Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Агеев, Универсальные G -пространства Пале и изоморфизм абсолютизации экстензоров, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 6, 3–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7817>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:34:24

УДК 515.124.62+515.122.4

С. М. Агеев

Универсальные G -пространства Пале и изовариантные абсолютные экстензоры

В работе развивается теория изовариантных экстензоров, ранее введенных Пале. Доказано существование инъективных объектов изовариантной категории и изучены их свойства.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: классифицирующие G -пространства, изовариантный абсолютный экстензор.

§ 1. Введение

Одной из продуктивных тенденций в изучении пространств с действием компактной группы G является их рассмотрение как обобщенных главных G -расслоений. Этот подход оправдывает себя имеющейся эквивалентностью категорий свободных G -пространств и главных G -расслоений (выражающейся в том, что орбитная проекция свободного G -пространства есть главное G -расслоение, а тотальное пространство главного G -расслоения каноническим образом наделяется свободным действием).

При переходе к произвольным действиям мы будем придерживаться принципа естественности, выражающегося в стремлении сохранить в строящейся категории обобщенных расслоений как можно большее число характерных свойств главных G -расслоений (в числе которых – возможность их гомотопической классификации с помощью универсальных главных G -расслоений). Если с объектами такой категории все ясно – это G -пространства, то с выбором морфизмов не все так однозначно, поскольку за пределами класса свободных G -пространств эквивариантные отображения начинают вести себя по-иному: точки из одной орбиты начинают под их действием склеиваться (чего не происходит в случае с изовариантными отображениями). Это наблюдение приводит к альтернативе между категорией метрических G -пространств и эквивариантных отображений (EQUIV-TOP) и категорией метрических G -пространств и изовариантных отображений (ISOV-TOP).

Однако категория EQUIV-TOP с заявленных позиций обладает существенным дефектом: в ней классификация G -пространств не возможна ни в каком разумном смысле, поскольку все морфизмы, идущие в эквивариантно стягиваемое пространство, G -гомотопны постоянному отображению. В пользу же изовариантной категории свидетельствует теорема о накрывающей гомотопии G -пространств, являющаяся аналогом соответствующего факта для главных

G -расслоений. Чтобы окончательно подтвердить правильность выбора последней категории, мы подвергаем детальному анализу инъективные объекты категории ISOV-TOP или *изовариантные абсолютные экстензоры* (Isov-AE-пространства)¹.

Если такой объект существует, то его пространство орбит осуществляет классификацию всех G -пространств, а категория ISOV-TOP является гомотопической [2]. Вот его и следовало бы трактовать как универсальное обобщенное главное G -расслоение. Однако полученные частичные результаты в проблеме Пале существования изовариантных абсолютных экстензоров относятся к конечномерному случаю при некоторых ограничениях на орбитный тип [1; 2.6.] и без таковых [3], а методы, выработанные в процессе их установления, в общем бесконечномерном случае не работают.

Из устанавливаемой нами теоремы 3.2 следует полное решение проблемы Пале: изовариантные абсолютные экстензоры существуют без всяких ограничений на размерность и на орбитный тип. Например, годится счетная степень $\mathbb{J} \Leftarrow (\text{Con } \mathbb{T})^\omega$ метрического конуса $\text{Con } \mathbb{T}$ над дискретным объединением $\mathbb{T}$ всех однородных пространств $G/H \in G\text{-ANE}$: $\mathbb{J} \in \text{Isov-AE}$. Тем самым появляется возможность развивать полноценную теорию экстензоров категории ISOV-TOP, где главными объектами изучения выступают изовариантные абсолютные окрестностные экстензоры – Isov-ANE-пространства.

Оказалось, что построенный в теореме 3.2 изовариантный абсолютный экстензор обладает усиленным свойством продолжения: любое частичное эквивариантное (не обязательно изовариантное) отображение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{X} \in \text{Isov-ANE}$ имеет окрестностное продолжение $\psi: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$, изовариантное на дополнении (теорема 3.3). Это комбинированное свойство продолжения в свою очередь влечет ряд важных соотношений между инъективными объектами изовариантной и более изученной эквивариантной категориями. Среди них выделим следующие:

- любое Isov-A[N]E-пространство является Equiv-A[N]E-пространством (теорема 3.5);
- любое G -отображение $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X} \in \text{Isov-ANE}$ как угодно близко аппроксимируется изовариантным отображением $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$, а любая G -гомотопия $F: \mathbb{Z} \times I \rightarrow \mathbb{X}$ между изовариантными отображениями может быть перестроена в изовариантную гомотопию между теми же отображениями (теорема 8.4).

Отсюда следует важный вывод о том, что свойства эквивариантной и изовариантной гомотопических эквивалентностей для Isov-ANE-пространств равносильны (теорема 8.1).

Далее теория изовариантных экстензоров, развиваемая для компактной группы Ли G , прилагается к исследованию эквивариантной гомотопической категории EQUIV-НОМОТ, объектами которой являются Equiv-ANE-пространства, а морфизмами – G -гомотопические классы эквивариантных отображений. В статье обосновывается тезис о том, что эту категорию

¹Определение такого объекта имеется в работе Р. Пале [1; 2.6.], где использован термин “универсальное G -пространство”.

следует изучать совместно с возникающей изовариантной гомотопической категорией ISOV-HOMOT , объектами которой являются IsoV-ANE -пространства, а морфизмами – изовариантные гомотопические классы изовариантных отображений. Как установлено, забывающий функтор

$$\mathfrak{F}: \text{ISOV-HOMOT} \rightarrow \text{EQUIV-HOMOT}$$

является эквивалентностью категорий, обратным к которому будет строящийся в работе гомотопический функтор Бореля

$$[\mathbf{E}]: \text{EQUIV-HOMOT} \rightarrow \text{ISOV-HOMOT}.$$

Тем самым, изучение G -гомотопического типа Equiv-ANE -пространств полностью и достаточно конструктивно сводится к исследованию изовариантного гомотопического типа IsoV-ANE -пространств. При этом объем информации о G -гомотопическом типе не уменьшается, а привлечение новых объектов – изовариантных экстензоров, позволяет продвинуться в решении ряда вопросов. Например, удастся естественным образом определить эндифунктор в категории EQUIV-HOMOT перехода к пучку орбит данного типа $\mathcal{F} \subset \text{Conj}_G$ (что сделать без предварительной подготовки достаточно затруднительно, например, из-за плохой локальной структуры пучка орбит данного типа даже у хороших пространств).

Построенная эквивалентность гомотопических категорий допускает существенное уточнение, относящееся к пространствам с фиксированным орбитным типом $\mathcal{F} \subset \text{Conj}_G$, для чего предварительно развивается теория экстензоров полных подкатегорий: $\text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-TOP} \subset \text{ISOV-TOP}$ и $\text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-TOP} \subset \text{EQUIV-TOP}$, объектами которых являются метрические G -пространства с орбитным типом $\mathcal{F}$. Абсолютные окрестностные экстензоры этих категорий связаны следующим соотношением: $\text{IsoV}_{\mathcal{F}}\text{-ANE} \subset \text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$ (свойство (1), § 6), класс $\text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$ -пространств совпадает с Equiv-ANE -пространствами, имеющими орбитный тип $\mathcal{F}$ (теорема 6.1). Оказывается, как и в абсолютном случае, забывающий функтор $\mathfrak{F}: \text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT} \rightarrow \text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT}$ является эквивалентностью полных подкатегорий ISOV-HOMOT и EQUIV-HOMOT , объектами которых являются метрические $\text{IsoV}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$ -пространства и $\text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$ -пространства соответственно.

Целый ряд эквивариантных гомотопических инвариантов тесно связан с $\mathcal{F}$ -классифицирующими пространствами в смысле [4], [5] (по-другому, терминальными объектами категории $\text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT}$). К примеру, обобщенные когомологии действующей группы G , рассмотренные в [6], [7], есть когомологии Бредона $\mathcal{F}$ -классифицирующего пространства. По-новому взглянуть на такого рода пространства позволяет эффект *концентрации*, основанный на простом наблюдении: любой пучок $\mathcal{F}$ -орбит изовариантного абсолютного экстензора является $\mathcal{F}$ -классифицирующим пространством. Тем самым, разнообразные $\mathcal{F}$ -классифицирующие пространства оказываются лежащими в едином изовариантном абсолютном экстензоре, пространство орбит которого оказывается разбитым на классифицирующие пространства для подходящих главных расщеплений. Этот прием позволяет осуществлять эффективные вычисления, а в ряде случаев найти в явном виде обобщенные когомологии группы G .

Отметим еще одно обстоятельство, которому настоящая работа обязана своим появлением. Исследуя в [8] пространство орбит $\exp(S^1)/S^1$ гиперпространства $\exp(S^1)$ непустых компактных подмножеств с естественным действием окружности S^1 , Х. Торунчик и Дж. Вест сделали важное наблюдение о том, что некоторые пучки орбитных типов наделяются структурой комплексов Эйленберга–Маклейна. К сожалению их лемма 1 не верна: любое отображение $f: \exp(S^1) \rightarrow (0, 1]$, для которого неравенство $d_H(A, B) < f(A)$, где d_H – метрика Хаусдорфа, влечет вложение $(S^1)_B \subset (S^1)_A$ стабилизаторов, является разрывным в любой точке A с нетривиальным стабилизатором. Это обстоятельство разрушает большую часть работы. Дж. Вест сообщил нам, что все же часть результатов (однако не все, например, это не относится к лемме 9) может быть спасена, если проделать подходящие изменения в лемме 1. Позже похожие структуры появились при изучении топологии компакта Банаха–Мазура [9], [10] (отметим, что работа [11], написанная в то же время, содержит в лемме 5 ошибку, аналогичную [8]).

Являются ли все эти наблюдения курьезным проявлением свойств конкретных пространств или отражением некоей общей закономерности? Одной из целей работы является нахождение ответа на этот интригующий вопрос. Оказывается, именно абсолютные изовариантные экстензоры ответственны за возникновение подобных феноменов: у любого Iso_{S^1} -АЕ-пространства $\mathbb{W}$ пространство орбит $W_{\mathcal{O}}$ дискретных орбитных типов есть комплекс Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Q}, 2)$ (см. теорему 12.1).

Вновь возвращаясь к [8], отметим, что в одной из работ мы покажем универсальность (в смысле Пале) S^1 -пространства $\exp(S^1)$ (также как и универсальность $O(2)$ -пространства выпуклых тел в $\mathbb{R}^2$). Тем самым, все результаты работы Торунчика и Веста останутся верными, несмотря на обнаруженные в ней пробелы.

§ 2. Предварительные сведения и результаты

Везде в дальнейшем пространства (отображения), если они не возникают в результате некоторых построений и если не оговорено противное, предполагаются метрическими (непрерывными), рассматриваются только действия компактных групп Ли.

Приведем основные понятия теории G -пространств [12]. Под действием компактной группы G на пространстве $\mathbb{X}$ понимается непрерывное отображение μ из произведения $G \times \mathbb{X}$ в $\mathbb{X}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

- $\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(g \cdot h, x)$;
- $\mu(e, x) = x$ для всех $x \in \mathbb{X}$, $g, h \in G$ (здесь e – единица группы G).

Как правило, вместо $\mu(g, x)$ будем писать $g \cdot x$, или просто gx . Пространство $\mathbb{X}$ с действием группы G называется G -пространством. Отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ двух G -пространств называется G -отображением или эквивариантным отображением, если $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ для всех $x \in \mathbb{X}$, $g \in G$.

Орбитой $G(x)$ точки $x \in \mathbb{X}$ называется подмножество $\{g \cdot x \mid g \in G\} = G \cdot x$, являющееся замкнутым. Естественное отображение $\pi = \pi_{\mathbb{X}}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}/G$, $x \mapsto G(x)$, пространства $\mathbb{X}$ в пространство факторразбиения $\mathbb{X}/G$ назовем орбитной

проекцией. Пространство факторразбиения с факторной топологией, порожденной π , будем называть *пространством орбит*. Если при этом не возникает путаницы, будем его обозначать через $X \rightleftharpoons \mathbb{X}/G$. Подмножество A называется *инвариантным* или *G -подмножеством*, если $\pi^{-1}\pi(A) = G \cdot A$.

Для каждой точки $x \in \mathbb{X}$ подмножество $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ является замкнутой подгруппой в группе G и называется *стабилизатором точки x* . Для любой замкнутой подгруппы $H < G$ введем в рассмотрение следующие подмножества $\mathbb{X}$:

$$\mathbb{X}^H = \{x \in \mathbb{X} \mid H \cdot x = x\} = \{x \in \mathbb{X} \mid H \subset G_x\}$$

(множество H -неподвижных точек),

$$\mathbb{X}_H = \{x \in \mathbb{X} \mid H = G_x\}, \quad \mathbb{X}_{(H)} = \{x \in \mathbb{X} \mid H \text{ сопряжена с } G_x\}.$$

Пусть $\mathcal{F}$ – семейство орбитных типов (т.е. подмножество множества Conj_G классов сопряженности замкнутых подгрупп G). Тогда множество $\mathbb{X}_{\mathcal{F}} \rightleftharpoons \{x \mid (G_x) \in \mathcal{F}\} \subset \mathbb{X}$ будем называть *$\mathcal{F}$ -орбитным пучком $\mathbb{X}$* . Скажем, что задано G -пространство $\mathbb{X}$ *орбитного типа $\mathcal{F}$* или просто G - $\mathcal{F}$ -пространство, если $\mathbb{X} = \mathbb{X}_{\mathcal{F}}$.

Отметим, что метрические G -пространства орбитного типа $\mathcal{F}$ и G -отображения между ними образуют категорию, которую мы обозначим через $G_{\mathcal{F}}$ -ТОР или $\text{EQUIV}_{\mathcal{F}}$ -ТОР, если ясно о какой группе G идет речь. Мы свободно будем использовать символ “ G -” или “ Equiv- ”, означающий *эквивариантный*. Если “***” есть известное понятие из неэквивариантной топологии, то “ G -***” или “ Equiv-*** ” обозначает соответствующий эквивариантный аналог.

Эквивариантное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ называется *изовариантным*, если f сохраняет стабилизаторы, т.е. $G_x = G_{f(x)}$ для всех $x \in \mathbb{X}$. Следующий полезный факт – *критерий эквиморфности* – широко известен (см. [12; с.77, предложение 10] и [5; 8.1.3.]).

ТЕОРЕМА 2.1. *Изовариантное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ является эквиморфизмом в том и только том случае, когда f индуцирует гомеоморфизм пространств орбит X и Y .*

Категорию, образованную метрическими G -пространствами орбитного типа $\mathcal{F}$ и изовариантными отображениями, обозначим через $\text{ISOV}_{\mathcal{F}}$ -ТОР (всегда будет ясно о какой группе G идет речь).

Введем ряд понятий, связанных с продолжением G -отображений в категории $\mathcal{C}$, совпадающей с $\text{ISOV}_{\mathcal{F}}$ -ТОР или с $\text{EQUIV}_{\mathcal{F}}$ -ТОР. Пространство $\mathbb{X}$ с действием компактной группы G , являющееся объектом категории $\mathcal{C}$, называется *абсолютным окрестностным $\mathcal{C}$ -экстензором* (обозначается $\mathbb{X} \in \mathcal{C}\text{-ANE}$), если каждый морфизм $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{X}$ из $\mathcal{C}$, определенный на замкнутом G -подмножестве $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}$ G -пространства $\mathbb{Z}$ и называемый *частичным $\mathcal{C}$ -морфизмом*, может быть продолжен на некоторую G -окрестность $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$ множества $\mathbb{A}$ до морфизма $\hat{\varphi}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X} \in \mathcal{C}$. Если всегда возможно сделать $\mathbb{U}$ равным $\mathbb{Z}$, то $\mathbb{X}$ называется *абсолютным $\mathcal{C}$ -экстензором*, $\mathbb{X} \in \mathcal{C}\text{-AE}$. Если действующая группа G тривиальна (т.е. пространства рассматриваются без действий), то введенное понятие трансформируется в понятие абсолютных [окрестностных] экстензоров для метрических пространств – $\text{A}[N]\text{E}$ (см. [14], [15]).

Если $\mathcal{C}$ совпадает с категорией EQUIV-TOP (ISOV-TOP), то абсолютные [окрестностные] $\mathcal{C}$ -экстензоры будут называться эквивариантными [окрестностными] экстензорами (изовариантными [окрестностными] экстензорами) или кратко – $\text{Equiv-A}[N]\text{E}$ - или $\text{Equiv}_G\text{-A}[N]\text{E}$ -пространствами (кратко – $\text{Isov-A}[N]\text{E}$ - или $\text{Isov}_G\text{-A}[N]\text{E}$ -пространствами). Всюду далее инъективные объекты категории EQUIV- $\mathcal{C}$ -TOP (ISOV- $\mathcal{C}$ -TOP) будем обозначать через $\text{Equiv}_{\mathcal{C}}\text{-A}[N]\text{E}$ ($\text{Isov}_{\mathcal{C}}\text{-A}[N]\text{E}$).

Метрическое G -пространство $\mathbb{X}$ называется *эквивариантным абсолютным окрестностным ретрактом*, $\mathbb{X} \in G\text{-ANR}$, если для любого замкнутого G -вложения $\mathbb{X}$ в метрическое G -пространство $\mathbb{Z}$ существует окрестностная G -ретракция $r: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$, $r \circ r = r$. Если всегда возможно выбрать G -ретракцию r , определенную на $\mathbb{U} = \mathbb{Z}$, то $\mathbb{X}$ называется *эквивариантным абсолютным ретрактом*, $\mathbb{X} \in G\text{-AR}$. Так как любое метрическое G -пространство $\mathbb{X}$ может быть замкнуто G -вложено в $G\text{-AE}$ -пространство (см. [13]), то $G\text{-A}[N]\text{E} \equiv G\text{-A}[N]\text{R}$.

Назовем *отображением среза* любое G -отображение $\alpha: \mathbb{X} \rightarrow G/H$, $H < G$, в однородное пространство. Известная теорема о срезе (см., например, [12]) утверждает, что любая орбита имеет окрестность $\mathbb{U}$, допускающую отображение среза $\varphi: \mathbb{U} \rightarrow G/G_x \cong_G G(x)$, который тождественен на этой орбите. Этот факт равносильно принадлежности любого однородного пространства G/H классу $G\text{-ANE}$.

Если $\mathcal{C}$ -гомотопия $H: \mathbb{X} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{Y}$ соединяет морфизмы $f, g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ категории $\mathcal{C}$, то будем кратко писать $f \simeq_{\text{Equiv}} g$, если $\mathcal{C} = \text{EQUIV-TOP}$; $f \simeq_{\text{Isov}} g$, если $\mathcal{C} = \text{ISOV-TOP}$. Формулируемая ниже теорема о продолжении $\mathcal{C}$ -гомотопий имеет доказательство, в основных чертах совпадающее с доказательством классической теоремы Борсука о гомотопии.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\mathbb{X} \in \mathcal{C}\text{-ANE}$, $\mathbb{Z} \in \mathcal{C}$. Если $\mathcal{C}$ -гомотопия $H: \mathbb{A} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$ соединяет частичные $\mathcal{C}$ -отображения $f, g: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{X}$, а f допускает продолжение до $\mathcal{C}$ -отображения $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$, то существует продолжение $\mathcal{C}$ -гомотопии H до $\mathcal{C}$ -гомотопии $\hat{H}: \mathbb{Z} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$, соединяющей $\hat{f}$ с некоторым $\mathcal{C}$ -отображением $\hat{g}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$.

$\mathcal{C}$ -отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ называется $\mathcal{C}$ -гомотопической эквивалентностью, если существует $\mathcal{C}$ -отображение $g: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ такое, что $g \circ f$ и $f \circ g$ $\mathcal{C}$ -гомотопны $\text{Id}_{\mathbb{X}}$ и $\text{Id}_{\mathbb{Y}}$ соответственно. Легко видеть, что если f является Isov-гомотопической эквивалентностью (Equiv -гомотопической эквивалентностью), то $f_H: \mathbb{X}_H \rightarrow \mathbb{Y}_H$ ($f^H: \mathbb{X}^H \rightarrow \mathbb{Y}^H$) является гомотопической эквивалентностью для любой подгруппы $H < G$.

Пусть $\mathfrak{R}$ есть множество всех неприводимых ортогональных представлений G (включая тривиальное представление), а $\mathbb{R}_{\varrho}$ и $\mathbb{D}_{\varrho}$ суть пространство представления $\varrho \in \mathfrak{R}$ и его единичный шар. Эквивариантный гильбертов куб $\mathbb{Q}$ для компактной метрической группы G равен $(\prod \{\mathbb{D}_{\varrho} \mid \varrho \in \mathfrak{R}\})^{\omega}$. Эквивариантное гильбертово пространство $\mathbb{L}_2$ равно

$$\left\{ (v_{\varrho}) \in \left(\bigoplus_{\varrho \in \mathfrak{R}} \mathbb{R}_{\varrho} \right)^{\omega} \mid \sum \|v_{\varrho}\|^2 < \infty \right\}.$$

Пусть заданы два G -отображения $\mathbb{C} \xrightarrow{g} \mathbb{A} \xleftarrow{f} \mathbb{B}$. Послойным произведением G -пространств $\mathbb{C}$ и $\mathbb{B}$ относительно отображений g и f называется G -подмножество $\{(c, b) \mid g(c) = f(b)\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{B}$, которое обозначается через $\mathbb{C}_g \times_f \mathbb{B}$. Проектирования $\mathbb{D} = \mathbb{C}_g \times_f \mathbb{B}$ на сомножители $\mathbb{C}$ и $\mathbb{B}$ определяют G -отображения $\check{f}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ и $\check{g}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$. Будем $\check{f}$ называть *отображением, параллельным f* , а $\check{g}$ – *отображением, параллельным g* . Если группа G тривиальна, то действие отсутствует и в послойном произведении.

Наиболее важный пример послойного произведения в теории топологических групп преобразований доставляют изовариантные отображения. Если $\pi_X: \mathbb{X} \rightarrow X$ есть орбитная проекция, а $\varphi: Y \rightarrow X$ – непрерывное отображение в пространство орбит, то послойное произведение $\mathbb{Y} \rightleftharpoons Y_\varphi \times_{\pi_X} \mathbb{X}$ естественным образом наделяется действием группы G : $g \cdot (y, x) = (y, g \cdot x)$. Послойное произведение $\mathbb{Y}$ принято называть G -пространством, *индуцированным из $\mathbb{X}$ отображением $\varphi: Y \rightarrow X$* , и обозначать через $\varphi^*(\mathbb{X})$.

Несложно видеть, что пространство орбит $\mathbb{Y} = \varphi^*(\mathbb{X})$ совпадает с Y , орбитная проекция $\pi_Y: \mathbb{Y} \rightarrow Y$ параллельна π_X , а отображение $\check{\varphi}: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$, параллельное φ , является изовариантным. Оказывается, верен и обратный факт (доказательство которого легко следует из критерия эквиморфности).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $h: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ есть изовариантное отображение, $\tilde{h}: Y \rightarrow X$ – отображение пространств орбит, порожденное h . Тогда $\mathbb{Y}$ есть послойное произведение $(\tilde{h})^*(\mathbb{X}) = Y_{\tilde{h}} \times_{\pi_X} \mathbb{X}$, причем h и $\tilde{h}$, а также орбитные проекции π_Y и π_X являются параллельными.

§ 3. Существование изовариантных абсолютных экстензоров

Скажем, что G -пространство $\mathbb{X}$ имеет сложность действия, не уступающую сложности действия G -пространства $\mathbb{Y}$ (кратко, $\mathbb{Y} \leq \mathbb{X}$), если существует изовариантное отображение из $\mathbb{Y}$ в $\mathbb{X}$. Легко установить, что $\mathbb{Y} \leq \mathbb{X}$ в том и только том случае, когда выполнено одно из следующих свойств: либо $\mathbb{Y}$ допускает замкнутое G -вложение в $L \times \mathbb{X}$, где L есть некоторое нормированное пространство, либо G -пространство $\mathbb{Y}$ индуцировано из $\mathbb{X}$ некоторым отображением $f: Y \rightarrow X$ пространств орбит.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Назовем *IsoV-порождающим* любое G -пространство $\mathbb{X}$ с наибольшей сложностью действия (т.е. любое G -пространство $\mathbb{Y}$ допускает изовариантное отображение в $\mathbb{X}$).

Примером IsoV-порождающего пространства является счетная степень $\mathbb{J} \rightleftharpoons (\text{Con } \mathbb{T})^\omega$ метрического конуса $\text{Con } \mathbb{T}$ над дискретным объединением $\mathbb{T}$ всех однородных пространств $G/H \in G\text{-ANE}$ (см. [16]). Следующая теорема выделяет IsoV-AE-пространства среди произведений G -пространств.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть для всех $i \geq 1$ *Equiv-AE-пространство $\mathbb{X}_i$ является IsoV-порождающим пространством*. Тогда $\prod\{\mathbb{X}_i \mid i \geq 1\} \in \text{IsoV-AE}$.

Так как $\mathbb{J}$ является Isov-порождающим, а также Equiv-AE-пространством и, кроме того, $\mathbb{J} \cong \mathbb{J}^\omega$, то из теоремы 3.2 следует $\mathbb{J} \in \text{Isov-AE}$. Доказывать теорему 3.2 будем в следующем уточненном виде, что позволит наделить Isov-AE-пространства рядом дополнительных свойств.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть для всех $i \geq 1$ Equiv-AE-пространство $\mathbb{X}_i$ является Isov-порождающим пространством. Тогда для любого частичного G -отображения $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{X} = \prod\{\mathbb{X}_i \mid i \geq 1\}$ существует такое G -отображение $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$, являющееся продолжением φ , что $\psi|_{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{A}}$ есть изовариантное отображение (т.е. ψ является изовариантным на дополнении).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как класс Equiv-AE-пространств замкнут относительно счетного произведения, то $\mathbb{X} \in \text{Equiv-AE}$ и, следовательно, существует эквивариантное отображение $\widehat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$, продолжающее φ . Поэтому для доказательства достаточно будет найти такое G -отображение $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$, продолжающее $\widehat{\varphi}|_{\mathbb{A}}$, что $\psi|_{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{A}}$ есть изовариантное отображение. Поскольку $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$ замкнуто, то возможно выбрать такие последовательности инвариантных окрестностей $\mathbb{Z} = \mathbb{U}_0 \supset \mathbb{U}_1 \supset \dots$, что $\bigcap\{\mathbb{U}_i \mid i \geq 0\} = \mathbb{A}$.² Пусть G -функции $\chi_i: \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]$, $i \geq 1$, таковы, что $\chi_i^{-1}(0) \supset \mathbb{Z} \setminus \mathbb{U}_i$ и $\chi_i^{-1}(1) \supset \mathbb{U}_{i+1}$.

Представим отображение $\widehat{\varphi}$ в координатном виде $\prod \widehat{\varphi}_i$, где $\widehat{\varphi}_i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}_i$ есть эквивариантное отображение, а также зафиксируем изовариантное отображение $e_i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}_i$ (существующее, так как $\mathbb{X}_i$ является Isov-порождающим). Пусть $H_i: \mathbb{Z} \times I \rightarrow \mathbb{X}_i$ есть Equiv-гомотопия, соединяющая e_i с $\widehat{\varphi}_i$ (существующая, так как $\mathbb{X}_i \in \text{Equiv-AE}$). Ясно, что при $n \geq 1$ формулой

$$\xi_n = \widehat{\varphi}_1 \times \dots \times \widehat{\varphi}_{n-1} \times H_n(z, \chi_{n-1}(z)) \times e_{n+1} \times \dots$$

задается отображение $\xi_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$, изовариантное вне $\mathbb{U}_{n-1}$. Тогда и отображение $\psi_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$, совпадающее с ξ_i на $\mathbb{U}_{i-1} \setminus \mathbb{U}_i$ при $i \leq n$ и совпадающее с $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_1 \times \widehat{\varphi}_2 \times \widehat{\varphi}_3 \times \dots$ на $\mathbb{U}_n$, непрерывно и изовариантно вне $\mathbb{U}_n$. Поскольку последовательность $\{\psi_n\}$ равномерно сходится, то ее предел $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ есть непрерывное отображение, совпадающее с φ на $\mathbb{A}$. Поскольку почти все $\{\psi_i\}$ вне $\mathbb{U}_n$ совпадают с ψ_{n+1} , то отображение ψ изовариантно на дополнении к $\mathbb{A}$.

Зафиксируем замкнутое топологическое вложение $j: X \hookrightarrow L$ пространства орбит произвольного G -пространства $\mathbb{X}$ в некоторое линейное нормированное пространство L [15]. Поскольку $\mathbb{J} = (\text{Con } \mathbb{T})^\omega$ является Isov-порождающим [16], то существует изовариантное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{J}$. Очевидно, что произведение $(j \circ p) \times f$ есть замкнутое топологическое G -вложение $\mathbb{X}$ в G -пространство $\mathbb{Y} = L \times \mathbb{J}$, которое, как легко видеть, есть Isov-AE. Таким образом нами доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.4. *Любое G -пространство допускает замкнутое G -вложение в Isov-AE-пространство $L \times \mathbb{J}$.*

Другими примерами Isov-AE-пространств могут служить эквивариантное гильбертово пространство $\mathbb{L}_2$ и пространство $C(G, \mathbb{R}^1)$ всех непрерывных функций (с метрикой равномерной сходимости) – регулярное представление группы G .

²Будем говорить, что вложение $A \subset B$ строгое и писать $A \Subset B$, если $\text{Cl } A \subset \text{Int } B$.

Так как $L \times \mathbb{J} \in \text{Equiv-AE}$, то из теорем 3.3 и 3.4 легко вывести важное соотношение между инъективными объектами изовариантной и эквивариантной категорий.

ТЕОРЕМА 3.5. *Для любого $\text{IsoV-A}[N]\text{E}$ -пространства $\mathbb{X}$ справедливо утверждение теоремы 3.3, и, следовательно, любое $\text{IsoV-A}[N]\text{E}$ -пространство является $\text{Equiv-A}[N]\text{E}$ -пространством.*

Скажем, что G -пространство $\mathbb{X}$ является *локально IsoV-стягиваемым* в точке $x \in \mathbb{X}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая эквивариантная гомотопия $H: \mathbb{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$ некоторой окрестности $\mathbb{U} \ni x$, что:

- (1) $H_t: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$ является изовариантным отображением для всех $t < 1$;
- (2) $H_0 = \text{Id}$, а H_1 переводит $\mathbb{U}$ в орбиту $G(x)$;
- (3) $\text{diam } H(x, [0, 1]) \leq \varepsilon$.

Если свойства (1)–(2) имеют место для некоторой точки $x \in \mathbb{X}^G$ и $\mathbb{U} = \mathbb{X}$, то будем говорить, что G -пространство $\mathbb{X}$ является *IsoV-стягиваемым*; G -пространство $\mathbb{X}$ называется *локально IsoV-стягиваемым* (кратко $\mathbb{X} \in \text{IsoV-LC}$), если $\mathbb{X}$ является локально IsoV-стягиваемым в любой точке $x \in \mathbb{X}$.

Из теоремы 3.3 легко следует, что любое IsoV-AE-пространство является IsoV-стягиваемым. Чуть сложнее устанавливается локальный вариант этого факта.

ТЕОРЕМА 3.6. *Любое IsoV-ANE-пространство $\mathbb{Y}$ является IsoV-LC-пространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко установить, используя конкретный вид IsoV-AE-пространства $\mathbb{J}$, что $L \times \mathbb{J} \in \text{IsoV-LC}$ для любого линейного нормированного пространства L . Далее следует применить теорему 3.4 и воспользоваться замкнутостью класса IsoV-LC-пространств при изовариантных ретракциях.

Если $\mathbb{X} \in \text{Equiv-AE}$, то пучок орбит $\mathbb{X}_{\leq(H)} \equiv \{x \in \mathbb{X} \mid G_x \text{ сопряжена с подгруппой, лежащей в } H\}$, вообще говоря, не является AE-пространством. Однако изовариантные экстензоры ведут себя по-другому.

ТЕОРЕМА 3.7. *Если $H < G$ есть подгруппа метризуемой компактной группы G , то из $\mathbb{X} \in \text{IsoV}_G\text{-A}[N]\text{E}$ следует $\mathbb{Y} \in \text{IsoV}_H\text{-A}[N]\text{E}$, где $\mathbb{Y}$ совпадает с $\mathbb{X}$, либо с одним из его G -подпространств: $\mathbb{X}_{\leq(H)}$ или $\mathbb{X}_{\leq H} \equiv \{x \in \mathbb{X} \mid G_x \subset H\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любое частичное H -изовариантное отображение $\mathbb{Z} \hookleftarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Y}$ порождает частичное G -отображение

$$G \times_H \mathbb{Z} \hookleftarrow G \times_H \mathbb{A} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{X}, \quad \text{заданное формулой } \Phi([g, a]) = g \cdot \varphi(a).$$

Вообще говоря, Φ не является изовариантным отображением, так как $H_x = G_x \cap H$ и стабилизаторы H_x и G_x , вообще говоря, не совпадают. Однако в силу теоремы 3.3, если $\mathbb{X} \in \text{IsoV}_G\text{-AE}$, то существует глобальное G -продолжение $\hat{\Phi}: G \times_H \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ G -отображения Φ , являющееся G -изовариантным на дополнении.

Далее под *орбитными соображениями* будем понимать сравнение G -стабилизаторов точек и их образов под действием изовариантного отображения. Так

как G -стабилизатор любой точки u из $\{e\} \times_H (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{A})$ сохраняется под действием $\widehat{\Phi}$, то $G_{\widehat{\Phi}(u)} \subset H$. Поэтому $\widehat{\Phi}(G \times_H (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{A})) \subset \mathbb{X}_{\leq (H)}$, а $\widehat{\Phi}(\{e\} \times_H (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{A})) \subset \mathbb{X}_{\leq H}$.

Очевидно, что ограничение $\widehat{\Phi}$ на $\{e\} \times_H \mathbb{Z} \cong_H \mathbb{Z}$ и есть искомое глобальное H -изовариантное продолжение $\widehat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$ отображения φ на $\mathbb{Z}$. Следовательно, $\mathbb{Y} \in \text{IsoV}_H\text{-AE}$. Аналогично доказывается локальный вариант теоремы – $\mathbb{X} \in \text{IsoV}_H\text{-ANE}$.

Несложно устанавливается, что метрическое IsoV-A[N]E -пространство $\mathbb{X}$ распадается в дизъюнктное объединение A[N]E -пространств X_H , $H < G$. Оказывается, и в совокупности семейство $\{X_H \mid H < G\}$ также обладает экстензорным свойством.

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть $\mathbb{X}$ – метризуемое IsoV-A[N]E -пространство. Тогда:

- (a) $X_H \in \text{A[N]E}$ для любой подгруппы $H < G$;
- (b) семейство $\{X_H \mid H < G\}$ обладает свойством³ equi-LAE, в частности, является равностепенно локально стягиваемым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) Для любого частичного отображения $W \hookrightarrow A \xrightarrow{\varphi} X_H$ введем в рассмотрение частичное G -отображение $G/H \times W \hookrightarrow G/H \times A \xrightarrow{\Phi} X$, заданное формулой $\Phi(gH, a) = g \cdot a$. Если $X \in \text{IsoV-AE}$, то существует глобальное G -продолжение $\widehat{\Phi}: G/H \times W \rightarrow X$ G -отображения Φ , являющееся G -изовариантным на дополнении. Тогда ограничение $\widehat{\Phi}$ на $(e \cdot H) \times A$ есть искомое продолжение отображения φ . Локальный вариант доказывается аналогично.

(b) Сначала введем вспомогательное определение. Скажем, что *частичное отображение* $W \hookrightarrow A \xrightarrow{\varphi} X$ в G -пространство X *сходится* к $x_0 \in X$, если существует такая точка $w_0 \in A$, что $W \setminus \{w_0\}$ есть дискретная сумма $\coprod \{W_i \mid i \geq 1\}$ открыто-замкнутых (в W) подпространств $\{W_i\}$, для которых $\text{dist}(w_0, W_i) < 2^{-i}$, $\varphi(A_i) \subset X_{H_i}$, где $A_i = W_i \cap A$, и $\varphi(w_0) = x_0$. Ясно, что W получается из дискретной суммы $\coprod \{W_i\}$ добавлением одной точки; из непрерывности φ следует, что $\{\varphi(A_i)\} \rightarrow \{x_0\}$.

Предположив, что свойство equi-LAE нарушается в точке $x_0 \in X$, несложно построить сходящееся к x_0 частичное отображение $W \hookrightarrow A \xrightarrow{\varphi} X$, которое не может быть продолжено ни на одну окрестность U точки w_0 так, чтобы

- (4) $W_i \cap U$ переходило в X_{H_i} .

Рассмотрим изовариантное отображение $\varphi': A \times G \rightarrow X$, заданное формулой $\varphi'(a, g) = g \cdot \varphi(a)$, а также отношение эквивалентности на $W \times G$

$$(w_1, g_1) \approx (w_2, g_2) \iff \begin{cases} w_1 = w_2 \text{ и } g_2 \cdot g_1^{-1} \text{ лежит в } H_i, & \text{если } w_1 \in W_i, \\ g_2 \cdot g_1^{-1} \text{ лежит в } G_{x_0}, & \text{если } w_1 = w_2 = w_0. \end{cases}$$

Ясно, что это отношение сохраняется действием группы G , факторпространство $\mathbb{W} = (W \times G)/\approx$ является метрическим G -пространством, а факторпространство $\mathbb{A} = (A \times G)/\approx$ является его замкнутым инвариантным пространством.

³То есть для любой окрестности U точки $x \in X$ существует окрестность V , что для любого частичного отображения $Z \hookrightarrow A \xrightarrow{\varphi} V \cap X_H$ существует его продолжение $\widehat{\varphi}: Z \rightarrow U \cap X_H$.

Несложно видеть, что формулой $\psi([a, g]) = \varphi'(w, g)$ корректно задается непрерывное частичное изовариантное отображение $\mathbb{W} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\psi} \mathbb{X}$. Если $\mathbb{X} \in \text{IsoV-AE}$, то существует глобальное изовариантное продолжение $\hat{\psi}: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$ отображения ψ . Заметим, что $(W \times \{e\})/\approx$, где e – единица группы, естественно лежит в $\mathbb{W}$ и гомоморфно W . В силу изовариантности $\hat{\psi}$ имеем $\hat{\psi}((W_i \times \{e\})/\approx) \subset X_{H_i}$. Если теперь ограничить $\hat{\psi}$ на $(W \times \{e\})/\approx$, то получается непрерывное продолжение φ на все W , удовлетворяющее (4), – противоречие.

Локальный вариант доказывается аналогично.

Приведем без доказательства еще несколько результатов, свидетельствующих о степени расхождения этих двух классов:

- (5) для любого семейства $\mathcal{F} \subset \text{Orb}_G$ существует Equiv-ANE -пространство $\mathfrak{c}(\text{Orb}(\mathbb{X}) = \mathcal{F})$, имеющее стягиваемые $\mathbb{X}^H$ для любого $(H) \in \mathcal{F}$;
- (6) семейство $\mathcal{F} \subset \text{Orb}_G$ является орбитным типом некоторого IsoV-ANE -пространства в том и только том случае, когда $\mathcal{F}$ замкнуто в Orb_G ;
- (7) если $\text{Con } \mathbb{X} \in \text{IsoV-AE}$, а $\mathbb{X}^G \in \text{AE}$, то $\mathbb{X} \in \text{IsoV-AE}$.

§ 4. Изовариантные экстензоры и скрученные произведения

G -пространство, допускающее отображение среза, полезно представлять в виде скрученного произведения. Напомним соответствующие определения: пусть G есть компактная группа Ли, $\mathbb{S}$ – метрическое H -пространство, где $H < G$. Рассмотрим диагональное действие группы H на произведении $G \times \mathbb{S}$, определенное формулой $h \cdot (g, y) = (g \cdot h^{-1}, h \cdot y)$, через $[g, y]$ обозначим элемент $H \cdot (g, y) = \{(g \cdot h^{-1}, h \cdot y) \mid h \in H\}$ пространства орбит $(G \times \mathbb{S})/H$. Оказывается, что формулой $g_1 \cdot [g, y] = [g_1 \cdot g, y]$, где $g, g_1 \in G$, $y \in \mathbb{S}$, корректным образом задается непрерывное действие всей группы G на пространстве орбит $(G \times \mathbb{S})/H$, которое называется *скрученным произведением* и обозначается через $G \times_H \mathbb{S}$.

Если $f: \mathbb{X} \rightarrow G/H$ есть отображение среза G -пространства, то $\mathbb{X}$ можно представить как скрученное произведение $G \times_H \mathbb{S}$, где $\mathbb{S} = f^{-1}([H])$ есть H -срез. Это и другие свойства скрученного произведения излагаются, например, в [12]. Займемся подробным изучением взаимоотношения изовариантных экстензорных свойств задействованных здесь пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{S}$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Если $\mathbb{S} \in \text{IsoV}_H\text{-A}[N]\text{E}$, то $G \times_H \mathbb{S} \in \text{IsoV}_G\text{-ANE}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разберем лишь случай $\mathbb{S} \in \text{IsoV}_H\text{-AE}$, для чего рассмотрим композицию χ частичного G -изовариантного отображения $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} G \times_H \mathbb{S}$ и отображения среза $G \times_H \mathbb{S} \xrightarrow{\psi} G/H$, $\psi[g, s] = [g \cdot H]$. Так как $G/H \in G\text{-ANE}$, то существует продолжение композиции $\chi = \psi \circ \varphi$ до G -отображения $\hat{\chi}: \mathbb{U} \rightarrow G/H$, заданного на окрестности $\mathbb{U} \supset \mathbb{A}$.

Прообразы $\mathbb{U}_0 = \hat{\chi}^{-1}[H] \supset \mathbb{A}_0 = \chi^{-1}[H]$ являются H -пространствами, а частичное H -отображение $\mathbb{U}_0 \hookrightarrow \mathbb{A}_0 \xrightarrow{\varphi \circ \chi^{-1}} \{e\} \times_H \mathbb{S} \cong_H \mathbb{S}$ в силу условия $\mathbb{S} \in \text{IsoV}_H\text{-AE}$ имеет глобальное H -продолжение $v: \mathbb{U}_0 \rightarrow \mathbb{S}$, являющееся H -изовариантным на дополнении. Поскольку $G \times_H \mathbb{U}_0 = \mathbb{U}$, то искомое окрестностное G -изовариантное продолжение $\hat{\varphi}: \mathbb{U} \rightarrow G \times_H \mathbb{S}$ строится по формуле

$\widehat{\varphi}([g, z]) = [g, v(z)]$, где $[g, z]$ есть произвольная точка $\mathbb{U} = G \times_H \mathbb{U}_0$. Корректность $\widehat{\varphi}$ легко следует из эквивариантности v . Следовательно, $G \times_H \mathbb{S} \in \text{Iso}_G\text{-ANE}$.

Локальный вариант теоремы ($\mathbb{S} \in \text{Iso}_H\text{-ANE}$) устанавливается аналогично.

Изучим наследование изовариантных экстензорных свойств при переходе от скрученного произведения $G \times_H \mathbb{S}$ к его срезу $\mathbb{S} \Leftarrow f^{-1}([H])$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть H является замкнутой подгруппой компактной абелевой группы Ли G . Если $G \times_H \mathbb{S} \in \text{Iso}_G\text{-ANE}$, то H -пространство $\mathbb{S}$ есть $\text{Iso}_H\text{-ANE}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наряду с действием группы H на G рассмотрим правое регулярное действие H на G . Тем самым возникает непрерывное действие группы Ли $H \times H$ на G , заданное формулой $(h, h') \cdot g = h \cdot g \cdot (h')^{-1}$. Поскольку H является $(H \times H)$ -орбитой точки e , а $H \times H$ является группой Ли, то H является $\text{Equiv}_{H \times H}\text{-ANE}$ -пространством и, значит, существует $(H \times H)$ -ретракция $r: U \rightarrow H$ некоторой $(H \times H)$ -окрестности $U \subset G$. Тем самым, $r(h \cdot g \cdot h') = h \cdot r(g) \cdot h'$ для всех $h, h' \in H$. Легко проверить, что $(H \times H)$ -стабилизаторы всех точек $g \in G$ совпадают с группой H . Поэтому ретракция r является $(H \times H)$ -изовариантной.

Так как $G \times_H \mathbb{S} \in \text{Iso}_G\text{-ANE}$, то по теореме 3.7 имеем $G \times_H \mathbb{S} \in \text{Iso}_H\text{-ANE}$ и, значит, его открытое H -подмножество $U \times_H \mathbb{S}$ есть $\text{Iso}_H\text{-ANE}$.

Рассмотрим скрученное произведение $R: U \times_H \mathbb{S} \rightarrow H \times_H \mathbb{S} \equiv \mathbb{S}$, $[u, s] \mapsto r(u) \cdot s$, $(H \times H)$ -изовариантной ретракции r и $\text{Id}_{\mathbb{S}}$, которое корректно определено и является H -изовариантной ретракцией H -пространства $U \times_H \mathbb{S}$ на $\mathbb{S}$. Так как $U \times_H \mathbb{S} \in \text{Iso}_H\text{-ANE}$, то $\mathbb{S} \in \text{Iso}_H\text{-ANE}$ как образ при H -изовариантной ретракции.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Если компактная абелева группа Ли G действует на пространстве $\mathbb{X} \in \text{Iso}_G\text{-ANE}$, а $\varphi: \mathbb{U} \rightarrow G/H$ есть срез в точке x , то $\mathbb{S}_{\varphi} = \varphi^{-1}([H]) \in \text{Iso}_H\text{-ANE}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathbb{U} \cong_G G \times_H \mathbb{S}_{\varphi} \in \text{Iso}_G\text{-ANE}$, то в силу теоремы 4.2 имеем $\mathbb{S}_{\varphi} \in \text{Iso}_H\text{-ANE}$.

В завершение параграфа исследуем сохранение изовариантных экстензорных свойств при переходе к пространствам орбит.

ТЕОРЕМА 4.4. *Если $\mathbb{W} \in \text{Iso}_G\text{-AE}$, H есть нормальная подгруппа G (кратко это записывается как $H \triangleleft G$), то G/H -пространство $\mathbb{W}/H \in \text{Iso}_{G/H}\text{-AE}$.*

Поскольку доказательство теоремы основано на методе продолжения действия групп преобразований, то кратко напомним его суть (см. [16]). Диаграмму $\mathcal{D}$ вида $\mathbb{X} \xrightarrow{p} X \xrightarrow{i} Y$, в которой G -пространство $\mathbb{X}$ имеет орбитный тип $\mathcal{F} \subset \text{Orb}_G$, $p: \mathbb{X} \rightarrow X$ есть орбитная проекция, а i – замкнутое топологическое вложение пространства орбит X в метрическое пространство Y , назовем $\mathcal{F}$ -допустимой. Скажем, что задача о продолжении действия (сокращенно ЗПД) разрешима для $\mathcal{F}$ -допустимой диаграммы $\mathcal{D}$, если существует эквивариантное вложение $j: \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ в метрическое G -пространство $\mathbb{Y}$ орбитного типа $\mathcal{F}$ (называемое $\mathcal{F}$ -решением задачи о продолжении действия для данной

диаграммы), накрывающее i , т.е. вложение $\tilde{j}: X \hookrightarrow p(\mathbb{Y})$ пространств орбит, индуцируемое j , в точности совпадает с i (из определения следует, что вложение j замкнуто, а $p(\mathbb{Y}) = Y$). Скажем, что *задача о продолжении действия $\mathcal{F}$ -разрешима*, если существует $\mathcal{F}$ -решение ЗПД для любой $\mathcal{F}$ -допустимой диаграммы $\mathcal{D}$.

Пусть $\mathbb{W}$ является Isov-AE-пространством. Тогда используя то, что $\mathbb{W}_{\mathcal{F}} \in \text{IsoV}_{\mathcal{F}}\text{-AE}$ и действуя аналогично [16], можно доказать, что

- (1) задача о продолжении действия $\mathcal{F}$ -разрешима тогда и только тогда, когда пространство орбит $W_{\mathcal{F}} \in \text{AE}$.

Если семейство орбитных типов $\mathcal{F}$ совпадает с Orb_G , то во всех вышеприведенных определениях спецификация $\mathcal{F}$ опускается. В работах [16], [17] установлено, что задача о продолжении действия разрешима. Более того,

- (2) если $H \triangleleft G$, то для любой диаграммы вида $\mathbb{X} \xrightarrow{p} \mathbb{X}/H \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$, в которой $p: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}/H$ есть H -орбитная проекция, а i – замкнутое топологическое (G/H) -вложение пространства орбит $\mathbb{X}/H$ в метрическое (G/H) -пространство $\mathbb{Z}$, существует G -вложение $j: \mathbb{X} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Z}}$ в метрическое G -пространство $\overline{\mathbb{Z}}$, индуцирующие i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.4. Рассмотрим частичное (G/H) -отображение $\mathbb{Z} \hookleftarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{W}/H$. Пусть $\varphi^*(\mathbb{W})$ есть послойное произведение H -орбитной проекции $\pi: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}/H$ и H -отображения $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{W}/H$. В силу (2) существует G -вложение $j: \varphi^*(\mathbb{W}) \hookrightarrow \overline{\mathbb{Z}}$ в метрическое G -пространство $\overline{\mathbb{Z}}$, индуцирующее вложение $\varphi^*(\mathbb{W})/H \hookrightarrow \overline{\mathbb{Z}}/H$, которое тождественно совпадает с вложением $\mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{Z}$. Возникающее частичное G -отображение $\overline{\mathbb{Z}} \hookleftarrow \varphi^*(\mathbb{W}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{W} \in \text{IsoV-AE}$, параллельное φ , имеет глобальное G -продолжение $\chi: \overline{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{W}$, являющееся G -изовариантным на дополнении. Легко видеть, что (G/H) -отображение $\hat{\varphi}: \mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}}/H \rightarrow \mathbb{W}/H$, индуцированное χ (т.е. $\hat{\varphi}(z) = H \cdot \chi(z')$, где $H \cdot z' = z$), является (G/H) -продолжением φ и является G -изовариантным на дополнении.

§ 5. Гомотопически плотные вложения

Эквивариантное вложение $e: \mathbb{X}_0 \hookrightarrow \mathbb{X}$ называется G -гомотопически плотным, если существует такая G -гомотопия $H: \mathbb{X} \times I \rightarrow \mathbb{X}$, что $H_0 = \text{Id}$ и для всех $t > 0$ $\text{Im } H_t \subset \mathbb{X}_0$. Легко видеть, что данное определение эквивалентно возможности продолжить частичное G -отображение $\mathbb{X} \times I \hookleftarrow \mathbb{X} \times \{0\} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{X}$ до G -отображения $\varphi: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$, заданного на некоторой G -окрестности так, чтобы $\varphi(\mathbb{U} \setminus (\mathbb{X} \times \{0\})) \subset \mathbb{X}_0$. Отметим, что G -гомотопически плотное вложение является G -гомотопической эквивалентностью.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть G есть компактная группа Ли, $\mathbb{X} \in \text{IsoV}_G\text{-ANE}$. Тогда для любой подгруппы $H < G$

- (а) $\mathbb{X}_{\leq H} = \{x \in \mathbb{X} \mid G_x \subset H\}$ H -гомотопически плотно содержится в $\mathbb{X}_{\leq (H)} = \{x \in \mathbb{X} \mid G_x \text{ сопряжена с подгруппой } H\}$;
 (б) вложение $\mathbb{X}_H \hookrightarrow \mathbb{X}^H$ является гомотопически плотным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Частичные H -отображение $\mathbb{Z} \rightleftharpoons \mathbb{A} \times I \hookleftarrow \mathbb{A} \times \{0\} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{X}_{\leq (H)}$ и отображение $Z \rightleftharpoons A \times I \hookleftarrow A \times \{0\} \xrightarrow{\psi} \mathbb{X}^H$ порождают частичные

G -отображение $G \times_H \mathbb{Z} \hookrightarrow G \times_H \mathbb{A} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{X}_{\leq(H)}$, заданное формулой $\Phi([g, a]) = g \cdot \varphi(a)$, и отображение $G/H \times Z \hookrightarrow G/H \times A \xrightarrow{\Psi} \mathbb{X}_{\geq(H)}$, заданное формулой $\Psi(gH, a) = g \cdot \psi(a)$.

Так как $\mathbb{X} \in \text{IsoV-ANE}$, то существуют G -продолжение $\hat{\Phi}$ отображения Φ и G -продолжение $\hat{\Psi}$ отображения Ψ на некоторые G -окрестности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$, являющиеся G -изовариантными на дополнении. Как и в доказательстве теоремы 3.7, применим орбитные соображения: из того, что G -стабилизатор любой точки из $\{e\} \times_H \mathbb{Z}$ содержится в H , а G -стабилизатор любой точки из $eH \times Z$ равен H , следует, что $\Phi((\mathbb{U} \setminus \mathbb{A}) \cap (\{e\} \times_H \mathbb{Z})) \subset \mathbb{X}_{\leq H}$, а $\Psi((\mathbb{V} \setminus \mathbb{A}) \cap (eH \times Z)) \subset \mathbb{X}_H$. Очевидно, что ограничение $\hat{\Phi}$ на $\mathbb{U} \cap (\{e\} \times_H \mathbb{Z})$ и ограничение $\hat{\Psi}$ на $\mathbb{V} \cap (eH \times Z)$ суть искомые окрестностные продолжения.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть G есть компактная группа Ли, $\mathbb{X} \in \text{IsoV}_G\text{-ANE}$. Тогда для любых двух подгрупп $H < K$ отображение $\mathbb{X}^K \hookrightarrow \mathbb{X}^H$ является Z -вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 5.1, (b) композиция вложений $\mathbb{X}_H \hookrightarrow \mathbb{X}^H \setminus \mathbb{X}^K$ и $\mathbb{X}^H \setminus \mathbb{X}^K \hookrightarrow \mathbb{X}^H$ совпадает с гомотопически плотным вложением $\mathbb{X}_H \hookrightarrow \mathbb{X}^H$. Поэтому вложение $\mathbb{X}^H \setminus \mathbb{X}^K \hookrightarrow \mathbb{X}^H$ является гомотопически плотным.

§ 6. Экстензоры категории $\text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-TOP}$, $\mathcal{F} \subset \text{Conj}_G$

Пусть $\mathbb{W}$ есть IsoV-AE -пространство. Из теоремы 3.5 следует, что каждое частичное G -отображение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$, заданное на замкнутом подмножестве G - $\mathcal{F}$ -пространства $\mathbb{Z}$, может быть продолжено на некоторую G -окрестность $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$ множества $\mathbb{A}$ до G -отображения $\hat{\varphi}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{W}$, изовариантного на дополнении $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{A}$. Тем самым, $\hat{\varphi}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$, т.е. $\mathbb{W}_{\mathcal{F}} \in \text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$.

Аналогично теореме 3.4 устанавливается, что любое G -пространство $\mathbb{X} \in \text{IsoV}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$ можно считать замкнутым G -подмножеством в G -пространстве $L \times \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$, где L есть некоторое линейное нормированное пространство. Следовательно, $\mathbb{X}$ является изовариантным окрестностным ретрактом $L \times \mathbb{W}_{\mathcal{F}} \in \text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$, т.е.

(1) любое $\text{IsoV}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$ -пространство $\mathbb{X}$ является $\text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$ -пространством.

Докажем факт, который вместе с (1) позволит утверждать, что

(2) $\text{IsoV}_{\mathcal{F}}\text{-ANE} \subset \text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE} \subset \text{Equiv-ANE}$.

ТЕОРЕМА 6.1. Если $\mathbb{X}$ является $\text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$ -пространством, то $\mathbb{X}$ является Equiv-ANE -пространством.

Доказательство теоремы устанавливается с помощью так называемой *мажорантной задачи о продолжении действия группы*. Напомним, что решение $s: \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ ЗПД для допустимой диаграммы $\mathcal{D} = (\mathbb{X} \xrightarrow{p} X \xrightarrow{i} Y)$ мажорирует решение $s_1: \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}_1$ ЗПД для $\mathcal{D}$, если существует G -отображение $h: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}_1$ такое, что $h \circ s = s_1$, $h|_{\mathbb{X}} = \text{Id}_{\mathbb{X}}$ и $h = \text{Id}_Y$.

Пусть задано (не обязательно $\mathcal{F}$ -) решение $s: \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ ЗПД для $\mathcal{F}$ -допустимой диаграммы $\mathcal{D}$, существование которого установлено в [16]. В работе [18]

доказан ключевой для установления соотношения $\text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE} \subset \text{Equiv}\text{-ANE}$ факт:

- (3) если G есть компактная группа Ли, то существует $\mathcal{F}'$ -решение $s_1: \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ ЗПД для $\mathcal{D}$, мажорируемое решением s , $s \geq s_1$ (здесь $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{(G)\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. Пусть G -пространство $\mathbb{X} \in \text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$ замкнуто содержится в G -пространстве $\mathbb{Y}$. В силу (3) $\mathbb{X}$ замкнуто содержится в G -пространстве $\mathbb{Y}_1$ орбитного типа $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{(G)\}$, для которого имеется G -отображение $h: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}_1$ с $h|_{\mathbb{X}} = \text{Id}_{\mathbb{X}}$. Так как $\mathbb{X}$ является $\text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$ -пространством, то существует окрестностная G -ретракция $\mathbb{Y}_1 \hookrightarrow \mathbb{V} \xrightarrow{r} \mathbb{X}$. Тогда $\mathbb{Y} \hookrightarrow \mathbb{U} \Rightarrow h^{-1}(\mathbb{V}) \xrightarrow{r \circ h} \mathbb{X}$ есть искомая окрестностная G -ретракция, т.е. $\mathbb{X} \in G\text{-ANR} \equiv G\text{-ANE}$.

Аналогично случаю $\mathcal{F} = \text{Conj}_G$ (см. теоремы 3.8 и 5.1) доказывается следующий факт.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Conj}_G$, а $H < G$, $(H) \in \mathcal{F}$. Если

- (a) $\mathbb{X}$ является $\text{IsoV}_{\mathcal{F}}\text{-AE}$ -пространством, то $\mathbb{X}_H$ стягиваемо, а семейство $\{\mathbb{X}_H \mid (H) \in \mathcal{F}\}$ обладает свойством equi-LAE ;
- (b) $\mathbb{X} \in \text{IsoV}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$, то вложение $e: \mathbb{X}_H \hookrightarrow \mathbb{X}^H$ является гомотопически плотным.

Пусть $\mathbb{W}$ является $\text{IsoV}\text{-AE}$ -пространством, а $\mathcal{F} \subset \mathcal{C} \subset \text{Orb}_G$. Ясно, что вложение $W_{\mathcal{F}} \hookrightarrow W_{\mathcal{C}}$ пространств орбит является гомотопической эквивалентностью в том случае, когда вложение $\mathbb{W}_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{C}}$ является эквивариантной гомотопической эквивалентностью. Выясним, когда последнее возможно.

ТЕОРЕМА 6.3. Следующие условия попарно эквивалентны:

- (a) $\mathbb{W}_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{C}}$ является эквивариантной гомотопической эквивалентностью;
- (b) $\mathbb{W}_{\mathcal{F}} \in \text{Equiv}_{\mathcal{C}}\text{-AE}$;
- (c) для любого $G\text{-}\mathcal{C}$ -пространства $\mathbb{Z}$ и любого его замкнутого $G\text{-}\mathcal{F}$ -подпространства $\mathbb{Y} \subset \mathbb{Z}$ существует G -отображение $h: \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}$ в $G\text{-}\mathcal{F}$ -пространство $\overline{\mathbb{Z}}$, G -гомеоморфно отображающее $\mathbb{Y}$ на замкнутое G -подпространство $\overline{\mathbb{Y}} \subset \overline{\mathbb{Z}}$;
- (d) существует G -отображение $h: \mathbb{W}_{\mathcal{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}$ в $G\text{-}\mathcal{F}$ -пространство $\overline{\mathbb{Z}}$, G -гомеоморфно отображающее $\mathbb{W}_{\mathcal{F}}$ на замкнутое G -подпространство $\overline{\mathbb{Y}} \subset \overline{\mathbb{Z}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку импликация (a) $\Leftarrow$ (b) несложна, остановимся на обратной импликации (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть $\theta: \mathbb{W}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$ есть G -гомотопически обратное отображение к вложению $\mathbb{W}_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{C}}$. Далее рассмотрим частичное G -отображение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$, $\text{Orb } \mathbb{Z} \subset \mathcal{C}$, которое в силу $\mathbb{W}_{\mathcal{C}} \in \text{IsoV}_{\mathcal{C}}\text{-AE}$ имеет G -продолжение $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{C}}$, изовариантное на дополнении. Тогда композиция $\eta = \theta \circ \chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$ такова, что $\eta|_{\mathbb{A}} \simeq_G \varphi$. В силу теоремы 2.2 Борсука о гомотопии следует, что отображение φ имеет G -продолжение $\hat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$.

Импликация (b) $\Rightarrow$ (c). Рассмотрим частичное G -отображение

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Y} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{W}_{\mathcal{F}} \in \text{IsoV}_{\mathcal{F}}\text{-AE},$$

где α есть некоторое изовариантное отображение. Так как $\mathbb{W}_{\mathcal{F}} \in \text{Equiv}_{\mathcal{C}}\text{-AE}$,

а $\text{Orb } \mathbb{Z} \subset \mathcal{C}$, то существует эквивариантное продолжение $\hat{\alpha}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$. Отображение $\hat{\alpha}$ возможно каноническим образом представить в виде композиции $h: \mathbb{Z} \rightarrow \bar{\mathbb{Z}}$ и $\gamma: \bar{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$, где h есть G -отображение, тождественное на пространствах орбит, а γ – изовариантное отображение. Так как α изовариантно, то $h|_{\mathbb{Y}}: \mathbb{Y} \rightarrow h(\mathbb{Y})$ есть G -гомеоморфизм. Отсюда следует, что $\mathbb{Y}$ естественно содержится в $\bar{\mathbb{Z}}$.

Так как импликация $(c) \Rightarrow (d)$ тривиальна, то разберем оставшуюся импликацию $(d) \Rightarrow (b)$. Рассмотрим частичное G -отображение $\mathbb{W}_{\mathcal{C}} \hookrightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$. По условию существует G -отображение $h: \mathbb{W}_{\mathcal{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{Z}}$ в G - $\mathcal{F}$ -пространство $\bar{\mathbb{Z}}$, эквивариантно отображающее $\mathbb{W}_{\mathcal{F}}$ на замкнутое G -подпространство $\bar{\mathbb{Y}} \subset \bar{\mathbb{Z}}$, причем h гомеоморфно отображает $\mathbb{W}_{\mathcal{F}}$ на $\bar{\mathbb{Y}}$.

Так как $\mathbb{W}_{\mathcal{C}} \in \text{IsoV}_{\mathcal{C}}\text{-AE}$, то для частичного G -отображения $\bar{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Y}} \xrightarrow{h^{-1}} \mathbb{W}_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{C}}$ существует эквивариантное продолжение $g: \bar{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{C}}$, изовариантное на дополнении $\bar{\mathbb{Z}} \setminus \bar{\mathbb{Y}}$. Так как $\text{Orb } \bar{\mathbb{Z}} \subset \mathcal{F}$, то из орбитных соображений отсюда следует, что $g(\bar{\mathbb{Z}} \setminus \bar{\mathbb{Y}}) \subset \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$. Тогда композиция $\mathbb{W}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{h} \bar{\mathbb{Z}} \xrightarrow{g} \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$ есть искомая G -ретракция. Теорема доказана.

Исследуем теперь более подробно важный частный случай, когда $\mathcal{F} = (H)$, $\mathcal{C} = \{(K) \mid K < H\}$. Скажем, что замкнутое G -подпространство $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ является *строгим изовариантным деформационным G -ретрактом* $\mathbb{X}$, если существует такая эквивариантная гомотопия $H: \mathbb{X} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$, что $H = \text{Id}$ на $\mathbb{Y} \times [0, 1] \cup \mathbb{X} \times \{0\}$; H_t является изовариантным отображением при $t < 1$, а H_1 есть G -ретракция $\mathbb{X}$ на $\mathbb{Y}$.

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть $H \triangleleft G$ есть нормальная подгруппа компактной группы Ли, а $\mathbb{W} \in \text{IsoV}_G\text{-AE}$. Тогда G -вложение $\mathbb{W}_H \hookrightarrow \mathbb{W}_{\leq H}$ является строгой изовариантной деформационной G -ретракцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим замкнутое G -вложение $\mathbb{W}_{(H)} \hookrightarrow \mathbb{W}_{\leq (H)}/H$ и H -орбитную проекцию G -отображение $h: \mathbb{W}_{\leq (H)} \rightarrow \mathbb{W}_{\leq (H)}/H$. Поскольку h на $\mathbb{W}_{(H)}$ тождественно, то условие (d) выполнено. В силу теоремы 6.3 $\mathbb{W}_{(H)} \in \text{Equiv}_{\leq (H)}\text{-AE}$, что влечет наличие G -ретракции $r: \mathbb{W}_{\leq (H)} \rightarrow \mathbb{W}_{(H)}$.

Теперь построим строгую изовариантную G -деформацию $\hat{F}$ пространства $\mathbb{W}_{\leq (H)}$ на $\mathbb{W}_{(H)}$. Для этого рассмотрим частичное G -отображение

$$\mathbb{W}_{\leq (H)} \times [0, 1] \hookrightarrow \mathbb{W}_{\leq (H)} \times \{0, 1\} \cup \mathbb{W}_{(H)} \times [0, 1] \xrightarrow{F} \mathbb{W}_{\leq (H)},$$

где G -отображение F совпадает с r на $\mathbb{W}_{\leq (H)} \times \{1\}$, а на остальной части совпадает с тождественным отображением. Так как $\mathbb{W} \in \text{IsoV}\text{-AE}$, то G -отображение F имеет глобальное G -продолжение $\hat{F}: \mathbb{X}_{\leq (H)} \times I \rightarrow \mathbb{W}$, являющееся изовариантным на дополнении. Вновь воспользуемся орбитными соображениями и получим, что область значений G -отображения $\hat{F}$ содержится в $\mathbb{W}_{\leq (H)}$.

Завершает доказательство замечание, что для нормальной подгруппы $H \triangleleft G$ имеют место равенства $\mathbb{W}_{(H)} = \mathbb{W}_H$ и $\mathbb{W}_{\leq (H)} = \mathbb{W}_{\leq H}$.

Если $H \triangleleft G$, $(H) \in \mathcal{F} \subset \mathcal{C} \subset \{(K) \mid K < H\}$, то вложение $i: \mathbb{W}_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{C}}$, возможно, не является строгой изовариантной деформационной G -ретракцией, однако можно утверждать, что

(4) $i: \mathbb{W}_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{C}}$ есть эквивариантная гомотопическая эквивалентность.

Для установления этого рассмотрим G -ретракцию $r: \mathbb{W}_{\leq(H)} \rightarrow \mathbb{W}_{(H)}$, построенную в теореме 6.4. Из этой же теоремы следует, что ограничение $r|_{\mathbb{W}_{\mathcal{C}}}: \mathbb{W}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$ и вложение $\mathbb{W}_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{C}}$ являются эквивариантно гомотопически взаимно обратными. Из (4) и теоремы 6.3 следует, что в этом случае $\mathbb{W}_{\mathcal{F}} \in \text{Equiv}_{\mathcal{C}}\text{-AE}$.

Поскольку из теоремы 6.4 следует, что для любой нормальной подгруппы $H \triangleleft G$ вложение $\mathbb{W}_H \hookrightarrow \mathbb{W}_{\leq H}$ является G -гомотопической эквивалентностью, то соответствующее вложение пространств орбит является гомотопической эквивалентностью. В связи с этим возникает весьма правдоподобная гипотеза, что так обстоит дело и в общем случае.

ГИПОТЕЗА 6.5. Вложение $W_{(H)} \hookrightarrow W_{\leq(H)}$ пространств орбит является гомотопической эквивалентностью для любой подгруппы $H < G$.

К сожалению, это предположение для подгрупп, не являющихся нормальными, вообще говоря, не верно. Все же теорема 6.4 допускает следующее обобщение.

ТЕОРЕМА 6.6. Пусть $\mathbb{W} \in \text{IsoV}_G\text{-AE}$, $N(H) < G$ есть нормализатор подгруппы $H < G$ компактной группы Ли G . Тогда вложение $\varphi: \mathbb{W}_H \hookrightarrow \mathbb{W}_{\leq H}$ является строгой изовариантной $N(H)$ -деформационной ретракцией, а вложение⁴ $\mathbb{W}_{(H)} \hookrightarrow G \times_{N(H)} \mathbb{W}_{\leq H}$ является строгой изовариантной G -деформационной ретракцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3.7 $\mathbb{W}$ является $\text{IsoV}_{N(H)}\text{-AE}$ -пространством. Поскольку подгруппа $H < G$ является нормальной в $N(H)$, то из теоремы 6.4, примененной для группы $N(H)$, легко следует требуемое свойство вложения φ . Так как $\mathbb{W}_{(H)}$ совпадает с $G \times_{N(H)} \mathbb{W}_H$, то отсюда легко следует требуемое свойство вложения $\mathbb{W}_{(H)} \hookrightarrow G \times_{N(H)} \mathbb{W}_{\leq H}$.

Из доказанной теоремы следует, что G -вложение $\mathbb{W}_{(H)} \hookrightarrow \mathbb{W}_{\leq(H)}$ и естественное G -отображение $G \times_{N(H)} \mathbb{W}_{\leq H} \rightarrow \mathbb{W}_{\leq(H)}$ эквивалентны в категории $\text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-НОМОТ}$. Поэтому гипотеза 6.5 эквивалентна предположению, что отображение $\mathbb{W}_{\leq H}/N(H) \rightarrow W_{\leq(H)}$ пространств орбит является гомотопической эквивалентностью.

Покажем теперь, что для некоторой диэдральной подгруппы $D_n < G \rightleftharpoons O(2)$ гипотеза 6.5 не верна:

- (5) если $\mathbb{W} \in \text{IsoV}_{O(2)}\text{-AE}$, то пространства $W_{(D_n)}$ и $W_{\leq(D_n)}$ не являются гомотопически эквивалентными.

Сначала заметим, что D_n совпадает со своей группой Вейля и, следовательно, $\mathbb{W}_{D_n} \cong W_{D_n}$. Так как $\mathbb{W}_{D_n} \in \text{AE}$, то предположив противное (4), получим $W_{\leq(D_n)} \in \text{AE}$ для любого n . Тем самым $W_{<(G)}$ как растущая последовательность открытых подмножеств $W_{\leq(D_1)} \subset W_{\leq(D_2)} \subset \dots \subset W$ является AE -пространством. Однако по теореме 13.1 это пространство орбит не стягиваемо – противоречие.

⁴Напомним, что $\mathbb{W}_{(H)}$ естественно отождествляется с $G \times_{N(H)} \mathbb{W}_H$.

§ 7. Универсальные главные расслоения и изовариантные экстензоры

Пусть $\mathbb{W}$ есть Isov-АЕ-пространство. Покажем, что пространство орбит W оказывается разбитым на классифицирующие пространства $W_{(H)}$, $(H) \in \text{Orb}_G$, для подходящих главных расслоений.

Рассмотрим свободное $W(H)$ -пространство $\mathbb{W}_H$, где $W(H) = N(H)/H$ есть группа Вейля, которое в силу теоремы 3.8 является АЕ-пространством. Поэтому ограничение орбитной проекции $p \upharpoonright: \mathbb{W}_H \rightarrow W_{(H)}$ является универсальным главным $W(H)$ -расслоением. Рассмотрим соответствующую ему точную последовательность гомотопических групп

$$\cdots \rightarrow \pi_{i+1}(\mathbb{W}_H) \xrightarrow{p_*} \pi_{i+1}(W_{(H)}) \xrightarrow{\partial} \pi_i(W(H)) \xrightarrow{e_*} \pi_i(\mathbb{W}_H) \rightarrow \cdots.$$

Так как все $\pi_i(\mathbb{W}_H)$ равны 0, то

- (1) $\pi_{i+1}(W_{(H)}) = \pi_i(W(H))$ для всех $i \geq 1$ и $\pi_1(W_{(H)}) = 0$ для связного пространства $W(H)$.

Если же $H < G$ является нормальной подгруппой, то группа Вейля $W(H)$ совпадает с G/H , а $\mathbb{W}_H = \mathbb{W}_{(H)}$ является свободным G/H -пространством и, следовательно, орбитная проекция $p: \mathbb{W}_{(H)} \rightarrow W_{(H)}$ является универсальным главным G/H -расслоением с $\pi_{i+1}(W_{(H)}) = \pi_i(G/H)$ для всех $i \geq 1$ и $\pi_1(W_{(H)}) = 0$ для связного пространства G/H .

Рассмотрим еще один пример универсального главного расслоения, порожденного Isov-АЕ-пространством $\mathbb{W}$. В силу теоремы 3.7 $\mathbb{W}_{\leq H}$, где $H < G$, является Isov-АЕ-пространством и, следовательно, H -стягиваемым пространством. Тем самым пространство орбит $\mathbb{W}_{\leq H}/H$ тоже стягиваемо. Если $H \triangleleft G$ – нормальная подгруппа, то $\mathbb{W}_{\leq H}/H$ является свободным G/H -пространством, и, тем самым,

- (2) G/H -орбитная проекция $p: \mathbb{W}_{\leq H}/H \rightarrow W_{\leq H}$ представляет собой универсальное главное G/H -расслоение.

Рассматривая соответствующую этому расслоению точную последовательность гомотопических групп, приходим к выводу, что

- (3) $\pi_{i+1}(W_{\leq H}) = \pi_i(G/H)$ для всех $i \geq 1$ и $\pi_1(W_{\leq H}) = 0$, если G/H связно.

Пусть теперь $K \triangleleft G$, $H \triangleleft G$ суть нормальные подгруппы, а $\mathbb{W}$ – по-прежнему Isov-АЕ-пространство. Если $K < H$, то можно рассмотреть естественное G -вложение $e: \mathbb{W}_{\leq K} \hookrightarrow \mathbb{W}_{\leq H}$ G -пространств и индуцированное вложение $\tilde{e}: W_{\leq K} \hookrightarrow W_{\leq H}$ пространств орбит.

ТЕОРЕМА 7.1. *Гомоморфизм*

$$e_{i+1}: \pi_{i+1}(W_{\leq K}) \rightarrow \pi_{i+1}(W_{\leq H})$$

гомотопических групп, порожденный $\tilde{e}$, естественно изоморфен гомоморфизму $p_i: \pi_i(G/K) \rightarrow \pi_i(G/H)$ гомотопических групп, порожденный факторотображением $p: G/K \rightarrow G/H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложение $e: \mathbb{W}_{\leq K} \hookrightarrow \mathbb{W}_{\leq H}$ естественным образом порождает отображение $\alpha: \mathbb{W}_{\leq K}/K \rightarrow \mathbb{W}_{\leq H}/H$ свободных G/K - и G/H -пространств, которое в свою очередь порождает морфизм универсальных главных расслоений:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W}_{\leq K}/K & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{W}_{\leq H}/H \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_{\leq K} & \xrightarrow{e} & W_{\leq H}. \end{array}$$

Запишем морфизм точных последовательностей гомотопических групп расслоений, порождаемый α :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_{i+1}(\mathbb{W}_{\leq K}/K) & \longrightarrow & \pi_{i+1}(W_{\leq K}) & \longrightarrow & \pi_i(G/K) & \longrightarrow & \pi_i(\mathbb{W}_{\leq K}/K) & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow \alpha_{i+1} & & \downarrow e_{i+1} & & \downarrow p_i & & \downarrow \alpha_i & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_{i+1}(\mathbb{W}_{\leq H}/H) & \longrightarrow & \pi_{i+1}(W_{\leq H}) & \longrightarrow & \pi_i(G/H) & \longrightarrow & \pi_i(\mathbb{W}_{\leq H}/H) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

В представленной на рисунке части этой диаграмме только четыре центральные группы нетривиальны. Поэтому гомоморфизм e_{i+1} изоморфен гомоморфизму $p_i: \pi_i(G/K) \rightarrow \pi_i(G/H)$ гомотопических групп, порожденных естественным отображением $p: G/K \rightarrow G/H$.

§ 8. Эквивалентность изовариантных и эквивариантных гомотопических эквивалентностей

Очевидно, что любая изовариантная гомотопическая эквивалентность является эквивариантной гомотопической эквивалентностью. Обратное не верно, так как пространства одного эквивариантного гомотопического типа могут иметь различные орбитные типы. Однако при некоторых дополнительных условиях обращение импликации все же возможно, что составляет содержание важной теоремы.

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ суть Isov-ANE-пространства. Если изовариантное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ является эквивариантной гомотопической эквивалентностью, то f является изовариантной гомотопической эквивалентностью.*

Отсюда следует, что два Isov-ANE-пространства имеют один эквивариантный гомотопический тип тогда и только тогда, когда они имеют один изовариантный гомотопический тип.

Доказательство сформулированного результата будет основываться на теореме 8.4, которая в свою очередь нуждается в некоторых вспомогательных фактах. Сначала установим теорему об изовариантном продолжении G -гомотопии, являющуюся существенным дополнением теоремы 2.2 о продолжении $\mathcal{C}$ -гомотопий.

ТЕОРЕМА 8.2. *Пусть $\mathbb{X}$ – Isov-ANE-пространство, эквивариантная ε -гомотопия $H: \mathbb{A} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$ соединяет частичные G -отображения $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{f, g} \mathbb{X}$,*

причем f продолжается до G -отображения $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ (здесь $\varepsilon \in \text{cov } \mathbb{X}$). Тогда существует G -продолжение гомотопии H до ε -гомотопии $\hat{H}: \text{Cyl } \mathbb{Z} \rightrightarrows \mathbb{Z} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$, изовариантной на дополнении $\text{Cyl } \mathbb{Z} \setminus M(\mathbb{Z}, \mathbb{A}) = (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{A}) \times (0, 1]$ и соединяющей $\hat{f}$ с некоторым G -отображением $\hat{H}(z, 1)$ (здесь $M(\mathbb{Z}, \mathbb{A}) \rightrightarrows \mathbb{Z} \times \{0\} \cup \mathbb{A} \times [0, 1]$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что отображение $\Phi: M(\mathbb{Z}, \mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{X}$, заданное формулой

$$\Phi(z, t) = \begin{cases} f(z), & \text{если } (z, t) \in \mathbb{Z} \times \{0\}, \\ H(z, t), & \text{если } (z, t) \in \mathbb{A} \times I, \end{cases}$$

является непрерывным G -отображением. Так как по условию $\mathbb{X} \in \text{IsoV-ANE}$, а $M(\mathbb{Z}, \mathbb{A}) \subset \mathbb{Z} \times I$ – замкнутое G -подпространство, то существует окрестностное G -продолжение $\hat{\Phi}: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{X}$ отображения Φ , изовариантное на дополнении к $M(\mathbb{Z}, \mathbb{A})$.

Несложно построить непрерывную G -функцию $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow (0, 1]$, для которой

- (1) $\beta = 1$ на множестве $\mathbb{A}$;
- (2) $\{(z, t) \mid 0 \leq t \leq \beta(z)\} \subset \mathbb{V}$;
- (3) $\{\hat{\Phi}(z, [0, \beta(z)]) \mid z \in \mathbb{Z}\} \prec \varepsilon$.

Искомое G -продолжение $\hat{H}: \mathbb{Z} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$ гомотопии H определяется формулой $\hat{H}(z, t) = \hat{\Phi}(z, t \cdot \beta(z))$.

Применим установленный факт к аппроксимации эквивариантных отображений изовариантными.

ТЕОРЕМА 8.3. Пусть $\mathbb{X}$ есть IsoV-ANE -пространство, $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ – G -отображение. Тогда для любого замкнутого подмножества $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}$ и любого покрытия $\varepsilon \in \text{cov } \mathbb{X}$ существует такое G -отображение $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$, изовариантное на дополнении к $\mathbb{A}$, что $\varphi = \psi$ на $\mathbb{A}$ и $\text{dist}(\varphi, \psi) \prec \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим частичное G -отображение

$$\text{Cyl } \mathbb{Z} \hookrightarrow M(\mathbb{Z}, \mathbb{A}) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{X},$$

заданное как $\Phi = \varphi$ на $\mathbb{Z} \times \{0\}$ и $\Phi_t = \varphi$, $t \in I$, на $\mathbb{A} \times \{t\}$. Так как $\mathbb{X} \in \text{IsoV-ANE}$, то в силу теоремы 8.2 отображение Φ допускает такое G -продолжение до ε -гомотопии $\hat{\Phi}: \text{Cyl } \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$, что на дополнении $\text{Cyl } \mathbb{Z} \setminus M(\mathbb{Z}, \mathbb{A})$ оно будет изовариантным. Тогда $\hat{\Phi}(z, 1): \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ будет искомым G -отображением.

Если в теореме 8.3 положить $\mathbb{A} = \emptyset$, то получим, что

- (4) любое G -отображение $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X} \in \text{IsoV-ANE}$ соединяется G -гомотопией $F: \mathbb{Z} \times I \rightarrow \mathbb{X}$ с изовариантным отображением $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ так, что при этом гомотопия F является изовариантной на $\mathbb{Z} \times (0, 1)$.

Если в теореме 8.3 положить $\mathbb{A} = \mathbb{P} \times \{0, 1\}$, то получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 8.4. Пусть $\mathbb{X}$ есть IsoV-ANE -пространство. Если G -гомотопия $\varphi: \mathbb{Z} = \mathbb{P} \times I \rightarrow \mathbb{X}$ соединяет два изовариантных отображения $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{X}$ и $h: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{X}$, то f и h являются изовариантно гомотопными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8.1. Пусть $h: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ G -гомотопически обратен к f . В силу (4) можно считать, что h является изовариантным отображением. Далее следует применить теорему 8.4.

§ 9. Свойства мягкости функтора Бореля

Для определения *функтора Бореля* $E_{\mathcal{F}}: \text{EQUIV-TOP} \rightarrow \text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-TOP}$ фиксируем семейство $\mathcal{F} \subset \text{Conj}_G$ и IsoV-AE -пространство $\mathbb{W}$. Полагаем $E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \doteq \{(w, x) \mid G_w \subset G_x, (G_w) \in \mathcal{F}\}$ и сопоставляем G -отображению $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ изовариантное отображение $E_f: E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \rightarrow E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y})$, определенное формулой⁵ $E_f(w, x) = (w, f(x))$. Если $\mathcal{F} = \text{Conj}_G$, то $E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) = \{(w, x) \mid G_w \subset G_x\}$ для краткости обозначим через $E(\mathbb{X})$, а функтор Бореля – через E .

Одно из основных свойств функтора Бореля связано с его мягкостью, для чего сначала остановимся на необходимых определениях. Рассмотрим квадратную коммутативную диаграмму $\mathcal{D}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{X} \\ \cap & & \downarrow f \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Y} \end{array}$$

в категории $\mathcal{C}$, совпадающей с категорией $\text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-TOP}$ или с $\text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-TOP}$. Будем говорить, что морфизм φ есть *частичное поднятие морфизма ψ относительно f* .

Скажем, что *задача продолжения частичного поднятия для $\mathcal{D}$ разрешима глобально [локально]*, если существует морфизм $\hat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ [$\hat{\varphi}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$, где $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$ есть окрестность $\mathbb{A}$], продолжающий φ и такой, что $f \circ \hat{\varphi} = \psi$ [$f \circ \hat{\varphi} = \psi|_{\mathbb{U}}$]. Придерживаясь выбранной выше терминологии, будем говорить, что $\hat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ [$\hat{\varphi}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$] есть *глобальное [локальное] поднятие морфизма ψ относительно f* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Морфизм $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ категории $\mathcal{C}$ называется: *$\mathcal{C}$ -мягким [локально $\mathcal{C}$ -мягким]*, если для любой квадратной коммутативной диаграммы $\mathcal{D}$ категории $\mathcal{C}$ задача продолжения частичного поднятия разрешима глобально [локально]; *$\mathcal{C}$ -расслоением Гуревича*, если для любой квадратной коммутативной диаграммы $\mathcal{D}$ категории $\mathcal{C}$, в которой $\mathbb{Z} = \text{Cyl } \mathbb{P}$, а $\mathbb{A} = \mathbb{M}(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$, задача продолжения частичного поднятия разрешима глобально.

Из формулируемого ниже результата следует, что при некоторых условиях естественная проекция $p = p_{\mathbb{X}}: E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{X}$, $p(w, x) = x$, является эквивариантной гомотопической эквивалентностью.

ТЕОРЕМА 9.2. Если $\mathbb{X}$ есть G - $\mathcal{F}$ -пространство, то $p: E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{X}$ является $\text{Equiv}_{\mathcal{F}}$ -мягким отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим допустимую (для проверки $\text{Equiv}_{\mathcal{F}}$ -мягкости отображения p) квадратную коммутативную диаграмму в категории $\text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-TOP}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{\varphi} & E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \\ \cap & & \downarrow p \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Y}. \end{array}$$

⁵Для одноэлементного семейства $\mathcal{F} = \{e\}$ подобную конструкцию предложил А. Борель.

Так как $\mathbb{W} \in \text{Iso}\mathcal{F}\text{-ANE}$, то частичное отображение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\chi} \mathbb{W}$, где $\chi = q \circ \varphi$, а $q = q_{\mathbb{W}}: E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{W}$ есть проекция на первый сомножитель, допускает G -продолжение $\hat{\chi}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{W}$, изовариантное на дополнении. По этой причине имеем $G_{\hat{\chi}(z)} = G_z \subset G_{\psi(z)}$ для всех $z \notin \mathbb{A}$. С учетом этого замечания легко проверить, что формулой $\hat{\varphi}(z) = (\hat{\chi}(z), \psi(z))$ корректно определяется искомое эквивариантное отображение $\hat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X})$.

Отсюда следует, что $E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \in \text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$, если пространство $\mathbb{X}$ является⁶ $\text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$. Однако в действительности верен значительно более точный факт.

ТЕОРЕМА 9.3. *Если пространство $\mathbb{X}$ является $\text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$, то*

- (a) *изовариантное отображение $q = q_{\mathbb{X}}: E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$, $q(w, z) = w$, является одновременно локально $\text{Iso}\mathcal{F}$ -мягким и $\text{Iso}\mathcal{F}$ -расслоением Гуревича;*
- (b) $E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \in \text{Iso}\mathcal{F}\text{-ANE}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим допустимую (для проверки изовариантной локальной мягкости q) квадратную коммутативную диаграмму в категории $\text{ISO}\mathcal{F}\text{-TOP}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{\varphi} & E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \\ \cap & & \downarrow p \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{W}_{\mathcal{F}}. \end{array}$$

Так как $\mathbb{X} \in \text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$, а $\text{Orb}\mathbb{Z} \subset \mathcal{F}$, то частичное отображение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\chi} \mathbb{X}$, где $\chi = p_{\mathbb{X}} \circ \varphi$, а $p_{\mathbb{X}}: E(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{X}$ есть естественная проекция, допускает G -продолжение $\hat{\chi}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$. Поскольку ψ изовариантно, то $G_{\psi(z)} = G_z \subset G_{\hat{\chi}(z)}$ для всех $z \in \mathbb{Z}$. Искомое эквивариантное отображение $\hat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X})$ корректно определяется формулой $\hat{\varphi}(z) = (\psi(z), \hat{\chi}(z))$. Аналогичными рассуждениями с привлечением теоремы Борсука 2.2 о продолжении эквивариантной гомотопии доказывается, что q есть $\text{Iso}\mathcal{F}$ -расслоением Гуревича – свойство (a) установлено.

Поскольку $\mathbb{W}_{\mathcal{F}} \in \text{Iso}\mathcal{F}\text{-ANE}$, то из (a) легко следует $E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \in \text{Iso}\mathcal{F}\text{-ANE}$.

ТЕОРЕМА 9.4. *Если пространство $\mathbb{X}$ является $\text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$, то индуцированное отображение пространств орбит $\tilde{q}: (E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}))/G \rightarrow \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$ является одновременно локально мягким и расслоением Гуревича, а прообраз $\tilde{q}^{-1}([w])$ гомеоморфен $\mathbb{X}^H$, где $H = G_w$.*

Эта теорема следует из теоремы 9.3 и нижеустанавливаемого факта.

ТЕОРЕМА 9.5. *Если изовариантное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ является изовариантно локально мягким ($\text{Iso}\mathcal{F}$ -расслоением Гуревича), то отображение $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ пространств орбит, индуцированное f , является локально мягким ($\text{Iso}\mathcal{F}$ -расслоением Гуревича).*

⁶А из теоремы 6.1 следует, что $E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \in \text{Equiv}\text{-ANE}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим стоящую слева допустимую (для проверки нужной мягкости f) квадратную коммутативную диаграмму в категории TOP и соответствующий ей коммутативный квадрат в категории ISOV-TOP , стоящий справа:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \cap & & \downarrow \tilde{f} \\ Z & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \varphi^*(\mathbb{X}) & \xrightarrow{\check{\varphi}} & \mathbb{X} \\ \cap & & \downarrow f \\ \psi^*(\mathbb{Y}) & \xrightarrow{\check{\psi}} & \mathbb{Y} \end{array}$$

Если отображение f изовариантно мягко, то существует изовариантное продолжение $\chi: \psi^*(\mathbb{Y}) \rightarrow \mathbb{X}$ отображения $\check{\varphi}$ такое, что $f \circ \chi = \check{\psi}$. Переходя к пространствам орбит, получаем искомое продолжение $\tilde{\chi}: Z \rightarrow X$. Аналогично разбираются все оставшиеся случаи.

§ 10. Эквивалентность эквивариантной и изовариантной гомотопических категорий

Рассмотрим категорию EQUIV-HOMOT , объектами которой являются Equiv-ANE -пространства, а морфизмами – G -гомотопические классы эквивариантных отображений, и категорию ISOV-HOMOT , объектами которой являются IsoV-ANE -пространства, а морфизмами – изовариантные гомотопические классы изовариантных отображений. Поскольку функтор Бореля $E_{\mathcal{F}}$ переводит эквивариантную гомотопию $f_t: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ в изовариантную $E_{f_t}: E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \rightarrow E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y})$, то его можно рассматривать как *гомотопический функтор Бореля* $[E_{\mathcal{F}}]$ из категории EQUIV-HOMOT в категорию $\text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT}$ – полную подкатегорию ISOV-HOMOT , составленную из $\text{IsoV}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$ -пространств. Отметим как очевидное, что композиция гомотопического функтора Бореля

$$[E]: \text{EQUIV-HOMOT} \rightarrow \text{ISOV-HOMOT}$$

и изовариантного функтора

$$[R_{\mathcal{F}}]: \text{ISOV-HOMOT} \rightarrow \text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT}$$

перехода к пучку $\mathcal{F}$ -орбит совпадает с гомотопическим функтором Бореля $[E_{\mathcal{F}}]: \text{EQUIV-HOMOT} \rightarrow \text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT}$.

Покажем, что гомотопический функтор Бореля осуществляет эквивалентность категорий EQUIV-HOMOT и ISOV-HOMOT . Тем самым, изучение G -гомотопического типа Equiv-ANE -пространств будет полностью сведено к исследованию изовариантного гомотопического типа IsoV-ANE -пространств. Это, в свою очередь, посредством углубленного изучения IsoV-ANE -пространств позволит получать новую информацию об эквивариантном гомотопическом типе Equiv-ANE -пространств.

Рассмотрим полную подкатегорию

$$\text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT} \subset \text{EQUIV-HOMOT},$$

составленную из $\text{Equiv}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$ -пространств. Так как в силу теоремы 6.1 $\text{IsoV}_{\mathcal{F}}\text{-ANE} \subset \text{Equiv-ANE}$, то корректным образом можно ввести в рассмотрение забывающий функтор $\mathfrak{F}: \text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT} \rightarrow \text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT}$.

ТЕОРЕМА 10.1. Категории EQUIV-HOMOT и ISOV-HOMOT эквивалентны, причем гомотопический функтор Бореля

$$[E]: \text{EQUIV-HOMOT} \rightarrow \text{ISOV-HOMOT}$$

является эквивалентностью. Более того, для любого $\mathcal{F} \subset \text{Conj}_G$ гомотопический функтор Бореля $[E_{\mathcal{F}}]: \text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT} \rightarrow \text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT}$, порожденный $\mathcal{F} \subset \text{Conj}_G$, тоже является эквивалентностью категорий, обратным к которому является забывающий функтор $\mathfrak{F}: \text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT} \rightarrow \text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению эквивалентности категорий [19] необходимо построить морфизмы (или естественные преобразования) функтора $\mathfrak{F} \circ [E_{\mathcal{F}}]$ в тождественный функтор

$$\text{Id}: \text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT} \rightarrow \text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT}$$

и функтора $[E_{\mathcal{F}}] \circ \mathfrak{F}$ в тождественный функтор

$$\text{Id}: \text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT} \rightarrow \text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT},$$

компоненты которых состоят из G -гомотопических и изовариантных гомотопических эквивалентностей соответственно.

Первый морфизм задается совокупностью отображений $p_{\mathbb{X}}: E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{X}$, являющихся G -гомотопическими эквивалентностями в силу теоремы 9.2. Ясно, что все соответствующие квадратные диаграммы точно коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) & \xrightarrow{p_{\mathbb{X}}} & \mathbb{X} \\ \downarrow E_f & & \downarrow f \\ E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y}) & \xrightarrow{p_{\mathbb{Y}}} & \mathbb{Y}. \end{array}$$

Второй морфизм функторов задается совокупностью изовариантных гомотопических эквивалентностей $\psi(\mathbb{X}): E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{X}$, для которых все соответствующие квадратные диаграммы $\mathcal{D}$ коммутативны в категории $\text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT}$. Для этого достаточно положить $\psi(\mathbb{X})$ равным любому изовариантному отображению из $E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X})$ в $\mathbb{X}$, эквивариантно гомотопному $p_{\mathbb{X}}: E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{X}$ (существующим в силу теоремы 8.3, поскольку $\mathbb{X}$ и $E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X})$ являются $\text{IsoV}_{\mathcal{F}}\text{-ANE}$ -пространствами). Так как $p_{\mathbb{X}}$ является эквивариантной гомотопической эквивалентностью, то $\psi(\mathbb{X})$ является изовариантной гомотопической эквивалентностью. В силу теоремы 8.4 следующая квадратная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) & \xrightarrow{\psi(\mathbb{X})} & \mathbb{X} \\ \downarrow E_f & & \downarrow f \\ E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y}) & \xrightarrow{\psi(\mathbb{Y})} & \mathbb{Y} \end{array}$$

коммутативна в категории $\text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT}$.

§ 11. Эквивариантный гомотопический функтор перехода к пучку $\mathcal{F}$ -орбит

Гомотопический функтор Бореля

$$[E_{\mathcal{F}}]: \text{EQUIV-HOMOT} \rightarrow \text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT}$$

можно вовлечь в композицию трех функторов

$$\begin{aligned} \text{EQUIV-HOMOT} &\xrightarrow{E} \text{ISOV-HOMOT} \xrightarrow{R_{\mathcal{F}}} \text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT} \\ &\xrightarrow{[E]_{\mathcal{F}}^{-1} = \mathfrak{F}} \text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT}, \end{aligned}$$

среди которых первый и последний являются эквивалентностями. Ясно, что возникающий функтор $\mathfrak{R}_{\mathcal{F}}: \text{EQUIV-HOMOT} \rightarrow \text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT}$ в смысле теории категорий сопряжен изовариантному функтору $R_{\mathcal{F}}$, и по этой причине на функтор $\mathfrak{R}_{\mathcal{F}}$ разумно смотреть как на *эквивариантный гомотопический функтор перехода к пучку орбит данного типа* $\mathcal{F} \subset \text{Conj}_G$.

Обратим внимание, что имеется морфизм Ψ функтора $\mathfrak{R}_{\mathcal{F}}$ в тождественный функтор $\text{Id}: \text{EQUIV-HOMOT} \rightarrow \text{EQUIV-HOMOT}$, в качестве компонент $\{\psi(\mathbb{X}): \mathfrak{R}_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{X}\}$ которого можно принять отображения $p_{\mathbb{X}}: E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{X}$. В силу теоремы 9.2 все они являются $\text{Equiv}_{\mathcal{F}}$ -мягкими отображениями, а, следовательно, – *слабыми $\text{Equiv}_{\mathcal{F}}$ -гомотопическими эквивалентностями*⁷.

Оказывается приведенное свойство функтора $\mathfrak{R}_{\mathcal{F}}$ является характеристическим. Дадим формально более общее определение эквивариантного гомотопического функтора перехода к пучку орбит данного типа и покажем, что он (функтор) сводится к $\mathfrak{R}_{\mathcal{F}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. Скажем, что функтор

$$\mathfrak{R}'_{\mathcal{F}}: \text{EQUIV-HOMOT} \rightarrow \text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT}$$

является эквивариантным гомотопическим функтором перехода к пучку $\mathcal{F}$ -орбит, если существует морфизм Ψ' функтора $\mathfrak{R}'_{\mathcal{F}}$ в тождественный функтор

$$\text{Id}: \text{EQUIV-HOMOT} \rightarrow \text{EQUIV-HOMOT},$$

компоненты которого $\{\psi'(\mathbb{X}): \mathfrak{R}'_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{X}\}$ являются слабыми $\text{Equiv}_{\mathcal{F}}$ -гомотопическими эквивалентностями.

ТЕОРЕМА 11.2. Пусть

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\mathcal{F}}: \text{EQUIV-HOMOT} &\rightarrow \text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT}, \\ \mathfrak{R}'_{\mathcal{F}}: \text{EQUIV-HOMOT} &\rightarrow \text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-HOMOT} \end{aligned}$$

суть эквивариантные гомотопические функторы перехода к пучку $\mathcal{F}$ -орбит. Тогда существует морфизм Θ функтора $\mathfrak{R}'_{\mathcal{F}}$ в функтор $\mathfrak{R}_{\mathcal{F}}$, обладающий следующими свойствами:

⁷ G -отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ называется *слабой $\text{Equiv}_{\mathcal{F}}$ -гомотопической эквивалентностью*, если отображение $f^H: \mathbb{X}^H \rightarrow \mathbb{Y}^H$ множеств H -неподвижных точек является гомотопической эквивалентностью для любого $(H) \in \mathcal{F}$ с $\mathbb{X}^H \neq \emptyset$.

- (а) все его компоненты $\{\theta(\mathbb{X}): \mathfrak{R}'_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{F}}(\mathbb{X})\}$ являются Equiv-гомотопическими эквивалентностями;
- (б) $\Psi \circ \Theta = \Psi'$.

Доказательство теоремы предварим рядом необходимых определений и фактов. В работе [20] установлена характеристика слабых Equiv- $\mathcal{F}$ -гомотопических эквивалентностей: G -отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ Equiv-ANE-пространств является слабой G - $\mathcal{F}$ -гомотопической эквивалентностью в том и только том случае, когда f является гомотопически EQUIV- $\mathcal{F}$ -мягким, т.е. для любой квадратной коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{X} \\ \cap & & \downarrow f \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Y}, \end{array}$$

где $\mathbb{Z}$ и его замкнутое подмножество $\mathbb{A}$ – объекты категории $\text{EQUIV}_{\mathcal{F}}\text{-TOP}$, существует такое G -отображение $\widehat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$, что $\widehat{\varphi} = \text{ext}(\varphi)$ и $f \circ \widehat{\varphi} \simeq_G \psi$. Отсюда несложно следует, что

- (1) если f является слабой G - $\mathcal{F}$ -гомотопической эквивалентностью, то для любого G - $\mathcal{F}$ -пространства $\mathbb{Z}$ G -отображение f индуцирует биекцию эквивариантных гомотопических классов отображений $[\mathbb{Z}, \mathbb{X}]$ и $[\mathbb{Z}, \mathbb{Y}]$.

В [20] установлено также, что G -морфизм $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ Equiv- $\mathcal{F}$ -ANE-пространств является G -гомотопической эквивалентностью в том и только том случае, когда f является гомотопически EQUIV- $\mathcal{F}$ -мягким.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11.2. В силу вышеприведенной теоремы о характеристике слабых Equiv- $\mathcal{F}$ -гомотопических эквивалентностей существует G -отображение $\theta(\mathbb{X}): \mathfrak{R}'_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{F}}(\mathbb{X})$, для которого $\psi(\mathbb{X}) \circ \theta(\mathbb{X}) = \psi'(\mathbb{X})$. Поскольку $\theta(\mathbb{X})$ есть слабая Equiv- $\mathcal{F}$ -гомотопическая эквивалентность Equiv-ANE-пространств, то в силу [20] $\theta(\mathbb{X})$ является Equiv-гомотопической эквивалентностью.

Теперь проверим, что совокупность $\{\theta(\mathbb{X})\}$ задает морфизм функтора $\mathfrak{R}'_{\mathcal{F}}$ в функтор $\mathfrak{R}_{\mathcal{F}}$. Для этого надо установить гомотопическую коммутативность центральной квадратной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{X} & \xleftarrow{\psi'(\mathbb{X})} & \mathfrak{R}'_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) & \xrightarrow{\theta(\mathbb{X})} & \mathfrak{R}_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) & \xrightarrow{\psi(\mathbb{X})} & \mathbb{X}, \\ f \downarrow & & \downarrow \mathfrak{R}'(f) & & \downarrow \mathfrak{R}(f) & & \downarrow f \\ \mathbb{Y} & \xleftarrow{\psi'(\mathbb{Y})} & \mathfrak{R}'_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y}) & \xrightarrow{\theta(\mathbb{Y})} & \mathfrak{R}_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y}) & \xrightarrow{\psi(\mathbb{Y})} & \mathbb{Y}, \end{array}$$

т.е. показать, что $\alpha \doteq \mathfrak{R}(f) \circ \theta(\mathbb{X})$ и $\beta \doteq \theta(\mathbb{Y}) \circ \mathfrak{R}'(f)$ являются G -гомотопными. Для этого сначала покажем, что $\psi(\mathbb{Y}) \circ \alpha \simeq_G \psi(\mathbb{Y}) \circ \beta$, а поскольку в силу (1) $\psi(\mathbb{Y})$ является гомотопически EQUIV- $\mathcal{F}$ -мягким отображением (можно воспользоваться и EQUIV- $\mathcal{F}$ -мягкостью $\psi(\mathbb{Y}) = p_{\mathbb{X}}$), то имеем $\alpha \simeq_G \beta$. В силу коммутативности правого квадрата

$$\psi(\mathbb{Y}) \circ \alpha = \psi(\mathbb{Y}) \circ \mathfrak{R}(f) \circ \theta(\mathbb{X}) \simeq_G f \circ (\psi(\mathbb{X}) \circ \theta(\mathbb{X})),$$

а в силу теоремы 11.2, (b)

$$\psi(\mathbb{Y}) \circ \beta = \psi(\mathbb{Y}) \circ \theta(\mathbb{Y}) \circ \mathfrak{R}'(f) \simeq_G \psi'(\mathbb{Y}) \circ \mathfrak{R}'(f), \quad f \circ (\psi(\mathbb{X}) \circ \theta(\mathbb{X})) \simeq_G f \circ \psi'(\mathbb{X}).$$

Наконец, в силу коммутативности левого квадрата имеем $\psi'(\mathbb{Y}) \circ \mathfrak{R}'(f) \simeq_G f \circ \psi'(\mathbb{X})$: равенство $\alpha \Leftarrow \mathfrak{R}(f) \circ \theta(\mathbb{X}) \simeq_G \beta \Leftarrow \theta(\mathbb{Y}) \circ \mathfrak{R}'(f)$ доказано.

§ 12. Структура комплекса Эйленберга–Маклейна в пространстве орбит $\text{Iso}_{\text{SO}(2)}\text{-AE}$ -пространства

Напомним, что циклическими подгруппами $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 1$, исчерпываются все собственные замкнутые подгруппы группы $G = \text{SO}(2) = \{e^{i\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R}^1\}$. Ясно, что для $\mathcal{D}_n \Leftarrow \{H < G \mid H < \mathbb{Z}_n\}$ имеют место следующие утверждения:

- $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_m$ в том и только том случае, когда $\mathbb{Z}_n < \mathbb{Z}_m$ (либо когда m делится на n);
- $\mathcal{D} \Leftarrow \bigcup \{\mathcal{D}_n \mid n \geq 1\}$ состоит из всех дискретных подгрупп $\text{SO}(2)$.

Если $\mathbb{W} \in \text{Iso}_{\text{SO}(2)}\text{-AE}$, то $\mathbb{W}_n \Leftarrow \mathbb{W}_{\mathcal{D}_n} = \mathbb{W}_{\leq \mathbb{Z}_n} \in \text{Iso}_{\mathbb{Z}_n}\text{-AE}$ в силу теоремы 3.7. Из результатов § 7 следует, что $p: \mathbb{W}_n/\mathbb{Z}_n \rightarrow W_n \Leftarrow \mathbb{W}_n/G$ является главным $\text{SO}(2)/\mathbb{Z}_n$ -расслоением. Если $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_m$, то в силу теоремы 7.1 гомоморфизмы $(e_{nm})_*: \pi_{i+1}(W_n) \rightarrow \pi_{i+1}(W_m)$ гомотопических групп, порожденные естественным вложением $\tilde{e}_{nm}: W_n \hookrightarrow W_m$ пространств орбит, изоморфны гомоморфизмам $\pi_i(\text{SO}(2)/\mathbb{Z}_n) \rightarrow \pi_i(\text{SO}(2)/\mathbb{Z}_m)$ гомотопических групп, порожденных естественным отображением $\text{SO}(2)/\mathbb{Z}_n \rightarrow \text{SO}(2)/\mathbb{Z}_m$. Следовательно, гомоморфизм $(e_{nm})_2: \pi_2(W_n) = \mathbb{Z} \rightarrow \pi_2(W_m) = \mathbb{Z}$ есть умножение на целое число m/n , все остальные гомоморфизмы $(e_{nm})_k$ нулевые.

Вычислим гомотопические группы пространства $W_{<\text{SO}(2)}$, совпадающего с $\bigcup \{W_n \mid n \geq 1\}$. Для этого частично упорядочим множество натуральных чисел с помощью делимости и далее для каждого $k \geq 1$ рассмотрим индуктивную систему, индексированную элементами этого упорядоченного множества, из групп $\Gamma_s^k = \pi_k(W_s)$ и гомоморфизмов $\Gamma_s^k \rightarrow \Gamma_t^k$ умножения на целое число t/s . Для прямых пределов групп известно равенство (см. например, [21])

$$\varinjlim \{\Gamma_s^k \mid s\} = \begin{cases} \mathbb{Q} \text{ — группа рациональных чисел,} & \text{если } k = 2, \\ 0, & \text{если } k \neq 2. \end{cases}$$

Поскольку каждое W_n открыто в $W_{<\text{SO}(2)}$, а k -мерная сфера компактна, то

$$\pi_k(W_{<\text{SO}(2)}) = \pi_k\left(\bigcup \{W_n \mid n \geq 1\}\right) \text{ совпадает с } \varinjlim \{\Gamma_s^k \mid s\}.$$

Из проведенных вычислений следует, что $\pi_k(W_{<\text{SO}(2)}) = \mathbb{Q}$ только при $k = 2$, во всех остальных случаях она нулевая. Таким образом, нами установлена

ТЕОРЕМА 12.1. Пусть $\mathbb{W}$ есть $\text{Iso}_{\text{SO}(2)}\text{-AE}$ -пространство, а семейство $\mathcal{D}$ состоит из всех дискретных орбитных типов группы S^1 . Тогда пространство орбит $W_{\mathcal{D}}$ есть комплекс Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Q}, 2)$, а кольцо чеховских когомологий $\check{H}^*(W_{\mathcal{D}}; \mathbb{Q})$ совпадает с кольцом полиномов $\mathbb{Q}[x]$ от переменной x степени 2.

Последнее утверждение теоремы следует из [21; гл. 2]: кольцо когомологий $\check{H}^*(K(\mathbb{Q}, 2); \mathbb{Q})$ совпадает с $\mathbb{Q}[x]$, $\deg x = 2$.

§ 13. Пространство орбит $\text{Iso}_{\text{O}(2)}$ -АЕ-пространства

Отметим сначала, что семейство дискретных подгрупп ортогональной группы $\text{O}(2)$ состоит из циклических подгрупп $\mathbb{Z}_n < \text{SO}(2)$, $n \geq 2$, и диэдральных подгрупп $D_n < \text{O}(2)$, $n \geq 2$. Семейство всех дискретных орбитных типов как в группе $G \rightleftharpoons \text{O}(2)$, так и в ее подгруппе $\text{SO}(2)$ мы будем обозначать одинаково через $\mathcal{D}$.

Ограничив действие группы с $\text{O}(2)$ -пространства $\mathbb{W} \in \text{Iso}_{\text{O}(2)}$ -АЕ на подгруппу $\text{SO}(2)$, мы получим $\text{SO}(2)$ -пространство, которое будем обозначать через $\mathbb{V}$. В силу теоремы 3.7 $\text{SO}(2)$ -пространство $\mathbb{V}$ является $\text{Iso}_{\text{SO}(2)}$ -АЕ-пространством, а $\mathbb{Z}_n$ -пространство $\mathbb{V}_n \rightleftharpoons \mathbb{V}_{\leq \mathbb{Z}_n}$ – $\text{Iso}_{\mathbb{Z}_n}$ -АЕ-пространством. Так как $\mathbb{V}_{\mathcal{D}} \equiv \mathbb{W}_{\mathcal{D}}$, а $\text{SO}(2)$ есть нормальная подгруппа $\text{O}(2)$, то

- (1) пространства орбит $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\text{SO}(2)$ и $\mathbb{W}_{\mathcal{D}}/\text{SO}(2)$ совпадают, и по этой причине $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\text{SO}(2)$ естественным образом наделяется действием группы $\mathbb{Z}_2 = \text{O}(2)/\text{SO}(2)$: $(g \cdot \text{SO}(2)) \cdot (\text{SO}(2) \cdot w) = \text{SO}(2) \cdot (g \cdot w)$.

Рассмотрим на $\mathbb{V}$ новое действие группы $\text{SO}(2)$, задаваемое формулой $e^{i\varphi} * w = e^{-i\varphi} \cdot w$, $e^{i\varphi} \in \text{SO}(2)$, а возникающее $\text{SO}(2)$ -пространство обозначим через $\mathbb{V}^*$. Поскольку для любых $v \in \mathbb{V}$ и $H < \text{SO}(2)$ орбиты $H \cdot v$ и $H * v$ совпадают, то пространство орбит $\mathbb{V}/H$ естественным образом отождествляется с пространством орбит $\mathbb{V}^*/H$. В частности, $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^*/\text{SO}(2) \equiv \mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\text{SO}(2)$.

Отметим, что для несобственного движения $s \in \text{O}(2) \setminus \text{SO}(2)$ справедливо равенство $s \cdot (e^{i\varphi} \cdot v) = e^{-i\varphi} \cdot (s \cdot v)$ для всех $e^{i\varphi} \in \text{SO}(2)$, $v \in \mathbb{V}$. Поэтому отображение $\sigma: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}^*$, $\sigma(v) = s \cdot v$, есть $\text{SO}(2)$ -гомеоморфизм. Поскольку $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$ являются эквиморфными, то $\mathbb{V}^* \in \text{Iso}_{\text{SO}(2)}$ -АЕ.

Несложно видеть, что индуцированное отображение

$$\tilde{\sigma}: \mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\text{SO}(2) \rightarrow \mathbb{V}_{\mathcal{D}}^*/\text{SO}(2)$$

пространств орбит представляет собой ту самую инволюцию, которая задает ранее введенное в (1) действие группы $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\text{SO}(2)$. Ясно, что множеством неподвижных точек этой инволюции будет $(\bigcup \{\mathbb{W}_{D_n} \mid n \geq 2\})/\text{SO}(2)$. В доказательстве следующего утверждения повторяются рассуждения из [10].

ТЕОРЕМА 13.1. *Группа (чеховских) когомологий $\check{H}^4(W_{\mathcal{D}}; \mathbb{Q})$ пространства орбит $W_{\mathcal{D}} = \mathbb{W}_{\mathcal{D}}/\text{O}(2)$ с коэффициентами в поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не тривиальна, и, следовательно, $W_{\mathcal{D}}$ не стягиваемое пространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 12.1 $Y \rightleftharpoons \mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\text{SO}(2)$ есть $K(\mathbb{Q}, 2)$, а его кольцо когомологий $\check{H}^*(Y; \mathbb{Q})$ есть $\mathbb{Q}[x]$, $\deg x = 2$.

Из теории Смита [12] известно, что образы гомоморфизмов

$$\text{Id} + \tilde{\sigma}^*: \check{H}^*(Y; \mathbb{Q}) \rightarrow \check{H}^*(Y; \mathbb{Q}) \quad \text{и} \quad p^*: \check{H}^*(Y/\mathbb{Z}_2; \mathbb{Q}) \rightarrow \check{H}^*(Y; \mathbb{Q})$$

совпадают (здесь $p: Y = \mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\text{SO}(2) \rightarrow Y/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\text{O}(2)$ есть орбитная проекция, а $\tilde{\sigma}^*: \check{H}^*(Y; \mathbb{Q}) \rightarrow \check{H}^*(Y; \mathbb{Q})$ есть гомоморфизм когомологий, индуцированный отображением $\tilde{\sigma}: Y \rightarrow Y$). Покажем, что для образующей $x \in \check{H}^2(Y; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ элемент $x^2 + (\tilde{\sigma})^*(x^2) \in \check{H}^4(Y; \mathbb{Q})$ не равняется нулю и поэтому кольцо $\check{H}^4(W_{\mathcal{D}}; \mathbb{Q})$ нетривиально.

В самом деле, если $(\tilde{\sigma})^*(x) = \mu \cdot x$, где $\mu \in \mathbb{Q}$, то $(\tilde{\sigma}^*(x))^2 = \mu^2 \cdot x^2$. В силу перестановочности умножения в когомологиях с индуцированным гомоморфизмом $\tilde{\sigma}^*$ мы имеем также

$$(\tilde{\sigma})^*(x^2) = (\tilde{\sigma}^*(x))^2 = \mu^2 \cdot x^2, \text{ следовательно, } x^2 + (\tilde{\sigma})^*(x^2) = (1 + \mu^2) \cdot x^2 \neq 0.$$

Усилим этот результат и покажем, что на самом деле $\check{H}^*(W_{\mathcal{D}}; \mathbb{Q})$ есть кольцо полиномов $\mathbb{Q}[y]$ от переменной y степени 4. В силу теоремы 3.7 $\text{SO}(2)$ -пространство $\mathbb{V}_n \rightleftharpoons \mathbb{V}_{\leq \mathbb{Z}_n}$ является $\text{IsoV}_{\mathbb{Z}_n}$ -АЕ-пространством, а в силу свойства (2) из § 7 орбитная проекция $p: \mathbb{V}_n/\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{V}_n/\text{SO}(2)$ является универсальным главным $\text{SO}(2)/\mathbb{Z}_n$ -расслоением.

Ограничение $\text{SO}(2)$ -гомеоморфизма $\sigma: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}^* \rightleftharpoons \mathbb{V}_{\leq \mathbb{Z}_n}^*$ порождает $\text{SO}(2)/\mathbb{Z}_n$ -отображение $\sigma_n: \mathbb{V}_n/\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{V}_n^*/\mathbb{Z}_n$ и индуцирует отображение $\tilde{\sigma}_n: \mathbb{V}_n/\text{SO}(2) \rightarrow \mathbb{V}_n^*/\text{SO}(2)$ пространств орбит. Поскольку $\mathbb{V}_n/H = \mathbb{V}_n^*/H$ для любой подгруппы $H < \text{SO}(2)$, то далее мы будем смотреть на гомеоморфизмы σ_n и $\tilde{\sigma}_n$ как на автогомеоморфизмы.

Рассмотрим нижеприводимую левую квадратную коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_n/\mathbb{Z}_n & \xrightarrow{\sigma_n} & \mathbb{V}_n/\mathbb{Z}_n \\ p \downarrow & & p \downarrow \\ \mathbb{V}_n/\text{SO}(2) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_n} & \mathbb{V}_n/\text{SO}(2) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{V}_n/\text{SO}(2) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_n} & \mathbb{V}_n/\text{SO}(2) \\ e_{nm} \downarrow & & e_{nm} \downarrow \\ \mathbb{V}_m/\text{SO}(2) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_m} & \mathbb{V}_m/\text{SO}(2), \end{array}$$

являющуюся морфизмом локально тривиального расслоения $p: \mathbb{V}_n/\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{V}_n/\text{SO}(2)$ в себя, и запишем морфизм точных последовательностей гомотопических групп расслоений, порождаемый σ_n и $\tilde{\sigma}_n$. Обратим внимание на то, что гомоморфизм $\varphi: \pi_i(\text{SO}(2)/\mathbb{Z}_n) \rightarrow \pi_i(\text{SO}(2)/\mathbb{Z}_n)$, индуцированный отображением слоев $\pi^{-1}(*)$ и $\pi^{-1}(\tilde{\sigma}_n(*))$, нетривиален только в размерности $i = 1$, где он совпадает с $-\text{Id}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Поскольку пространства $\mathbb{V}_n/\mathbb{Z}_n$ и $\mathbb{V}_n^*/\mathbb{Z}_n$ стягиваемы, то далее, продолжая рассуждения из доказательства теоремы 7.1, приходим к выводу, что индуцированный гомоморфизм $(\tilde{\sigma}_n)_*: \pi_i(\mathbb{V}_n/\text{SO}(2)) \rightarrow \pi_i(\mathbb{V}_n/\text{SO}(2))$ нетривиален только в размерности $i = 2$, где он является умножением $\mathbb{Z}$ на -1 .

Если $\mathbb{Z}_n < \mathbb{Z}_m$, то индуцированный гомоморфизм

$$(e_{nm})_2: \pi_2(\mathbb{V}_n/\text{SO}(2)) = \mathbb{Z} \rightarrow \pi_2(\mathbb{V}_m/\text{SO}(2)) = \mathbb{Z},$$

порожденный естественным вложением $\tilde{e}_{nm}: \mathbb{V}_n/\text{SO}(2) \hookrightarrow \mathbb{V}_m/\text{SO}(2)$ пространств орбит, есть умножение на целое число m/n (см. § 12). Поскольку вышеприведенная правая диаграмма тоже коммутативна, то гомоморфизм $(e_{nm})_2$ перестановочен с индуцированными гомоморфизмами $(\tilde{\sigma}_n)_2: \pi_2(\mathbb{V}_n/\text{SO}(2)) \rightarrow \pi_2(\mathbb{V}_n/\text{SO}(2))$ и $(\tilde{\sigma}_m)_2: \pi_2(\mathbb{V}_m/\text{SO}(2)) \rightarrow \pi_2(\mathbb{V}_m/\text{SO}(2))$. С помощью этого факта устанавливается аналогично теореме 12.1, что гомоморфизм

$$(\tilde{\sigma})_2: \pi_2(\mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\text{SO}(2)) = \mathbb{Q} \rightarrow \pi_2(\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^*/\text{SO}(2)) = \mathbb{Q},$$

индуцированный инволюцией $\tilde{\sigma}$, есть умножение $\mathbb{Q}$ на -1 .

Из теоремы Гуревича [22] следует, что $H_2(\mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\mathrm{SO}(2); \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ и индуцированный гомоморфизм $(\tilde{\sigma})_2: H_2(\mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\mathrm{SO}(2); \mathbb{Z}) = \mathbb{Q} \rightarrow H_2(\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^*/\mathrm{SO}(2); \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ групп гомологий есть умножение на -1 . Далее, воспользовавшись формулой универсальных коэффициентов, получаем

$$\check{H}^2(\mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\mathrm{SO}(2); \mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}(H_2(\mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\mathrm{SO}(2); \mathbb{Z}); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q},$$

а индуцированный гомоморфизм

$$(\tilde{\sigma})^2: \check{H}^2(\mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\mathrm{SO}(2); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \rightarrow \check{H}^2(\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^*/\mathrm{SO}(2); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q},$$

есть тоже умножение на -1 .

Напомним, что кольцо когомологий $\check{H}^*(\mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\mathrm{SO}(2); \mathbb{Q})$ совпадает с кольцом полиномов $\mathbb{Q}[x]$ от переменной x степени 2. В силу перестановочности умножения в когомологиях с индуцированным гомоморфизмом $\tilde{\sigma}^*$ мы заключаем, что $(\tilde{\sigma})^{4k}$ есть тождественное отображение $\mathbb{Q}$, а $(\tilde{\sigma})^{4k+2}$ есть умножение $\mathbb{Q}$ на -1 . Тем самым, гомоморфизм

$$\mathrm{Id} + \tilde{\sigma}^*: \check{H}^*(\mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\mathrm{SO}(2); \mathbb{Q}) \rightarrow \check{H}^*(\mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\mathrm{SO}(2); \mathbb{Q})$$

является изоморфизмом лишь в размерностях $4k$.

В силу теории Смита [12] образ $\mathrm{Im}(p^*)$ гомоморфизма, индуцированного орбитной проекцией $p: \mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\mathrm{SO}(2) \rightarrow \mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\mathrm{O}(2)$, совпадает с неподвижными элементами $(\check{H}^*(Y; \mathbb{Q}))^{\mathbb{Z}_2}$ гомоморфизма $\tilde{\sigma}^*: \check{H}^*(Y; \mathbb{Q}) \rightarrow \check{H}^*(Y; \mathbb{Q})$, а возникающий при этом гомоморфизм $p^*: \check{H}^*(\mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\mathrm{O}(2); \mathbb{Q}) \rightarrow (\check{H}^*(Y; \mathbb{Q}))^{\mathbb{Z}_2}$ является изоморфизмом. В силу проведенных выше вычислений группа $(\check{H}^i(Y; \mathbb{Q}))^{\mathbb{Z}_2}$ изоморфна $\mathbb{Q}$ при $i = 4k$, во всех остальных случаях $(\check{H}^i(Y; \mathbb{Q}))^{\mathbb{Z}_2} = 0$. Тем самым, кольцо когомологий $(\check{H}^*(Y; \mathbb{Q}))^{\mathbb{Z}_2}$ есть кольцо полиномов $\mathbb{Q}[y]$ от переменной y степени 4 и, следовательно, нами установлена

ТЕОРЕМА 13.2. *Гомоморфизм $p^*: \check{H}^*(\mathbb{V}_{\mathcal{D}}/\mathrm{O}(2); \mathbb{Q}) \rightarrow (\check{H}^*(Y; \mathbb{Q}))^{\mathbb{Z}_2}$ является кольцевым изоморфизмом и $\check{H}^*(W_{\mathcal{D}}; \mathbb{Q})$ есть кольцо полиномов $\mathbb{Q}[y]$ от переменной y степени 4.*

§ 14. Эпилог

Перечислим несколько задач и вопросов, представляющих интерес в связи с исследованием IsoV-AE-пространств. Для этого фиксируем G -пространство $\mathbb{W} \in \mathrm{IsoV}\text{-AE}$ и семейство $\mathcal{F} \subset \mathrm{Conj}_G$.

Исследование гомотопического типа $\mathrm{IsoV}_{\mathcal{F}}\text{-AE-пространства}$. В связи с изучением фундаментального класса G -пространства следует определить (вычислить) гомотопический тип пучка $\mathbb{W}_{\mathcal{F}}$ $\mathcal{F}$ -орбит и его пространств орбит $\mathbb{W}_{\mathcal{F}}/G$. В частности, особый интерес представляют так называемое *кольцо запирающих когомологий группы G* , т.е. кольцо $\check{H}^*(\mathbb{W}_{<G}/G; \mathbb{Q})$ пространства орбит нетривиальных орбитных типов. Два последних параграфа статьи были посвящены вычислению кольца запирающих когомологий для групп $\mathrm{SO}(2)$ и $\mathrm{O}(2)$. В связи с изучением топологии компакта Банаха–Мазура интерес представляют запирающие когомологии ортогональной группы $\mathrm{O}(n)$, $n \geq 3$ (см. [9]).

В связи с теоремой 13.2 возникает вопрос о том, верно ли, что $W_{\mathcal{D}}$ есть комплекс Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Q}, 4)$ для $\text{IsoV}_{O(2)}$ -АЕ-пространства $\mathbb{W}$.

В связи с теоремой 6.3 любопытно найти все семейства $\mathcal{F} \subset \mathcal{C} \subset \text{Orb}_G$, для которых $W_{\mathcal{F}} \hookrightarrow W_{\mathcal{C}}$ есть гомотопическая эквивалентность, $W_{\mathcal{F}} \in \text{АЕ}$ (что эквивалентно разрешимости ЗПД для $\mathcal{F}$).

Исследование топологического типа $\text{IsoV}_{\mathcal{F}}$ -АЕ-пространства. Когда $W_{\mathcal{F}}$ является топологически полным; локально компактным; строго универсальным; есть бесконечномерное многообразие, моделируемое (каким) стандартным универсальным пространством? Верно ли, что произвольное IsoV -АЕ-пространство замкнуто содержит произвольное компактное G -пространство? Когда компактное IsoV -АЕ-пространство $\mathbb{X}$ будет эквиморфно эквивариантному гильбертову кубу?

Верно ли, что любое свободное действие целых p -адических чисел A_p на гильбертовом пространстве есть свободное IsoV -АЕ-пространство? Верно ли, что для любого $\text{IsoV}_{\mathcal{F}}$ -АЕ-пространства $\mathbb{X}$ существует такое IsoV -АЕ-пространство $\mathbb{W}$, что $\mathbb{W}_{\mathcal{F}} = \mathbb{X}$?

Все известные к настоящему времени G -изовариантные экстензоры для нетривиальных групп G являются бесконечномерными. Возникающие в связи с этим наблюдением вопросы представляют определенный интерес в гипотезе Гильберта–Смита [23]: если действующая группа G нетривиальна, а $\mathbb{X} \in \text{IsoV-ANE}$, то $\dim \mathbb{X} = \infty$? $\dim X = \infty$?

Многие конструкции топологии и анализа приводят к IsoV -АЕ-пространствам. По-видимому, к числу таких относятся пространство $C(G, \mathbb{R}^1)$ регулярного представления группы, экспоненциальное пространство $\exp G$, пространство выпуклых тел евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, пространство линейных изоморфизмов гильбертова G -пространства и многие другие. Представляет интерес найти еще больше конструкций, приводящих к IsoV -АЕ-пространствам.

Список литературы

- [1] R. Palais, *The classification of G -spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., no. 36, 1960.
- [2] С. М. Агеев, Д. Реповш, “Задача о распространении накрывающей гомотопии для компактных групп преобразований” (в печати).
- [3] С. М. Агеев, “Классификация G -пространств”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:6 (1992), 1345–1357; англ. пер.: S. M. Ageev, “Classification of G -spaces”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **41**:3 (1993), 581–591.
- [4] T. tom Dieck, *Transformation groups*, de Gruyter Stud. Math., **8**, de Gruyter, Berlin–New York, 1987.
- [5] Т. том Дик, *Группы преобразований и теория представлений*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: T. tom Dieck, *Transformation groups and representation theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [6] S. Waner, “A generalization of the cohomology of groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **85**:3 (1982), 469–474.
- [7] S. Waner, “Mackey functors and G -cohomology”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **90**:4 (1984), 641–648.
- [8] H. Toruńczyk, J. West, “The fine structure of S^1/S^1 ; a Q -manifold hyperspace localization of the integers”, *Proceedings of the International Conference on Geometric Topology* (Warsaw, 1978), PWN, Warsaw, 1980, 439–449.

- [9] С. М. Агеев, С. А. Богатый, “О негомеоморфности компакта Банаха–Мазура гильбертову кубу”, *УМН*, **53**:1 (1998), 209–210; англ. пер.: S. M. Ageev, S. A. Bogatyĭ, “The Banach–Mazur compactum is not homeomorphic to the Hilbert cube”, *Russian Math. Surveys*, **53**:1 (1998), 205–207.
- [10] S. Ageev, S. Bogatyĭ, *The Banach–Mazur compactum in the dimension two*, Topology Atlas Preprint, № 291, 1997; <http://at.yorku.ca/p/a/a/m/14.htm>.
- [11] S. A. Antonyan, “The topology of the Banach–Mazur compactum”, *Fund. Math.*, **166**:3 (2000), 209–232.
- [12] Г. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований*, Наука, М., 1980; пер. с англ.: G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York–London, 1972.
- [13] M. Murayama, “On G -ANRs and their G -homotopy types”, *Osaka J. Math.*, **20**:3 (1983), 479–512.
- [14] К. Борсук, *Теория ретрактов*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: K. Borsuk, *Theory of retracts*, PWN, Warsaw, 1967.
- [15] С.-Т. Ху, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965.
- [16] С. М. Агеев, Д. Реповш, “О продолжении действий групп”, *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 3–28; англ. пер.: S. M. Ageev, D. Repovš, “On extending actions of groups”, *Sb. Math.*, **201**:2 (2010), 159–182.
- [17] С. М. Агеев, “Экстензорные свойства пространств орбит и задача продолжения действия”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1994, №1, 11–16; англ. пер.: S. M. Ageev, “Extensor properties of orbit spaces and the problem of action extension”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **49**:1 (1994), 9–12.
- [18] S. M. Ageev, D. Repovš, “On Murayama’s theorem on extensor properties of G -spaces of given orbit types”, *Topology Appl.*, **159**:7 (2012), 1743–1749.
- [19] С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, *Методы гомологической алгебры*, т. 1: *Введение в теорию кохомологий и производные категории*, Наука, М., 1988; англ. пер.: S. I. Gelfand, Yu. I. Manin, *Methods of homological algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [20] С. М. Агеев, “Изовариантные экстензоры и характеристика эквивариантных гомотопических эквивалентностей”, *Изв. РАН. Сер. матем.* (в печати).
- [21] Д. Сулливан, *Геометрическая топология*, Мир, М., 1975; пер. с англ.: D. P. Sullivan, *Geometric topology*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1971.
- [22] Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: E. N. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [23] С. М. Агеев, “Классифицирующие пространства для свободных действий и гипотеза Гильберта–Смита”, *Матем. сб.*, **183**:1 (1992), 143–151; англ. пер.: S. M. Ageev, “Classifying spaces for free actions, and the Hilbert–Smith conjecture”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **75**:1 (1993), 137–144.

С. М. Агеев (S. M. Ageev)

Механико-математический факультет

Белорусского государственного университета, г. Минск

E-mail: ageev_sergei@inbox.ru

Поступила в редакцию

16.11.2010 и 13.02.2012