Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ж. Думанян, О разрешимости задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 7, 75–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7814>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:03:48

УДК 517.956

В. Ж. Думанян

О разрешимости задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка

Изучается разрешимость задачи Дирихле в ограниченной области $Q \subset R_n$, $n \geq 2$, с гладкой границей $\partial Q \in C^1$ для эллиптического уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} & -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + (\bar{b}(x), \nabla u) - \operatorname{div}(\bar{c}(x)u) + d(x)u \\ & = f(x) - \operatorname{div} F(x), \quad x \in Q, \\ & u|_{\partial Q} = u_0, \end{aligned}$$

с граничной функцией u_0 из $L_2(\partial Q)$.

Получены условия существования $(n-1)$ -мерно непрерывного решения рассматриваемой задачи и установлено, что условие разрешимости изучаемой задачи имеет вид, аналогичный условию разрешимости в обычной обобщенной постановке (в $W_2^1(Q)$). В частности, доказано, что если однородная задача (с равными нулю граничной функцией и правой частью) не имеет нетривиальных решений из пространства $W_2^1(Q)$, то для всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и всех f и F из соответствующих функциональных пространств существует $(n-1)$ -мерно непрерывное решение неоднородной задачи.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: задача Дирихле, разрешимость задачи Дирихле, эллиптическое уравнение второго порядка, $(n-1)$ -мерно непрерывное решение.

Работа посвящена изучению разрешимости задачи Дирихле в ограниченной области $Q \subset R_n$, $n \geq 2$, с гладкой границей $\partial Q \in C^1$ для эллиптического уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u & \equiv -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + (\bar{b}(x), \nabla u) - \operatorname{div}(\bar{c}(x)u) + d(x)u \\ & = f(x) - \operatorname{div} F(x), \quad x \in Q, \end{aligned} \tag{1}$$

$$u|_{\partial Q} = u_0, \tag{2}$$

с граничной функцией u_0 из $L_2(\partial Q)$. Предполагается, что функции f и $F = (f_1, \dots, f_n)$ принадлежат $L_{2,\text{loc}}(Q)$, симметрическая матрица $A(x) = (a_{ij}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$\gamma|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = (\xi, A(x)\xi) \leq \gamma^{-1}|\xi|^2 \tag{3}$$

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R_n$ и почти всюду $x \in Q$ с положительной постоянной γ , а коэффициенты $\bar{b}(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$, $\bar{c}(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными в каждой строго внутренней подобласти области Q функциями.

В настоящей работе изучается разрешимость рассматриваемой задачи. При естественных ограничениях на рост вблизи границы коэффициентов при младших членах и правой части уравнения устанавливаются условия существования $(n-1)$ -мерно непрерывного решения рассматриваемой задачи. В частности, доказано, что если однородная задача (с равными нулю граничной функцией и правой частью) не имеет нетривиальных решений из пространства $W_2^1(Q)$, то для всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и всех f и F из соответствующих функциональных пространств (они приведены далее) существует $(n-1)$ -мерно непрерывное решение неоднородной задачи.

Понятие $(n-1)$ -мерной непрерывности было предложено А. К. Гуциным в работе [1] и заключается в следующем. Пусть μ – неотрицательная единичная мера в R_n с носителем в $\bar{Q}$, удовлетворяющая следующему условию. Существует такая постоянная $C = C(\mu)$, что для всех $r > 0$ и $x^0 \in \bar{Q}$ мера шара $B_r(x^0)$ радиуса r с центром в точке x^0 не превосходит числа Cr^{n-1} :

$$\mu(B_r(x^0)) \leq Cr^{n-1} \quad \text{для всех } r > 0 \text{ и } x^0 \in \bar{Q}; \quad (4)$$

наименьшую из таких постоянных C будем называть *нормой* μ и обозначать через $\|\mu\|$. Пространство Гуцина $(n-1)$ -мерно непрерывных функций $C_{n-1}(\bar{Q})$ является пополнением пространства непрерывных в $\bar{Q}$ функций по норме

$$\|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})} = \sup \left(\frac{1}{\|\mu\|} \int_{\bar{Q}} u^2(x) d\mu(x) \right)^{1/2},$$

где точная верхняя грань берется по всем удовлетворяющим условию (4) мерам μ . Функции из $C_{n-1}(\bar{Q}) \subset L_2(Q)$ имеют следы на множествах положительной $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа, а множество следов на гладкой $(n-1)$ -мерной поверхности $\Gamma \subset \bar{Q}$ всех функций из $C_{n-1}(\bar{Q})$ совпадает с $L_2(\Gamma)$.

Можно дать эквивалентное определение $(n-1)$ -мерной непрерывности в терминах близости значений функции на близких мерах.

Пусть μ и ν – удовлетворяющие условию (4) неотрицательные единичные меры в R_n с носителем в $\bar{Q}$, и пусть ϕ – такая мера в R_{2n} с носителем в $\bar{Q} \times \bar{Q}$, что

$$\mu(G) = \phi(G \times R_n), \quad \nu(G) = \phi(R_n \times G) \quad \text{для всех (борелевских) множеств } G \subset \bar{Q}.$$

Функцию u будем называть $(n-1)$ -мерно непрерывной, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ , что

$$\frac{1}{\|\mu\| + \|\nu\|} \int_{\bar{Q} \times \bar{Q}} (u(x) - u(y))^2 d\phi(x, y) < \varepsilon$$

(расстояние между значениями функции u на мерах μ и ν вдоль ϕ меньше ε), как только

$$\int_{\bar{Q} \times \bar{Q}} |x - y| d\phi(x, y) < \delta$$

(расстояние между мерами μ и ν вдоль ϕ меньше δ); подробнее см. [1].

Свойство $(n - 1)$ -мерной непрерывности решения и однозначная разрешимость задачи Дирихле с граничной функцией u_0 из $L_2(\partial Q)$ для уравнения без младших членов ($b_i = 0$, $c_i = 0$, $d = 0$) с $f \in W_2^{-1}$ ($F = 0$) были установлены в работе [1]. При этом предполагалось, что единичный вектор внутренней нормали $\bar{\nu}$ к ∂Q удовлетворяет условию Дини

$$|\bar{\nu}(x) - \bar{\nu}(y)| \leq \omega(|x - y|) \quad (5)$$

для всех $x, y \in \partial Q$, где ω – такая монотонная функция, что

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty,$$

а коэффициенты a_{ij} непрерывны по Дини на границе:

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x - y|) \quad (6)$$

для всех $x \in \partial Q$, $y \in Q$ и $i, j = 1, \dots, n$. Можно считать, что функция ω в условиях (5) и (6) одна и та же.

В работе [2] было показано, что приведенный выше результат остается справедливым для правых частей из более широкого класса, а именно если

$$r^{3/2}(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/4} f(x) \in L_2(Q), \quad (7)$$

$$r^{1/2}(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/4} F(x) \in (L_2(Q))^n, \quad (8)$$

где $r(x)$ – расстояние точки $x \in Q$ до границы ∂Q .

Далее мы также будем предполагать условия (5)–(8) выполненными.

Под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию u из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1) в смысле обобщенных функций, т.е. для всех $\eta \in C_0^\infty(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \int_Q (A(x)\nabla u + \bar{c}(x)u, \nabla \eta) dx + \int_Q ((\bar{b}(x), \nabla u) + d(x)u)\eta dx \\ &= \int_Q (f\eta + (F, \nabla \eta)) dx, \end{aligned}$$

и удовлетворяющую условию (2) в следующем смысле: для каждой точки $x^0 \in \partial Q$ найдется такая ее окрестность $V_{x^0} \subset \partial Q$, что

$$\int_{V_{x^0}} (u(x + \delta \bar{\nu}(x^0)) - u_0(x))^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0. \quad (9)$$

Понятие решения из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ в случае области с дважды гладкой границей было введено В. П. Михайловым в работах [3], [4] (см. также [5]–[7]), где принятие решением своего граничного значения понималось в следующем смысле:

$$\int_{\partial Q} (u(x + \delta \bar{\nu}(x)) - u_0(x))^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0.$$

При этом в случае гладкости коэффициентов уравнения ($a_{ij}(x) \in C^1(\overline{Q})$, $b_i(x) \in C^1(\overline{Q})$, $i, j = 1, \dots, n$, $d(x) \in C(\overline{Q})$, а $\bar{c}(x) = 0$) было установлено, что задача (1), (2) фредгольмова, имеет тот же спектр и те же пространства собственных функций, что и задача в обычной обобщенной постановке (решение из $W_2^1(Q)$). Если нуль не является точкой спектра, то задача разрешима при любой граничной функции $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и любой правой части f ($F \equiv 0$), удовлетворяющей условию

$$\int_Q r^\theta(x) f^2(x) dx < \infty \quad \text{с некоторым показателем } \theta < 3.$$

Обобщение приведенного выше результата о разрешимости задачи Дирихле на области с ляпуновской границей было получено в работах [8] и [9], где принятие граничного значения формулировалось в локальных терминах – требовалось выполнение (9).

В работе [10] (см. также [11]) было установлено, что решение задачи Дирихле (1), (2) (если оно существует) обладает свойством $(n-1)$ -мерной непрерывности, т.е. принадлежит пространству Гущина $C_{n-1}(\overline{Q})$. При этом предполагалось, что коэффициенты $\bar{b}(x)$, $\bar{c}(x)$ и $d(x)$ локально ограничены и для них справедливы следующие оценки: существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|\bar{b}(x)| \leq \frac{M}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/4}}, \quad x \in Q, \quad (10)$$

$$\int_0^t (1 + |\ln t|)^{3/2} C^2(t) dt < \infty, \quad \text{где } C(t) = \sup_{r(x) \geq t} |\bar{c}(x)|, \quad (11)$$

$$\int_0^t t^3 (1 + |\ln t|)^{3/2} D^2(t) dt < \infty, \quad \text{где } D(t) = \sup_{r(x) \geq t} |d(x)|. \quad (12)$$

Однако разрешимость изучаемой задачи (с граничной функцией из $L_2(\partial Q)$) была исследована только при жестких условиях на гладкость коэффициентов.

Цель настоящей работы заключается в изучении разрешимости задачи (1), (2) при тех же условиях (10)–(12). Установлено, что условие разрешимости этой задачи имеет вид, аналогичный условию разрешимости в обычной обобщенной постановке (в $W_2^1(Q)$). В частности, теорема 2 утверждает разрешимость задачи (1), (2) при любых u_0, f и F (из указанных пространств), если однородная задача имеет только тривиальное решение в пространстве $W_2^1(Q)$.

Для изучения разрешимости задачи (1), (2) рассмотрим задачи Дирихле

$$\mathcal{L}_0 v \equiv -\operatorname{div}(A \nabla v) = 0, \quad (13)$$

$$v|_{\partial Q} = u_0 \quad (14)$$

и

$$\mathcal{L}_0 w = -(\bar{b}, \nabla w) + \operatorname{div}(\bar{c} w) - dw - (\bar{b}, \nabla v) + \operatorname{div}(\bar{c} v) - dv + f - \operatorname{div} F, \quad (15)$$

$$w|_{\partial Q} = 0, \quad (16)$$

где функция v в правой части уравнения (15) есть решение задачи (13), (14).

Очевидна справедливость следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть функция v является решением задачи (13), (14). Тогда для того чтобы функция u являлась решением задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы функция $w = u - v$ являлась решением задачи (15), (16).

Задача (13), (14) однозначно разрешима при всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ (см. [1]), решение принадлежит пространству $C_{n-1}(\overline{Q})$ и для него справедлива оценка

$$\|v\|_{C_{n-1}(\overline{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla v|^2 dx \leq \text{const} \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2$$

с не зависящей от u_0 постоянной.

Следовательно, в силу утверждения 1 задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача (15), (16) с v , являющейся решением задачи (13), (14).

Введем следующие пространства:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(Q) &\equiv \left\{ u \in W_{2,\text{loc}}^1(Q) \cap C_{n-1}(\overline{Q}) : \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx < \infty \right\}, \\ \|u\|_{\mathcal{U}(Q)}^2 &= \|u\|_{C_{n-1}(\overline{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx, \\ \mathring{\mathcal{U}}(Q) &\equiv \{ u \in \mathcal{U}(Q), u|_{\partial Q} = 0 \}. \end{aligned}$$

Следуя [2], обозначим через $\mathring{H}_1(Q)$ пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathring{H}_1(Q)} = \int_Q \frac{(\nabla u, \nabla v)}{r(1 + |\ln r|)^{3/2}} dx,$$

а через $\mathring{H}(Q)$ – пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathring{H}(Q)} = \int_Q \left(r(1 + |\ln r|)^{1/2} (\nabla u, \nabla v) + \frac{u \cdot v}{r(1 + |\ln r|)^{1/2}} \right) dx.$$

Напомним, что $r(x)$ – расстояние точки $x \in Q$ до границы ∂Q .

Имеют место следующие вложения: $\mathring{H}_1(Q) \subset \mathring{W}_2^1(Q) \subset \mathring{H}(Q) \subset \mathring{\mathcal{U}}(Q)$. Справедливость вложения $\mathring{H}(Q) \subset \mathring{\mathcal{U}}(Q)$ установлена в работе [2]. Справедливость остальных вложений следует из следующих оценок для функций η из $C_0^\infty(Q)$:

$$\|\eta\|_{\mathring{W}_2^1(Q)} \leq \text{const} \|\eta\|_{\mathring{H}_1(Q)}, \quad \|\eta\|_{\mathring{H}(Q)} \leq \text{const} \|\eta\|_{\mathring{W}_2^1(Q)},$$

где постоянные не зависят от η . Справедливость первой оценки очевидна, а вторую оценку можно получить применением неравенства Харди (см. [12]; подробнее см. доказательство леммы 1).

Как уже отмечалось выше, решение v задачи (13), (14) принадлежит пространству $\mathcal{U}(Q)$ (см. [1]), а решение u задачи (1), (2) (если оно существует)

должно принадлежать пространству $\mathcal{U}(Q)$ (см. [10], [11]). Следовательно, в силу утверждения 1 решение w задачи (15), (16) (если оно существует) следует искать в пространстве $\mathring{\mathcal{U}}(Q)$.

Рассмотрим далее выражение $Tu \equiv -(\bar{b}, \nabla u) + \operatorname{div}(\bar{c}u) - du$ из правой части уравнения (15).

ЛЕММА 1. *T является линейным и ограниченным оператором, действующим из $\mathcal{U}(Q)$ в $[\dot{H}_1(Q)]^*$ и из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x^0 \in \partial Q$ – произвольная точка границы ∂Q области Q . Фиксируем локальную систему координат (x', x_n) с началом в точке x^0 , а ось x_n направим по внутренней нормали $\nu(x^0)$ к ∂Q в точке x^0 . Поскольку граница области гладкая, $\partial Q \in C^1$, то существуют $r_{x^0} > 0$ и функция $\varphi_{x^0} \in C^1(R_{n-1})$, удовлетворяющая условию

$$\varphi_{x^0}(0) = 0, \quad \nabla \varphi_{x^0}(0) = 0, \quad |\nabla \varphi_{x^0}(x')| \leq \frac{1}{2} \quad \text{для всех } x' \in R_{n-1},$$

такие, что пересечение области Q с шаром $U_{x^0}^{(r_{x^0})} = \{x : |x - x^0| < r_{x^0}\}$ радиуса r_{x^0} с центром в точке x^0 имеет вид

$$Q \cap U_{x^0}^{(r_{x^0})} = U_{x^0}^{(r_{x^0})} \cap \{(x', x_n) : x_n > \varphi_{x^0}(x')\}.$$

Тогда

$$\partial Q \cap U_{x^0}^{(r_{x^0})} = U_{x^0}^{(r_{x^0})} \cap \{(x', x_n) : x_n = \varphi_{x^0}(x')\}.$$

Положим $\ell_{x^0} = r_{x^0}/\sqrt{2}$ и из покрытия $\{U_{x^0}^{(\ell_{x^0})}, x^0 \in \partial Q\}$ границы ∂Q выберем конечное подпокрытие $U_{x^m}^{(\ell_{x^m})}$, $m = 1, \dots, p$. Обозначим $U_m = U_{x^m}^{(r_{x^m})}$, $r_m = r_{x^m}$, $\ell_m = \ell_{x^m}$, $\varphi_m = \varphi_{x^m}$, где $m = 1, \dots, p$. Пусть

$$h = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \min(r_1, \dots, r_p).$$

Тогда каждый из криволинейных “цилиндров”

$$\Pi_m^{\ell_m, h} = \{(x', x_n) : |x'| < \ell_m, \varphi_m(x') < x_n < \varphi_m(x') + h\}, \quad m = 1, \dots, p,$$

лежит в соответствующем шаре U_m так же, как и в $U_m \cap Q$.

Пусть $\ell_0 < h$ – такое положительное число, что дополнение в Q области

$$Q_{\ell_0} = \{x \in Q : r(x) = \operatorname{dist}(x, \partial Q) > \ell_0\}$$

содержится в объединении “цилиндров” $\Pi_m^{\ell_m, h}$, $m = 1, \dots, p$, т.е.

$$Q^{\ell_0} = \{x \in Q : r(x) = \operatorname{dist}(x, \partial Q) \leq \ell_0\} \subset \bigcup_{m=1}^p \Pi_m^{\ell_m, h}.$$

Легко видеть, что для всех $x = (x', x_n) \in \Pi_m^{\ell_m, h}$, $m = 1, \dots, p$,

$$r(x) \leq x_n - \varphi_m(x') \leq \frac{\sqrt{5}}{2} r(x).$$

Зафиксируем некоторый номер m , $1 \leq m \leq p$, и возьмем локальную систему координат с началом в точке x^m . В дальнейшем зависимость функции φ_m от номера m отмечать не будем: $\varphi = \varphi_m$.

Определим отображения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_{-1}$ пространства R_n на себя соотношениями

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= (x', x_n - \varphi(x')), & x &= (x', x_n), \\ \mathcal{L}_{-1}(y) &= (y', y_n + \varphi(y')), & y &= (y', y_n).\end{aligned}$$

Образ $\Pi_m^{\ell_m, h}$ при отображении $\mathcal{L}$ будем обозначать через $\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}$: $\mathcal{L}(\Pi_m^{\ell_m, h}) = \tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}$.

Возьмем произвольные $u \in \mathcal{U}(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$. Обозначим

$$u(y', y_n + \varphi(y')) = \tilde{u}(y), \quad \eta(y', y_n + \varphi(y')) = \tilde{\eta}(y).$$

Рассмотрим

$$\langle Tu, \eta \rangle \equiv - \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx - \int_Q (\bar{c}(x) u(x), \nabla \eta(x)) dx - \int_Q d(x) u(x) \eta(x) dx.$$

В силу (10)

$$\begin{aligned}\left| \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx \right| &\leq M \int_Q \frac{|\nabla u(x)| |\eta(x)|}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/4}} dx \\ &\leq M \left(\int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{1/2} \\ &\leq M \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Далее, применяя неравенство Харди, имеем

$$\begin{aligned}&\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \\ &\leq \int_{Q_{i_0}} \frac{\eta^2(x)}{r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} \frac{\eta^2(x)}{r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \\ &\leq \frac{1}{\ell_0^3} \int_Q \eta^2(x) dx + \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} \frac{\tilde{\eta}^2(y)}{y_n^3(1 + |\ln y_n|)^{3/2}} dy \\ &= \frac{1}{\ell_0^3} \int_Q \eta^2(x) dx + \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 \int_0^h dy_n \int_{|y'| < \ell_m} \frac{\left(\int_0^{y_n} \tilde{\eta}_\tau(y', \tau) d\tau \right)^2}{y_n^3(1 + |\ln y_n|)^{3/2}} dy' \\ &\leq \text{const} \int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx + \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 \int_{|y'| < \ell_m} dy' \int_0^h \left(\frac{\int_0^{y_n} \tilde{\eta}_\tau(y', \tau) d\tau}{y_n^{3/2}(1 + |\ln y_n|)^{3/4}} \right)^2 dy_n \\ &\leq \text{const} \left(\int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx + \sum_{m=1}^p \int_{|y'| < \ell_m} dy' \int_0^h \frac{\tilde{\eta}_{y_n}^2(y', y_n)}{y_n(1 + |\ln y_n|)^{3/2}} dy_n \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \text{const} \left(\int_Q |\nabla \eta|^2 dx + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_{\ell_m, h}^{\ell_m, h}} \frac{|\nabla \tilde{\eta}(y)|^2}{y_n (1 + |\ln y_n|)^{3/2}} dy \right) \\
&\leq \text{const} \int_Q \frac{|\nabla \eta(x)|^2}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx.
\end{aligned} \tag{17}$$

Следовательно,

$$\left| \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx \right| \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{W}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)},$$

где постоянная не зависит от u и η .

В силу (11)

$$\begin{aligned}
&\left| \int_Q (\bar{c}(x)u(x), \nabla \eta(x)) dx \right| \leq \int_Q C(r(x)) |u(x)| |\nabla \eta(x)| dx \\
&\leq \left(\int_Q r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} C^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\int_Q \frac{|\nabla \eta(x)|^2}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_Q r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} C^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \left(C^2(\ell_0) \int_{Q_{\ell_0}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} u^2(x) dx \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_{\ell_m, h}^{\ell_m, h}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} C^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \left(C^2(\ell_0) \max_{x \in \bar{Q}_{\ell_0}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} \int_{Q_{\ell_0}} u^2(x) dx \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_{\ell_m, h}^{\ell_m, h}} y_n \left(1 + \left| \ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right| \right)^{3/2} C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' dy_n \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_0^h y_n \left(1 + \left| \ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right| \right)^{3/2} C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) dy_n \right. \\
&\quad \left. \times \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \text{const} (\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{W}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)},
\end{aligned}$$

где постоянная не зависит от u и η .

В силу (12) и (17) аналогично предыдущим оценкам получаем

$$\left| \int_Q d(x) u(x) \eta(x) dx \right| \leq \int_Q D(r(x)) |u(x)| |\eta(x)| dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} D^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{1/2} \\
&\leq \text{const} \left(\int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} D^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(D^2(\ell_0) \int_{Q_{\ell_0}} r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} u^2(x) dx \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_{\ell_m}^{\ell_m, h}} r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} D^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(D^2(\ell_0) \max_{x \in \bar{Q}_{\ell_0}} r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} \int_{Q_{\ell_0}} u^2(x) dx \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_{\ell_m}^{\ell_m, h}} y_n^3 \left(1 + \left| \ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right| \right)^{3/2} D^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' dy_n \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_0^h y_n^3 \left(1 + \left| \ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right| \right)^{3/2} D^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right) dy_n \right. \\
&\quad \left. \times \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \text{const} (\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)},
\end{aligned}$$

где постоянная не зависит от u и η .

Таким образом, для произвольных $u \in \mathcal{U}(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$ имеет место оценка

$$|\langle Tu, \eta \rangle| \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)}$$

с независимой от u и η постоянной. Так как функции η из $C_0^\infty(Q)$ всюду плотны в $\dot{H}_1(Q)$, то из полученной оценки немедленно вытекает ограниченность оператора $T: \mathcal{U}(Q) \rightarrow [\dot{H}_1(Q)]^*$.

Далее, пусть $u \in \dot{W}_2^1(Q)$. В силу (10)

$$\begin{aligned}
\left| \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx \right| &\leq M \int_Q \frac{|\nabla u(x)| |\eta(x)|}{r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/4}} dx \\
&\leq M \left(\int_Q |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^2(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{1/2} \\
&\leq M \|u\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)} dx \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Харди, имеем

$$\begin{aligned}
\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)} dx &\leq \int_{Q_{\ell_0}} \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)} dx + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)} dx \\
&\leq \frac{1}{\ell_0^2} \int_Q \eta^2(x) dx + \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} \frac{\tilde{\eta}^2(y)}{y_n^2} dy \\
&= \frac{1}{\ell_0^2} \int_Q \eta^2(x) dx + \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \int_0^h dy_n \int_{|y'| < \ell_m} \frac{\left(\int_0^{y_n} \tilde{\eta}_\tau(y', \tau) d\tau \right)^2}{y_n^2} dy' \\
&\leq \text{const} \int_Q |\nabla \eta|^2 dx + \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \int_{|y'| < \ell_m} dy' \int_0^h \left(\frac{\int_0^{y_n} \tilde{\eta}_\tau(y', \tau) d\tau}{y_n} \right)^2 dy_n \\
&\leq \text{const} \left(\int_Q |\nabla \eta|^2 dx + \sum_{m=1}^p \int_{|y'| < \ell_m} dy' \int_0^h \tilde{\eta}_{y_n}^2(y', y_n) dy_n \right) \\
&\leq \text{const} \left(\int_Q |\nabla \eta|^2 dx + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} |\nabla \tilde{\eta}(y)|^2 dy \right) \leq \text{const} \int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx. \quad (18)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx \right| \leq \text{const} \|u\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)},$$

где постоянная не зависит от u и η .

В силу (11)

$$\begin{aligned}
\left| \int_Q (\bar{c}(x)u(x), \nabla \eta(x)) dx \right| &\leq \int_Q C(r(x)) |u(x)| |\nabla \eta(x)| dx \\
&\leq \left(\int_Q C^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \left(C^2(\ell_0) \int_{Q_{\ell_0}} u^2(x) dx + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} C^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\
&\leq \left(C^2(\ell_0) \|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' dy_n \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_0^h dy_n \int_{|y'| < \ell_m} C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{\dot{W}_2^1(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_0^h C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) y_n \| |\nabla \tilde{u}| \|_{L_2(\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, y_n})}^2 dy_n \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{\dot{W}_2^1(Q)}^2 + \int_0^h y_n C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) dy_n \sum_{m=1}^p \| |\nabla \tilde{u}| \|_{L_2(\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h})}^2 \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{\dot{W}_2^1(Q)}^2 + \| |\nabla u| \|_{L_2(Q)}^2 \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \text{const} \|u\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)},
\end{aligned}$$

где постоянная не зависит от u и η .

И, наконец, в силу (12) и (18) аналогично предыдущим оценкам имеем

$$\begin{aligned}
\left| \int_Q d(x)u(x)\eta(x) dx \right| &\leq \int_Q D(x)|u(x)| |\eta(x)| dx \\
&\leq \left(\int_Q r^2(x)D^2(r(x))u^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)} dx \right)^{1/2} \\
&\leq \text{const} \left(D^2(\ell_0) \max_{x \in \overline{Q}_{\ell_0}} r^2(x) \int_{Q_{\ell_0}} u^2(x) dx \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} r^2(x)D^2(r(x))u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} y_n^2 D^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y_n\right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' dy_n \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{\dot{W}_2^1(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_0^h dy_n \int_{|y'| < l_m} y_n^2 D^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y_n\right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{\dot{W}_2^1(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_0^h y_n^3 D^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y_n\right) \|\nabla \tilde{u}\|_{L_2(\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, y_n})}^2 dy_n \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{\dot{W}_2^1(Q)}^2 + \int_0^h y_n^3 D^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y_n\right) dy_n \sum_{m=1}^p \|\nabla \tilde{u}\|_{L_2(\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h})}^2 \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\
&\leq \text{const} (\|u\|_{\dot{W}_2^1(Q)}^2 + \|\nabla u\|_{L_2(Q)}^2)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \text{const} \|u\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)},
\end{aligned}$$

где постоянная не зависит от u и η .

Таким образом, для произвольных $u \in \dot{W}_2^1(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$ имеет место оценка

$$|\langle Tu, \eta \rangle| \leq \text{const} \|u\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)}$$

с не зависящей от u и η постоянной. Из полученной оценки немедленно вытекает ограниченность оператора $T: \dot{W}_2^1(Q) \rightarrow \dot{W}_2^{-1}(Q)$. Лемма 1 доказана.

В [2] установлено, что для любой правой части $g' \in [\dot{H}_1(Q)]^*$ существует и единственно решение задачи

$$-\text{div}(A\nabla u) = g', \quad u|_{\partial Q} = 0 \quad (19)$$

(из $W_{2, \text{loc}}^1(Q)$); это решение принадлежит пространству $\dot{H}(Q)$ и имеет место оценка $\|u\|_{\dot{H}(Q)} \leq C \|g'\|_{[\dot{H}_1(Q)]^*}$ с не зависящей от g' постоянной. Следовательно, если через $\mathcal{L}_0^{-1}$ обозначить оператор, ставящий в соответствие правой части g' решение u задачи (19), то $\mathcal{L}_0^{-1}$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из $[\dot{H}_1(Q)]^*$ в $\dot{H}(Q)$. Кроме того, как хорошо известно (см., например, [13]), оператор $\mathcal{L}_0^{-1}$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ в $\dot{W}_2^1(Q)$. Таким образом, из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 2. $\mathcal{L}_0^{-1}T$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из $\mathcal{U}(Q)$ в $\dot{H}(Q)$ и из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^1(Q)$.

Пусть w является решением задачи (15), (16). Так как $f, \operatorname{div} F \in [\dot{H}_1(Q)]^*$ (см. [2]), то нетрудно видеть, что w является также решением операторного уравнения $w = \mathcal{L}_0^{-1}Tw + \mathcal{L}_0^{-1}Tv + \mathcal{L}_0^{-1}(f - \operatorname{div} F)$ в пространстве $\mathcal{U}(Q)$, где $v \in \mathcal{U}(Q)$ – решение задачи (13), (14). С другой стороны, если функция w из пространства $\mathcal{U}(Q)$ является решением операторного уравнения $w = \mathcal{L}_0^{-1}(Tw + Tv + f - \operatorname{div} F)$, то w является также решением задачи (15), (16). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. w является решением задачи (15), (16) тогда и только тогда, когда w является решением операторного уравнения

$$w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = \mathcal{L}_0^{-1}g, \quad w \in \mathcal{U}(Q), \quad (20)$$

с $g = Tv + f - \operatorname{div} F$; $v \in \mathcal{U}(Q)$ – решение задачи (13), (14).

Далее наряду с уравнением (20) рассмотрим соответствующее операторное уравнение в пространстве $\dot{H}(Q)$

$$w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = h, \quad w \in \dot{H}(Q), \quad (21)$$

с $h \in \dot{H}(Q)$. Из леммы 2 следует справедливость следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть w является решением операторного уравнения (20) в $\mathcal{U}(Q)$ с $g \in [\dot{H}_1(Q)]^*$. Тогда w является решением операторного уравнения (21) в $\dot{H}(Q)$ с $h = \mathcal{L}_0^{-1}g$.

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле справедливо более сильное утверждение, а именно, если правая часть операторного уравнения (20) принадлежит $\dot{H}(Q)$, то решение операторного уравнения (20) (решение в пространстве $\mathcal{U}(Q)$) принадлежит $\dot{H}(Q)$.

Объединяя утверждение 2 и утверждение 3, получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для того чтобы функция w являлась решением задачи (15), (16) необходимо и достаточно, чтобы функция w являлась решением операторного уравнения (21) в пространстве $\dot{H}(Q)$ с правой частью $h = \mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \operatorname{div} F)$, где v – решение задачи (13), (14).

Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_0^{-1}T$ в гильбертовых пространствах $\dot{H}(Q)$ и $\dot{W}_2^1(Q)$. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. $\mathcal{L}_0^{-1}T$ является вполне непрерывным оператором, действующим из $\dot{H}(Q)$ в $\dot{H}(Q)$ и из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^1(Q)$. При этом отвечающие характеристическому числу 1 собственные подпространства оператора $\mathcal{L}_0^{-1}T$ в пространствах $\dot{H}(Q)$ и $\dot{W}_2^1(Q)$ совпадают:

$$\operatorname{Ker}_{\dot{W}_2^1(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T) = \operatorname{Ker}_{\dot{H}(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T), \quad (22)$$

здесь I – тождественный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что T является вполне непрерывным линейным оператором из $\dot{H}(Q)$ в $[\dot{H}_1(Q)]^*$ и из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$. Рассмотрим последовательность действующих из $\dot{H}(Q)$ в $[\dot{H}_1(Q)]^*$ и из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ операторов

$$T_k w = -(\bar{b}_k(x), \nabla w(x)) + \operatorname{div}(\bar{c}_k(x)w(x)) - d_k(x)w(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$\bar{b}_k(x) = \begin{cases} \bar{b}(x), & \text{если } r(x) > \frac{1}{k}, \\ 0, & \text{если } r(x) \leq \frac{1}{k}, \end{cases} \quad \bar{c}_k(x) = \begin{cases} \bar{c}(x), & \text{если } r(x) > \frac{1}{k}, \\ 0, & \text{если } r(x) \leq \frac{1}{k}, \end{cases}$$

$$d_k(x) = \begin{cases} d(x), & \text{если } r(x) > \frac{1}{k}, \\ 0, & \text{если } r(x) \leq \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Легко видеть, что T_k , $k \geq 1$, является вполне непрерывным линейным оператором из $\dot{H}(Q)$ в $[\dot{H}_1(Q)]^*$ и из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$. Действительно, пусть $\{w(x)\}$ – ограниченное множество в $\dot{H}(Q)$ (в $\dot{W}_2^1(Q)$). Тогда, очевидно, множества $\{(\bar{b}_k(x), \nabla w(x))\}$, $\{\operatorname{div}(\bar{c}_k(x)w(x))\}$, $\{d_k(x)w(x)\}$ ограничены в $L_2(Q)$, тем самым, компактны в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ (см., например, [13]) и, конечно же, в $[\dot{H}_1(Q)]^*$. Покажем, что $\|T - T_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \langle (T - T_k)w, \eta \rangle &= - \int_{Q^{1/k}} (\bar{b}(x), \nabla w(x)) \eta(x) dx - \int_{Q^{1/k}} (\bar{c}(x)w(x), \nabla \eta(x)) dx \\ &\quad - \int_{Q^{1/k}} d(x)w(x) \eta(x) dx = I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

где $w \in \dot{H}(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$.

Далее будем следовать схеме доказательства леммы 1. Будем считать, что $k > 1/\ell_0$. В силу (10), (17)

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq M \int_{Q^{1/k}} \frac{|\nabla w(x)| |\eta(x)|}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/4}} dx \\ &\leq M \left(\int_{Q^{1/k}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{1/2} |\nabla w(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{Q^{1/k}} \frac{\eta^2(x)}{r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^2} dx \right)^{1/2} \leq \frac{\operatorname{const}}{(1 + |\ln \frac{1}{k}|)^{1/4}} \|w\|_{\dot{H}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\ &= \varepsilon_1(k) \|w\|_{\dot{H}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

В силу (11)

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \left(\int_{Q^{1/k}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} C^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{Q^{1/k}} \frac{|\nabla \eta(x)|^2}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h} \cap Q^{1/k}} r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} C^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \left(\sum_{m=1}^p \int_0^{\sqrt{5}/(2k)} dy_n \int_{|y'| < \ell_m} y_n \left(1 + \left| \ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right| \right)^{3/2} \right. \\
&\quad \times \left. C^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right) \tilde{w}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \left(\frac{5}{4} \int_0^{1/k} t (1 + |\ln t|)^{3/2} C^2(t) dt \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\sum_{m=1}^p \max_{0 \leq y_n \leq \sqrt{5}/(2k)} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{w}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \varepsilon_2(k) \|w\|_{C_{n-1}(\bar{Q})} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \varepsilon_2(k) \|w\|_{\dot{H}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)},
\end{aligned}$$

где $\varepsilon_2(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

В силу (12), (17) аналогично предыдущим оценкам получаем

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq \left(\int_{Q^{1/k}} r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} D^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\int_{Q^{1/k}} \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{1/2} \\
&\leq \text{const} \left(\sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h} \cap Q^{1/k}} r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} D^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\sum_{m=1}^p \int_0^{\sqrt{5}/(2k)} dy_n \int_{|y'| < \ell_m} y_n^3 \left(1 + \left| \ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right| \right)^{3/2} \right. \\
&\quad \times \left. D^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right) \tilde{w}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\int_0^{1/k} t^3 (1 + |\ln t|)^{3/2} D^2(t) dt \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\sum_{m=1}^p \max_{0 \leq y_n \leq \sqrt{5}/(2k)} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{w}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\int_0^{1/k} t^3 (1 + |\ln t|)^{3/2} D^2(t) dt \right)^{1/2} \|w\|_{C_{n-1}(\bar{Q})} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \\
&\leq \varepsilon_3(k) \|w\|_{\dot{H}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)},
\end{aligned}$$

где $\varepsilon_3(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Таким образом, для всех $w \in \dot{H}(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$ справедлива оценка

$$|\langle (T - T_k)w, \eta \rangle| \leq \varepsilon(k) \|w\|_{\dot{H}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)},$$

где $\varepsilon(k) = \varepsilon_1(k) + \varepsilon_2(k) + \varepsilon_3(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, откуда следует, что $\|T - T_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, оператор T как предел действующих из $\dot{H}(Q)$

в $[\dot{H}_1(Q)]^*$ вполне непрерывных линейных операторов также является вполне непрерывным линейным оператором, действующим из $\dot{H}(Q)$ в $[\dot{H}_1(Q)]^*$. Из того, что линейный оператор $\mathcal{L}_0^{-1}$ ограничен из $[\dot{H}_1(Q)]^*$ в $\dot{H}(Q)$, следует, что оператор $\mathcal{L}_0^{-1}T$ является вполне непрерывным линейным оператором, действующим из $\dot{H}(Q)$ в $\dot{H}(Q)$.

Пусть теперь $w \in \dot{W}_2^1(Q)$. В силу (10), (18)

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq M \int_{Q^{1/k}} \frac{|\nabla w(x)| |\eta(x)|}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/4}} dx \\ &\leq M \left(\int_{Q^{1/k}} |\nabla w(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{Q^{1/k}} \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\text{const}}{(1 + |\ln \frac{1}{k}|)^{3/4}} \|w\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} = \tilde{\varepsilon}_1(k) \|w\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\varepsilon}_1(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

В силу (11)

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \left(\int_{Q^{1/k}} C^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{Q^{1/k}} |\nabla \eta(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h} \cap Q^{1/k}} C^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\ &\leq \left(\sum_{m=1}^p \int_0^{\sqrt{5}/(2k)} dy_n \int_{|y'| < \ell_m} C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) \tilde{w}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\ &\leq \left(\sum_{m=1}^p \int_0^{\sqrt{5}/(2k)} C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) y_n \|\nabla \tilde{w}\|_{L_2(\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, y_n})}^2 dy_n \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\ &\leq \left(\frac{5}{4} \int_0^{1/k} t C^2(t) dt \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^p \|\nabla \tilde{w}\|_{L_2(\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h})}^2 \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\ &\leq \text{const} \left(\int_0^{1/k} t C^2(t) dt \right)^{1/2} \|\nabla w\|_{L_2(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\ &\leq \tilde{\varepsilon}_2(k) \|w\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\varepsilon}_2(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

И, наконец, в силу (12), (18)

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \left(\int_{Q^{1/k}} r^2(x) D^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{Q^{1/k}} \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)} dx \right)^{1/2} \\ &\leq \text{const} \left(\int_{Q^{1/k}} r^2(x) D^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{Q^{1/k}} |\nabla \eta(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \text{const} \left(\sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h} \cap Q^{1/k}} r^2(x) D^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\ &\leq \text{const} \left(\sum_{m=1}^p \int_0^{\sqrt{5}/(2k)} dy_n \int_{|y'| < \ell_m} y_n^2 D^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) \tilde{w}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \text{const} \left(\sum_{m=1}^p \int_0^{\sqrt{5}/(2k)} y_n^3 D^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right) \|\nabla \tilde{w}\|_{L_2(\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, y_n})}^2 dy_n \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\int_0^{1/k} t^3 D^2(t) dt \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^p \|\nabla \tilde{w}\|_{L_2(\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h})}^2 \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\
&\leq \text{const} \left(\int_0^{1/k} t^3 D^2(t) dt \right)^{1/2} \|\nabla w\|_{L_2(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \\
&\leq \tilde{\varepsilon}_3(k) \|w\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)},
\end{aligned}$$

где $\tilde{\varepsilon}_3(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Таким образом, для всех $w \in \dot{W}_2^1(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$ справедлива оценка

$$|\langle (T - T_k)w, \eta \rangle| \leq \tilde{\varepsilon}(k) \|w\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)},$$

где $\tilde{\varepsilon}(k) = \tilde{\varepsilon}_1(k) + \tilde{\varepsilon}_2(k) + \tilde{\varepsilon}_3(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, откуда следует, что $\|T - T_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, оператор T как предел действующих из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ вполне непрерывных линейных операторов также является вполне непрерывным линейным оператором, действующим из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$. Из того, что линейный оператор $\mathcal{L}_0^{-1}$ ограничен из $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ в $\dot{W}_2^1(Q)$, следует, что оператор $\mathcal{L}_0^{-1}T$ является вполне непрерывным линейным оператором, действующим из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^1(Q)$.

Доказательство равенства (22) содержится в работе [14]. Для полноты изложения приведем его и здесь. В силу теоремы Фредгольма подпространства $\text{Ker}_{\dot{W}_2^1(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T)$, $\text{Ker}_{\dot{H}(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T)$ конечномерны и

$$\begin{aligned}
\dim \text{Ker}_{\dot{W}_2^1(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T) &= \dim \text{Ker}_{\dot{W}_2^1(Q)}(I - (\mathcal{L}_0^{-1}T)^*), \\
\dim \text{Ker}_{\dot{H}(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T) &= \dim \text{Ker}_{\dot{H}(Q)}(I - (\mathcal{L}_0^{-1}T)^*).
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
\text{Ker}_{\dot{W}_2^1(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T) &\subseteq \text{Ker}_{\dot{H}(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T), \\
\dim \text{Ker}_{\dot{W}_2^1(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T) &\leq \dim \text{Ker}_{\dot{H}(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T).
\end{aligned}$$

Следовательно, для доказательства равенства (22) достаточно показать, что

$$\dim \text{Ker}_{\dot{W}_2^1(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T) = \dim \text{Ker}_{\dot{H}(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T).$$

Предположим обратное. Пусть

$$\dim \text{Ker}_{\dot{W}_2^1(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T) < \dim \text{Ker}_{\dot{H}(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T).$$

Обозначим

$$E_1 = \text{Ker}_{\dot{W}_2^1(Q)}(I - (\mathcal{L}_0^{-1}T)^*), \quad E_2 = \text{Ker}_{\dot{H}(Q)}(I - (\mathcal{L}_0^{-1}T)^*).$$

Представим пространство $\dot{W}_2^1(Q)$ в виде прямой суммы подпространства E_1 и его ортогонального дополнения $E_1^\perp$ в пространстве $\dot{W}_2^1(Q)$:

$$\dot{W}_2^1(Q) = E_1^\perp \oplus E_1. \quad (23)$$

Представим пространство $\dot{H}(Q)$ в виде

$$\dot{H}(Q) = E_2^\perp \oplus E_2,$$

где $E_2^\perp$ – ортогональное дополнение подпространства E_2 в пространстве $\dot{H}(Q)$. Легко видеть, что $E_1^\perp \subseteq E_2^\perp$. Действительно, если $h \in E_1^\perp$ то в силу теоремы Фредгольма уравнение $u - \mathcal{L}_0^{-1}Tu = h$ имеет решение в пространстве $\dot{W}_2^1(Q)$ и, следовательно, в пространстве $\dot{H}(Q)$. Но тогда из теоремы Фредгольма следует, что $h \in E_2^\perp$. Далее, пространство $\dot{H}(Q)$ представим в виде прямой суммы:

$$\dot{H}(Q) = \overline{E_1^\perp} \oplus (\overline{E_1^\perp})^\perp, \quad (24)$$

где $\overline{E_1^\perp}$ – замыкание в $\dot{H}(Q)$ подпространства $E_1^\perp$, а $(\overline{E_1^\perp})^\perp$ – ортогональное дополнение подпространства $\overline{E_1^\perp}$ в пространстве $\dot{H}(Q)$. Нетрудно видеть, что $(\overline{E_1^\perp})^\perp \supseteq E_2$ и, тем самым,

$$\dim(\overline{E_1^\perp})^\perp \geq \dim E_2 > \dim E_1. \quad (25)$$

С другой стороны, при выполнении условия (25) пространство $\dot{W}_2^1(Q)$, имеющее представление (23), не может быть всюду плотным в пространстве $\dot{H}(Q)$, имеющем представление (24). Из полученного противоречия следует справедливость (22). Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Из теоремы 1 следует, что спектры оператора $\mathcal{L}_0^{-1}T$ в пространствах $\dot{H}(Q)$ и $\dot{W}_2^1(Q)$ совпадают и что его собственные функции из $\dot{H}(Q)$ принадлежат пространству $\dot{W}_2^1(Q)$.

Таким образом, изучение разрешимости задачи (1), (2) сведено к изучению разрешимости операторного уравнения (21) в гильбертовом пространстве $\dot{H}(Q)$ с вполне непрерывным оператором $\mathcal{L}_0^{-1}T$. В силу теоремы Фредгольма пространство решений однородной задачи

$$w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = 0, \quad w \in \dot{H}(Q), \quad (26)$$

конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородной сопряженной задачи

$$w^* - (\mathcal{L}_0^{-1}T)^*w^* = 0, \quad w^* \in \dot{H}(Q), \quad (26^*)$$

и для разрешимости операторного уравнения (21) в пространстве $\dot{H}(Q)$ необходимо и достаточно условие ортогональности правой части h подпространству решений сопряженной однородной задачи (26*). В частности, операторное уравнение (21) в пространстве $\dot{H}(Q)$ имеет решение при любой h из $\dot{H}(Q)$, если однородная задача (26) имеет только тривиальное решение $w \equiv 0$. Из вышеизложенного, леммы 1 и утверждения 4 вытекает справедливость следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пространство решений однородной задачи (26) конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородной сопряженной задачи (26*). Любое решение однородной задачи (26) принадлежит $\dot{W}_2^1(Q)$. Для того чтобы задача (15), (16) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений w^* однородной задачи (26*)

выполнялось условие

$$(\mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \operatorname{div} F), w^*)_{\dot{H}(Q)} = 0, \quad (27)$$

где v – решение задачи (13), (14).

При этом существует единственное решение $w(x)$ задачи (15), (16), ортогональное (в $\dot{H}(Q)$) всем решениям однородной задачи (26), и для него справедлива оценка

$$\|w\|_{\dot{H}(Q)} \leq C(\|v\|_{\mathcal{H}(Q)} + \|f\|_{[\dot{H}_1(Q)]^*} + \|\operatorname{div} F\|_{[\dot{H}_1(Q)]^*}) \quad (28)$$

с не зависящей от v , f и F постоянной.

Из последнего утверждения, теоремы 1 и утверждения 1 получаем справедливость следующей теоремы о разрешимости задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (3), (5)–(8), (10)–(12) и $u_0 \in L_2(\partial Q)$. Тогда для того чтобы задача (1), (2) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений w^* однородной задачи (26*) выполнялось условие (27), где v – решение задачи (13), (14) с той же функцией u_0 .

Решение задачи (1), (2) принадлежит пространству $C_{n-1}(\overline{Q})$. При этом существует единственное решение задачи (1), (2) вида $u = v + w$, где w – решение задачи (15), (16), ортогональное в $\dot{H}(Q)$ всем решениям однородной задачи (26). Для этого решения справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|u\|_{C_{n-1}(\overline{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx \\ & \leq \operatorname{const} \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2 + \int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} f^2(x) dx \right. \\ & \quad \left. + \int_Q r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} |F(x)|^2 dx \right) \end{aligned} \quad (29)$$

с не зависящей от u_0 , f и F постоянной.

Если однородная задача $\mathcal{L}u = 0$, $u|_{\partial Q} = 0$ в $W_2^1(Q)$ -постановке имеет только тривиальное решение, то решение неоднородной задачи (1), (2) в $W_{2,\operatorname{loc}}^1(Q)$ -постановке существует при всех u_0 , f , F . Решение единственно и удовлетворяет неравенству (29).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы достаточно установить справедливость оценки (29). Остальные утверждения теоремы, как уже отмечалось, вытекают из доказанных выше утверждений.

Пусть u – решение (единственное) задачи (1), (2) вида $u = v + w$, где v – решение задачи (13), (14), а w – решение задачи (15), (16), ортогональное в $\dot{H}(Q)$ всем решениям однородной задачи (26). Тогда

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{H}(Q)} & \leq \|v\|_{\mathcal{H}(Q)} + \|w\|_{\mathcal{H}(Q)} \leq \operatorname{const}(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \|w\|_{\dot{H}(Q)}) \\ & \leq \operatorname{const}(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \|\mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \operatorname{div} F)\|_{\dot{H}(Q)}) \\ & \leq \operatorname{const}(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \|f\|_{[\dot{H}_1(Q)]^*} + \|\operatorname{div} F\|_{[\dot{H}_1(Q)]^*}), \end{aligned}$$

постоянная не зависит от u_0 , f , F .

Далее, в силу (17) для произвольной функции η из $C_0^\infty(Q)$

$$\begin{aligned} |\langle f, \eta \rangle| &= \left| \int_Q f(x) \eta(x) dx \right| \leq \left(\int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} f^2(x) dx \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{1/2} \\ &\leq \text{const} \left(\int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} f^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)}, \end{aligned}$$

где постоянная не зависит от f, η ,

$$\begin{aligned} |\langle \text{div } F, \eta \rangle| &= \left| \int_Q (F(x), \nabla \eta(x)) dx \right| \\ &\leq \left(\int_Q r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} |F(x)|^2 dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|f\|_{[\dot{H}_1(Q)]^*} \leq \text{const} \left(\int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} f^2(x) dx \right)^{1/2},$$

постоянная не зависит от f , а

$$\|\text{div } F\|_{[\dot{H}_1(Q)]^*} \leq \left(\int_Q r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} |F(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{W}(Q)} &\leq \text{const} \left(\|u_0\|_{L_2(Q)} + \left(\int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} f^2(x) dx \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_Q r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} |F(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

с не зависящей от u_0, f, F постоянной. Теорема 2 доказана.

Список литературы

- [1] А. К. Гушин, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, *Матем. сб.*, **137(179)**:1(9) (1988), 19–64; англ. пер.: А. К. Gushchin, “On the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation”, *Math. USSR-Sb.*, **65**:1 (1990), 19–66.
- [2] А. К. Гушин, В. П. Михайлов, “О существовании граничных значений решений эллиптического уравнения”, *Матем. сб.*, **182**:6 (1991), 787–810; англ. пер.: А. К. Gushchin, V. P. Mikhailov, “On the existence of boundary values of solutions of an elliptic equation”, *Math. USSR-Sb.*, **73**:1 (1992), 171–194.

- [3] В. П. Михайлов, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, *Дифференц. уравнения*, **12**:10 (1976), 1877–1891; англ. пер.: V. P. Mikhajlov, “Dirichlet’s problem for a second-order elliptic equation”, *Math. USSR-Sb.*, **12**:10 (1977), 1320–1329.
- [4] В. П. Михайлов, “О граничных свойствах решений эллиптических уравнений”, *Матем. заметки*, **27**:1 (1980), 137–145.
- [5] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, 2-е изд., Наука, М., 1983; англ. пер. 1-го изд.: V. P. Mikhajlov, *Partial differential equations*, Mir, Moscow, 1978.
- [6] А. К. Гуцин, В. П. Михайлов, “О граничных значениях решений эллиптических уравнений”, *Обобщенные функции и их применения в математической физике* (Москва, 1980), ВЦ АН СССР, М., 1981, 189–205.
- [7] О. И. Богоявленский, В. С. Владимиров, И. В. Волович, А. К. Гуцин, Ю. Н. Дрозжинов, В. В. Жаринов, В. П. Михайлов, “Краевые задачи математической физики”, *Теоретическая и математическая физика*, Тр. МИАН СССР, **175**, Наука, М., 1986, 63–102; англ. пер.: O. I. Bogoyavlenskij, V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, A. K. Gushchin, Yu. N. Drozhzhinov, V. V. Zharinov, V. P. Mikhajlov, “Boundary value problems of mathematical physics”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **175** (1988), 65–105.
- [8] И. М. Петрушко, “О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей”, *Матем. сб.*, **119(161)**:1(9) (1982), 48–77; англ. пер.: I. M. Petrushko, “On boundary values of solutions of elliptic equations in domains with Lyapunov boundary”, *Math. USSR-Sb.*, **47**:1 (1984), 43–72.
- [9] И. М. Петрушко, “О граничных значениях в $\mathcal{L}_p$, $p > 1$, решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей”, *Матем. сб.*, **120(162)**:4 (1983), 569–588; англ. пер.: I. M. Petrushko, “On boundary values in $\mathcal{L}_p$, $p > 1$, of solutions of elliptic equations in domains with a Lyapunov boundary”, *Math. USSR-Sb.*, **48**:2 (1984), 565–585.
- [10] В. Ж. Думанян, “О граничных значениях решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **45**:1 (2010), 31–52; англ. пер.: V. Zh. Dumanyan, “On the boundary values of the solution of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **45**:1 (2010), 26–42.
- [11] В. Ж. Думанян, “О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, *Докл. РАН*, **386**:6 (2002), 735–737; англ. пер.: V. Zh. Dumanyan, “Near-boundary behavior of the solution to the Dirichlet problem for an elliptic second-order equation”, *Dokl. Math.*, **66**:2 (2002), 257–259.
- [12] В. Г. Мазья, *Пространства Соболева*, Изд-во ЛГУ, Л., 1985; англ. пер.: V. G. Maz’ya, *Sobolev spaces*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [13] В. П. Михайлов, А. К. Гуцин, “Дополнительные главы курса “Уравнения математической физики””, Лекц. курсы НОЦ, МИАН, М., 2007, 3–144.
- [14] В. Ж. Думанян, “О собственных подпространствах вполне непрерывного оператора в гильбертовых пространствах”, *Математика в высшей школе*, Сборник научных и методических статей, **6**, Изд-во ГИУА “Чартарагер”, Ереван, 2010, 42–44.

В. Ж. Думанян (V. Zh. Dumanyan)
 Ереванский государственный университет, Армения
 E-mail: duman@ysu.am

Поступила в редакцию
 08.11.2010