-1)s} i^{-1} (\ln i)^{\gamma s} m_i^{(1-1/p)s} = +\infty.$$

Таким образом, для $g = D_p^\beta(f_\varepsilon)$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} m_i^{(\alpha-\beta+\varepsilon)s} E_{m_{i-1}}^s(g)_p &\geq 4^{-s} \sum_{i=2}^{\infty} m_i^{(\alpha-\beta+\varepsilon)s} \|S_{m_i}(g) - S_{m_{i-1}}(g)\|_p^s \\ &= 4^{-s} \sum_{i=2}^{\infty} m_i^{(\alpha-\beta+\varepsilon)s} \|r_i\|_p^s \end{aligned}$$

и $g = D_p^\beta(f_\varepsilon) \notin \Lambda(\alpha - \beta + \varepsilon, p, s; \mathbf{P})$. Аналогично,

$$\sum_{i=2}^{\infty} m_i^{(\alpha-\beta)(s-\varepsilon)} \|r_i\|_p^{s-\varepsilon} \geq \sum_{i=2}^{\infty} m_i^{(1/p-1)(s-\varepsilon)} i^{-1+\varepsilon/s} (\ln i)^{\gamma(s-\varepsilon)} m_i^{(1-1/p)(s-\varepsilon)} = +\infty$$

и $D_p^\beta(f_\varepsilon) \notin \Lambda(\alpha - \beta, p, s - \varepsilon; \mathbf{P})$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Известно (см. [12; §2, пример]), что не для всех $f \in \mathcal{D}$ и $\alpha > 0$ существует $\mathcal{J}_p^\alpha(f)$. Можно показать, однако, аналогично п. 1) теоремы 9, что $\sum_{i=-n+1}^{\infty} \mathcal{J}_p^\beta(S_{m_i}(f) - S_{m_{i-1}}(f))$ сходится в $L^p(\mathbb{R}_+)$ к $\mathcal{J}_p^\beta(f - S_{m_{-n}}(f))$ при любом $n \in \mathbb{Z}$. В [12; теорема 14] даются условия существования $\mathcal{J}_p^\beta(f)$ в терминах убывания $\|S_{m_{-n}}(f)\|_p$.

Следующая теорема для $1 < p \leq 2$ и локальных полей также доказана К. Оневиром в [13] и является аналогом теоремы П. И. Лизоркина и М. Тэйблсона (см. [37] и [38]) для пространств бесселевых потенциалов.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\alpha > 0$. При $1 < p \leq 2$ имеют место вложения $\Lambda(\alpha, p, p; \mathbf{P}) \subset \mathfrak{D}(D_p^\alpha) \subset \Lambda(\alpha, p, 2; \mathbf{P})$, а при $p \geq 2$ справедливы обратные вложения $\Lambda(\alpha, p, 2; \mathbf{P}) \subset \mathfrak{D}(D_p^\alpha) \subset \Lambda(\alpha, p, p; \mathbf{P})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разберем случай $p \geq 2$. Пусть $f \in \Lambda(\alpha, p, 2; \mathbf{P})$. Как доказано в лемме 6, $f_k = S_{m_k}(f) \in \mathfrak{D}(D_p^\alpha)$, кроме того, $f_k \rightarrow f$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$. Поскольку (см. доказательство леммы 6)

$$D_p^\alpha(f_k) = \sum_{i=-\infty}^k m_i^\alpha (D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) * f_k = \sum_{i=-\infty}^k m_i^\alpha (D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) * f,$$

то при $l > k$ имеем согласно леммам 3 и 4

$$\begin{aligned} \|D_p^\alpha(f_k) - D_p^\alpha(f_l)\|_p &= \left\| \sum_{i=k+1}^l m_i^\alpha (D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) * f \right\|_p \\ &\leq C_1 \left\| \left(\sum_{i=k+1}^l m_i^{2\alpha} |(D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) * f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \\ &\leq C_1 \left(\sum_{i=k+1}^l m_i^{2\alpha} \|(D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) * f\|_p^2 \right)^{1/2} \leq C_2 \left(\sum_{i=k+1}^l m_i^{2\alpha} \mathcal{E}_{m_{i-1}}^2(f)_p \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ясно, что для $f \in \Lambda(\alpha, p, 2; \mathbf{P})$ при $l, k \rightarrow +\infty$ правая часть последнего неравенства стремится к нулю. Значит, $D_p^\alpha(f_k) \rightarrow g \in L^p(\mathbb{R}_+)$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$ и по лемме 7 имеем $g = D_p^\alpha(f)$. Снова применяя леммы 3, 4 и (5.5), получаем оценку

$$\begin{aligned} \|f\|_p + \|g\|_p &\leq \|f\|_p + C_1 \left\| \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |m_i^\alpha (D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) * f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \\ &\leq \|f\|_p + C_1 \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} \|m_i^\alpha (D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) * f\|_p^2 \right)^{1/2} \leq \max(1, C_1) \|f\|_{\Lambda(\alpha, p, 2; \mathbf{P})}^{(2)}, \end{aligned}$$

откуда $\Lambda(\alpha, p, 2; \mathbf{P}) \subset \mathfrak{D}(D_p^\alpha)$. С другой стороны, если $f \in \mathfrak{D}(D_p^\alpha)$ и $g = D_p^\alpha(f)$, то в силу равенства (5.5), неравенства Йенсена и леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda(\alpha, p, 2; \mathbf{P})}^{(2)} &= \|f\|_p + \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} m_i^{\alpha p} \|(D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) * f\|_p^p \right)^{1/p} \\ &= \|f\|_p + \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} \|(D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) * g\|_p^p \right)^{1/p} \\ &= \|f\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |(D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) * g|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \|f\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}_+} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |(D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) * g|^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p} \leq C_2 (\|f\|_p + \|g\|_p). \end{aligned}$$

Случай $1 < p \leq 2$ разбирается аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пространства $\mathfrak{D}(D_2^\alpha)$ и $\Lambda(\alpha, 2, 2; \mathbf{P})$ совпадают.

ТЕОРЕМА 11. Все вложения теоремы 10 являются точными в следующем смысле. При $1 < p \leq 2$ и $1 \leq s < 2$ неверно, что $\mathfrak{D}(D_p^\alpha) \subset \Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$, а при $1 < p \leq 2$ и $\infty > s > p$ неверно, что $\Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P}) \subset \mathfrak{D}(D_p^\alpha)$. Аналогично при $\infty > p \geq 2$ и $1 \leq s < p$ неверно, что $\mathfrak{D}(D_p^\alpha) \subset \Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$, а при $\infty > p \geq 2$ и $\infty > s > 2$ неверно, что $\Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P}) \subset \mathfrak{D}(D_p^\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $1 < p \leq 2$, $1 \leq s < 2$. Рассмотрим

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} m_{i+1}^{-\alpha} i^{-1/s} \chi_{m_i}(x),$$

где $\chi_{m_i}(x) = \chi(m_i, x)X_{[0,1]}$. Тогда, учитывая, что $S_{m_n}(f) \in G_n$, легко видеть, что $S_{m_{i+1}}(f) - S_{m_i}(f) = m_{i+1}^{-\alpha} i^{-1/s} \chi_{m_i}(x)$. Если $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i^{-1/s} \chi_{m_i}(x)$, то в силу сходимости $\sum_{i=1}^{\infty} i^{-2/s}$ получаем, что $g \in L^r[0, 1]$ для всех $r > 0$ (см. [39]). Поскольку $S_{m_{i+1}}(g) - S_{m_i}(g) = i^{-1/s} \chi_{m_i}(x)$ и $\hat{\chi}_{m_i} = \hat{a}_{m_i,0} = X_{[m_i, m_{i+1}]}$, из сравнения преобразований Фурье отсюда следует, что $g = D_p^\alpha(f)$ и $f \in \mathfrak{D}(D_p^\alpha)$. Ясно, что $f(x) = \sum_{i=2}^{\infty} t_i$, где $t_i = m_i^{-\alpha} (i-1)^{-1/s} \chi_{m_{i-1}} = S_{m_i}(f) - S_{m_{i-1}}(f) \in G_i$, и что $\sum_{i=2}^{\infty} m_i^{\alpha s} \|t_i\|_p^s \geq \sum_{i=1}^{\infty} i^{-1} = +\infty$. Отсюда аналогично доказательству теоремы 9 находим, что $f \notin \Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$.

2) Пусть $p \geq 2$, $s > 2$ и

$$f(x) = \sum_{i=2}^{\infty} m_{i+1}^{-\alpha} i^{-1/s} (\ln i)^\gamma \chi_{m_i}(x),$$

где $\gamma < -1$. Аналогично доказательству теоремы 9 с помощью леммы 9 получаем $f \in \Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$. С другой стороны, если $f \in \mathfrak{D}(D_p^\alpha)$, то аналогично 1) имеем $D_p^\alpha(f) = g = \sum_{i=2}^{\infty} i^{-1/s} (\ln i)^\gamma \chi_{m_i}$. Но по свойствам лакунарных систем (см. [39]) из $\sum_{i=2}^{\infty} i^{-2/s} \ln^{2\gamma} i = \infty$ следует, что ряд, представляющий g , расходится почти всюду даже при $(C, 1)$ -суммировании и $g \notin L^p[0, 1]$.

3) Пусть $1 < p \leq 2$, $s > p$. Рассмотрим

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} m_i^{-(\alpha+1-1/p)} i^{-1/p} (D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) =: \sum_{i=1}^{\infty} t_i.$$

Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} m_i^{\alpha s} \|t_i\|_p^s \leq 2^s \sum_{i=1}^{\infty} i^{-s/p} < \infty$ и по лемме 9 имеем $f \in \Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$. С другой стороны, если существует $D_p^\alpha(f)$, то, сравнивая преобразования Фурье, делаем вывод, что она совпадает с $g = \sum_{i=1}^{\infty} m_i^{-1+1/p} i^{-1/p} (D_{m_i} - D_{m_{i-1}})$ и по определению $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Поскольку $D_{m_i} - D_{m_{i-1}}$ при $i \geq 1$ можно рассматривать как $\sum_{j=m_{i-1}}^{m_i-1} \chi_j$ (см. подробнее [3; § 1.5]), то $g(x)$ есть сумма ряда по ортонормированной на $[0, 1]$ системе $\{\chi_j\}_{j=0}^{\infty}$ с коэффициентами a_j . По теореме Пэли из $g \in L^p[0, 1]$, $1 < p \leq 2$, следует, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p j^{p-2}$ сходится. Но в данном случае имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p j^{p-2} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=m_{i-1}}^{m_i-1} m_i^{1-p} i^{-1} j^{p-2} \geq C_1 \sum_{i=1}^{\infty} i^{-1} = \infty,$$

что противоречит допущению $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$.

4) Пусть $p \geq 2$, $s < p$. Рассмотрим

$$f = \sum_{i=2}^{\infty} m_i^{-(\alpha+1-1/p)} i^{-1/p} \ln^\gamma i (D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) =: \sum_{i=2}^{\infty} t_i,$$

где $\gamma < -1$. С одной стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} m_i^{\alpha s} \|t_i\|_p^s &= \sum_{i=2}^{\infty} m_i^{s\alpha-s(\alpha+1-1/p)} i^{-s/p} (\ln i)^{\gamma s} \|D_{m_i} - D_{m_{i-1}}\|_p^s \\ &\geq C_2 \sum_{i=2}^{\infty} i^{-s/p} (\ln i)^{\gamma s} = +\infty, \end{aligned}$$

откуда аналогично доказательству теоремы 9 получаем $f \notin \Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$. С другой стороны, как и в 3), рассмотрим $g = \sum_{i=2}^{\infty} m_i^{-(1-1/p)} i^{-1/p} \ln^\gamma i (D_{m_i} - D_{m_{i-1}})$ как сумму ряда по системе $\{\chi_j\}_{j=0}^{\infty}$, чьи коэффициенты a_j , $j \geq 1$, монотонно стремятся к нулю. Как показали М. Ф. Тиман и К. Тухлиев (см. [40]), $h(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \chi_j(x) \in L^p[0, 1)$ при $a_j \downarrow 0$ тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^p j^{p-2} < \infty$. В данном случае находим, что

$$\sum_{i=2}^{\infty} m_i^{1-p} i^{-1} (\ln i)^{\gamma p} \sum_{j=m_{i-1}}^{m_i-1} j^{p-2} \leq C_3 \sum_{i=2}^{\infty} i^{-1} \ln^{\gamma p} i < \infty.$$

Значит, $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$, а из сравнения преобразований Фурье следует, что $g = D_p^\alpha(f)$ и $f \in \mathfrak{D}(D_p^\alpha)$. Теорема доказана.

§ 7. Вложения в пространства ВМО, Липшица и Морри

Следующая теорема является аналогом результата А. Зигмунда и И. Стейна (см. [18]) для потенциала Бесселя.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $1 < p < \infty$ и $\alpha = 1/p$. Тогда $\mathcal{J}_p^\alpha$ продолжается до ограниченного оператора из $L^p(\mathbb{R}_+)$ в $\text{ВМО}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью теоремы Ф. Рисса о сходящейся почти всюду подпоследовательности функций аналогично доказательству леммы 10 (теоремы 15 в [12]) получаем равенство $\mathcal{J}_p^\alpha(f) = W_{n_k}^\alpha * f + V_{n_k}^\alpha * f$ для некоторой подпоследовательности $n_k \in \mathbb{N}$, где $V_n^\alpha = \sum_{k=-\infty}^{-n} m_k^{-\alpha} (D_{m_k} - D_{m_{k-1}})$. Для $f \in \mathfrak{D}(\mathcal{J}_p^\alpha)$ имеем $V_{n_k}^\alpha * f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, в общем же случае $f \in L^p(\mathbb{R}_+) \subset L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+) \subset \mathcal{D}'$, а $V_{n_k}^\alpha \in G_{n_{-k}}$ и согласно § 1 $V_{n_k}^\alpha * f \in G_{n_{-k}}$. Будем писать $\mathcal{J}^\alpha(f) = W_{n_k}^\alpha * f + V_{n_k}^\alpha * f$, где последняя свертка понимается в указанном выше смысле. Поскольку нормы в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+)$ и $\text{ВМО}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ инвариантны относительно сдвига, а $\mathcal{J}^\alpha$ коммутирует со сдвигами, то вместо оценки осцилляции функции f на I_k^n , $k > 0$, можно рассматривать оценку осцилляции $f(x \oplus k/m_n)$ на $I_0^n = [0, 1/m_n)$. Поэтому мы ограничимся случаем $I = I_0^n$. Пусть

$$I = [0, m_{-n}), \quad n_k > |n|, \quad c_I = \int_{m_{-n}}^{\infty} W_{n_k}(0 \ominus t) f(t) dt$$

(c_I существует, так как $W_{n_k}^\alpha \in L^1(\mathbb{R}_+)$), $f_1 = fX_{[0, m_{-n})}$, $f_1 + f_2 = f$. Тогда

$$\begin{aligned} |I|^{-1} \int_I |W_{n_k}^\alpha * f(x) - c_I| dx &\leq m_n \int_I |W_{n_k}^\alpha * f_1(x)| dx \\ &+ m_n \int_I |W_{n_k}^\alpha * f_2(x) - c_I| dx = A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Если $1/p_0 - 1/q_0 = \alpha = 1/p$, в частности $p_0 < p$, то по лемме 10 при достаточно больших n_k верно неравенство $\|W_{n_k}^\alpha * f_1\|_{q_0} \leq C_1 \|f_1\|_{p_0}$ (см. также доказательство теоремы 3). Применяя дважды неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} A_1 &\leq m_n \|W_{n_k}^\alpha * f_1\|_{q_0} \|X_{[0, m_{-n})}\|_{q'_0} \leq C_1 m_n^{1/q_0} \|f_1\|_{p_0} \\ &\leq C_1 m_n^{1/q_0} \|f\|_p \|X_{[0, m_{-n})}\|_{q_0} = C_1 \|f\|_p. \end{aligned}$$

В предпоследнем неравенстве использовано соотношение $1/p_0 = 1/q_0 + 1/p$. Далее,

$$W_{n_k}^\alpha * f_2(x) - c_I = \int_{1/m_n}^\infty (W_{n_k}^\alpha(x \ominus t) - W_{n_k}^\alpha(0 \ominus t))f(t) dt.$$

Поскольку $x \in [0, 1/m_n)$, то при $l \geq -n + 1$ и $t \in S_l = [m_{l-1}, m_l)$ имеем $x \ominus t, 0 \ominus t \in S_l$. Значит, $D_{m_i}(x \ominus t) = D_{m_i}(0 \ominus t)$ при всех $i \in \mathbb{Z}$ и в силу (2.4) имеем $W_{n_k}^\alpha(x \ominus t) - W_{n_k}^\alpha(0 \ominus t) = 0$ при $x \in [0, 1/m_n)$, $t \in [1/m_n, +\infty)$ и $A_2 = 0$. Что касается функции $V_{n_k}^\alpha * f \in G_{n-k}$, то она постоянна в силу $n_k > |n|$ на всех $I_j^{-|n|}$ и тем более на I_j^n . Поэтому $|V_{n_k}^\alpha * f - (V_{n_k}^\alpha * f)_I|_I = 0$. Из полученных оценок и оценки, аналогичной (2.3), следует, что при достаточно больших k

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}^\alpha(f) - (\mathcal{J}^\alpha(f))_I|_I &\leq |W_{n_k}^\alpha * f - (W_{n_k}^\alpha * f)_I|_I + |V_{n_k}^\alpha * f - (V_{n_k}^\alpha * f)_I|_I \\ &\leq 2|W_{n_k}^\alpha * f - c_I|_I \leq 2C_1\|f\|_p, \end{aligned}$$

откуда $\|\mathcal{J}^\alpha(f)\|_* \leq 2C_1\|f\|_p$. Теорема доказана.

Идеи доказательства теоремы 12 позволяют получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 13. Пусть $1 < p < \infty$, $1/p < \alpha < 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Тогда $\mathcal{J}^\alpha(f) \in \text{Lip}^*(\alpha - 1/p)$, т.е.

$$|\mathcal{J}^\alpha(f)(x) - \mathcal{J}^\alpha(f)(y)| \leq C|x \ominus y|_{\mathbf{P}}^{\alpha-1/p}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 12 запишем

$$\mathcal{J}^\alpha(f) = W_{n_k}^\alpha * f + V_{n_k}^\alpha * f,$$

где $V_{n_k}^\alpha * f$ постоянна на всех $I_j^{-n_k}$. Пусть $|x \ominus y|_{\mathbf{P}} = 1/m_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда при достаточно больших k функция $V_{n_k}^\alpha * f$ постоянна на $I^n(y) \ni x$. Поэтому при таких k

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}^\alpha(f)(x) - \mathcal{J}^\alpha(f)(y)| &= |W_{n_k}^\alpha * f(x) - W_{n_k}^\alpha * f(y)| \\ &= \left| \left(\int_0^{1/m_n} + \int_{1/m_n}^\infty \right) (W_{n_k}^\alpha(x \ominus t) - W_{n_k}^\alpha(y \ominus t))f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^{1/m_n} (W_{n_k}^\alpha(x \ominus t) - W_{n_k}^\alpha(y \ominus t))f(t) dt \right|, \end{aligned}$$

поскольку при $t \in [1/m_n, \infty)$ и $x \ominus y \in [0, 1/m_n)$ разность под знаком интеграла равна нулю (см. доказательство теоремы 12). При $x \in I_k^n$ (x фиксировано) и $t \in [0, 1/m_n)$ значения $x \ominus t$ пробегает I_k^n . Учитывая, что $|W_n^\alpha(x)| \leq C_1|x|_{\mathbf{P}}^{\alpha-1}$, с помощью неравенства Гёльдера находим, что

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{1/m_n} W_{n_k}^\alpha(x \ominus t)f(t) dt \right| &\leq C_2 \left(\int_{k/m_n}^{(k+1)/m_n} t^{(\alpha-1)p'} dt \right)^{1/p'} \|f\|_p \\ &\leq C_3\|f\|_p((k+1)^{(\alpha-1)p'+1} - k^{(\alpha-1)p'+1})^{1/p'} m_n^{-\alpha+1/p}, \end{aligned}$$

где C_3 не зависит от n и k . Так как $0 < (\alpha-1)p' + 1 < 1$, то разность в скобках будет наибольшей при $k = 0$ и в этом случае она равна 1. Такая же оценка верна при замене x на y . В итоге

$$|\mathcal{J}^\alpha(f)(x) - \mathcal{J}^\alpha(f)(y)| \leq 2C_3\|f\|_p m_n^{-\alpha+1/p} = 2C_3\|f\|_p |x \ominus y|_{\mathbf{P}}^{\alpha-1/p}.$$

Теорема доказана.

Следующая теорема является аналогом результата Е. Накаи (см. [19]) для потенциалов Рисса.

ТЕОРЕМА 14. Пусть $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < 1/\alpha$, $1/q = 1/p - \alpha$ и для весовой функции w выполнено условие (3.2) при $\delta = 1 - \alpha p$. Тогда:

1) при $p > 1$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{J}^\alpha(f)\|_{q, w^{q/p}} \leq C(p, q) \|f\|_{p, w}, \quad f \in L^{p, w}(\mathbb{R}_+);$$

2) при $p = 1$ имеет место неравенство слабого типа

$$w^{-q}(I) |\{x \in I : |\mathcal{J}^\alpha(f)(x)| > t\}| \leq C(q) t^{-q} \|f\|_{1, w}^q, \quad f \in L^{1, w}(\mathbb{R}_+).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $I = I^n(x) \in \Omega$, $f \in L^{p, w}(\mathbb{R}_+)$, $f_1 = fX_I$ и $f_2 = f - f_1$. Тогда $f \in L^p(I)$ и по лемме 10

$$\begin{aligned} (w(I))^{-q/p} \int_I |\mathcal{J}^\alpha(f_1)(x)|^q dx &\leq (w(I))^{-q/p} C_1 \|f_1\|_p^q \\ &\leq C_1 \left(w^{-1}(I) \int_I |f(x)|^p dx \right)^{q/p}, \end{aligned}$$

откуда

$$\|\mathcal{J}^\alpha(f_1)\|_{q, w^{q/p}} \leq C_1^{1/q} \|f\|_{p, w}. \quad (7.1)$$

Пусть $x \in I$, $y \notin I$, более точно, $y \in G_l = I^{n-l}(x) \setminus I^{n-l+1}(x)$, $l \in \mathbb{N}$. Как отмечалось при доказательстве леммы 11, $M(X_I)(y) = m_{n-l}/m_n$. С другой стороны, $|x - y|_{\mathbf{P}}^{-1} = m_{n-l} = M(X_I)(y)/|I|$. Как отмечалось в §2, функции $W^\alpha(y)$ и $W_n^\alpha(y)$ мажорируются $C_2|y|^{\alpha-1}$, поэтому можно записать

$$|\mathcal{J}^\alpha(f_2)(x)| \leq C_2 \int_{\mathbb{R}_+} |f_2(y)| |x - y|_{\mathbf{P}}^{\alpha-1} dy \leq C_2 \int_{\mathbb{R}_+} |f(y)| \left(\frac{M(X_I)(y)}{|I|} \right)^{1-\alpha} dy. \quad (7.2)$$

Здесь важно, что на I , где $|x - y|_{\mathbf{P}}^{\alpha-1}$ не ограничено, $f_2(y)$ равно нулю. Теперь выберем $\varepsilon > 0$ такое, что $\delta = 1 - \alpha p - \varepsilon > 0$ и условие (3.2) выполняется при этом δ (это можно сделать по лемме 12). По неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}^\alpha(f_2)(x)| &\leq C_2 |I|^{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}_+} |f(y)| (M(X_I)(y))^{\delta/p} (M(X_I)(y))^{1-\alpha-\delta/p} dy \\ &\leq C_2 |I|^{\alpha-1} \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(y)|^p (M(X_I)(y))^\delta dy \right)^{1/p} \|M(X_I)\|_{\gamma}^{\gamma/p'}, \end{aligned}$$

где $\gamma = (1 - \alpha - \delta/p)p'$, $1/p + 1/p' = 1$. Поскольку $\varepsilon < \alpha p - 1 < p - 1$, то $1 - \alpha - \delta/p = 1 - 1/p - \varepsilon/p > 0$. Поэтому аналогично доказательству леммы 11 получаем

$$\begin{aligned} \|M(X_I)\|_{\gamma}^{\gamma} &= \int_I 1 dy + \sum_{l=1}^{\infty} \int_{G_l} \left(\frac{m_{n-l}}{m_n} \right)^{\gamma} dy \\ &= m_n^{-1} + m_n^{-\gamma} \sum_{l=1}^{\infty} m_{n-l}^{\gamma-1} \leq C_3 m_n^{-1} = C_3 |I|. \end{aligned}$$

Применяя лемму 11, с учетом выбора $\varepsilon > 0$ находим, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}^\alpha(f_2)(x)| &\leq C_4 |I|^{\alpha-1+1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(y)|^p (M(X_I)(y))^\delta dy \right)^{1/p} \\ &\leq C_4 |I|^{-1/q} (w(I) \|f\|_{p,w}^p)^{1/p}. \end{aligned}$$

В результате

$$(w(I))^{-q/p} \int_I |\mathcal{J}^\alpha(f_2)(x)|^q dx \leq C_4^q \int_I |I|^{-1} \|f\|_{p,w}^q dx = C_4^q \|f\|_{p,w}^q. \quad (7.3)$$

Объединяя оценки (7.1) и (7.3), доказываем теорему в случае 1).

2) Пусть $f \in L^{1,w}(\mathbb{R}_+)$, $f_1 = fX_I \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $f_2 = f - f_1$. В силу леммы 10

$$|\{x \in I : |\mathcal{J}^\alpha(f_1)(x)| > t\}| \leq C_5 \left(\frac{\|f_1\|_1}{t} \right)^q \leq C_5 \left(\frac{w(I) \|f\|_{1,w}}{t} \right)^q.$$

С другой стороны, снова используя (7.2) и лемму 11, получаем, что

$$|\mathcal{J}^\alpha(f_2)(x)| \leq C_6 |I|^{-1/q} \int_{\mathbb{R}_+} |f(y)| (M(X_I)(y))^{1/q} dy \leq C_7 |I|^{-1/q} w(I) \|f\|_{1,w}$$

при $x \in I$. Поэтому по неравенству Чебышёва

$$|\{x \in I : |\mathcal{J}^\alpha(f_2)(x)| > t\}| \leq \int_I t^{-q} (\mathcal{J}^\alpha(f_2)(x))^q dx \leq C_7 t^{-q} (w(I) \|f\|_{1,w})^q.$$

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] P.L. Butzer, H.J. Wagner, “Walsh–Fourier series and the concept of a derivative”, *Applicable Anal.*, **3**:1 (1973), 29–46.
- [2] P.L. Butzer, H.J. Wagner, “A calculus for Walsh functions defined on $\mathbb{R}_+$ ”, *Proc. Symp. Appl. Walsh Functions* (Washington, 1973), 1973, 75–81.
- [3] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **64**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [4] J. Pál, “On the connection between the concept of a derivative defined on the dyadic field and the Walsh–Fourier transform”, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, **18** (1976), 49–54.
- [5] H.J. Wagner, “On dyadic analysis for functions defined on $\mathbb{R}_+$ ”, *Theory and applications of Walsh functions. Proc. Symp. Hatfield Polytechnic*, 1975, 101–129.
- [6] F. Schipp, W.R. Wade, P. Simon, *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1990.
- [7] Б. И. Голубов, “О модифицированном сильном двоичном интеграле и производной”, *Матем. сб.*, **193**:4 (2002), 37–60; англ. пер.: B.I. Golubov, “A modified strong dyadic integral and derivative”, *Sb. Math.*, **193**:4 (2002), 507–529.
- [8] Б. И. Голубов, “Модифицированный двоичный интеграл и производная дробного порядка на $\mathbb{R}_+$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:2 (2005), 64–70; англ. пер.: B.I. Golubov, “Fractional modified dyadic integral and derivative on $\mathbb{R}_+$ ”, *Funct. Anal. Appl.*, **39**:2 (2005), 135–139.

- [9] Б. И. Голубов, “Модифицированный двоичный интеграл и производная дробного порядка на $\mathbb{R}_+$ ”, *Матем. заметки*, **79**:2 (2006), 213–233; англ. пер.: B. I. Golubov, “Modified dyadic integral and fractional derivative on $\mathbb{R}_+$ ”, *Math. Notes*, **79**:2 (2006), 196–214.
- [10] B. I. Golubov, “On some properties of fractional dyadic derivative and integral”, *Anal. Math.*, **32**:3 (2006), 173–205.
- [11] С. С. Волосивец, “Модифицированный P -ичный интеграл и модифицированная P -ичная производная для функций, определенных на полуоси”, *Изв. вузов. Матем.*, 2005, № 6, 28–39; англ. пер.: S. S. Volosivets, “A modified P -adic integral and a modified P -adic derivative for functions defined on a half-axis”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **49**:6 (2005), 25–36.
- [12] С. С. Волосивец, “О модифицированных мультипликативных интеграле и производной произвольного порядка на полуоси”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:2 (2006), 3–24; англ. пер.: S. S. Volosivets, “The modified multiplicative integral and derivative of arbitrary order on the semiaxis”, *Izv. Math.*, **70**:2 (2006), 211–231.
- [13] C. W. Onneweer, “Fractional differentiation and Lipschitz spaces on local fields”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **258**:1 (1980), 155–165.
- [14] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p -адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994; англ. пер.: V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p -adic analysis and mathematical physics*, Ser. Soviet East European Math., **1**, World Scientific, River Edge, NJ, 1994.
- [15] M. H. Taibleson, *Fourier analysis on local fields*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1975.
- [16] М. Ф. Тиман, “Наилучшее приближение и модуль гладкости функций, заданных на всей вещественной оси”, *Изв. вузов. Матем.*, 1961, № 6, 108–120.
- [17] М. Ф. Тиман, “Приближение функций, заданных на всей вещественной оси, целыми функциями экспоненциального типа”, *Изв. вузов. Матем.*, 1968, № 2, 89–101.
- [18] E. M. Stein, A. Zygmund, “Boundedness of translation invariant operators on Hölder spaces and L^p -spaces”, *Ann. of Math. (2)*, **85**:2 (1967), 337–349.
- [19] E. Nakai, “Hardy–Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces”, *Math. Nachr.*, **166**:1 (1994), 95–103.
- [20] С. С. Волосивец, “Модифицированные операторы Харди и Харди–Литтлвуда и их поведение в различных пространствах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:1 (2011), 29–52; англ. пер.: S. S. Volosivets, “Modified Hardy and Hardy–Littlewood operators and their behaviour in various spaces”, *Izv. Math.*, **75**:1 (2011), 29–51.
- [21] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., **96**, Academic Press, New York–London, 1981.
- [22] C. B. Morrey, “On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **43**:1 (1938), 126–166.
- [23] B. I. Golubov, S. S. Volosivets, “On the integrability and uniform convergence of multiplicative Fourier transforms”, *Georgian Math. J.*, **16**:3 (2009), 533–546.
- [24] C. W. Onneweer, “The Fourier transform of Herz spaces on certain groups”, *Monatsh. Math.*, **97**:4 (1984), 297–310.
- [25] S. Fridli, “On the rate of convergence of Cesaro means of Walsh–Fourier series”, *J. Approx. Theory*, **76**:1 (1994), 31–53.
- [26] P. L. Butzer, K. Scherer, “On the fundamental approximation theorems of D. Jackson, S. N. Bernstein and theorems of M. Zamansky and S. B. Stečkin”, *Aequationes Math.*, **3**:1–2 (1969), 170–185.
- [27] L. Leindler, “Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **31**:1–2 (1970), 279–285.

- [28] Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.
- [29] Т. И. Аманов, “Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S_{p,\theta}^{(r)}B(R_n)$ и $S_{p^*,\theta}^{(r)}B$ ($0 \leq x_j \leq 2\pi$; $j = 1, \dots, n$)”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям*, Тр. МИАН СССР, **77**, Наука, М., 1965, 5–34; англ. пер.: T. I. Amanov, “Representation and imbedding theorems for the function spaces $S_{p,\theta}^{(r)}B(R_n)$ and $S_{p^*,\theta}^{(r)}B$ ($0 \leq x_j \leq 2\pi$; $j = 1, \dots, n$)”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **77** (1965), 3–36.
- [30] Е. С. Смаилов, З. Р. Сулейменова, “Теоремы вложения для пространств Бесова по мультипликативным базисам Прайса”, *Функциональные пространства, приближения, дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Олега Владимировича Бесова, Тр. МИАН, **243**, Наука, М., 2003, 313–319; англ. пер.: E. S. Smailov, Z. R. Suleimenova, “Embedding theorems for Besov spaces over multiplicative Price bases”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **243**:4 (2003), 302–308.
- [31] H. Kitada, “Potential operators and multipliers on locally compact Vilenkin groups”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **54**:3 (1996), 459–471.
- [32] С. Г. Самко, “К описанию образа $I^\alpha(L_p)$ потенциалов Рисса”, *Изв. АН АрмССР. Матем.*, **12**:5 (1977), 329–334.
- [33] C. W. Onneweer, “Fractional differentiation on the group of integers of a p -adic or p -series field”, *Anal. Math.*, **3**:2 (1977), 119–130.
- [34] G.-I. Sunouchi, “Derivatives of a polynomial of best approximation”, *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, **70**:3 (1968), 165–166.
- [35] В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций*, Изд-во ЛГУ, Л., 1982.
- [36] M. Zamansky, “Classes de saturation de certains procédés d’approximation des séries de Fourier des fonctions continues et applications à quelques problèmes d’approximation”, *Ann. Sci. École. Norm. Sup.* (3), **66**:1 (1949), 19–93.
- [37] П. И. Лизоркин, “Функция типа Хиршмана и соотношения между пространствами $B_p^r(E_n)$ и $L_p^r(E_n)$ ”, *Матем. сб.*, **63(105)**:4 (1964), 505–535.
- [38] M. H. Taibleson, “On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n -space. I. Principal properties”, *J. Math. Mech.*, **13**:3 (1964), 407–479.
- [39] Н. Я. Виленкин, “К теории лакунарных ортогональных систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **13**:3 (1949), 245–252.
- [40] М. Ф. Тиман, К. Тухлиев, “Свойства некоторых ортонормированных систем”, *Изв. вузов. Матем.*, 1983, №9, 65–73; англ. пер.: M. F. Timan, K. Tukhliev, “Properties of certain orthonormal systems”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **27**:9 (1983), 74–84.

С. С. Волосивец (S. S. Volosivets)

Механико-математический факультет

Саратовского государственного университета

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Поступила в редакцию

22.10.2010 и 06.02.2012