Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Осипов, Бесконечномерный грассманиан Сато и когерентные пучки ранга 2 на кривых, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 11, 81–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm781>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 11:53:12

УДК 512.772.3

Д. В. Осипов

Бесконечномерный грассманиан Сато и когерентные пучки ранга 2 на кривых

В работе исследуются образы (полу)стабильных пучков без кручения ранга 2
при отображении Кричевера в бесконечномерный грассманиан Сато.
Библиография: 8 названий.

Хорошо известно отображение Кричевера из множества пучков без кручения на кривых (с некоторыми дополнительными данными) в бесконечномерный грассманиан Сато (см., например, [1], [2]). Мы описываем при отображении Кричевера образы (полу)стабильных ранга 2 пучков без кручения на кривых и интерпретируем полученный результат в терминах действий некоторых однопараметрических подгрупп группы $SL(2, k[[z]])$ на детерминантном расслоении бесконечномерного грассманова многообразия. Полученная формулировка аналогична конечномерному критерию Гильберта–Мамфорда из геометрической теории инвариантов (теорема 2).

Часть результатов этой статьи (без доказательств) была опубликована в заметке [3].

Автор выражает благодарность М. С. Нарасиману за приглашение в международный центр теоретической физики в Триесте, где была получена часть результатов, а также глубокую благодарность А. Н. Паршину за постоянное внимание к работе и помощь.

§ 1. Отображение Кричевера

Рассмотрим следующие геометрические данные:

- 1) C – приведенная неприводимая полная алгебраическая кривая, определенная над полем k ;
- 2) p – гладкая k -рациональная точка;
- 3) $\mathcal{F}$ – когерентный пучок без кручения $\mathcal{O}_C$ -модулей ранга 2 на C ;
- 4) t_p – локальный параметр в точке p , т.е. $\widehat{\mathcal{O}}_p = k[[t_p]]$, где $\widehat{\mathcal{O}}_p$ – пополнение локального кольца $\mathcal{O}_p$ по максимальному идеалу;
- 5) e_p – базис свободного модуля $\widehat{\mathcal{F}}_p$ ранга 2 над кольцом $\widehat{\mathcal{O}}_p$, где по определению $\widehat{\mathcal{F}}_p \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_C} \widehat{\mathcal{O}}_p$.

Далее такой набор данных $(C, p, \mathcal{F}, t_p, e_p)$ мы будем называть *квинтетом*. Если эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{F}) = \mu$, то мы будем говорить, что квинтет имеет индекс μ .

С другой стороны, рассмотрим $V = k((z)) \oplus k((z))$, $V_0 = k[[z]] \oplus k[[z]]$. Тогда определим бесконечный *грассманиан Сато* $\text{Gr}^\mu(V)$ как множество k -векторных

подпространств W в V , являющихся фредгольмовыми индекса μ , т.е. $\dim_k V/(V_0 + W) < \infty$, $\dim_k W \cap V_0 < \infty$ и $\dim_k W \cap V_0 - \dim_k V/(V_0 + W) = \mu$.

Определим *отображение Кричевера* K из множества квинтетов индекса μ в $\text{Gr}^\mu(V)$ как композицию следующей цепи очевидных отображений:

$$\begin{aligned} (C, p, \mathcal{F}, t_p, e_p) &\rightarrow H^0(C \setminus p, \mathcal{F}) \hookrightarrow H^0(\text{Spec } \mathcal{O}_p \setminus p, \mathcal{F}) \hookrightarrow H^0(\text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_p \setminus p, \mathcal{F}) \\ &= \widehat{\mathcal{F}}_p \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_p} \widehat{K}_p \xrightarrow{e_p} (\widehat{\mathcal{O}}_p \oplus \widehat{\mathcal{O}}_p) \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_p} \widehat{K}_p \xrightarrow{t_p} k((z)) \oplus k((z)), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\widehat{K}_p$ – поле частных кольца $\widehat{\mathcal{O}}_p$.

Отображение Кричевера K и его основные свойства подробно рассматривались многими авторами. Отметим здесь [1] в качестве алгебраического описания (но заметим, что определение в [1] несколько отличается от нашего определения) и [2] как аналитическое описание.

Для любого $W \in \text{Gr}^\mu(V)$ определим кольцо

$$A_W \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in k((z)) : fW \subset W\}.$$

ЛЕММА 1 (см. [1]). *Для любого $W \in \text{Gr}^\mu(V)$ и любого подкольца $A \subset A_W$ такого, что $k \subset A$, мы имеем*

- 1) $A \cap k[[z]] = k$;
- 2) *если $A \neq k$, тогда кольцо A имеет размерность 1 над k .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы следует из $\dim_k W \cap V_0 < \infty$.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим следующую подгруппу в группе целых чисел $\mathbb{Z}$:

$$\{n \in \mathbb{Z} : n = \nu(a), a \in \text{Frac } A\},$$

где ν – дискретное нормирование в поле $k((z))$ и $\text{Frac } A$ – поле частных кольца A . Тогда эта подгруппа совпадает с $r\mathbb{Z}$ для некоторого целого r . Поэтому

- 1) существуют $f, g \in A$ такие, что $r = \nu(f) - \nu(g)$;
- 2) для любого целого n

$$\dim_k A \cap z^{-nr} k[[z]] / A \cap z^{(-n+1)r} k[[z]] \leq 1. \quad (2)$$

Теперь из (2), утверждения 1) леммы и того, что r является наибольшим общим делителем чисел $\nu(f)$ и $\nu(g)$, мы получаем

$$\dim_k A/k[f, g] < \infty.$$

Таким образом, размерность кольца A над k не больше двух. Если же предположить, что f и g – алгебраические элементы над k , то для всех пар целых чисел $n_1 > 0$ и $n_2 > 0$ элементы $f^{n_1} g^{n_2}$ включаются в один базис векторного пространства A над k . Но последнее противоречит (2), и это противоречие завершает доказательство леммы.

Отметим следующее хорошо известное утверждение.

ЛЕММА 2. Элемент $W \in \mathrm{Gr}^\mu(V)$ находится в образе отображения Кричевера, если и только если $\mathrm{rank} A_W = 1$, т.е. существуют два элемента $f, g \in A_W$ такие, что числа $\nu(f)$ и $\nu(g)$ взаимно просты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что условие $\mathrm{rank} A_W = 1$ эквивалентно следующему:

$$\dim_k k((z))/(A_W + k[[z]]) < \infty. \quad (3)$$

Пусть $W = K(C, p, \mathcal{F}, t_p, e_p)$. Через A_C обозначим образ кольца $H^0(C \setminus p, \mathcal{O}_C)$ в поле $k((z))$:

$$H^0(C \setminus p, \mathcal{O}_C) \hookrightarrow \widehat{K}_p \xrightarrow{t_p} k((z)).$$

Из теоремы Римана–Роха получаем

$$\dim_k k((z))/(A_C + k[[z]]) < \infty.$$

И из $A_C \subset A_W$ следует (3).

Теперь пусть $\mathrm{rank} A_W = 1$. Зафиксируем любое подкольцо $A \subset A_W$ так, что $k \subset A$ и $\dim_k A_W/A < \infty$. По лемме 1 кольцо A имеет размерность 1 над k . Тогда из градуированной k -алгебры

$$A_* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{i=0}^{\infty} A \cap z^{-i} k[[z]]$$

мы получаем полную неприводимую приведенную кривую $C = \mathrm{Proj} A_*$. И из (3) мы видим, что градуированный A_* -модуль

$$W_* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} W \cap z^{-i} V_0$$

определяет когерентный пучок без кручения $W_*^\sim$ ранга 2 на C . Более того, мы имеем $C = \mathrm{Spec} A \cup p$, где p – гладкая k -рациональная точка, $\widehat{\mathcal{O}}_p = k[[z]]$, $\mathcal{F}|_{C \setminus p} = W^\sim$, $\widehat{\mathcal{F}}_p = V_0$, $t_p = z$, $e_p = (1, 0), (0, 1) \in V$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^0(C, \mathcal{O}(ip)) &\simeq A_*, & \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} H^0(C, \mathcal{F}(ip)) &\simeq W_*, \\ H^0(C, \mathcal{F}) &\simeq W \cap V_0, & H^1(C, \mathcal{F}) &\simeq V/(W + V_0). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если мы зафиксируем тройку данных (C, p, t_p) и отождествим $(C, p, \mathcal{F}, t_p, e_p)$ с $(C, p, \mathcal{F}', t_p, e'_p)$ для каждого изоморфизма пучков $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ такого, что $\alpha(e_p) = e'_p$, то отображение Кричевера – инъективное отображение. В этом случае $W \in \mathrm{Gr}^\mu(V)$ находится в образе такого отображения, если и только если $A_C W \subset W$.

Пусть теперь $W = K(C, p, \mathcal{F}, t_p, e_p) \in \mathrm{Gr}^\mu(V)$. Тогда с каждым подпучком $\mathcal{G}$ в $\mathcal{F}$ мы можем ассоциировать $k((z))$ -векторное подпространство $L_{\mathcal{G}} \subset V$ так, что $L_{\mathcal{G}} \cap W \neq 0$:

$$\begin{aligned} H^0(C \setminus p, \mathcal{G}) &\hookrightarrow H^0(C \setminus p, \mathcal{F}) = W \subset \mathrm{Gr}^\mu(V), \\ \mathcal{G} &\longmapsto H^0(C \setminus p, \mathcal{G}) \times k((z)) \subset V. \end{aligned} \quad (4)$$

Приходим к следующему предложению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $W = K(C, p, \mathcal{F}, t_p, e_p)$, $R(\mathcal{F})$ – множество всех когерентных подпучков ранга 1 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ таких, что пучок $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ – когерентный пучок без кручения, $R(W)$ – множество всех 1-мерных $k((z))$ -векторных подпространств $L \subset V$ таких, что $L \cap W \neq 0$. Тогда отображение (4) является взаимно однозначным соответствием между $R(\mathcal{F})$ и $R(W)$.

Более того, если $\mathcal{G} \in R(\mathcal{F}) \mapsto L_{\mathcal{G}} \in R(W)$, то

$$\chi(C, \mathcal{G}) = \dim_k W \cap L_{\mathcal{G}} \cap V_0 - \dim_k L_{\mathcal{G}} / (W \cap L_{\mathcal{G}} + L_{\mathcal{G}} \cap V_0). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что элементы множества $R(\mathcal{F})$ взаимно однозначно соответствуют 1-мерным $k(\eta)$ -векторным подпространствам в $\mathcal{F}_{\eta} \stackrel{\text{def}}{=} H^0(\text{Spec } k(\eta), \mathcal{F})$, где $\eta \hookrightarrow C$ – общая точка кривой C . Имеем каноническое вложение $\mathcal{F}_{\eta}$ в V , так как $H^0(\text{Spec } \mathcal{O}_p \setminus p, \mathcal{F}) = \mathcal{F}_{\eta}$ – третий член в цепочке (1). И это вложение задает нам взаимно однозначное соответствие между $R(\mathcal{F})$ и $R(W)$.

Более того, имеем следующую явную конструкцию. Пусть $L \in R(W)$. Тогда градуированный $(A_C)_*$ -модуль $(L \cap W)_* \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} (L \cap W) \cap z^{-i} V_0$ определяет пучок без кручения ранга 1 $\mathcal{G}_L = (L \cap W)_*$ на кривой $C = \text{Proj}(A_C)_*$. Следовательно, отображение $L \rightarrow \mathcal{G}_L$ является обратным к отображению (4) и

$$\begin{aligned} H^0(C, \mathcal{G}_L) &\simeq W \cap L \cap V_0, \\ H^1(C, \mathcal{G}_L) &\simeq L / (W \cap L + L \cap V_0). \end{aligned}$$

§ 2. Детерминантное расслоение

На $\text{Gr}^{\mu}(V)$ можно определить структуру алгебраической схемы, представляющей функтор, который обобщает обычный конечномерный грассманиан. (Это было явно сделано в [4].) Полученная схема будет приведенной и отделимой, и ее k -точки будут совпадать с множеством $\text{Gr}^{\mu}(V)$, которое мы рассматривали в § 1.

Опишем аффинное открытое покрытие этой схемы. Пусть A – соизмеримое с V_0 k -векторное подпространство V , т.е. $\dim_k (A + V_0) / (A \cap V_0) < \infty$. Определим

$$\text{Gr}_A^{\mu}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{W \in \text{Gr}^{\mu}(V) : V = A \oplus W\}.$$

Тогда $\text{Gr}_A^{\mu}(V)$ можно отождествить с бесконечномерным аффинным пространством, которое изоморфно спектру кольца многочленов от бесконечного множества переменных. И подсхемы $\text{Gr}_A^{\mu}(V)$ определяют аффинное открытое покрытие $\text{Gr}^{\mu}(V)$, когда A пробегает все соизмеримые с V_0 подпространства.

Можно определить линейное расслоение (детерминантное расслоение) Det на $\text{Gr}^{\mu}(V)$ так, что для любого $W \in \text{Gr}^{\mu}(V)$ геометрический слой имеет вид

$$\text{Det}_W = \bigwedge^{\max} (W \cap V_0) \otimes \bigwedge^{\max} (V/W + V_0)^*.$$

Далее нам понадобится явное описание детерминантного расслоения Det , поэтому опишем его “в координатах”. Для этого отождествим k -векторные пространства V и $k((t))$ при помощи следующего непрерывного изоморфизма:

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow k((t)), \\ \left(\sum a_i z^i \right) \oplus \left(\sum b_i z^i \right) &\longmapsto \sum_i (a_i t^{2i} + b_i t^{2i+1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что V_0 при этом изоморфизме переходит в $k[[t]]$.

Пусть S_μ – множество последовательностей $\{s_{-\mu+1}, s_{-\mu+2}, \dots\}$ целых чисел таких, что

- 1) эти последовательности строго убывающие;
- 2) $s_k = -k$ для $k \gg 0$.

Отметим, что для каждого $\mu \in \mathbb{Z}$ множество S_μ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством диаграмм Юнга.

Для каждого $S = \{s_{-\mu+1}, s_{-\mu+2}, \dots\} \in S_\mu$ определим $H_S \in \text{Gr}^\mu(V)$ как k -векторное пространство, порожденное элементами $\{t^{s_k}\}$, $A_S \subset k((t))$ – как наименьшее замкнутое k -векторное пространство, порожденное элементами $\{t^q : q \in \mathbb{Z} \setminus S\}$. Тогда

$$\text{Gr}^\mu(V) = \bigcup_{S \in S_\mu} \text{Gr}_{A_S}^\mu(V). \quad (7)$$

Для любого $S \in S_\mu$ определим отображение $p_S: k((t)) \rightarrow H_S$ как проекцию, возникающую из разложения $H_S \oplus A_S = k((t))$. Через $0(\mu) \in S_\mu$ будем обозначать последовательность $\{\mu-1, \mu-2, \mu-3, \dots\}$.

Приведем теперь описание детерминантного расслоения Det , взятое из [5; п. 7.7]. По данному $W \in \text{Gr}^\mu(V)$ определим *допустимый* изоморфизм как изоморфизм

$$w: H_{0(\mu)} \longrightarrow W, \quad w(t^{\mu-1}) \in W, \quad w(t^{\mu-2}) \in W, \quad \dots,$$

с условием, что отображение

$$p_{0(\mu)} \cdot w - \text{Id}: H_{0(\mu)} \rightarrow H_{0(\mu)}$$

имеет конечный ранг. (Заметим, что для любого $W \in \text{Gr}^\mu(V)$ допустимые изоморфизмы всегда существуют.) Тогда детерминантное расслоение Det состоит из

$$\{[\lambda, w] : \lambda \in k, w - \text{допустимый изоморфизм}\},$$

отождествленных при помощи следующего отношения эквивалентности:

$$[\lambda, w] \sim [\lambda \cdot \det(w'^{-1} \cdot w), w'],$$

где w' и w – два допустимых изоморфизма для $W \in \text{Gr}^\mu(V)$. (Отметим, что отображение

$$w'^{-1} \cdot w - \text{Id}: H_{0(\mu)} \rightarrow H_{0(\mu)}$$

имеет конечный ранг как эндоморфизм $H_{0(\mu)}$, и поэтому $\det(w'^{-1} \cdot w)$ корректно определен по отношению к базисам $\{t^{\mu-1}, t^{\mu-2}, t^{\mu-3}, \dots\}$.

Пусть Det^* – двойственное векторное расслоение к линейному расслоению Det . Для каждого $S \in S_\mu$ можно определить глобальное сечение

$$\begin{aligned} \pi_S &\in H^0(\text{Gr}^\mu(V), \text{Det}^*) : \text{Det} \longrightarrow k, \\ [\lambda, w] &\xrightarrow{\pi_S} \lambda \det(p_S \cdot w) \in k, \end{aligned}$$

при этом $p_S \cdot w - \text{Id} : H_0 \rightarrow H_S$ – отображение конечного ранга. Поэтому $\det(p_S \cdot w)$ корректно определен по отношению к базисам

$$\{t^{\mu-1}, t^{\mu-2}, \dots\} \in H_{0(\mu)}, \quad \{t^{s-\mu+1}, t^{s-\mu+2}, \dots\} \in H_S.$$

И как показано в [4] и [5], мы получаем замкнутое вложение (“плюккерово вложение”):

$$\begin{aligned} \text{Gr}^\mu(V) &\hookrightarrow \mathbb{P}(\Pi(S_\mu)^*) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Proj}(\text{Sym}(\Pi(S_\mu))), \\ W &\longmapsto \{\pi_S \rightarrow \pi_S(w) \stackrel{\text{def}}{=} \det(p_S \cdot w)\}, \end{aligned}$$

где $\Pi(S_\mu) \subset H^0(\text{Gr}^\mu(V), \text{Det}^*)$ – k -векторное подпространство, порожденное глобальными сечениями $\{\pi_S : S \in S_\mu\}$, и каждая k -точка $W \in \text{Gr}^\mu(V)$ определяет 1-мерное k -векторное подпространство $k \cdot \{\pi_S \mapsto \pi_S(w) : S \in S_\mu\} \subset \Pi(S_\mu)^*$, не зависящее от выбора допустимого изоморфизма w для W .

Отметим также, что $\pi_S(w) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $W \in \text{Gr}_{A_S}^\mu(V)$, т.е. $W \oplus A_S = V$.

Рассмотрим группу

$$\text{GL}(V, V_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in \text{Aut}_k(V) : \dim_k(gV_0 + V_0)/(gV_0 \cap V_0) < \infty\}.$$

Отметим, что “в координатах” $\text{GL}(V, V_0)$ соответствует группе обратимых элементов алгебры матриц $(A_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ таких, что для каждого целого l количество ненулевых элементов A_{ij} с $j \geq l$, $i \leq l$ – конечно. Действие $(A_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ на $k((t))$ следующее: $E_{ij}(t^j) = t^i$. (Здесь E_{ij} – матрица с единицей на (i, j) -м месте и нулями во всех остальных местах.) Определим подгруппу

$$\text{GL}_0(V, V_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in \text{GL}(V, V_0) : \dim_k gV_0/(gV_0 \cap V_0) = \dim_k V_0/(gV_0 \cap V_0)\}.$$

Тогда имеем очевидное действие $\text{GL}_0(V, V_0)$ на $\text{Gr}^\mu(V)$. Определим центральное расширение $\widehat{\text{GL}}_0(V, V_0)$ группы $\text{GL}_0(V, V_0)$ при помощи k^* как группу всех автоморфизмов линейного расслоения Det на $\text{Gr}^0(V)$, накрывающих действия элементов группы $\text{GL}_0(V, V_0)$ на $\text{Gr}^0(V)$. (Такое центральное расширение называется *группой Мамфорда*.) Приведем явное описание группы $\widehat{\text{GL}}_0(V, V_0)$ и ее действия на $\text{Det}|_{\text{Gr}^\mu(V)}$, взятое из [5]. Определим группу H как следующую группу:

$$\begin{aligned} H &= \{(g, E) \in \text{GL}_0(V, V_0) \times \text{GL}_k(t^{-1}k[t^{-1}]) : \\ &\quad g_{--} - E : t^{-1}k[t^{-1}] \rightarrow t^{-1}k[t^{-1}] \text{ имеет конечный ранг}\}, \end{aligned}$$

где $g_{--} \stackrel{\text{def}}{=} (g)_{i,j \leq -1}$. Пусть $N \subset H$ – нормальная подгруппа, определяемая как $N = \{(1, E) \in H : \det E = 1\}$. Тогда $\widehat{\text{GL}}_0(V, V_0) = H/N$ и проекция на первый сомножитель (см. определение H) задает отображение на $\text{GL}_0(V, V_0)$. Теперь опишем действие $\widehat{\text{GL}}_0(V, V_0)$ на $\text{Det}|_{\text{Gr}^\mu(V)}$.

Пусть $\mu = 0$. Для $(g, E) \in H$ и $[\lambda, w] \in \text{Det}|_{\text{Gr}^0(V)}$

$$(g, E)[\lambda, w] \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda, gwE^{-1}]. \quad (8)$$

Последнее выражение определяет корректное действие $\widehat{\text{GL}}_0(V, V_0)$ на $\text{Det}|_{\text{Gr}^0(V)}$.

Пусть $\mu \neq 0$. Определим действие $a \in \widehat{\text{GL}}_0(V, V_0)$ на $\text{Det}|_{\text{Gr}^\mu(V)}$ как действие

$$\sigma^{-\mu} \cdot \tilde{\sigma}^\mu(a) \cdot \sigma^\mu, \quad (9)$$

где $\sigma: \text{Det}|_{\text{Gr}^\mu(V)} \rightarrow \text{Det}|_{\text{Gr}^{\mu-1}(V)}$ определяется по формуле $\sigma \cdot [\lambda, w] = [\lambda, t^{-1} \circ w]$; $t^{-1} \circ w: H_{0(\mu-1)} \rightarrow t^{-1}W$, $t^{-1} \circ w(x) = t^{-1}w(tx)$ допустимый, $x \in H_{0(\mu-1)}$; автоморфизм $\tilde{\sigma}: \widehat{\text{GL}}_0(V, V_0) \rightarrow \widehat{\text{GL}}_0(V, V_0)$ индуцирован следующим эндоморфизмом H :

$$(g, E) \mapsto (t^{-1}gt, E_\sigma),$$

где

$$E_\sigma|_{t^{-2}k[t^{-1}]} = t^{-1}Et, \quad E_\sigma(t^{-1}) = 1.$$

Рассмотрим теперь группу $\Gamma = \text{GL}(2, k[[z]])$, являющуюся подгруппой группы $\text{GL}_0(V, V_0)$.

ЛЕММА 3. *Центральное расширение $\widehat{\text{GL}}_0(V, V_0)$ расщепляется над Γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим групповой гомоморфизм

$$h: \Gamma \longrightarrow H, \quad h(\gamma) = (\gamma, \gamma_{--}), \quad \gamma \in \Gamma. \quad (10)$$

(Заметим, что действие группы Γ сохраняет V_0 , и поэтому $\gamma_{--} \in \text{GL}_k(k[t^{-1}])$.) Тогда гомоморфизм групп

$$\Gamma \xrightarrow{h} H \rightarrow H/N = \widehat{\text{GL}}_0(V, V_0)$$

расщепляет над Γ центральное расширение.

В $V = k((z)) \oplus k((z))$ рассмотрим два подпространства (прямые):

$$l_1 = k((z)) \oplus 0, \quad l_2 = 0 \oplus k((z)),$$

которые соответствуют $k((t^2))$ и $tk((t^2))$ в $k((t))$. Для любого $S \in S_\mu$ пусть

$$n_i(S) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k H_S \cap V_0 \cap l_i - \dim_k l_i / (H_S \cap l_i + l_i \cap V_0), \quad i = 1, 2.$$

Отметим, что

$$n_1(S) + n_2(S) = \mu. \quad (11)$$

Пусть $\begin{pmatrix} \alpha^{a_1} & 0 \\ 0 & \nu^{a_2} \end{pmatrix} \in \Gamma$, $\alpha, \nu \in k^*$, $a_i \in \mathbb{Z}$. По лемме 3 мы можем рассмотреть действие $\begin{pmatrix} \alpha^{a_1} & 0 \\ 0 & \nu^{a_2} \end{pmatrix}$ на детерминантном расслоении Det .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $S \in S_\mu$, π_S – соответствующее глобальное сечение $\text{Det}^*|_{\text{Gr}^\mu(V)}$. Через $\begin{pmatrix} \alpha^{a_1} & 0 \\ 0 & \nu^{a_2} \end{pmatrix}^*$ обозначим действие $\begin{pmatrix} \alpha^{a_1} & 0 \\ 0 & \nu^{a_2} \end{pmatrix}$ на $H^0(\text{Gr}^\mu(V), \text{Det}^*)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha^{a_1} & 0 \\ 0 & \nu^{a_2} \end{pmatrix}^* (\pi_S) = \alpha^{a_1 \cdot n_1(s)} \nu^{a_2 \cdot n_2(s)} \pi_S.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из явного описания действий $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$ на детерминантном расслоении. Это описание получается при помощи прямых вычислений из формул (8)–(10).

Для любого $S \in S_\mu$ обозначим $n(S) \stackrel{\text{def}}{=} n_1(S) - n_2(S)$.

ЛЕММА 4. Пусть $W \in \text{Gr}^\mu(V)$, $S(W) = \{S \in S_\mu : \pi_S(W) \neq 0\}$. Тогда имеем

- 1) если $\min_{S \in S(W)} n(S) > -\infty$, то $l_1 \cap W \neq 0$;
- 2) если $\text{rank } A_W = 1$, $l_1 \cap W \neq 0$, то $\min_{S \in S(W)} n(S) > -\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что

$$\pi_S(W) \neq 0, \quad \text{если и только если} \quad W \oplus A_S = V. \quad (12)$$

Рассмотрим второе утверждение леммы. Если $l_1 \cap W \neq 0$, то из $\dim_k W \cap V_0 < \infty$ мы имеем $\dim_k W \cap l_1 \cap V_0 < \infty$. Из $\text{rank } A_W = 1$ получаем

$$\dim_k k((z))/(A_W + k[[z]]) < \infty,$$

поэтому

$$\dim_k l_1/(W \cap l_1 + V_0 \cap l_1) < \infty.$$

Теперь пусть некоторое $S' \in S(W)$, тогда $W \oplus A_{S'} = V$. Отсюда $W \cap A_{S'} = 0$. Поэтому

$$(W \cap l_1) \cap (A_{S'} \cap l_1) = 0. \quad (13)$$

Из (13) мы получаем

$$n_1(S') \geq \dim_k W \cap l_1 \cap V_0 - \dim_k l_1/(W \cap l_1 + V_0 \cap l_1).$$

Из (11) имеем $n(S') = 2n_1(S') - \mu$. Поэтому

$$n(S') \geq 2(\dim_k W \cap l_1 \cap V_0 - \dim_k l_1/(W \cap l_1 + V_0 \cap l_1)) - \mu. \quad (14)$$

Второе утверждение леммы доказано.

Рассмотрим теперь первое утверждение леммы. Из $\min_{S \in S(W)} n(S) > -\infty$ мы видим, что $\min_{S \in S(W)} n_1(S) > -\infty$. Пусть

$$\tau = \min\{0, \min_{S \in S(W)} n_1(S)\} - 1.$$

Для любого $m > 0$ определим

$$B_m = z^\tau k[[z]] \oplus z^{m+\mu} k[[z]] \subset V.$$

Зафиксируем некоторое целое число $m_0 > \max\{0, -\mu, -\tau\}$ так, что

$$W \cap (z^{m_0+\mu} V_0) = 0, \quad V/(W + z^{-m_0} V_0) = 0.$$

Мы покажем, что для каждого целого $m > m_0$

$$W \cap B_m \neq 0. \quad (15)$$

Для этой цели рассмотрим образы $\widetilde{W}$ подпространства $W \cap (z^{-m} V_0)$ и $\widetilde{l}_1$ подпространства $l_1 \cap (z^{-m} V_0)$ в конечномерном грасмановом многообразии

$$\mathrm{Gr}(2m + \mu, z^{-m} V_0 / z^{m+\mu} V_0).$$

Теперь (15) эквивалентно следующему:

$$(\widetilde{W} \cap \widetilde{l}_1) \cap ((z^\tau V_0 / z^{m+\mu} V_0) \cap \widetilde{l}_1) \neq 0.$$

Последняя формула следует из сравнения размерностей конечномерных векторных пространств:

$$\begin{aligned} \dim_k \widetilde{l}_1 &= 2m + \mu, \\ \dim_k (z^\tau V_0 / z^{m+\mu} V_0) \cap \widetilde{l}_1 &= m + \mu - \tau, \\ \dim_k \widetilde{W} \cap \widetilde{l}_1 &> m + \tau, \end{aligned} \quad (16)$$

где (16) верна по следующей причине.

Если

$$\dim_k \widetilde{W} \cap \widetilde{l}_1 \leq m + \tau, \quad (17)$$

то мы найдем k -векторное подпространство $K \subset \widetilde{l}_1$ такое, что K есть линейная оболочка элементов $\{z^{i_k}\}$ для некоторых целых i_k и $\widetilde{l}_1 = (\widetilde{W} \cap \widetilde{l}_1) \oplus K$. Тогда мы можем найти $\widetilde{L} \in \mathrm{Gr}(2m + \mu, z^{-m} V_0 / z^{m+\mu} V_0)$ такое, что $\widetilde{L}$ является линейной оболочкой элементов $\{z^{i_l}\}$ для некоторых целых чисел i_l , $\widetilde{L} \cap \widetilde{l}_1 = K$ и

$$z^{-m} V_0 / z^{m+\mu} V_0 = \widetilde{W} \oplus \widetilde{L}.$$

Пусть L – прообраз пространства $\widetilde{L}$ в $z^{-m} V_0$. Тогда существует плюккорова координата $S' \in S_\mu$ такая, что $L = A_{S'}$. Тогда по конструкции

$$V = W \oplus A_{S'} \quad (18)$$

и из (17) $n_1(S') \leq \tau < \min_{S \in S(W)} n_1(S)$. Последняя формула противоречит (18). Поэтому формула (16) доказана. Отсюда получаем, что формула (15) верна.

Теперь из условия фредгольмовости на W мы имеем $\dim_k W \cap (z^\tau V_0) < \infty$. Из (15) имеем непустую фильтрацию $W \cap B_m$ для всех достаточно больших целых m . Последнее эквивалентно следующему:

$$(W \cap (z^\tau V_0)) \cap l_1 \neq 0.$$

В самом деле, предположим противное. Тогда выберем конечный k -базис $e_1, \dots, e_n$ в $W \cap z^\tau V_0$ такой, что $\nu_2(e_i) \neq \nu_2(e_j)$ для всех пар i, j . (Здесь $\nu_2(e_k) = p$, если $e_k \in B_p$, но $e_k \notin B_{p+1}$.) Тогда для всех $m > \max_i \nu_2(e_i)$ мы имеем $W \cap B_m = 0$. Это противоречие завершает доказательство леммы 4.

ЛЕММА 5. Пусть $W \in \text{Gr}^\mu(V)$, $\text{rank } A_W = 1$ и выполняется 1) или 2) предыдущей леммы, тогда

$$\min_{S \in S(W)} n(S) = 2(\dim_k W \cap l_1 \cap V_0 - \dim_k l_1 / (W \cap l_1 + V_0 \cap l_1)) - \mu. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства (14) мы получаем, что левая сторона (19) больше или равна правой стороне (19).

Зафиксируем теперь некоторое целое $m > 0$ так, что

$$W \cap (z^{m+\mu} V_0) = 0, \quad V / (W + z^{-m} V_0) = 0.$$

Рассмотрим образы $\widetilde{W}$ пространства $W \cap (z^{-m} V_0)$ и $\widetilde{l}_1$ пространства $l_1 \cap (z^{-m} V_0)$ в $z^{-m} V_0 / z^{m+\mu} V_0$.

Тогда найдем k -векторное подпространство $K \subset \widetilde{l}_1$ такое, что K есть линейная оболочка элементов $\{z^{i_k}\}$ для некоторых целых i_k и

$$\widetilde{l}_1 = (\widetilde{W} \cap \widetilde{l}_1) \oplus K. \quad (20)$$

Тогда мы можем найти $\widetilde{L} \subset z^{-m} V_0 / z^{m+\mu} V_0$ такое, что $\widetilde{L}$ является линейной оболочкой элементов $\{z^{i_l}\}$ для некоторых целых i_l , $\widetilde{L} \cap \widetilde{l}_1 = K$ и

$$z^{-m} V_0 / z^{m+\mu} V_0 = \widetilde{W} \oplus \widetilde{L}. \quad (21)$$

Через L обозначим прообраз пространства $\widetilde{L}$ в $z^{-m} V_0$. Тогда существует некоторое $S' \in S_\mu$ такое, что $L = A_{S'}$ и $V = W \oplus A_{S'}$. Из (20) и (21) мы получаем $n(S') = n(W)$. Лемма 5 доказана.

§ 3. Стабильные и нестабильные точки

Для пучков без кручения на кривой C можно определить понятие “стабильности” и “полустабильности” (см., например, [6].) Напомним эти определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пучок без кручения $\mathcal{F}$ ранга 2 на кривой C называется *полустабильным пучком*, если для любого подпучка $\mathcal{G} \in R(\mathcal{F})$

$$2\chi(\mathcal{G}) \leq \chi(\mathcal{F}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пучок без кручения $\mathcal{F}$ ранга 2 на кривой C называется *стабильным пучком*, если для любого подпучка $\mathcal{G} \in R(\mathcal{F})$

$$2\chi(\mathcal{G}) < \chi(\mathcal{F}).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $W = K(C, p, \mathcal{F}, t_p, e_p)$. Тогда пучок $\mathcal{F}$ — не (полу)стабильный пучок, если и только если существует некоторый элемент $g \in \text{SL}(2, k[[z]])$ такой, что для любого $S \in S(gW)$ $n(S) \geq 0$ (> 0).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из предложения 1, лемм 2, 4, 5 и следующих очевидных утверждений:

- 1) группа $\mathrm{SL}(2, k[[z]])$ действует транзитивно на множестве всех 1-мерных $k((z))$ -векторных подпространств в V ;
- 2) группа $\mathrm{SL}(2, k[[z]])$ переводит подпространство V_0 в себя.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из леммы 5 и формулы (5) мы можем также получить численные данные неустойчивости пучка.

ПРИМЕР 1 (см. также [1; проп. 3.8]). Пусть $\mu = 2\nu$ для некоторого целого ν и $W = K(C, p, \mathcal{F}, t_p, e_p)$ принадлежит большой клетке в Gr_V^μ , т.е.

$$\pi_{0(\mu)}(W) \neq 0, \quad (22)$$

тогда пучок $\mathcal{F}$ — полустабильный пучок. В самом деле, если условие (22) выполняется, то $W \oplus z^\nu V_0 = V$ и для любого $g \in \mathrm{SL}(2, k[[z]])$, $g(z^\nu V_0) = z^\nu V_0$, $gW \oplus z^\nu V_0 = V$. Поэтому $\pi_{0(\mu)}(gW) \neq 0$. Но $n(0(\mu)) = 0$ и мы применяем теорему 1.

Мы можем обобщить пример 1 следующим образом.

ПРИМЕР 2. С каждым $W \in \mathrm{Gr}^\mu(V)$ можно связать:

- 1) функцию $T_W: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ такую, что $T_W(i) = 2$ для $i \ll 0$, $T_W(i) = 0$ для $i \gg 0$ и для остальных i $T_g W(i) = T_W(i)$ для любых $g \in \mathrm{SL}(2, k[[z]])$, где

$$T_W(i) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dim_k(W \cap z^i V_0) / (W \cap z^{i+1} V_0);$$

- 2) точку

$$x_W = (x_{W, i_1}, \dots, x_{W, i_{l_W}}) \in (\mathbb{P}_k^1)^{l_W}, \quad (23)$$

где $i_1, \dots, i_{l_W}$ — все целые числа такие, что $T_W(i_j) = 1$ и точка $x_{W, i_j} \in \mathbb{P}_k^1$ определяется как 1-мерное k -векторное пространство $(W \cap z^{i_j} V_0) / (W \cap z^{i_j+1} V_0)$ в 2-мерном k -векторном пространстве $z^{i_j} V_0 / z^{i_j+1} V_0$.

Заметим, что все $\mathbb{P}_k^1$ из (23) имеют канонические однородные координаты, индуцированные $z^{i_j} \oplus 0 \in V$ и $0 \oplus z^{i_j} \in V$ для соответствующих j . При помощи этих координат мы можем отождествить все $\mathbb{P}_k^1$ из (23) и рассмотреть x_W как набор l_W упорядоченных точек на прямой.

Существует естественное диагональное действие группы $\mathrm{SL}(2, k)$ в $(\mathbb{P}_k^1)^{l_W}$. Рассмотрим вложение Сегре $(\mathbb{P}_k^1)^{l_W} \hookrightarrow \mathbb{P}_k^{2l_W-1}$. Существует единственное линейное действие $\mathrm{SL}(2, k)$ в $\mathbb{P}_k^{2l_W-1}$, которое превращает вложение Сегре в $\mathrm{SL}(2, k)$ -морфизм (l_W -кратное тензорное представление $\mathrm{SL}(2, k)$). Кроме того, группа $\mathrm{SL}(2, k)$ — редуктивная группа. Поэтому геометрическая теория инвариантов определяет (полу)стабильные точки на $(\mathbb{P}_k^1)^{l_W}$ по отношению к $\mathrm{SL}(2, k)$ -действию и вложению Сегре. Из [6] мы имеем следующее явное описание: точка $x \in (\mathbb{P}_k^1)^{l_W}$ — (полу)стабильная точка, если и только если никакая точка $\mathbb{P}_k^1$ не встречается как компонента точки x больше или равно (больше) $l_W/2$ раз.

Сформулируем теперь следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $W = K(C, p, \mathcal{F}, t_p, e_p)$. Тогда

- 1) если $1 \notin \text{Im } T_W$, то пучок $\mathcal{F}$ – полустабильный пучок;
- 2) если точка $x_W \in (\mathbb{P}_k^1)^{l_W}$ – (полу)стабильная точка по отношению к $\text{SL}(2, k)$ -действию и вложению Сегре, то пучок $\mathcal{F}$ – (полу)стабильный пучок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если $1 \notin \text{Im } T_W$, то определим k -векторное подпространство $M \subset V$ как линейную оболочку элементов $\{\{z^i \oplus 0\}, \{0 \oplus z^i\} : T_W(i) = 2\}$. Мы можем найти $S' \in S_\mu$ такое, что $M = H_{S'}$. Из конструкции $W \oplus A_{S'} = V$. Отсюда $\pi_{S'}(W) \neq 0$. Для любого $g \in \text{SL}(2, k[[z]])$ имеем $T_g W = T_W$. Поэтому $\pi_{S'}(gW) \neq 0$. Из теоремы 1 и $n(S') = 0$ мы видим, что пучок $\mathcal{F}$ – полустабильный пучок.

Рассмотрим теперь случай 2). Пусть $x_W = (x_{W, i_1}, \dots, x_{W, i_{l_W}}) \in (\mathbb{P}_k^1)^{l_W}$. Для каждого $k \in \{i_1, \dots, i_{l_W}\}$ мы можем выбрать элемент $z_k \in V$, совпадающий с $\{z^k \oplus 0\}$ или $\{0 \oplus z^k\}$ так, что образ k -прямой $k \cdot z_k$ в $z^k V_0 / z^{k+1} V_0$ не совпадает с $x_{W, k}$. Определим k -векторное подпространство $M \subset V$ как линейную оболочку элементов $\{z_k : k \in \{i_1, \dots, i_{l_W}\}\}$ и $\{\{z^i \oplus 0\}, \{0 \oplus z^i\} : T_W(i) = 2\}$. Тогда существует $S' \in S_\mu$ такое, что $M = H_{S'}$ и $W \oplus A_{S'} = V$, т.е. $\pi_{S'}(W) \neq 0$. Более того, если точка $x_W \in (\mathbb{P}_k^1)^{l_W}$ – (полу)стабильная точка, то из явного описания таких точек мы можем выбрать $z_k \in V$ так, что

$$n(S') < 0 \quad (\leq 0). \quad (24)$$

Действие группы $\text{SL}(2, k)$ на $(\mathbb{P}_k^1)^{l_W}$ индуцировано действием группы $\text{SL}(2, k[[z]])$ на V . Поэтому точка $x_{gW} \in (\mathbb{P}_k^1)^{l_{gW}}$ – (полу)стабильная точка для любого $g \in \text{SL}(2, k[[z]])$. Теперь из этого факта, формулы (24) и теоремы 1 мы получаем (полу)стабильность пучка $\mathcal{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предположим, что точка $x \in (\mathbb{P}_k^1)^l$ не является полустабильной точкой по отношению к $\text{SL}(2, k)$ -действию и вложению Сегре. Тогда легко построить квинтеты $(C, p, \mathcal{F}, t_p, e_p)$ со стабильными, полустабильными и нестабильными пучками $\mathcal{F}$ так, что для $W = K(C, p, \mathcal{F}, t_p, e_p)$ мы имеем $l_W = l$ и $x_W = x$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно определить клеточное разбиение $\text{Gr}^\mu(V)$, индексированное множеством S_μ (см. [5]): $W \in \text{Gr}^\mu(V)$ лежит в клетке $S = \{s_{-\mu+1}, s_{-\mu+2}, \dots\}$ при выполнении следующих условий:

- 1) если $\pi_S(W) \neq 0$;
- 2) для любого $S' = \{s'_{-\mu+1}, s'_{-\mu+2}, \dots\}$, если $\pi_{S'}(W) \neq 0$, то $\{s'_{-\mu+1} \geq s_{-\mu+1}, s'_{-\mu+2} \geq s_{-\mu+2}, \dots\}$.

(Из этих условий такое $S \in S_\mu$ определяется единственным образом для каждого $W \in \text{Gr}^\mu(V)$.) Нетрудно видеть, что случай 1) предложения 3 соответствует следующему утверждению: если $W = K(C, p, \mathcal{F}, t_p, e_p)$ принадлежит клетке $S \in S_\mu$ такой, что $H_S \cap l_1 = H_S \cap l_2$, то пучок $\mathcal{F}$ полустабильен.

Заметим теперь, что действие группы $\text{SL}(2, k[[z]])$ на $\text{Gr}^\mu(V)$ оставляет $W = K(C, p, \mathcal{F}, t_p, e_p) \in \text{Gr}^\mu(V)$ в образе отображения Кричевера и не меняет кривой C , точки p , локального параметра t_p и пучка $\mathcal{F}$. И так, это действие есть действие только на “базисах e_p ”. Поэтому, если бы мы хотели получить что-нибудь как

“пространство модулей” пучков на C , нам было бы нужно как-то отфакторизовать по действию группы $\mathrm{SL}(2, k[[z]])$ на $\mathrm{Gr}^\mu(V)$.

С другой стороны, по лемме 3 группа $\mathrm{SL}(2, k[[z]])$ действует на $\mathrm{Det}|_{\mathrm{Gr}^\mu(V)}$. Более того, нетрудно понять, что это действие задает нам бесконечномерное представление группы $\mathrm{SL}(2, k[[z]])$ в k -векторном пространстве $\Pi(S_\mu)$. (Более точно, это представление есть ограничение представления группы $\widehat{\mathrm{GL}}_0(V, V_0)$ в пространстве $\Pi(S_\mu)$, которое может быть получено тем же способом и является бесконечномерным wedge-представлением (подробнее см. [7] и [8]).) Отсюда мы получаем линейное действие группы $\mathrm{SL}(2, k[[z]])$ на $\mathbb{P}(\Pi(S_\mu)^*)$. Более того, нетрудно понять, что на $\mathrm{SL}(2, k[[z]])$ можно ввести структуру афинной групповой схемы, представляющей функтор $S \mapsto \mathrm{SL}(2, k[S][[z]])$ (S – произвольная k -алгебра). Тогда описанное выше действие на $\mathbb{P}(\Pi(S_\mu)^*) = \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(\Pi(S_\mu)))$ является корректно определенным действием в категории схем. Аналогично, действие $\mathrm{SL}(2, k[[z]])$ на $\mathrm{Gr}^\mu(V)$ является корректно определенным действием в категории схем. И по конструкции эти действия совпадают при плюккеромом вложении. Эти аргументы приводят нас к следующим определениям.

Для каждого $W \in \mathrm{Gr}^\mu(V)$ через $\widehat{W}$ обозначим некоторый ненулевой элемент из $\Pi(S_\mu)^*$ такой, что образ $\widehat{W}$ в $\mathbb{P}(\Pi(S_\mu)^*)$ совпадает с образом W при плюккеромом вложении.

Пусть

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, k[[z]]), \lambda \in k^* \right\}$$

– 1-параметрическая подгруппа: $k^* \rightarrow \mathrm{SL}(2, k[[z]])$. Для любого $g \in \mathrm{SL}(2, k[[z]])$ определим группу ${}^gT = gTg^{-1}$. Пусть ${}^gT(\lambda) = g \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} g^{-1}$ – элемент из gT .

Далее для удобства отождествим очевидным способом k^* с подмножеством в $\mathbb{P}_k^1$. В частности, для любого $\lambda \in k$ мы отождествляем λ с точкой $(1, \lambda)$ в $\mathbb{P}_k^1$ и пишем ∞ для внешней точки $(0, 1)$. Отметим, что морфизм $k^* \rightarrow \Pi(S_\mu)^*: \lambda \mapsto {}^gT(\lambda)\widehat{W}$ может как расширяться, так и не расширяться на точки $0, \infty$, но если расширение существует (для одной или обеих точек), то оно единственно. (Это следует из вальюативного критерия отделимости.) Таким образом, мы можем определить очевидным способом выражения $\lim_{\lambda \rightarrow 0} {}^gT(\lambda)\widehat{W}$ и $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} {}^gT(\lambda)\widehat{W}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Замкнутая точка $W \in \mathrm{Gr}^\mu(V)$ – *полустабильная точка по отношению к 1-параметрической подгруппе gT* , если для $x = 0$ и $x = \infty$ $\lim_{\lambda \rightarrow x} {}^gT(\lambda)\widehat{W}$ не существует или $\lim_{\lambda \rightarrow x} {}^gT(\lambda)\widehat{W} \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Замкнутая точка $W \in \mathrm{Gr}^\mu(V)$ – *стабильная точка по отношению к 1-параметрической подгруппе gT* , если для $x = 0$ и $x = \infty$ $\lim_{\lambda \rightarrow x} {}^gT(\lambda)\widehat{W}$ не существует.

Используя теперь эти определения и предложение 2, мы можем следующим способом переформулировать теорему 1. (Сравните с конечномерной ситуацией в [6].)

ТЕОРЕМА 2. Рассмотрим любой квинтет $(C, p, \mathcal{F}, t_p, e_p)$, $\chi(\mathcal{F}) = \mu$. Тогда пучок $\mathcal{F}$ – (полу)стабильный пучок на кривой C , если и только если $K(C, p, \mathcal{F}, t_p, e_p) \in \mathrm{Gr}^\mu(V)$ – (полу)стабильная точка по отношению к 1-параметрическим подгруппам gT для всех $g \in \mathrm{SL}(2, k[[z]])$.

Список литературы

1. *Mulase M.* Category of vector bundles on algebraic curves and infinite dimensional grassmannians // *Internat. J. Math.* 1990. V. 1. №3. P. 293–342.
2. *Previato E., Wilson G.* Vector bundles over curves and solutions of the KP equations // *Proc. Sympos. Pure Math.* 1989. V. 49. P. 553–569.
3. *Осипов Д. В.* Отображение Кричевера и (полу)стабильные пучки на кривых // *УМН.* 1999. Т. 54. №3. С. 177–178.
4. *Álvarez Vázquez A., Muñoz Porras J. M., Plaza Martín F. J.* The algebraic formalism of soliton equations over arbitrary base fields // *Workshop on abelian varieties and theta functions.* Morelia, México, July 8–27, 1996. *Proceedings* / ed. R. Rodriguez et al. México: Soc. Mat. Mexicana, 1998. P. 3–40. (Aportaciones Mat. Invest. V. 13.)
5. *Прессли Э., Сузгал Г.* Группы петель. М.: Мир, 1990.
6. *Newstead P. E.* Lectures on introduction to moduli problems and orbit spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1978. (Tata Inst. Fund. Res. Lect. Math. and Phys. Math. V. 51.)
7. *Kac V. G., Peterson D. H.* Lectures on the infinite wedge-representation and the MKP hierarchy // *Systèmes dynamiques non linéaires: intégrabilité et comportement qualitatif, Sémin. Math. Supér., Sémin. Sci. OTAN (NATO Adv. Study Inst.).* V. 102, 1986. P. 141–183.
8. *Kac V. G., Raina A. K.* Bombay lectures on highest weight representations. Singapore: World Sci., 1987.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
 Университет Гумбольдта, г. Берлин
E-mail: d.osipov@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
 10.04.2003