Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Белоносов, Спектральные свойства обобщенных функций и асимптотические методы теории возмущений, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 3, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7812>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 16:32:36

УДК 517.928

В. С. Белоносов

Спектральные свойства обобщенных функций и асимптотические методы теории возмущений

Для дифференциальных уравнений вида $x' = \varepsilon f(t, x; \varepsilon)$ в банаховом пространстве предлагается модификация классического метода Крылова–Боголюбова, которая позволяет избежать затруднений, порожденных “проблемой малых знаменателей” при построении высших приближений, и избавиться от многих традиционных ограничений на поведение функции f . Предлагаемый подход базируется на нескольких утверждениях о преобразованиях Фурье обобщенных функций.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: метод усреднения, спектр, обобщенные функции, преобразование Фурье.

§ 1. Введение

1.1. Фундаментальную роль в теории возмущений играют методы асимптотических разложений по степеням малого параметра, объединенные идеей о представлении нестационарного процесса как композиции плавных эволюционных изменений и малых быстрых осцилляций. К ним относятся метод нормальных форм, метод усреднения и некоторые другие. Исторический обзор и подробная библиография имеются в монографиях [1]–[6]. В настоящей работе рассматривается проблема обоснования асимптотических разложений для дифференциальных уравнений в стандартной в смысле Н. Н. Боголюбова форме

$$D_t x = \varepsilon f(t, x; \varepsilon), \quad (1.1)$$

где $x(t)$ – искомая функция вещественного переменного $t \in \mathbb{R}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, D_t – дифференцирование по t , ε – малый вещественный параметр, а f – ограниченное отображение из $\mathbb{R} \times \mathfrak{B} \times \mathbb{R}$ в $\mathfrak{B}$, непрерывное по (t, x) .

1.2. К изучению уравнений вида (1.1) сводятся не только вопросы теории возмущений для обыкновенных дифференциальных уравнений, но и задачи динамики распределенных систем с бесконечным числом степеней свободы, которые в подходящем банаховом пространстве $\mathfrak{B}_0$ описываются абстрактными уравнениями m -го порядка

$$(D_t - A_m)(D_t - A_{m-1}) \cdots (D_t - A_1)u = \varepsilon g(t, u, D_t u, \dots, D_t^{m-1} u) \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09–01–00221), Президиума РАН (Программа фундаментальных исследований № 2, проект № 121) и АБЦП Рособразования (грант № 2.1.1.4918).

с замкнутыми линейными и, вообще говоря, неограниченными операторами A_j и непрерывными возмущениями $g: \mathbb{R} \times \mathfrak{B}_0^m \mapsto \mathfrak{B}_0$. Предполагается, что операторы A_j попарно коммутативны, а их области определения одинаковы и совпадают с плотным в $\mathfrak{B}_0$ линейным многообразием $\mathfrak{B}_1$. При этих условиях всякое произведение $A_{j_1} A_{j_2} \cdots A_{j_k}$ определено на некотором множестве $\mathfrak{B}_k$, зависящем только от числа k , но не от конкретных индексов $j_1, \dots, j_k$. Решением уравнения считается m раз непрерывно дифференцируемая функция $u(t)$, удовлетворяющая соотношению (1.2) и такая, что значения производных $D_t^k u(t)$ принадлежат $\mathfrak{B}_{m-k}$, причем любая композиция $A_{j_1} A_{j_2} \cdots A_{j_l} D_t^k u(t)$ непрерывна по t при $k + l \leq m$. Нетрудно показать (см. [7]), что для этих решений операции D_t^k и $A_{j_1} A_{j_2} \cdots A_{j_l}$ перестановочны.

Уравнения (1.2) охватывают многие известные задачи математической физики. Пусть, например, G – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, а Δ – оператор Лапласа в пространстве $L_2(G)$ с областью определения $W_2^2(G) \cap W_2^1(G)$, отвечающей однородным краевым условиям Дирихле. Если в (1.2) положить $m = 1$, $A_1 = i\Delta$, то получится уравнение Шрёдингера. Если же взять $m = 2$, $A_{1,2} = \pm i\sqrt{-\Delta}$, то (1.2) превратится в волновое уравнение. Список подобных примеров можно продолжить.

Предположим, что каждый из операторов A_j порождает сильно непрерывную группу ограниченных операторов $e^{A_j t}$, $t \in \mathbb{R}$, дифференцируемую по t в сильном смысле на множестве $\mathfrak{B}_1$. В случае $m > 1$ будем также считать, что все A_j ограниченно обратимы. Тогда уравнение (1.2) можно привести к стандартной форме (1.1) с помощью хрестоматийного метода вариации постоянных. Полагая

$$D_t^{k-1} u(t) = \sum_{j=1}^m A_j^{k-m} e^{A_j t} x_j(t), \quad 1 \leq k \leq m,$$

где $x_j(t)$ – новые неизвестные непрерывно дифференцируемые функции со значениями в $\mathfrak{B}_1$, приходим к системе

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m A_j^{k-m} e^{A_j t} D_t x_j(t) &= 0, \quad k = 1, \dots, m-1, \\ \sum_{j=1}^m e^{A_j t} D_t x_j(t) &= \varepsilon g \left(t, \sum_{j=1}^m A_j^{1-m} e^{A_j t} x_j(t), \dots, \sum_{j=1}^m e^{A_j t} x_j(t) \right). \end{aligned}$$

Матрица этой системы относительно неизвестных $y_j = e^{A_j t} D_t x_j$ является матрицей Вандермонда, составленной из операторных элементов A_j^{k-m} , $k, j = 1, \dots, m$. Известным способом такая система приводится к треугольному виду

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^m A_j^{1-m} \prod_{i < j} (A_j - A_i) y_j &= 0, \quad k = 1, \dots, m-1, \\ A_m^{1-m} \prod_{i < m} (A_m - A_i) y_m &= \varepsilon g. \end{aligned}$$

Отсюда при дополнительном условии обратимости всех разностей $A_j - A_i$, $j \neq i$, находим

$$y_j = \varepsilon f_j(t, x_1, \dots, x_m), \quad 1 \leq j \leq m,$$

где непрерывные функции f_j соответствующим образом выражаются через g . Возвращаясь к переменным x_j , получим систему первого порядка

$$D_t x_j(t) = \varepsilon e^{-A_j t} f_j(t, x_1, \dots, x_m), \quad 1 \leq j \leq m,$$

которую можно трактовать как уравнение (1.1) относительно вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

1.3. Вернемся к разложению решений уравнения (1.1) на плавный медленный дрейф и малые быстрые осцилляции. Эта идея, выдвинутая первоначально Л. Эйлером, Ж. Л. Лагранжем, П. С. Лапласом и развитая затем А. Линдштедтом, А. Пуанкаре, Д. Биркгофом, Б. Ван-дер-Полем и многими другими математиками и механиками, привела к созданию метода усреднения, который в общем виде был сформулирован Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским (см. [1]–[3]).

Напомним, что метод усреднения, позволяющий с любой наперед заданной точностью отделить быструю компоненту решения от медленной, состоит в построении такой замены переменных

$$x = y + \varepsilon \varphi_1(t, y; \varepsilon) + \varepsilon^2 \varphi_2(t, y; \varepsilon) + \dots + \varepsilon^n \varphi_n(t, y; \varepsilon), \quad (1.3)$$

чтобы функции $\varphi_k(t, y; \varepsilon)$ были ограничены при $t \rightarrow \infty$, а уравнение (1.1) приобрело вид

$$D_t y = \varepsilon [\psi_0(y; \varepsilon) + \varepsilon \psi_1(y; \varepsilon) + \dots + \varepsilon^{n-1} \psi_{n-1}(y; \varepsilon) + \varepsilon^n r_n(t, y; \varepsilon)].$$

Укороченное уравнение $D_t \tilde{y} = \varepsilon [\psi_0(\tilde{y}; \varepsilon) + \dots + \varepsilon^{n-1} \psi_{n-1}(\tilde{y}; \varepsilon)]$ приближенно описывает медленный дрейф искомого решения, а малые быстрые осцилляции задаются отображением $\tilde{x} = \tilde{y} + \varepsilon \varphi_1(t, \tilde{y}; \varepsilon) + \dots + \varepsilon^n \varphi_n(t, \tilde{y}; \varepsilon)$. Функция $\tilde{x}(t)$ называется асимптотическим приближением порядка n к точному решению $x(t)$. Если $\tilde{x}(0) = x(0)$, то при естественных дополнительных предположениях (см. [2], [3], [8], [9]) для всякого $T > 0$ на промежутке $0 \leq t \leq T/\varepsilon$ будет выполнена оценка $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq C(T)\varepsilon^n$, где $\|\cdot\|$ – норма в $\mathfrak{B}$.

Подходящая замена переменных строится следующим образом. После подстановки формального разложения (1.3) в уравнение (1.1) и применения формулы Тейлора получается

$$D_t y = \varepsilon \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k [f_k(t, y; \varepsilon) - D_t \varphi_{k+1}(t, y; \varepsilon)] + \varepsilon^n r_n(t, y; \varepsilon) \right\}.$$

Здесь f_0 определяется только правой частью исходного уравнения, а f_k , $k > 0$, – также функциями φ_j , $D_t \varphi_j$, $D_y \varphi_j$ и производными $D_y^j f(t, y; \varepsilon)$, где $j \leq k$. Далее все ψ_k и φ_k вычисляются по индукции: если $\psi_0, \dots, \psi_{k-1}$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ уже найдены, то в качестве ψ_k выбирается предельное среднее

$$\psi_k(y; \varepsilon) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f_k(\tau, y; \varepsilon) d\tau, \quad (1.4)$$

а φ_{k+1} определяется из уравнения $D_t \varphi_{k+1} = f_k(t, y; \varepsilon) - \psi_k(y; \varepsilon)$.

Это построение обусловлено весьма жесткими ограничениями. Прежде всего, для каждого $k < n$ необходимо существование предела (1.4). Такое свойство характерно для почти периодических функций, поэтому оригинальная трактовка метода усреднения предполагает почти периодичность $f(t, y; \varepsilon)$ по переменной t вместе с производными $D_y^k f$ достаточно высоких порядков, что гарантирует существование первого приближения (см. [1], [2]). Если φ_1 и, следовательно, f_1 окажутся почти периодическими, то существует второе приближение, и т.д. Если на каждом очередном шаге получается почти периодическая функция φ_k , то таковой же окажется и f_k . Тогда индуктивный процесс построения приближений можно продолжать.

Однако здесь возникает другая трудность, известная как “проблема малых знаменателей”, которая может прервать это построение на любом шаге. В самом деле, пусть при некоторых k , y и ε функция $f_k(t, y; \varepsilon)$ почти периодична по t с частотным спектром $\Lambda \subset \mathbb{R}$. Составим формальное разложение в ряд Фурье:

$$f_k(t, y; \varepsilon) \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e^{i\lambda t}.$$

Понятно, что $\psi_k(y; \varepsilon) = c_0$, а ряд Фурье всякого почти периодического решения уравнения $D_t \varphi_{k+1} = f_k(t, y; \varepsilon) - \psi_k(y; \varepsilon)$ должен иметь вид

$$C + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{c_\lambda}{i\lambda} e^{i\lambda t}.$$

Но если нуль является предельной точкой множества Λ , то коэффициенты этого ряда могут оказаться неограниченными. Значит, разность $f_k(t, y; \varepsilon) - \psi_k(y; \varepsilon)$ может вообще не иметь почти периодических и даже ограниченных первообразных (см. [10]–[12]).

1.4. Перечисленные трудности объясняются тем, что на формирование медленного дрейфа влияют не только постоянные, но и медленно осциллирующие компоненты в разложении f_k , которые также необходимо включать в усредненные уравнения. Поэтому предлагается при построении каждого очередного приближения разлагать f_k в сумму “низкочастотного” и “высокочастотного” слагаемых g_k и h_k соответственно. Частота осцилляций каждой компоненты характеризуется ее спектром, т.е. носителем преобразования Фурье, понимаемого в смысле теории обобщенных функций. Спектр низкочастотной компоненты локализован в малой окрестности нуля, а спектр высокочастотной, наоборот, не пересекается с некоторой окрестностью нуля. Функцию g_k надо сохранить в укороченном уравнении, а h_k – аннулировать, полагая $D_t \varphi_{k+1} = h_k$. Такой подход позволит не только избежать проблемы малых знаменателей, но и рассмотреть уравнения с непериодическими возмущениями.

Приведенные соображения уже высказывались ранее различными авторами (см., например, [4]) и даже были реализованы для уравнений в конечномерном пространстве с почти периодическими правыми частями, ряды Фурье которых абсолютно сходятся (см. [6]). При этом границы частотных диапазонов, которые следует сохранять в усредненных уравнениях, считались постоянными и от ε не зависели. В то же время естественно предположить, что чем меньше ε , тем

меньшие частоты нужно учитывать (следовательно, больший диапазон частот можно отбросить) в усредненном уравнении. Вопрос о том, как это повлияет на оценку погрешности приближенного решения, изучается в настоящей работе.

Заметим, наконец, что параметр ε в уравнении (1.1) и в формуле (1.3) имеет разный смысл. В первом случае он характеризует масштаб скоростей изменения переменной x , а во втором – масштаб пространственных искажений при замене переменных. Эти масштабы целесообразно различать при решении конкретных прикладных задач. Пусть δ – еще один малый параметр, который может быть как совершенно произвольным, так и зависящим от ε . Вместо (1.3) будем искать замену переменных

$$x = y + \delta\varphi_1(t, y; \varepsilon, \delta) + \delta^2\varphi_2(t, y; \varepsilon, \delta) + \cdots + \delta^n\varphi_n(t, y; \varepsilon, \delta),$$

приводящую исходное уравнение к виду

$$D_t y = \varepsilon [g_0(t, y; \varepsilon, \delta) + \delta g_1(t, y; \varepsilon, \delta) + \cdots + \delta^{n-1}g_{n-1}(t, y; \varepsilon, \delta) + \delta^n r_n(t, y; \varepsilon, \delta)].$$

Потребуем также, чтобы спектры всех функций g_k лежали на промежутке $\{\lambda : |\lambda| < b\}$, а спектры функций φ_k – в области $\{\lambda : |\lambda| > a\}$, где $0 < a < b < \infty$. Укороченное уравнение

$$D_t \tilde{y} = \varepsilon [g_0(t, \tilde{y}; \varepsilon, \delta) + \delta g_1(t, \tilde{y}; \varepsilon, \delta) + \cdots + \delta^{n-1}g_{n-1}(t, \tilde{y}; \varepsilon, \delta)]$$

снова определит медленный дрейф решения $x(t)$, а аналогом n -го приближения в смысле Крылова–Боголюбова станет функция $\tilde{x} = \tilde{y} + \delta\varphi_1(t, \tilde{y}; \varepsilon, \delta) + \cdots + \delta^n\varphi_n(t, \tilde{y}; \varepsilon, \delta)$. Будет показано, что если a и b пропорциональны отношению ε/δ , то искомая замена существует для широкого класса уравнений вида (1.1), причем погрешность соответствующего приближения $\tilde{x}(t)$ для всякого $T > 0$ удовлетворяет неравенству $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq C(T)\delta^n$ при условиях $0 \leq t \leq T/\varepsilon$, $\tilde{x}(0) = x(0)$.

§ 2. Спектральный анализ обобщенных функций

2.1. Термин “спектр функции” употребляется в столь разных смыслах, что каждый раз приходится уточнять, о чем именно идет речь. Например, в физике и технике под спектром функции $f(t)$ часто подразумевают ее преобразование Фурье, при этом знание спектра равносильно исчерпывающему описанию функции f . В теории почти периодических функций спектром принято называть множество показателей $\lambda \in \mathbb{R}$, которым отвечают ненулевые предельные средние

$$c_\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{-i\lambda\tau} f(\tau) d\tau. \quad (2.1)$$

Известно (см. [10]–[12]), что спектр $\Lambda(f)$ каждой непрерывной почти периодической функции $f(t)$ является не более чем счетным. Это позволяет разложить функцию f в формальный ряд Фурье $\sum_{\lambda \in \Lambda(f)} c_\lambda e^{i\lambda t}$. Мы будем придерживаться примерно такой же терминологии, но попытаемся отказаться от требования

почти периодичности. Вместо рядов здесь нужно обратиться к преобразованиям Фурье, которые в общем случае становятся уже обобщенными функциями. Поэтому и понятие спектра будем определять сразу для обобщенных функций.

Напомним необходимые сведения из теории обобщенных функций, систематическое изложение которой имеется в монографиях [13]–[15].

Через $\mathcal{S}$ обозначим пространство Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с топологией, порожденной системой норм

$$\|\varphi\|_m = \max_{0 \leq k \leq m} \sup_{-\infty < t < \infty} (1 + t^2)^{m/2} |D_t^k \varphi(t)|, \quad m = 0, 1, \dots$$

Пусть $\mathfrak{B}$ – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Обобщенной функцией (медленного роста) со значениями в $\mathfrak{B}$ называется непрерывное линейное отображение $f: \mathcal{S} \mapsto \mathfrak{B}$; $\mathcal{S}'(\mathfrak{B})$ – множество всех таких отображений. Значение обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathfrak{B})$ на элементе $\varphi \in \mathcal{S}$ традиционно обозначается через (f, φ) .

Носителем обобщенной функции f называется множество $\text{supp } f$ всех точек $\tau \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию: для любой окрестности U точки τ существует такая бесконечно дифференцируемая финитная функция $\varphi(t)$, что $\text{supp } \varphi \subset U$ и $(f, \varphi) \neq 0$. Понятно, что носители обобщенных функций – замкнутые множества.

Для любых функций $\varphi(t) \in \mathcal{S}$ и $\psi(\lambda) \in \mathcal{S}$ имеют смысл классические прямое и обратное преобразования Фурье

$$F[\varphi](\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t} \varphi(t) dt, \quad F^{-1}[\psi](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} \psi(\lambda) d\lambda,$$

которые взаимно однозначно и непрерывно отображают $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}$. При $f \in \mathcal{S}'(\mathfrak{B})$ прямое $F[f]$ и обратное $F^{-1}[f]$ преобразования Фурье определяются соответственно по формулам

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad (F^{-1}[f], \psi) = (f, F^{-1}[\psi]).$$

Эти преобразования отображают $\mathcal{S}'(\mathfrak{B})$ на $\mathcal{S}'(\mathfrak{B})$ и являются взаимно обратными.

2.2. Таким образом, для каждой обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathfrak{B})$ определено множество $\text{supp } F[f] \subseteq \mathbb{R}$, которое будем называть *спектром* и обозначать через $\sigma(f)$. Для непрерывных ограниченных функций эквивалентное определение, но в других терминах, сформулировано в [12].

Понятие спектра характеризует “осцилляционные свойства” обобщенных функций. Приведем несколько простых примеров.

Пусть $f(t)$ – многочлен $a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$, $a_k \in \mathfrak{B}$. Его преобразование Фурье является комбинацией производных δ -функции, сосредоточенных в точке $\lambda = 0$:

$$F[f](\lambda) = 2\pi \sum_{k=0}^m (-i)^k a_k \delta^{(k)}(\lambda).$$

Значит, $\sigma(f) = \{0\}$. Это вполне согласуется с интуитивным представлением о том, что “частота осцилляций” многочлена равна нулю.

Если f – обобщенная функция с компактным носителем, то ее преобразование Фурье $F[f](\lambda)$ является целой аналитической функцией переменной λ . Так как нули целой функции не имеют конечных точек сгущения, то $\sigma(f) = \mathbb{R}$.

Еще один простой пример – тригонометрический многочлен $f(t) = a_1 e^{i\lambda_1 t} + a_2 e^{i\lambda_2 t} + \dots + a_m e^{i\lambda_m t}$, $a_k \in \mathfrak{B}$. Его преобразование Фурье вычисляется по формуле

$$F[f](\lambda) = 2\pi \sum_{k=1}^m a_k \delta(\lambda - \lambda_k), \quad (2.2)$$

поэтому $\sigma(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. В данном случае $\sigma(f)$ совпадает со спектром $\Lambda(f)$ показателей Фурье, изучаемым в теории почти периодических функций. Естественным обобщением этого наблюдения является

ЛЕММА 1. *Спектр $\sigma(f)$ любой непрерывной почти периодической функции f со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ равен замыканию множества $\Lambda(f)$ ее показателей Фурье.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Составим формальное разложение функции $f(t)$ в ряд Фурье $\sum_{\lambda \in \Lambda(f)} c_\lambda e^{i\lambda t}$. Если этот ряд абсолютно сходится, то утверждение леммы столь же элементарно, как и в случае конечных тригонометрических сумм. Более тонкие рассуждения потребуются, если ряд сходится не абсолютно или вообще расходится.

По основной теореме теории почти периодических функций (см. [10]–[12]) существует такая последовательность конечных тригонометрических сумм

$$f_n(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda(f_n)} c_\lambda^n e^{i\lambda t},$$

что $\Lambda(f_n) \subset \Lambda(f)$ и $f_n(t)$ равномерно сходятся к $f(t)$ при $-\infty < t < \infty$. Отсюда и из (2.1) вытекает

$$\begin{aligned} c_\lambda - c_\lambda^n &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{-i\lambda \tau} (f(\tau) - f_n(\tau)) d\tau, \quad \lambda \in \Lambda(f); \\ \|c_\lambda - c_\lambda^n\| &\leq \sup_\tau \|f(\tau) - f_n(\tau)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Кроме того, для всех $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} (F[f], \varphi) - (F[f_n], \varphi) &= (f - f_n, F[\varphi]) = \int_{\mathbb{R}} (f(t) - f_n(t)) F[\varphi](t) dt, \\ \|(F[f], \varphi) - (F[f_n], \varphi)\| &\leq \sup_t \|f(t) - f_n(t)\| \cdot \|F[\varphi]\|_{L_1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Сходимость здесь будет равномерной на любом множестве функций φ , преобразования Фурье которых равномерно ограничены в $L_1(\mathbb{R})$.

Пусть теперь $\lambda_0 \in \Lambda(f)$. Возьмем произвольную функцию $\psi(\lambda)$ класса $C_0^\infty(-1, 1)$, равную 1 при $\lambda = 0$, и положим

$$\varphi_m(\lambda) = \psi(m(\lambda - \lambda_0)), \quad m = 1, 2, \dots$$

Понятно, что

$$F[\varphi_m](t) = \frac{e^{i\lambda_0 t}}{m} F[\psi]\left(\frac{t}{m}\right), \quad \|F[\varphi_m]\|_{L_1} = \|F[\psi]\|_{L_1}.$$

Следовательно,

$$(F[f_n], \varphi_m) \rightrightarrows (F[f], \varphi_m), \quad n \rightarrow \infty.$$

Так как носители функций φ_m стягиваются к точке λ_0 , а спектр тригонометрического многочлена f_n является конечным множеством $\Lambda(f_n)$, то при каждом фиксированном n и всех достаточно больших m пересечение $\text{supp } \varphi_m \cap \Lambda(f_n)$ либо пусто, либо состоит из единственной точки λ_0 . На основании (2.1) и (2.2) заключаем

$$(F[f_n], \varphi_m) \rightarrow 2\pi c_{\lambda_0}^n, \quad m \rightarrow \infty.$$

Наконец, по теореме о перестановке предельных переходов

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} (F[f], \varphi_m) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (F[f_n], \varphi_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} (F[f_n], \varphi_m) \\ &= 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} c_{\lambda_0}^n = 2\pi c_{\lambda_0} \neq 0. \end{aligned}$$

Итак, при больших m значения $(F[f], \varphi_m)$ не равны нулю, значит, $\lambda_0 \in \sigma(f)$. В силу произвольности λ_0 имеем $\Lambda(f) \subseteq \sigma(f)$.

Осталось показать, что если носитель какой-либо функции $\varphi \in \mathcal{S}$ лежит во внешности множества $\Lambda(f)$, то $(F[f], \varphi) = 0$. Но это почти очевидно, так как в данном случае $\text{supp } \varphi \cap \Lambda(f_n) = \emptyset$ при всех n . Отсюда при помощи (2.2) получаем

$$(F[f], \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F[f_n], \varphi) = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \in \Lambda(f_n)} c_{\lambda}^n \varphi(\lambda) = 0.$$

Лемма доказана.

2.3. Разложим теперь любую обобщенную функцию в сумму быстро и медленно осциллирующих слагаемых. Возьмем числа $0 < a < b < \infty$ и выберем $\tilde{\eta}(\lambda) \in C_0^\infty(-b, b)$ так, чтобы $\tilde{\eta}(\lambda) \equiv 1$ в окрестности промежутка $[-a, a]$. Пусть $\eta(t) = F^{-1}[\tilde{\eta}]$. Для всякого $r > 0$ положим

$$\tilde{\eta}_r(\lambda) = \tilde{\eta}\left(\frac{\lambda}{r}\right), \quad \eta_r(t) = F^{-1}[\tilde{\eta}_r](t) = r\eta(rt).$$

Понятно, что $\eta_r \in \mathcal{S}$, поэтому в пространстве $\mathcal{S}'(\mathfrak{B})$ определены операторы

$$P_r f = f * \eta_r, \quad Q_r f = f - P_r f,$$

где звездочкой обозначена свертка, понимаемая в смысле теории обобщенных функций. По теореме о преобразовании Фурье свертки имеем

$$\begin{aligned} \sigma(P_r f) &= \text{supp } F[f * \eta_r] = \text{supp } \{F[f] \cdot \tilde{\eta}_r\} \subset \{\lambda : |\lambda| < br\}, \\ \sigma(Q_r f) &= \text{supp } \{F[f] \cdot (1 - \tilde{\eta}_r)\} \subset \{\lambda : |\lambda| > ar\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Таким образом, каждая обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'(\mathfrak{B})$ является суммой медленно осциллирующего слагаемого $P_r f$ со спектром в интервале $|\lambda| < br$ и быстро осциллирующего слагаемого $Q_r f$, спектр которого не содержит точек промежутка $|\lambda| \leq ar$. Правда, при $ar < |\lambda| < br$ эти спектры могут пересекаться.

Для регулярных обобщенных функций медленного роста значения $P_r f$ и $Q_r f$ вычисляются в явном виде. Например,

$$P_r f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - \tau) \eta_r(\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что если $f(t)$ – непрерывная почти периодическая функция, то $P_r f$ и $Q_r f$ также непрерывны и почти периодичны.

Отметим еще одно следствие формулы (2.4). Пусть $C(\mathfrak{B})$ – множество непрерывных и ограниченных на $(-\infty, \infty)$ функций со значениями в $\mathfrak{B}$. Понятно, что $C(\mathfrak{B})$ – банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{C(\mathfrak{B})} = \sup_t \|f(t)\|.$$

В силу (2.4) отображения P_r и Q_r являются линейными ограниченными операторами в $C(\mathfrak{B})$. Более того, так как $\eta_r(\tau) = r\eta(r\tau)$, то

$$\|P_r f\|_{C(\mathfrak{B})} \leq \|f\|_{C(\mathfrak{B})} \int_{\mathbb{R}} |\eta_r(\tau)| d\tau = \|f\|_{C(\mathfrak{B})} \int_{\mathbb{R}} |\eta(t)| dt = K_\eta \|f\|_{C(\mathfrak{B})}, \quad (2.5)$$

где K_η не зависит от r . Аналогичная оценка справедлива и для Q_r .

2.4. Рассмотрим вопрос о дифференцировании $P_r f$ и $Q_r f$ по аргументу t основных функций $\varphi(t)$, на которые действуют функционалы $f \in \mathcal{S}'(\mathfrak{B})$, а также по другим параметрам, которые могут быть элементами бесконечномерных пространств.

Дифференцирование по t выполняется элементарно. Хорошо известно, что если свертка $f * g$ существует, то существуют свертки $D_t f * g$ и $f * D_t g$, причем $D_t f * g = D_t(f * g) = f * D_t g$. Следовательно, $D_t(P_r f) = P_r(D_t f)$ и $D_t(Q_r f) = Q_r(D_t f)$ при всех $f \in \mathcal{S}'(\mathfrak{B})$.

Столь же несложно осуществляется дифференцирование по другим параметрам, от которых может зависеть обобщенная функция f . Этому вопросу в литературе уделено недостаточное внимание и мы остановимся на нем чуть подробнее.

Пусть G – открытое множество в банаховом пространстве $\mathfrak{E}$, а f – отображение, сопоставляющее элементам $x \in G$ обобщенные функции $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathfrak{B})$. При фиксированном $\varphi \in \mathcal{S}$ функция $f_\varphi(x) = (f(x), \varphi)$ определена на G и принимает значения в $\mathfrak{B}$. Будем говорить, что отображение f дифференцируемо по переменной x в точке $x_0 \in G$, если при каждом $\varphi \in \mathcal{S}$ в этой точке существует производная Фреше $D_x f_\varphi(x_0)$. Можно показать, что отображение $\varphi \mapsto D_x f_\varphi(x_0)$ непрерывно в следующем смысле: если φ_n сходится к φ в пространстве $\mathcal{S}$, то $D_x f_{\varphi_n}(x_0)$ сходится к $D_x f_\varphi(x_0)$ в пространстве $L(\mathfrak{E}, \mathfrak{B})$ линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathfrak{E}$ в $\mathfrak{B}$. Доказательство мы

для краткости опускаем – оно получается простой модификацией классической теоремы о полноте пространства обобщенных функций (см. [13], [15]). Таким образом, отображение $\varphi \mapsto D_x f_\varphi(x_0)$ является обобщенной функцией со значениями в пространстве $L(\mathfrak{E}, \mathfrak{B})$, которую назовем производной отображения f по переменной x в точке x_0 и обозначим через $D_x f(x_0)$:

$$(D_x f(x_0), \varphi) = D_x f_\varphi(x_0) = D_x(f(x), \varphi)|_{x=x_0}.$$

Непосредственно из определений следует перестановочность дифференцирования по параметру x с преобразованием Фурье и сверткой по аргументу t . Пусть существует производная $D_x f(x_0)$, тогда

$$(F[D_x f(x_0)], \varphi) = (D_x f(x_0), F[\varphi]) = D_x(f(x), F[\varphi])|_{x=x_0} = D_x(F[f(x)], \varphi)|_{x=x_0}.$$

Аналогично, если $\tilde{g}(\lambda)$ – мультипликатор в пространстве $\mathcal{S}$, то $g(t) = F^{-1}[\tilde{g}]$ будет свертывателем в $\mathcal{S}'$ (см. [15]), при этом

$$\begin{aligned} ((D_x f(x_0)) * g, \varphi) &= (D_x f(x_0), g * \varphi(-t)) = D_x(f(x), g * \varphi(-t))|_{x=x_0} \\ &= D_x(f(x) * g, \varphi(t))|_{x=x_0}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает перестановочность D_x с операциями P_r и Q_r .

Если $f(t)$ – регулярная функция, принадлежащая $C(\mathfrak{B})$ вместе с $D_t f(t)$, то производную $D_t P_r f$ можно найти, дифференцируя обе части равенства (2.4), причем в правой части это можно сделать под знаком интеграла. Точно так же, если $f(t, x)$ определена, непрерывна и равномерно ограничена на множестве $\mathbb{R} \times G$ вместе с производной $D_x f(t, x)$, то в формуле (2.4) возможно дифференцирование по x под знаком интеграла.

Все сказанное очевидным образом распространяется на производные любого порядка.

2.5. В заключение этого параграфа займемся построением первообразных. Еще в 1927 г. Ж. Фавар доказал, что если спектр почти периодической функции отделен от нуля, то ее первообразные также почти периодичны и, следовательно, ограничены (см. [16]). В книге Б. М. Левитана и В. В. Жикова [12] установлено более общее утверждение: всякая ограниченная непрерывная функция $f(t)$, спектр которой отделен от нуля, имеет ограниченную первообразную, причем построение первообразной сводится к свертке $f(t)$ с некоторой стандартной суммируемой функцией. Мы приведем аналог этих результатов для обобщенных функций.

Возьмем произвольную функцию $\tilde{\zeta}(\lambda) \in C^\infty(\mathbb{R})$, равную $(i\lambda)^{-1}$ при $|\lambda| \geq 1$, и пусть $\zeta(t) = F^{-1}[\tilde{\zeta}]$. Нетрудно показать (см. [12]), что функция $\zeta(t)$ непрерывна всюду, за исключением точки $t = 0$, где она имеет разрыв первого рода. Кроме того, $t^n \zeta(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$ и любом натуральном n .

Для всякого $\rho > 0$ положим

$$\tilde{\zeta}_\rho(\lambda) = \rho^{-1} \tilde{\zeta}\left(\frac{\lambda}{\rho}\right), \quad \zeta_\rho(t) = F^{-1}[\tilde{\zeta}_\rho] = \zeta(\rho t).$$

Понятно, что $\tilde{\zeta}_\rho(\lambda)$ – мультипликатор в пространстве $\mathcal{S}$, поэтому для каждого $f \in \mathcal{S}'(\mathfrak{B})$ определена свертка $f * \zeta_\rho$.

ЛЕММА 2. Если $\sigma(f) \subset \{\lambda : |\lambda| > \rho\}$, то $D_t(f * \zeta_\rho) = f$ и $\sigma(f * \zeta_\rho) = \sigma(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $F[D_t(f * \zeta_\rho)] = i\lambda \tilde{\zeta}_\rho(\lambda) \cdot F[f]$. Так как $i\lambda \tilde{\zeta}_\rho(\lambda) \equiv 1$ в области $\{\lambda : |\lambda| > \rho\}$ и здесь же расположен носитель функции $F[f]$, то $i\lambda \tilde{\zeta}_\rho(\lambda) \cdot F[f] = F[f]$. Значит,

$$\begin{aligned} F[D_t(f * \zeta_\rho)] &= F[f] \implies D_t(f * \zeta_\rho) = f, \\ \sigma(f * \zeta_\rho) &= \text{supp } F[f * \zeta_\rho] = \text{supp } \tilde{\zeta}_\rho(\lambda) \cdot F[f] = \text{supp } F[f] = \sigma(f). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для каждого $f \in \mathcal{S}'(\mathfrak{B})$ функция $Q_r f$ удовлетворяет условию леммы 2 при $\rho = ar$. Поэтому $(Q_r f) * \zeta_{ar}$ — первообразная для $Q_r f$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $f \in C(\mathfrak{B})$, тогда

$$(f * \zeta_\rho)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - \tau) \zeta_\rho(\tau) d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(t - \tau) \zeta(\rho\tau) d\tau.$$

Следовательно, $f * \zeta_\rho \in C(\mathfrak{B})$, причем

$$\|f * \zeta_\rho\|_{C(\mathfrak{B})} \leq \|\zeta(\rho\tau)\|_{L_1} \cdot \|f\|_{C(\mathfrak{B})} = \rho^{-1} \|\zeta(t)\|_{L_1} \cdot \|f\|_{C(\mathfrak{B})}. \quad (2.6)$$

Если, кроме того, функция f почти периодична, то свертка $f * \zeta_\rho$ также является почти периодической. Таким образом, утверждение леммы 2 включает упомянутые выше результаты Фавара и Жикова–Левитана.

§ 3. Модификация метода Крылова–Боголюбова

3.1. Вернемся к уравнению (1.1) и воспользуемся изложенными выше соображениями для модификации метода Крылова–Боголюбова. Пусть $n \geq 1$, а Ω — область, т.е. открытое связное множество, в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Будем считать, что функция $f(t, x; \varepsilon)$ определена при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и имеет непрерывные по (t, x) и равномерно ограниченные производные $D_x^m f$ порядков $0 \leq m \leq n$:

$$\|D_x^m f(t, x; \varepsilon)\| \leq C_m, \quad (t, x; \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \Omega \times (0, \varepsilon_0). \quad (3.1)$$

Производная $D_x^m f$ понимается в смысле Фреше (как ограниченное симметричное полилинейное отображение пространства $\mathfrak{B}^m$ в $\mathfrak{B}$; см. [17]).

Если x и y принадлежат Ω , то справедлива формула Тейлора

$$f(t, x; \varepsilon) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} D_y^m f(t, y; \varepsilon) \cdot (x - y)^m + s_n(t, x, y; \varepsilon).$$

Через $(x - y)^m$, $m \leq n$, обозначен вектор $(x - y, x - y, \dots, x - y)$ из m одинаковых элементов, а $D_y^m f \cdot (x - y)^m$ — значение полилинейного отображения $D_y^m f$ на векторе $(x - y)^m$. Предполагается, что

$$\|s_n(t, x, y; \varepsilon)\| \leq K_n \|x - y\|^n, \quad (t, x, y; \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \Omega \times (0, \varepsilon_0), \quad (3.2)$$

причем K_n зависит только от номера n , константы C_n из (3.1) и геометрических свойств области Ω . Достаточным условием существования такого K_n является выпуклость Ω . Для простоты будем далее считать эту область выпуклой.

Допустим, что x и y связаны формулой

$$x = \Phi(t, y; \varepsilon, \delta) \equiv y + \sum_{j=1}^n \delta^j \varphi_j(t, y; \varepsilon, \delta), \quad (3.3)$$

где δ – еще один малый параметр из интервала $(0, \delta_0)$, а функции φ_j заданы на множестве $\mathbb{R} \times \Omega \times (0, \varepsilon_0) \times (0, \delta_0)$, непрерывны по (t, y) и равномерно ограничены:

$$\|\varphi_j(t, y; \varepsilon, \delta)\| \leq M_j. \quad (3.4)$$

Предполагая, что $x = \Phi(t, y; \varepsilon, \delta)$ принадлежит области Ω , и применяя формулу Тейлора, находим

$$f(t, x; \varepsilon) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} D_y^m f \cdot \left(\sum_{j=1}^n \delta^j \varphi_j \right)^m + s_n(t, \Phi, y; \varepsilon).$$

Воспользуемся стандартными мультииндексными обозначениями. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, т.е. вектор с неотрицательными целыми компонентами. Как обычно, $|\alpha| = \sum \alpha_j$, $\alpha! = \prod (\alpha_j!)$. Если β – другой n -мерный мультииндекс, то $\alpha\beta = \sum \alpha_j \beta_j$. Через ν обозначим мультииндекс $(1, 2, \dots, n)$. Для всякого n -вектора φ с компонентами $\varphi_j \in \mathfrak{B}$ символом φ^α будем обозначать вектор

$$\left(\underbrace{\varphi_1, \varphi_1, \dots, \varphi_1}_{\alpha_1}, \underbrace{\varphi_2, \varphi_2, \dots, \varphi_2}_{\alpha_2}, \dots \right)$$

размерности $|\alpha|$. Если $\alpha_j = 0$, то соответствующее φ_j здесь отсутствует.

Применяя эти обозначения и учитывая, что каждая производная $D_y^m f$ является симметричным полилинейным отображением, получаем

$$\frac{1}{m!} D_y^m f \cdot \left(\sum_{j=1}^n \delta^j \varphi_j \right)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \delta^{\alpha\nu} D_y^{|\alpha|} f \cdot \varphi^\alpha.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(t, x; \varepsilon) &= \sum_{\alpha\nu < n} \frac{1}{\alpha!} \delta^{\alpha\nu} D_y^{|\alpha|} f(t, y; \varepsilon) \cdot \varphi^\alpha + \delta^n p_n(t, y; \varepsilon, \delta), \\ p_n(t, y; \varepsilon, \delta) &= \sum_{|\alpha| < n \leq \alpha\nu} \frac{1}{\alpha!} \delta^{\alpha\nu-n} D_y^{|\alpha|} f \cdot \varphi^\alpha + \delta^{-n} s_n(t, \Phi, y; \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Норма остатка $p_n(t, y; \varepsilon, \delta)$ равномерно ограничена величиной, зависящей только от n , δ_0 и констант в неравенствах (3.1), (3.2), (3.4).

3.2. Выполним теперь в уравнении (1.1) замену переменных по формуле (3.3): $x(t) = \Phi(t, y(t); \varepsilon, \delta)$. Дополнительно предположим, что функции φ_j имеют в области $\mathbb{R} \times \Omega \times (0, \varepsilon_0) \times (0, \delta_0)$ непрерывные по (t, y) производные $D_y \varphi_j$ и $D_t \varphi_j$, причем

$$\|D_y \varphi_j(t, y; \varepsilon, \delta)\| \leq M'_j, \quad \frac{\delta}{\varepsilon} \|D_t \varphi_j(t, y; \varepsilon, \delta)\| \leq M''_j. \quad (3.6)$$

На основании (3.5) имеем

$$\begin{aligned} & \left(I + \sum_{j=1}^n \delta^j D_y \varphi_j \right) \cdot D_t y + \sum_{j=1}^n \delta^j D_t \varphi_j \\ &= \varepsilon \left[\sum_{\alpha \nu < n} \frac{1}{\alpha!} \delta^{\alpha \nu} D_y^{|\alpha|} f \cdot \varphi^\alpha + \delta^n p_n(t, y; \varepsilon, \delta) \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Это уравнение можно разрешить относительно $D_t y$, так как при всех достаточно малых δ операторный коэффициент при $D_t y$ непрерывно обратим:

$$\left(I + \sum_{j=1}^n \delta^j D_y \varphi_j \right)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\sum_{j=1}^n \delta^j D_y \varphi_j \right)^m.$$

Ряд абсолютно сходится при $0 < \delta < \delta_1$, где δ_1 определено значениями n и M'_j из (3.6). Не умаляя общности, считаем $\delta_1 = \delta_0$.

Понятно, что

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n \delta^j D_y \varphi_j \right)^m &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n \delta^{i_1+i_2+\cdots+i_m} D_y \varphi_{i_1} \cdot D_y \varphi_{i_2} \cdots D_y \varphi_{i_m} \\ &= \sum_{|\beta|=m} \delta^{\beta \nu} \left(\sum_{\beta} D_y \varphi_{i_1} \cdot D_y \varphi_{i_2} \cdots D_y \varphi_{i_m} \right). \end{aligned}$$

Здесь β – мультииндекс размерности n . Сумма $\sum_{\beta}$ распространена на все такие $i_1, i_2, \dots, i_m$, среди которых единица встречается ровно β_1 раз, двойка – ровно β_2 раз, $\dots$, n – ровно β_n раз. Если эту сумму обозначить через $(-1)^{|\beta|} A_{\beta}(t, y; \varepsilon, \delta)$ и положить $A_0 = I$, то получим

$$\left(I + \sum_{j=1}^n \delta^j D_y \varphi_j \right)^{-1} = \sum_{\beta \nu < n} \delta^{\beta \nu} A_{\beta} + \delta^n q_n(t, y; \varepsilon, \delta).$$

Нормы оператор-функций A_{β} и остатка $q_n(t, y; \varepsilon, \delta)$ равномерно ограничены величинами, зависящими от M'_j , а также от β и n соответственно.

Итак, решая уравнение (3.7) относительно $D_t y$, находим

$$\begin{aligned} D_t y &= \varepsilon \left[\sum_{\beta \nu < n} \delta^{\beta \nu} A_{\beta} + \delta^n q_n(t, y; \varepsilon, \delta) \right] \\ &\times \left[\sum_{\alpha \nu < n} \frac{1}{\alpha!} \delta^{\alpha \nu} D_y^{|\alpha|} f \cdot \varphi^\alpha - \sum_{j=0}^{n-1} \delta^j \left(\frac{\delta}{\varepsilon} D_t \varphi_{j+1} \right) + \delta^n p_n(t, y; \varepsilon, \delta) \right] \end{aligned}$$

$$= \varepsilon \left[\sum_{(\beta+\alpha)\nu < n} \frac{1}{\alpha!} \delta^{(\beta+\alpha)\nu} A_\beta D_y^{|\alpha|} f \cdot \varphi^\alpha - \sum_{\beta\nu+j < n} \delta^{\beta\nu+j} A_\beta \left(\frac{\delta}{\varepsilon} D_t \varphi_{j+1} \right) + \delta^n r_n(t, y; \varepsilon, \delta) \right].$$

К остатку $\delta^n r_n$ отнесены все слагаемые, порядок которых с учетом (3.6) не ниже δ^n .

Сгруппируем в последней формуле слагаемые одинаковых порядков по δ и окончательно получим

$$D_t y = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k g_k(t, y; \varepsilon, \delta) + \varepsilon \delta^n r_n(t, y; \varepsilon, \delta), \quad (3.8)$$

где

$$g_k = \sum_{(\beta+\alpha)\nu=k} \frac{1}{\alpha!} A_\beta D_y^{|\alpha|} f \cdot \varphi^\alpha - \sum_{\beta\nu+j=k} A_\beta \left(\frac{\delta}{\varepsilon} D_t \varphi_{j+1} \right), \quad 0 \leq k < n. \quad (3.9)$$

Отметим, что при $t \in \mathbb{R}$, $y \in \Omega$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $0 < \delta < \delta_0$, $\Phi(t, y; \varepsilon, \delta) \in \Omega$ справедлива оценка

$$\|r_n(t, y; \varepsilon, \delta)\| \leq L_n. \quad (3.10)$$

Число L_n зависит только от n , δ_0 и констант в неравенствах (3.1), (3.2), (3.4) и (3.6).

3.3. Несмотря на то, что формула (3.8) выведена для достаточно малых δ , правые части уравнений (3.9) имеют смысл при всех $\delta > 0$, для которых определены функции φ_k . Положим $G = \mathbb{R} \times \Omega \times (0, \varepsilon_0) \times (0, \infty)$ и зададим $\varphi_k(t, y; \varepsilon, \delta)$ в области G так, чтобы найденные из (3.9) функции g_k обладали специальными свойствами.

ТЕОРЕМА 1. Пусть при некотором $N \geq n$ производные $D_x^m f(t, x; \varepsilon)$ порядков $0 \leq m \leq N$ непрерывны по переменным (t, x) и удовлетворяют условиям (3.1). Тогда для любых a и b , $0 < a < b$, найдутся функции $\varphi_k(t, y; \varepsilon, \delta)$, $1 \leq k \leq n$, определенные в области G и такие, что:

1) существуют непрерывные по (t, y) производные $D_y^j \varphi_k$ и $D_y^j D_t \varphi_k$ порядков $0 \leq j \leq N - k + 1$, причем

$$\sup_G \left[\|D_y^j \varphi_k(t, y; \varepsilon, \delta)\| + \frac{\delta}{\varepsilon} \|D_y^j D_t \varphi_k(t, y; \varepsilon, \delta)\| \right] < \infty;$$

2) при фиксированных y, ε, δ спектры всех φ_k как функций переменного t принадлежат множеству $\{\lambda : |\lambda| > (a\varepsilon)/\delta\}$;

3) найденные по формулам (3.9) функции g_k имеют непрерывные по (t, y) и равномерно ограниченные в области G производные $D_y^j g_k$ порядков $0 \leq j \leq N - k$, а их спектры лежат в интервале $\{\lambda : |\lambda| < (b\varepsilon)/\delta\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим уравнения (3.9) в виде

$$g_k(t, y; \varepsilon, \delta) = f_k(t, y; \varepsilon, \delta) - \frac{\delta}{\varepsilon} D_t \varphi_{k+1}(t, y; \varepsilon, \delta), \quad 0 \leq k < n, \quad (3.11)$$

$$f_k = \sum_{(\beta+\alpha)\nu=k} \frac{1}{\alpha!} A_\beta D_y^{|\alpha|} f \cdot \varphi^\alpha - \sum_{\substack{1 \leq j \leq k \\ \beta\nu+j=k+1}} A_\beta \left(\frac{\delta}{\varepsilon} D_t \varphi_j \right).$$

Заметим, что $f_0 \equiv f(t, y; \varepsilon)$, а при $k > 0$ функция f_k выражается только через $D_y^j f$, φ_j , $D_y \varphi_j$ и $(\delta/\varepsilon) D_t \varphi_j$, где $j \leq k$. Это позволяет по индукции найти все φ_k и g_k .

Пусть при некотором $m > 0$ уже найдены функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ и $g_0, \dots, g_{m-1}$, которые удовлетворяют уравнениям (3.11) с номерами $k < m$ и обладают перечисленными в теореме свойствами. Составим выражение f_m и разложим его в сумму:

$$f_m(t, y; \varepsilon, \delta) = P_r f_m + Q_r f_m,$$

где $r = \varepsilon/\delta$, а операции P_r и Q_r определены в § 2. По индуктивному предположению и в силу структуры выражений f_m существуют непрерывные по (t, y) и равномерно ограниченные в области G производные $D_y^j f_m$, $j \leq N - m$. На основании (2.5) и перестановочности операторов P_r и Q_r с дифференцированием по y заключаем, что такими же свойствами обладают $P_r f_m$ и $Q_r f_m$. Кроме того, ввиду (2.3) для $j \leq N - m$ имеем

$$\sigma(D_y^j P_r f_m) = \sigma(P_r D_y^j f_m) \subset \left\{ \lambda : |\lambda| < \frac{b\varepsilon}{\delta} \right\},$$

$$\sigma(D_y^j Q_r f_m) = \sigma(Q_r D_y^j f_m) \subset \left\{ \lambda : |\lambda| > \frac{a\varepsilon}{\delta} \right\}.$$

Положим $g_m = P_r f_m$, а φ_{m+1} найдем из уравнения $D_t \varphi_{m+1} = r Q_r f_m$. По лемме 2 решением этого уравнения является $\varphi_{m+1} = r(Q_r f_m) * \zeta_{ar}$. Теперь будет выполнено равенство (3.11) с номером $k = m$. Остается заметить, что в силу (2.6) и установленных выше свойств выражений f_m для функций g_m и φ_{m+1} справедливы все утверждения настоящей теоремы.

Таким образом, обоснован индуктивный шаг, позволяющий перейти от $k < m$ к значению $k = m$. Проверка базы индукции, т.е. построение φ_1 и g_0 , осуществляется аналогично. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть в дополнение к условиям теоремы 1 все производные $D_x^m f(t, x; \varepsilon)$ порядков $0 \leq m \leq N_1$, где $N_1 \leq N$, почти периодичны по t . Тогда из свойств операций P_r , Q_r и замечания 2 вытекает, что функции g_k и φ_{k+1} будут почти периодичны, если $0 \leq k \leq \min(n, N_1)$. Почти периодическими окажутся также все производные $D_y^j g_k$, $D_y^j \varphi_{k+1}$ и $D_y^j D_t \varphi_{k+1}$ порядков $j \leq N_1 - k$.

3.4. Приступим, наконец, к построению модифицированных приближений Крылова–Боголюбова. Через Ω_ρ , $\rho > 0$, обозначим множество точек области Ω , которые удалены от ее границы на расстояние, большее ρ . Понятно, что $\Omega_\rho \neq \emptyset$ при всех достаточно малых ρ , $0 < \rho < \rho_0$.

Пусть функции φ_k , $1 \leq k \leq n$, и g_k , $0 \leq k < n$, найдены в соответствии с теоремой 1 при $N = n + 1$. Рассмотрим отображение $\Phi: \Omega \mapsto \mathfrak{B}$, определенное формулой (3.3) для фиксированных t, ε, δ . Свойства φ_k гарантируют существование такого $q(\delta) > 0$, что $\lim_{\delta \rightarrow 0} q(\delta) = 0$ и

$$(1 - q(\delta))\|y_1 - y_2\| \leq \|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)\| \leq (1 + q(\delta))\|y_1 - y_2\|, \quad (3.12)$$

$$\|\Phi(y) - y\| \leq q(\delta).$$

Следовательно, при малых δ отображение Φ взаимно однозначно, причем для всякого $\rho \in (0, \rho_0)$ найдется такое $\delta_\rho > 0$, что если $0 < \delta < \delta_\rho$, $t \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, то $\Phi[\Omega_\rho] \subseteq \Omega$. Не умаляя общности, считаем $\delta_\rho \leq \delta_0$, чтобы для всех $\delta < \delta_\rho$ подстановка (3.3) приводила уравнение (1.1) к виду (3.8).

При сделанных предположениях правая часть уравнения (1.1) удовлетворяет равномерному условию Липшица по переменной $x \in \Omega$, а правая часть уравнения (3.8) – равномерному условию Липшица по $y \in \Omega_\rho$. Следовательно, для этих уравнений справедливы локальные теоремы существования и единственности решений задачи Коши в Ω и Ω_ρ соответственно. Более того, если $y(t)$ – решение уравнения (3.8), траектория которого на некотором промежутке $0 \leq t \leq T$ целиком лежит в Ω_ρ , то $x(t) = \Phi(t, y(t); \varepsilon, \delta)$ будет решением уравнения (1.1), расположенным в области Ω при тех же значениях t .

Наряду с (3.8) рассмотрим укороченное уравнение

$$D_t \tilde{y} = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k g_k(t, \tilde{y}; \varepsilon, \delta). \quad (3.13)$$

Пусть при некоторых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\delta \in (0, \delta_\rho)$ и $T > 0$ уравнения (3.8) и (3.13) с одинаковыми начальными условиями $y(0) = \tilde{y}(0) = y_0$ имеют решения $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$, принадлежащие Ω_ρ при всех $t \in [0, T/\varepsilon]$. Разность $y(t) - \tilde{y}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$D_t[y(t) - \tilde{y}(t)] = \varepsilon \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k [g_k(t, y; \varepsilon, \delta) - g_k(t, \tilde{y}; \varepsilon, \delta)] + \delta^n r_n(t, y; \varepsilon, \delta) \right\}.$$

Интегрируя обе части этого равенства, находим

$$\begin{aligned} \|y(\tau) - \tilde{y}(\tau)\| &\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k \int_0^\tau \|g_k(t, y; \varepsilon, \delta) - g_k(t, \tilde{y}; \varepsilon, \delta)\| dt \\ &\quad + \varepsilon \delta^n \int_0^\tau \|r_n(t, y; \varepsilon, \delta)\| dt \leq \varepsilon \alpha_{n-1} \int_0^\tau \|y(t) - \tilde{y}(t)\| dt + \varepsilon \tau \delta^n L_n, \end{aligned}$$

где $\alpha_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_\rho^k \sup_G \|D_y g_k(t, y; \varepsilon, \delta)\|$, а L_n – константа из (3.10). Полученное интегральное соотношение – частный случай известного неравенства Гронуолла–Беллмана (см. [9; замечание III.2.1]), в силу которого

$$\|y(t) - \tilde{y}(t)\| \leq \delta^n L_n \cdot (T e^{\alpha_{n-1} T}), \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon}. \quad (3.14)$$

Применим к $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$ отображение Φ . Как было установлено выше, $x(t) = \Phi(t, y(t); \varepsilon, \delta)$ будет точным решением исходного уравнения (1.1) с начальным условием $x(0) = \Phi(0, y_0; \varepsilon, \delta)$. Полагая

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t, \tilde{y}(t); \varepsilon, \delta) = \tilde{y}(t) + \sum_{k=1}^n \delta^k \varphi_k(t, \tilde{y}(t); \varepsilon, \delta) \quad (3.15)$$

и используя оценки (3.12), (3.14), получим

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq C(T)\delta^n, \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon}. \quad (3.16)$$

Функция $\tilde{x}(t)$ является искомым модифицированным приближением Крылова–Боголюбова порядка n к точному решению $x(t)$.

Осталось выяснить, при каких условиях решения уравнений (3.8) и (3.13) определены на промежутке $0 \leq t \leq T/\varepsilon$ и принадлежат Ω_ρ . Для этого рассмотрим укороченное уравнение, отвечающее приближению первого порядка

$$D_t z(t) = \varepsilon g_0(t, z(t); \varepsilon, \delta), \quad (3.17)$$

а (3.8) и (3.13) представим в виде

$$\begin{aligned} D_t y &= \varepsilon g_0(t, y; \varepsilon, \delta) + \varepsilon \delta r_1(t, y; \varepsilon, \delta), \\ D_t \tilde{y} &= \varepsilon g_0(t, \tilde{y}; \varepsilon, \delta) + \varepsilon \delta \tilde{r}_1(t, \tilde{y}; \varepsilon, \delta). \end{aligned}$$

В области $\mathbb{R} \times \Omega_\rho \times (0, \varepsilon_0) \times (0, \delta_\rho)$ нормы остатков r_1 и $\tilde{r}_1$ ограничены некоторой константой M , а норма производной $D_y g_0$ – числом α_0 . Повторяя рассуждения, проведенные при выводе неравенства (3.14), легко показать, что если решения всех трех уравнений (3.8), (3.13) и (3.17) с общим начальным значением y_0 определены для $t \in [0, \tau]$ и принадлежат Ω_ρ , то

$$\|y(\tau) - z(\tau)\| \leq \delta M \cdot (\varepsilon \tau e^{\alpha_0 \varepsilon \tau}), \quad \|\tilde{y}(\tau) - z(\tau)\| \leq \delta M \cdot (\varepsilon \tau e^{\alpha_0 \varepsilon \tau}).$$

Предположим теперь, что траектория $z(t)$ определена на промежутке $[0, T/\varepsilon]$ и принадлежит множеству $\Omega_{2\rho}$. Тогда при $\delta M T e^{\alpha_0 T} < \rho$ траектории $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$ не смогут выйти из Ω_ρ во все моменты времени $0 \leq t \leq T/\varepsilon$. Следовательно, решения $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$ уравнений (3.8) и (3.13) с начальными условиями $y(0) = \tilde{y}(0) = y_0$ можно продолжить на промежуток $[0, T/\varepsilon]$.

Итог изложенному подведем в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть φ_k и g_k найдены по теореме 1 при $N = n + 1$. Тогда для любых $T > 0$ и $\rho \in (0, \rho_0)$ существует такое $\delta_{\rho, T} > 0$, что если решение $z(t)$ уравнения (3.17) с начальным условием $z(0) = y_0$ при некоторых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\delta \in (0, \delta_{\rho, T})$ и каждом $t \in [0, T/\varepsilon]$ принадлежит $\Omega_{2\rho}$, то справедливы утверждения:

а) решения $y(t)$, $\tilde{y}(t)$ уравнений (3.8), (3.13) с начальными условиями $y(0) = \tilde{y}(0) = y_0$ определены для $t \in [0, T/\varepsilon]$ и принадлежат Ω_ρ ;

б) решение $x(t)$ уравнения (1.1) с условием $x(0) = \Phi(0, y_0; \varepsilon, \delta)$ определено при $t \in [0, T/\varepsilon]$, а найденная по формуле (3.15) функция $\tilde{x}(t)$ удовлетворяет неравенству (3.16), где C не зависит от (ε, δ) .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Слагаемое $\delta^n \varphi_n(t, \tilde{y}; \varepsilon, \delta)$ в формуле (3.15) имеет тот же порядок малости, что и правая часть неравенства (3.16). Как и в классическом случае (см. [2], [3]), сохранять это слагаемое не имеет смысла: для приближения

$$\tilde{x}(t) = \tilde{y}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \delta^k \varphi_k(t, \tilde{y}(t); \varepsilon, \delta)$$

верна прежняя оценка погрешности (3.16), но с другой константой $C(T)$.

3.5. Предложенная в теоремах 1 и 2 модификация метода Крылова–Боголюбова не обусловлена какими-либо ограничениями, за исключением требований к гладкости функции f . Однако в итоге получается неавтономное уравнение (3.13), в то время как классический метод усреднения приводит к более простым автономным уравнениям. Этот недостаток можно частично компенсировать, если дополнительно предположить, что все производные $D_x^m f(t, x; \varepsilon)$ порядков $0 \leq m \leq n+1$ почти периодичны по t .

В самом деле, пусть g_k и φ_{k+1} при $k < n-1$ уже определены в соответствии с теоремой 1 и для них выполняются все уравнения (3.11), кроме последнего, отвечающего значению $k = n-1$. Согласно замечанию 3 функция $f_{n-1}(t, y; \varepsilon, \delta)$ в этом уравнении окажется почти периодической по t вместе с производными первого и второго порядков по y . Значит, существуют предельные средние

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t D_y^j f_{n-1}(\tau, y; \varepsilon, \delta) d\tau, \quad j = 0, 1, 2.$$

Будем считать, что сходимость здесь равномерна относительно $y \in \Omega$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\delta \in (0, \delta_0)$.

Чтобы удовлетворить последнему уравнению (3.11), положим

$$\begin{aligned} g_{n-1}(y; \varepsilon, \delta) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f_{n-1}(\tau, y; \varepsilon, \delta) d\tau, \\ \varphi_n(t, y; \varepsilon, \delta) &= \frac{\varepsilon}{\delta} \int_0^t [f_{n-1}(\tau, y; \varepsilon, \delta) - g_{n-1}(y; \varepsilon, \delta)] d\tau. \end{aligned} \tag{3.18}$$

При сделанных предположениях эти формулы можно дважды дифференцировать по y , причем в правых частях допустимо дифференцирование под знаками интегралов. Заметим, что $D_y^j g_{n-1}$ и $(\delta/\varepsilon) D_y^j D_t \varphi_n$ ограничены при $y \in \Omega$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\delta \in (0, \delta_0)$, $j = 0, 1, 2$ и всех $t \in \mathbb{R}$. Функции $D_y^j \varphi_n$ могут быть не ограничены, когда $t \rightarrow \infty$. Тем не менее

$$\begin{aligned} \psi_{n,j}(t) &= \sup_{(y; \varepsilon, \delta)} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t D_y^j [f_{n-1}(\tau, y; \varepsilon, \delta) - g_{n-1}(y; \varepsilon, \delta)] d\tau \right\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \\ \|\delta D_y^j \varphi_n(t, y; \varepsilon, \delta)\| &\leq \varepsilon t \psi_{n,j}(t). \end{aligned}$$

Следовательно, для всякого фиксированного $T > 0$ имеет место равномерная относительно $(y, \delta) \in \Omega \times (0, \delta_0)$ сходимость

$$\sup_{t \in (0, T/\varepsilon)} \|\delta D_y^j \varphi_n(t, y; \varepsilon, \delta)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Выполним в уравнении (1.1) подстановку (3.3), где φ_k при $k < n$ найдены по теореме 1, а φ_n – по второй формуле (3.18). В итоге мы снова получим уравнение (3.8), в котором g_{n-1} определяется первым равенством (3.18), а для остатка r_n справедлива оценка

$$\sup_{t \in (0, T/\varepsilon)} \|\delta r_n(t, y; \varepsilon, \delta)\| \leq \Psi_{n,T}(\varepsilon) + (n-1)L_n(T)\delta, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi_{n,T}(\varepsilon) = 0. \quad (3.19)$$

Такая же оценка верна и для производной $D_y r_n$.

Повторяя теперь доказательство теоремы 2, придем к следующему заключению: для любых $T > 0$ и $\rho \in (0, \rho_0)$ существуют такие $\varepsilon_{\rho,T} > 0$ и $\delta_{\rho,T} > 0$, что если решение $z(t)$ уравнения (3.17) с начальным условием $z(0) = y_0$ при некоторых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\rho,T})$, $\delta \in (0, \delta_{\rho,T})$ и каждом $t \in [0, T/\varepsilon]$ принадлежит $\Omega_{2\rho}$, то будут выполнены все остальные утверждения теоремы 2. Единственное отличие состоит в том, что в неравенстве (3.16) вместо $C(T)\delta^n$ появится

$$C(T)\delta^{n-1}[\Psi_{n,T}(\varepsilon) + (n-1)\delta].$$

При $n = 1$ окончательный результат выглядит еще проще, так как обращается в нуль слагаемое $(n-1)L_n(T)\delta$ в (3.19). Поэтому достаточно лишь требования $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\rho,T})$, а величина параметра $\delta \in (0, \delta_0)$ принципиального значения не имеет. Неравенство (3.16) в данном случае принимает вид $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq C(T)\Psi_{1,T}(\varepsilon)$, $0 \leq t \leq T/\varepsilon$. Это в точности совпадает с классической оценкой погрешности первого приближения Крылова–Боголюбова (см. [2], [3], [9]).

Таким образом, для почти периодической по t функции $f(t, x; \varepsilon)$ слагаемое g_{n-1} укороченного уравнения (3.13) можно сделать не зависящим от t , что упрощает исследование этого уравнения, особенно при построении приближений низких порядков.

Список литературы

- [1] Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, *Введение в нелинейную механику*, Изд-во АН УССР, Киев, 1937; англ. пер.: N. Kryloff, N. Bogoliuboff, *Introduction to non-linear mechanics*, Ann. of Math. Stud., **11**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1943.
- [2] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, 4-е изд., Наука, М., 1974; англ. пер. 2-го изд.: N. N. Bogoliubov, Yu. A. Mitropolsky, *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*, Hindustan Publishing Corp., Delhi; Gordon and Breach, New York, 1961.
- [3] Ю. А. Митропольский, *Метод усреднения в нелинейной механике*, Наукова думка, Киев, 1971.
- [4] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, 1-е изд., Наука, М., 1974; англ. пер. 3-го изд.: V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1978.
- [5] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, “Математические аспекты классической и небесной механики”, *Динамические системы* – 3, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **3**, ВИНТИ, М., 1985, 5–290.
- [6] Т. Г. Стрижак, *Асимптотический метод нормализации*, Вища школа, Киев, 1984.

- [7] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967; англ. пер.: S. G. Kreĭn, *Linear differential equations in Banach space*, Transl. Math. Monogr., **29**, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1971.
- [8] П. П. Забрейко, И. Б. Ледовская, “К обоснованию метода Н. Н. Боголюбова–Н. М. Крылова для обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **5:2** (1969), 240–253; англ. пер.: P. P. Zabrejko, I. B. Ledovskaya, “Proof of the Bogolyubov–Krylov method for ordinary differential equations”, *Differential Equations*, **5** (1969), 198–208.
- [9] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970; англ. пер.: Ju. L. Dalec’kii, M. G. Kreĭn, *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974.
- [10] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, Гостехиздат, М., 1953.
- [11] C. Corduneanu, *Almost periodic functions*, Chelsea Publ., New York, 1989.
- [12] Б. М. Левитан, В. В. Жиков, *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения*, Изд.-во Моск. ун-та, М., 1978; англ. пер.: B. M. Levitan, V. V. Zhikov, *Almost periodic functions and differential equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
- [13] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. S. Vladimirov, *Generalized functions in mathematical physics*, Mir, Moscow, 1979.
- [14] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, vol. 1, Grundlehren Math. Wiss., **256**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [15] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные функции. Выпуск 2. Пространства основных и обобщенных функций*, Физматлит, М., 1958; нем. пер.: I. M. Gelfand, G. E. Schilow, *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen). II: Lineare topologische Räume. Räume von Grundfunktionen und verallgemeinerten Funktionen*, VEB, Berlin, 1962.
- [16] J. Favard, “Sur les équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques”, *Acta Math.*, **51:1** (1928), 31–81.
- [17] Ж. Дьедонне, *Основы современного анализа*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York–London, 1960.

В. С. Белоносов (V. S. Belonosov)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск;

Новосибирский государственный университет

E-mail: bvs@math.nsc.ru

Поступила в редакцию

01.11.2010