Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. К. Квасневски, C^* -алгебры, ассоциированные с обратимыми расширениями логистических отображений, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 10, 71–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7819>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:19:56

УДК 517.986.24+517.986.9

Б. К. Квасневски

C^* -алгебры, ассоциированные с обратимыми расширениями логистических отображений

В этой работе модифицируется конструкция обратимых расширений динамических систем, представленная в предыдущей работе автора и А. В. Лебедева, таким образом, что она становится применимой к произвольным отображениям (не обязательно с открытой областью значений). Эта модификация основывается на вычислении пространства максимальных идеалов C^* -алгебр, которые расширяют эндоморфизмы до частичных автоморфизмов при помощи представлений частичными изометриями, и использует новое множество “параметров” (в качестве этих параметров выступают выбранные множества идеалов).

В качестве (модельных) примеров мы приводим полное описание обратимых расширений логистических отображений и классификацию систем, связанных с сокращениями унитарных операторов, порождающих гомеоморфизмы окружности.

Библиография: 34 названия.

Ключевые слова: расширения динамических систем, логистические отображения, частичная изометрия, C^* -алгебра.

§ 1. Введение

Общий C^* -метод построения обратимых расширений необратимых динамических систем был разработан в [1], где, в частности, приведено полное описание пространств максимальных идеалов возникающих C^* -алгебр. Такие алгебры естественным образом появляются в спектральном анализе операторов взвешенного сдвига и трансфер-операторов (см., например, [2], [3]), и, как показано в [1], их пространства максимальных идеалов тесно связаны с обратными (проективными) пределами динамических систем.

В качестве C^* -алгебраического базиса в своей конструкции авторы [1] используют ключевое понятие [4] – алгебру, элементы которой играют роль *коэффициентов Фурье* в расширениях C^* -алгебр частичными изометриями. А именно в [4] изучалась C^* -алгебра $C^*(\mathcal{A}, U)$, порожденная $*$ -алгеброй $\mathcal{A} \subset L(H)$, $1 \in \mathcal{A}$, и оператором $U \in L(H)$, в предположениях, что $\mathcal{A}$ удовлетворяет следующим трем свойствам:

$$\mathcal{A} \ni a \rightarrow \delta(a) := UaU^* \in \mathcal{A}, \quad (1.1)$$

$$\mathcal{A} \ni a \rightarrow \delta_*(a) := U^*aU \in \mathcal{A}, \quad (1.2)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Национального центра науки Польши.

$$Ua = \delta(a)U, \quad a \in \mathcal{A}. \quad (1.3)$$

В этом случае $\mathcal{A}$ называется *алгеброй коэффициентов* $C^*(\mathcal{A}, U)$, см. [4; предложение 2.4]. Отметим, что такие объекты являются важнейшими структурными элементами наиболее удачных конструкций скрещенных произведений таких, как, например, представленные в работах Дж. Кунца и У. Кригера [5], [6], У. Л. Пашке [7], Г. Дж. Мерфи [8], Р. Экселя [9] и др. В общем случае из условий (1.1)–(1.3) следует, что $\delta(\cdot) = U(\cdot)U^*$ является *эндоморфизмом* $\mathcal{A}$ (тогда U является *частичной изометрией*) и $\delta_*(\cdot) = U(\cdot)U^*$ – единственный невырожденный *трансфер-оператор* для $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (в смысле [10]), см. [11]. Общее скрещенное произведение, основанное на отношениях (1.1)–(1.3), построено в [12], [13]. Как показано в [14], оно может рассматриваться как скрещенное произведение на гильбертов бимодуль [15] и, следовательно, является одной из фундаментальных моделей относительной алгебры Кунца–Пимзнера [16], C^* -алгебр, ассоциированных с C^* -соответствиями [17], [18], и алгебрами Доплихера–Робертса [19], см. также [20].

В этой статье мы развиваем C^* -формализм работы [1] и применяем его к ряду классических динамических систем, чтобы получить описание пространств максимальных идеалов C^* -алгебр, связанных с их обратимыми расширениями. Напомним, что отправными объектами работы [1] были коммутативная унитарная C^* -подалгебра $\mathcal{A} \subset L(H)$ и эндоморфизм $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ такой, что

$$\mathcal{A} \ni a \rightarrow \delta(a) := UaU^* \in \mathcal{A}, \quad U^*U \in \mathcal{A}, \quad (1.4)$$

для некоторого $U \in L(H)$. Тогда условия (1.1) и (1.3) выполняются и C^* -алгебра

$$\mathcal{B} = C^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} U^{*n}\mathcal{A}U^n\right),$$

порожденная $\bigcup_{n=0}^{\infty} U^{*n}\mathcal{A}U^n$, является наименьшей (все еще коммутативной) C^* -алгеброй коэффициентов алгебры $C^*(\mathcal{A}, U)$ такой, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Переход от $\mathcal{A}$ к $\mathcal{B}$ соответствует переходу от необратимой динамики к обратимой динамике. А именно эндоморфизмы $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ и $\delta: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ соответствуют (при применении преобразования Гельфанда) частичным динамическим системам (M, α) и $(\widetilde{M}, \widetilde{\alpha})$, где $(\widetilde{M}, \widetilde{\alpha})$ может рассматриваться как универсальное обратимое расширение динамической системы (M, α) (мы придадим точный смысл последнему утверждению в теореме 3.14). Авторы [1] дали полное описание $(\widetilde{M}, \widetilde{\alpha})$ в терминах (M, α) и заметили, что $(\widetilde{M}, \widetilde{\alpha})$ содержит в качестве подсистемы обратный предел (M, α) . Это показывает, что структура C^* -алгебры $\mathcal{B}$ связана с гиперболическими аттракторами [21]–[23] (такими как солениды или подковы Смэйла), с необратимыми континуумами [24] (наиболее известными являются континуум Браудера–Кнастера–Янишевского и псевдоарка Кнастера) и с системами, связанными с классическими “укладываниями паркетов” [25] (они включают паркеты Пенроуза, Аммана, Фибонначи, Морса и др.).

Результаты работы [1], однако, содержат некоторое препятствие к их применению. Единственное по внешнему виду техническое предположение $U^*U \in \mathcal{A}$

влечет за собой тот факт, что образ α является открытым, что, в свою очередь, исключает многие важные примеры. Первый шаг этой статьи устраняет это неудобство. Основная идея для преодоления этого препятствия дана в [1; замечание 3.7]. А именно необходимо перейти от C^* -алгебры $\mathcal{A}$ к C^* -алгебре $\mathcal{A}_+ := C^*(\mathcal{A}, U^*U)$, порожденной $\mathcal{A}$ и проектором U^*U , и применить C^* -метод к конструкции обратимых расширений к динамической системе, порожденной на $\mathcal{A}_+$. В §§ 2 и 3 мы проводим соответствующий анализ и как результат получаем описание расширенных систем $(\widetilde{M}, \widetilde{\alpha})$ при условиях (1.1), (1.3), которые слабее, чем (1.4). Как показано в теореме 3.8, эти аксиомы охватывают все эндоморфизмы $\mathcal{A}$ и, следовательно, все частичные динамические системы (M, α) . Принципиальной новизной здесь является открытие того факта, что $(\widetilde{M}, \widetilde{\alpha})$ зависит не только от (M, α) , но и от определенного множества параметров $Y \subset X$ (или идеалов в $\mathcal{A}$). Из этого нового наблюдения вытекает ряд интересных следствий. К примеру, мы получаем нетривиальные результаты, применяя наш метод к (уже) обратимым динамическим системам, таким как гомеоморфизмы окружности. Тем не менее, наш главный результат и одна из главных целей – наглядное представление C^* -алгебр, ассоциированных с обратимыми расширениями семейства *логистических отображений* $\alpha_\lambda: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:

$$\alpha_\lambda(x) = 4\lambda x(1 - x), \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (1.5)$$

В процессе описания портретов пространств максимальных идеалов возникающих C^* -алгебр кроме развитого формализма мы также будем использовать известные результаты, связанные с обратными пределами логистических отображений [26], [27]. В частности, мы детально рассматриваем, какое влияние оказывают на расширенные системы такие феномены, как *бифуркации* или *хаос*.

Статья организована следующим образом. В § 2 мы вводим основные обозначения и обобщаем или приспосабливаем базовые концепции из [1], требуемые для представления результатов статьи. Также в этом параграфе мы обсуждаем общий C^* -метод расширения частичных динамических систем. Главный результат работы [1] – описание пространств максимальных идеалов C^* -алгебр, соответствующих обратимым расширениям C^* -динамических систем, – улучшается в § 3, где наряду с представлением чисто топологического определения мы доказываем, что такие системы являются универсальными объектами. Параграф 4 посвящен описанию обратимых расширений семейства логистических отображений, и, наконец, в § 5 мы классифицируем C^* -алгебры, ассоциированные с гомеоморфизмами окружности при помощи их чисел вращения.

Автор выражает признательность А. В. Лебедеву за активное участие в подготовке этой статьи.

§ 2. Вступление. Эндоморфизмы коммутативных C^* -алгебр, динамические системы и их расширения

На протяжении всей статьи $\mathcal{A}$ – это унитарная *коммутативная* C^* -алгебра. При помощи преобразования Гельфанда мы производим отождествление

$\mathcal{A} = C(M)$, где $M = M(\mathcal{A})$ – это *пространство максимальных идеалов* (также называемое *спектром алгебры $\mathcal{A}$*).

2.1. Эндоморфизмы и частичные динамические системы. Хорошо известно (см., например, [1; теорема 2.2]), что каждый эндоморфизм $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ представим в виде

$$\delta(a) = \begin{cases} a(\alpha(x)), & x \in \Delta, \\ 0, & x \notin \Delta, \end{cases} \quad a \in \mathcal{A} = C(M),$$

где $\alpha: \Delta \rightarrow M$ – непрерывное отображение, определенное на открыто-замкнутом подмножестве $\Delta \subset M$. А именно, рассматривая точки M как функционалы $\mathcal{A}$, мы получаем

$$\Delta = \{x \in M : x(\delta(1)) \neq 0\} \quad \text{и} \quad \alpha = \delta^*|_{\Delta},$$

где δ^* – дуальный оператор к $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Поэтому будем называть $\alpha: \Delta \rightarrow M$ *отображением, дуальным к эндоморфизму δ* .

Мы начнем с описания необходимых для дальнейшего объектов, связанных с алгебрами и эндоморфизмами.

Для каждого подмножества $I \subset \mathcal{A}$ определим

$$\text{hull}(I) := \{x \in M : x(I) = 0\}$$

как замкнутое подмножество M , и если I является идеалом в $\mathcal{A}$, то $I = C_{\text{hull}(I)}(M)$, где $C_K(M)$ – множество непрерывных функций на M , обращающихся в 0 на $K \subset M$. Очевидно, что в приведенных выше обозначениях

$$\text{hull}(\ker \delta) = \alpha(\Delta).$$

Так как Δ замкнуто и α непрерывно, то $\alpha(\Delta)$ также является замкнутым, и очевидно, что $\alpha(\Delta)$ открыто тогда и только тогда, когда характеристическая функция $\alpha(\Delta)$ принадлежит $C(M)$ (в таком случае эта функция является единицей в $\ker \delta = C_{\alpha(\Delta)}(M)$). Соответственно, мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Образ отображения α , дуального к эндоморфизму $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, открыт тогда и только тогда, когда ядро δ унитарно.*

Аннулятор идеала I в $\mathcal{A}$ – это множество

$$I^\perp := \{a \in \mathcal{A} : aI = \{0\}\}.$$

Ясно, что $I^\perp$ является идеалом и он может быть эквивалентным образом определен как наибольший идеал в $\mathcal{A}$ такой, что $I \cap I^\perp = \{0\}$. В частности, если ядро $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ унитарно, то $\mathcal{A}$ допускает разложение в следующую прямую сумму идеалов:

$$\mathcal{A} = \ker \delta \oplus (\ker \delta)^\perp, \tag{2.1}$$

и δ порождает изоморфизм между идеалом $(\ker \delta)^\perp$ и подалгеброй $\delta(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Эндоморфизм $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ с унитарным ядром $\ker \delta$ и образом $\delta(\mathcal{A})$, являющимся идеалом в $\mathcal{A}$, будем называть *частичным автоморфизмом* $\mathcal{A}$.

Так как $\delta(\mathcal{A})$ – идеал в $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\delta(\mathcal{A}) = \delta(1)\mathcal{A}$, то δ является частичным автоморфизмом $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{A}$ допускает два разложения в прямые суммы идеалов

$$\mathcal{A} = \ker \delta \oplus (\ker \delta)^\perp, \quad \mathcal{A} = \delta(\mathcal{A}) \oplus \delta(\mathcal{A})^\perp.$$

В этом случае обозначим через $\delta_*: \delta(\mathcal{A}) \rightarrow (\ker \delta)^\perp$ обратное отображение к изоморфизму $\delta: (\ker \delta)^\perp \rightarrow \delta(\mathcal{A})$ и продолжим δ_* на $\mathcal{A}$, положив $\delta_*|_{\delta(\mathcal{A})^\perp} \equiv 0$. Ясно, что $\delta_*: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ – частичный автоморфизм и

$$\delta \circ \delta_* \circ \delta = \delta, \quad \delta_* \circ \delta \circ \delta_* = \delta_*. \quad (2.2)$$

Следовательно, δ_* – это так называемый *обобщенный обратный* к δ .

Следующее предложение показывает более глубокие связи между объектами, введенными выше.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Эндоморфизм $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ является частичным автоморфизмом тогда и только тогда, когда его дуальное отображение $\alpha: \Delta \rightarrow \alpha(\Delta)$ является гомеоморфизмом и $\alpha(\Delta)$ является открыто-замкнутым подмножеством в M .

Более того, если δ – частичный автоморфизм, то существует единственный частичный автоморфизм $\delta_*: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, который является обобщенным обратным для δ , и он задается формулой

$$\delta_*(a) = \begin{cases} a(\alpha^{-1}(x)), & x \in \alpha(\Delta), \\ 0, & x \notin \alpha(\Delta), \end{cases} \quad a \in \mathcal{A} = C(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ частичный автоморфизм, то $\alpha(\Delta)$ открыто-замкнуто (в силу предложения 2.1) и $\alpha: \Delta \rightarrow \alpha(\Delta)$ является гомеоморфизмом, так как это отображение дуально к изоморфизму $\delta: (\ker \delta)^\perp \rightarrow \delta(\mathcal{A})$. Обратная импликация доказывается просто. Предположим, что δ и δ_* – частичные автоморфизмы, удовлетворяющие условию (2.2). Тогда из $\delta = \delta \circ \delta_* \circ \delta$ следует, что $\ker \delta_* \cap \delta(\mathcal{A}) = \{0\}$, аналогично из $\delta(\mathcal{A}) \subset (\ker \delta_*)^\perp$ и $\delta_* = \delta_* \circ \delta \circ \delta_*$ следует, что $\delta_*(\delta(\mathcal{A})) = \delta_*(\mathcal{A})$. Но так как δ_* – частичный автоморфизм, последнее соотношение дает $(\ker \delta_*)^\perp \subset \delta(\mathcal{A})$ и, следовательно, $(\ker \delta_*)^\perp = \delta(\mathcal{A})$. При помощи симметрии мы также имеем $(\ker \delta)^\perp = \delta_*(\mathcal{A})$ и, следовательно, $\delta_*: \delta(\mathcal{A}) \rightarrow (\ker \delta)^\perp$ совпадает с обратным для $\delta: (\ker \delta)^\perp \rightarrow \delta(\mathcal{A})$. В частности, δ_* определяется единственным образом через δ и его дуальное отображение α^{-1} .

Предыдущее рассуждение делает естественным следующие определения, см. [1; определения 2.4, 2.6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Под (*частичной*) *динамической системой* мы будем понимать тройку (M, Δ, α) , где M – компактное хаусдорфово пространство, Δ – открыто-замкнутое подмножество M и $\alpha: \Delta \rightarrow M$ – непрерывное отображение. Если ситуация ясна, мы будем писать просто (M, α) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Будем говорить, что частичная динамическая система (M, Δ, α) является *обратимой*, если $\alpha(\Delta)$ является открытым подмножеством M и отображение $\alpha: \Delta \rightarrow \alpha(\Delta)$ – гомеоморфизм (т.е. тройка $(M, \alpha(\Delta), \alpha^{-1})$ – также частичная динамическая система).

2.2. Расширения частичных динамических систем и эндоморфизмов. Основная идея C^* -метода построения обратимых расширений необратимых динамических систем приводится в [1]. Настоящий и следующие пп. 2.3, 2.4 и § 3 посвящены описанию главных структурных блоков этой конструкции. Более того, мы также представим усовершенствование этой конструкции, что необходимо для полного анализа частичных динамических систем, исследуемых в этой статье, и установим универсальность и минимальность естественных обратимых расширений (теорема 3.14).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Пусть $(M_\alpha, \Delta_\alpha, \alpha)$ и $(M_\beta, \Delta_\beta, \beta)$ – частичные динамические системы. Будем говорить, что сюръективное непрерывное отображение $\Psi: M_\beta \rightarrow M_\alpha$ является *полусопряжением* (или *фактор-отображением*) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\Psi^{-1}(\Delta_\alpha) = \Delta_\beta, \quad (2.3)$$

$$\alpha(\Psi(x)) = \Psi(\beta(x)), \quad x \in \Delta_\beta. \quad (2.4)$$

Если существует полусопряжение из (M_β, β) в (M_α, α) , будем говорить, что (M_β, β) является *расширением* (M_α, α) , а также что (M_α, α) является *фактором* для (M_β, β) . Если дополнительно система (M_β, β) обратима, назовем ее *обратимым расширением* (M_α, α) . Если фактор-отображение является биекцией, то его обратное отображение также является фактор-отображением, и будем говорить, что (M_β, β) и (M_α, α) *сопряжены*, или *эквивалентны*.

Следующее предложение проясняет роль объектов, представленных выше в определении, и показывает, что класс частичных динамических систем, в которых роль морфизмов играют фактор-отображения, образует категорию, дуальную к категории эндоморфизмов унитарных C^* -алгебр, где роль морфизмов играют унитарные мономорфизмы, сопряженные к эндоморфизмам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ и $\gamma: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ – эндоморфизмы унитарных коммутативных C^* -алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, и пусть $(M(\mathcal{A}), \alpha)$ и $(M(\mathcal{B}), \beta)$ – соответствующие дуальные частичные динамические системы. Эндоморфизм γ расширяет δ в том смысле, что существует унитарный мономорфизм $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ такой, что

$$T \circ \delta = \gamma \circ T \quad (2.5)$$

тогда и только тогда, когда частичная динамическая система $(M(\mathcal{B}), \beta)$ является расширением системы $(M(\mathcal{A}), \alpha)$. Более того, фактор-отображение $\Psi: M(\mathcal{B}) \rightarrow M(\mathcal{A})$ является дуальным отображением для унитарного мономорфизма T , удовлетворяющего (2.5): $T(a) = a \circ \Psi$, $a \in \mathcal{A} = C(M(\mathcal{A}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение, дуальное к унитарному мономорфизму $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, отображает $M(\mathcal{B})$ на $M(\mathcal{A})$, и, следовательно, T – это оператор

композиции с сюръекцией $\Psi: M(\mathcal{B}) \rightarrow M(\mathcal{A})$, где $\Psi = T^*|_{M(\mathcal{B})}$. Для a имеем

$$(\gamma \circ T)(a)(x) = \begin{cases} a(\Psi(\beta(x))), & x \in \Delta_\beta, \\ 0, & x \notin \Delta_\beta, \end{cases}$$

$$(T \circ \delta)(a)(x) = \begin{cases} a(\alpha(\Psi(x))), & \Psi(x) \in \Delta_\alpha, \\ 0, & \Psi(x) \notin \Delta_\alpha. \end{cases}$$

Используя эти формулы, легко проверить, что условие (2.5) выполнено тогда и только тогда, когда Ψ удовлетворяет (2.3) и (2.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Следует обратить внимание, что расширение, описанное в определении 2.6, несколько отличается (слабее) от соответствующего расширения, описанного в [1; определение 2.7]. А именно отметим, что условие (2.3) эквивалентно двум соотношениям

$$\Psi(\Delta_\beta) = \Delta_\alpha, \quad \Psi(M_\beta \setminus \Delta_\beta) = M_\alpha \setminus \Delta_\alpha,$$

и из (2.4) следует, что

$$\Psi(M_\beta \setminus \beta(\Delta_\beta)) \supset M_\alpha \setminus \alpha(\Delta_\alpha). \quad (2.6)$$

Однако, в отличие от [1], мы допускаем, что $\alpha(\Delta_\alpha)$ не обязательно открыто (это существенно для приложений, рассматриваемых в этой статье). Более того, как будет показано далее, принципиально интересный случай возникает, когда $\beta(\Delta_\beta)$ открыто, поэтому мы не можем требовать равенства в (2.6) (как в [1; определение 2.7]).

Продолжая предыдущее замечание, можно рассмотреть следствие из (2.6):

$$\Psi(\overline{M_\beta \setminus \beta(\Delta_\beta)}) \supset \overline{M_\alpha \setminus \alpha(\Delta_\alpha)}. \quad (2.7)$$

В частности, как будет показано в работе, фиксируя левую часть этого включения, можно получать различные расширения, естественно возникающие в анализе динамических систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Пусть $(M_\alpha, \Delta_\alpha, \alpha)$ и $(M_\beta, \Delta_\beta, \beta)$ – частичные динамические системы и пусть $Y \subset M_\alpha$. Если существует полусопряжение $\Psi: M_\beta \rightarrow M_\alpha$ такое, что

$$\Psi(\overline{M_\beta \setminus \beta(\Delta_\beta)}) = Y, \quad (2.8)$$

то будем говорить, что $(M_\beta, \Delta_\beta, \beta)$ – это *расширение* $(M_\alpha, \Delta_\alpha, \alpha)$, *ассоциированное с* Y .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10. Очевидно, что множество Y , удовлетворяющее (2.8), замкнуто и содержит $M_\alpha \setminus \alpha(\Delta_\alpha)$. Обратно, для любого такого множества Y можно легко построить расширение $(M_\alpha, \Delta_\alpha, \alpha)$, ассоциированное с Y , см., например, рис. 1.

Опишем теперь взаимоотношение между расширениями динамических систем, ассоциированных с Y , и расширениями эндоморфизмов, ассоциированных с идеалами.

Предположим, что $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ и $\gamma: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ являются эндоморфизмами, сопряженными с помощью T , как в предложении 2.7. Тогда из (2.5) следуют отношения

$$\ker \delta = T^{-1}(\ker \gamma), \quad (\ker \delta)^\perp \supset T^{-1}((\ker \gamma)^\perp), \quad (2.9)$$

где при переходе к оболочкам первое равенство дает (2.3), а второе дает (2.7). В частности,

$$\text{hull}((\ker \delta)^\perp) = \overline{M_\alpha \setminus \alpha(\Delta_\alpha)}, \quad \text{hull}(T^{-1}((\ker \gamma)^\perp)) = \Psi(\overline{M_\beta \setminus \beta(\Delta_\beta)}),$$

где Δ_α и Δ_β – это области определения α и β соответственно, Ψ является дуальным отображением к T . Таким образом, мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.11. Пусть J – идеал в $\mathcal{A}$, положим $Y = \text{hull}(J)$. В обозначениях предложения 2.7 система $(M(\mathcal{B}), \beta)$ является расширением системы $(M(\mathcal{A}), \alpha)$, ассоциированным с Y , тогда и только тогда, когда существует унитарный мономорфизм $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ такой, что

$$T \circ \delta = \gamma \circ T, \quad T^{-1}((\ker \gamma)^\perp) = J. \quad (2.10)$$

В этом случае $J \subset (\ker \delta)^\perp$ (или, эквивалентным образом, $Y \supset M(\mathcal{A}) \setminus \alpha(\Delta_\alpha)$) и, значит, эндоморфизм γ , расширяющий δ , “сжимает аннулятор ядра” до J .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.12. Принимая отождествление $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \cong T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$), мы получим, что $J = (\ker \gamma)^\perp \cap \mathcal{A}$, и из соотношения (2.9) следует, что γ может увеличить ядро δ , но только вне $\mathcal{A}$, т.е. $(\ker \gamma) \cap \mathcal{A} = \ker \delta$. Другими словами, единственная причина, по которой J строго меньше чем $(\ker \delta)^\perp$, заключается в том, что $\ker \gamma \setminus \mathcal{A}$ непусто. Поэтому естественно искать расширения, для которых $J = (\ker \delta)^\perp$ (или, эквивалентным образом, $Y = M(\mathcal{A}) \setminus \alpha(\Delta_\alpha)$), см. [1; определение 2.7] и замечание 2.8.

2.3. C^* -динамические системы и частичные динамические системы. Частичные динамические системы естественным образом ассоциируются с C^* -динамическими системами, а представления последних, в свою очередь, определяются при помощи действий частичных изометрий в гильбертовых пространствах. Обсуждение этих взаимоотношений и является темой данного пункта.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. Под (конкретной) C^* -динамической системой мы будем понимать пару $(\mathcal{A}, U)$, где $\mathcal{A}$ – коммутативная C^* -подалгебра алгебры $L(H)$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H , $1 \in \mathcal{A}$, и $U \in L(H)$ – частичная изометрия такая, что

$$U\mathcal{A}U^* \subset \mathcal{A}, \quad U^*U \in \mathcal{A}', \quad (2.11)$$

где $\mathcal{A}'$ – коммутатор $\mathcal{A}$ в $L(H)$.

Очевидно, что из отношений (2.11) следует, что

$$\delta(a) := UaU^*, \quad a \in \mathcal{A}, \quad (2.12)$$

является эндоморфизмом $\mathcal{A}$, и мы будем говорить, что $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ – это эндоморфизм, порожденный U . Аналогично, если (M, Δ, α) – частичная динамическая система, дуальная к δ , мы будем говорить, что (M, Δ, α) – это частичная динамическая система, порожденная U .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.14. Приведенное выше определение обобщает [1; определение 2.11], см. отношения (1.4). В частности, отношения (2.11) и предположение о том, что U является частичной изометрией, эквиваленты отношениям (1.1) и (1.3), см. [4; предложение 2.2].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.15. Мы покажем (в теореме 3.8), что для произвольного эндоморфизма $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ C^* -алгебра $\mathcal{A}$ может быть отождествлена с алгеброй операторов, действующих в некотором гильбертовом пространстве H , таким образом, что δ порождается оператором $U \in L(H)$. Следовательно, каждая абстрактная C^* -динамическая система $(\mathcal{A}, \delta)$ может быть представлена конкретной системой.

Как отмечено в теореме 2.11, для того чтобы исследовать расширения эндоморфизма, порожденного $U \in L(H)$, мы должны выразить аннулятор его ядра в терминах $(\mathcal{A}, U)$. Рассмотрим множества

$$(1 - U^*U)\mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \{a \in \mathcal{A} : U^*Ua = 0\}, \quad U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \{a \in \mathcal{A} : U^*Ua = a\},$$

которые являются (взаимно ортогональными) идеалами в $\mathcal{A}$. Следующее предположение показывает роль этих множеств при описании эндоморфизмов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.16. Пусть $(\mathcal{A}, U)$ – C^* -динамическая система, эндоморфизм $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ порожден U , (M, Δ, α) – частичная динамическая система, дуальная к $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, и $Y = \text{hull}(U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A})$. Тогда

$$\ker \delta = (1 - U^*U)\mathcal{A} \cap \mathcal{A}, \quad (\ker \delta)^\perp \supset U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A},$$

т.е. $Y \supset M \setminus \alpha(\Delta)$. Если дополнительно $U^*U \in \mathcal{A}$, то

$$\ker \delta = (1 - U^*U)\mathcal{A}, \quad (\ker \delta)^\perp = U^*U\mathcal{A},$$

т.е. $Y = M \setminus \alpha(\Delta)$. В частности,

- i) если $U^*U \in \mathcal{A}$, то $\ker \delta$ унитарно $(\alpha(\Delta))$ является открыто-замкнутым);
- ii) если U – изометрия, то $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ – мономорфизм $(\alpha(\Delta) = M)$;
- iii) если U – унитарный оператор, то $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ – унитарный мономорфизм $(\Delta = M$ и $\alpha: M \rightarrow M$ – сюръекция).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать, что $(1 - U^*U)\mathcal{A} \cap \mathcal{A}$ совпадает с $\ker \delta$, возьмем $a \in \mathcal{A}$ и заметим, что

$$U^*Ua = 0 \implies \delta(a) = UaU^* = U(U^*Ua)U^* = 0,$$

$$U^*Ua \neq 0 \implies U^*\delta(a)U = U^*UaU^*U = U^*Ua \neq 0 \implies \delta(a) \neq 0.$$

Так как $\ker \delta \cap (U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}) = \{0\}$, то $U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A} \subset (\ker \delta)^\perp$, и если $U^*U \in \mathcal{A}$, то проектор $(1 - U^*U)$ является единицей для $\ker \delta = (1 - U^*U)\mathcal{A}$ и, следовательно, U^*U является единицей для $(\ker \delta)^\perp$. Таким образом, оставшаяся часть предложения очевидна, см. [1; предложение 2.3].

В следующей лемме 2.18 и в теореме 2.19 мы дадим описание $(\ker \delta)^\perp$ и получим условие для U^*U в терминах объектов, связанных с центральными носителями элементов алгебр фон Неймана (для полноты представления мы включим в лемму 2.18 известные свойства носителей i) и ii)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.17. Носителем C^* -подалгебры $K \subset L(H)$ называется ортогональная проекция $Q \in L(H)$ на подпространство $KH \subset H$.

ЛЕММА 2.18. Пусть $Q \in L(H)$ является носителем идеала I в (не обязательно коммутативной) C^* -алгебре $\mathcal{A} \subset L(H)$. Тогда:

- i) $Q = s\text{-}\lim_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda$, где $\{\mu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – аппроксимативная единица для I (предел берется в сильной операторной топологии);
- ii) $Q \in \mathcal{A}'$;
- iii) $I \subset Q\mathcal{A} \cap \mathcal{A}$ и $I^\perp = (1 - Q)\mathcal{A} \cap \mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы Вигера следует, что предел $Q := s\text{-}\lim_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda$ существует. Для $a \in \mathcal{A}$ и $h \in H$ имеем

$$Qah = \lim_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda ah = \lim_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda \left(\lim_{\lambda' \in \Lambda} a\mu_{\lambda'} \right) h = QaQh$$

и аналогично

$$aQh = \lim_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda ah = \lim_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda \left(\lim_{\lambda' \in \Lambda} a\mu_{\lambda'} \right) h = QaQh.$$

Их этих соотношений следует, что Q является носителем I и $Q \in \mathcal{A}'$. Очевидно, что $I \subset Q\mathcal{A} \cap \mathcal{A}$ и $I^\perp \subset (1 - Q)\mathcal{A} \cap \mathcal{A}$. Чтобы доказать, что $I^\perp \supset (1 - Q)\mathcal{A} \cap \mathcal{A}$ выберем $a \notin \mathcal{A} \setminus I^\perp$. Тогда найдется $b \in I$ и $h \in H$ такие, что $abh \neq 0$. Следовательно, $Qabh = abh \neq 0$, и поэтому $Qa \neq 0$, что эквивалентно $(1 - Q)a \neq a$.

Из п. iii) леммы 2.18 мы видим, что дополнения носителей “рождены” для работы с аннуляторами идеалов.

ТЕОРЕМА 2.19. В обозначениях предложения 2.16 пусть $P = 1 - Q \in L(H)$ есть дополнение носителя Q идеала $(1 - U^*U)\mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \ker \delta$ в $\mathcal{A}$. Тогда

$$U^*U \leq P, \quad P \in \mathcal{A}', \quad (\ker \delta)^\perp = P\mathcal{A} \cap \mathcal{A}.$$

Более того, если верно равенство $(\ker \delta)^\perp = U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}$ (эквивалентным образом, $Y = M \setminus \alpha(\Delta)$), что автоматически выполняется, когда $U^*U = P$, то импликации в пп. i)–iii) предложения 2.16 являются эквивалентностями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2.18 $P \in \mathcal{A}'$ и $(\ker \delta)^\perp = P\mathcal{A} \cap \mathcal{A}$. По определению $Q \leq 1 - U^*U$ и, следовательно, $U^*U \leq P$. Предположим теперь, что $(\ker \delta)^\perp = U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}$; в силу предложения 2.16 условие $U^*U \in \mathcal{A}$ дает даже больше, а именно $(\ker \delta)^\perp = U^*U\mathcal{A}$. Мы докажем обратные утверждения к импликациям в пп. i)–iii) предложения 2.16.

- i) Если $\ker \delta$ унитарно, то Q является единицей для $\ker \delta$ и, следовательно, P является единицей для $(\ker \delta)^\perp = U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}$. Это влечет за собой $U^*U = P \in \mathcal{A}$.
- ii) Если $\ker \delta = \{0\}$, то $\mathcal{A} = (\ker \delta)^\perp = U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{A} = U^*U\mathcal{A}$, поэтому U является изометрией.
- iii) Достаточно скомбинировать пп. i) и ii).

Главная тема работы [1] – описание C^* -метода построения обратимых C^* -динамических систем, т.е. таких систем, что не только $(\mathcal{A}, U)$, но и $(\mathcal{A}, U^*)$ является C^* -динамической системой, и поэтому оба отображения

$$\delta(a) := UaU^*, \quad \delta_*(a) := U^*aU, \quad a \in \mathcal{A},$$

являются эндоморфизмами $\mathcal{A}$. Мы приводим эквивалентную версию определения 2.15 из [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.20. Под *обратимой C^* -динамической системой* будем понимать пару $(\mathcal{A}, U)$, где $\mathcal{A} \subset L(H)$ коммутативна, $1 \in \mathcal{A}$, и $U \in L(H)$ – частичная изометрия такая, что

$$U\mathcal{A}U^* \subset \mathcal{A}, \quad U^*\mathcal{A}U \subset \mathcal{A}. \quad (2.13)$$

Очевидно, что отношения (2.13) эквивалентны условию, что и $(\mathcal{A}, U)$, и $(\mathcal{A}, U^*)$ являются C^* -динамическими системами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.21. Если $(\mathcal{A}, U)$ – обратимая C^* -динамическая система, то эндоморфизмы $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ и $\delta_*: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, порожденные U и U^* , являются взаимно обобщенными обратными частичными автоморфизмами и

$$(\ker \delta)^\perp = \delta_*(\mathcal{A}) = U^*U\mathcal{A}, \quad \delta(\mathcal{A}) = (\ker \delta_*)^\perp = UU^*\mathcal{A}.$$

В частности, частичная динамическая система $(M(\mathcal{A}), \alpha)$, порожденная U , обратима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2.16 и симметрии между δ и δ_* достаточно показать, что $\delta(\mathcal{A}) = UU^*\mathcal{A}$, что верно, потому что

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{A}) &= U\mathcal{A}U^* = UU^*U\mathcal{A}U^* \subset UU^*\mathcal{A}, \\ UU^*\mathcal{A} &= UU^*\mathcal{A}UU^* = \delta(\delta_*(\mathcal{A})) \subset \delta(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

2.4. C^* -метод расширения частичных динамических систем. Если дана конкретная C^* -динамическая система $(\mathcal{A}, U)$, то в нашем распоряжении есть два отображения, которые определены на всей C^* -алгебре $L(H)$:

$$\delta(a) := UaU^*, \quad \delta_*(a) := U^*aU, \quad a \in L(H). \quad (2.14)$$

Более того, сужение δ на $\mathcal{A}$ является эндоморфизмом, а сужение δ_* на $\mathcal{A}$ является эндоморфизмом тогда и только тогда, когда $(\mathcal{A}, U)$ обратима. Очевидно, что δ (и аналогично δ_*) может определять эндоморфизмы на многих различных подалгебрах $L(H)$, и если дополнительно такая подалгебра, к примеру $\mathcal{B}$, содержит $\mathcal{A}$, то мы получим естественное расширение $\delta: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ первоначального эндоморфизма $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, см. [1; определение 2.17]. Это, в свою очередь, может быть записано на языке частичных динамических систем.

ТЕОРЕМА 2.22. Пусть $(\mathcal{A}, U)$ и $(\mathcal{B}, U)$ – C^* -динамические системы и пусть $(M(\mathcal{A}), \alpha)$ и $(M(\mathcal{B}), \beta)$ – частичные динамические системы, порожденные оператором U на пространствах максимальных идеалов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Если $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, то $(M(\mathcal{B}), \beta)$ является расширением $(M(\mathcal{A}), \alpha)$, ассоциированным с множеством

$$Y = \text{hull}((\ker \delta|_{\mathcal{B}})^\perp \cap \mathcal{A}) = \text{hull}(P\mathcal{B} \cap \mathcal{A}),$$

где $(\ker \delta|_{\mathcal{B}})^\perp$ – аннулятор ядра $\delta: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ и P – дополнение носителя $(1 - U^*U)\mathcal{B} \cap \mathcal{B}$. Более того,

- i) $U^*U \in \mathcal{B} \implies Y = \text{hull}(U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}),$
- ii) $U^*U \in \mathcal{A} \implies Y = M(\mathcal{A}) \setminus \alpha(\Delta).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\delta: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ является расширением $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ в смысле предложения 2.7, где $T = \text{id}$, то первая часть утверждения следует из теоремы 2.11 и предложения 2.19. Если дополнительно $U^*U \in \mathcal{B}$, то в силу предложения 2.16 имеем

$$(\ker \delta|_{\mathcal{B}})^\perp \cap \mathcal{A} = U^*U\mathcal{B} \cap \mathcal{A} = U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}.$$

Аналогично, если $U^*U \in \mathcal{A}$, то (см. предложение 2.1)

$$(\ker \delta|_{\mathcal{B}})^\perp \cap \mathcal{A} = U^*U\mathcal{A}, \quad \text{hull}(U^*U\mathcal{A}) = M(\mathcal{A}) \setminus \alpha(\Delta).$$

Используя вышеизложенный метод, всегда можно получить обратимое расширение, что (в контексте алгебр коэффициентов) было впервые отмечено в [4], см. [1].

ТЕОРЕМА 2.23. *Предположим, что в обозначениях теоремы 2.22 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ и $(\mathcal{B}, U)$ обратима. Тогда $(M(\mathcal{B}), \beta)$ – обратимое расширение $(M(\mathcal{A}), \alpha)$, ассоциированное с множеством*

$$Y = \text{hull}(U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}).$$

Более того, для любой C^* -динамической системы $(\mathcal{A}, U)$ существует минимальная обратимая C^* -динамическая система $(\mathcal{B}, U)$ такая, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. А именно C^* -алгебра

$$\mathcal{B} = C^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} U^{*n}\mathcal{A}U^n\right), \quad (2.15)$$

порожденная $\bigcup_{n=0}^{\infty} U^{*n}\mathcal{A}U^n$, коммутативна и является наименьшей C^* -алгеброй, содержащей $\mathcal{A}$ и удовлетворяющей (2.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть утверждения следует из предложения 2.21 и теоремы 2.22 (так как $U^*U = U^*1U \in \mathcal{B}$). Коммутативность алгебры $\mathcal{B}$, заданной (2.15), и то, что и $\delta: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, и $\delta_*: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ – эндоморфизмы, было установлено в [4; предложение 4.1]. Оставшаяся часть доказательства очевидна.

§ 3. Естественные обратимые расширения динамических систем

В этом разделе мы дадим полное чисто топологическое описание частичных динамических систем, соответствующих минимальным обратимым расширениям C^* -динамических систем, представленным в теореме 2.23. Кроме того, мы охарактеризуем такие системы как универсальные объекты и обсудим их взаимоотношения с понятием обратного предела, которое сейчас напомним.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Если $\alpha: M \rightarrow M$ – непрерывное отображение топологического пространства M , то *обратным пределом* обратной последовательности $M \xleftarrow{\alpha} M \xleftarrow{\alpha} M \xleftarrow{\alpha} \dots$ называется топологическое пространство вида

$$\varprojlim(M, \alpha) := \left\{ (x_0, x_1, \dots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} M : \alpha(x_{n+1}) = x_n, n \in \mathbb{N} \right\},$$

снабженное топологией, индуцированной топологией произведения $\prod_{n \in \mathbb{N}} M$. Более того, на пространстве $\varprojlim (M, \alpha)$ есть естественным образом определенный гомеоморфизм

$$\tilde{\alpha}(x_0, x_1, \dots) = (\alpha(x_0), x_0, x_1, \dots), \quad (x_0, x_1, \dots) \in \varprojlim (M, \alpha),$$

называемый *гомеоморфизмом, индуцированным отображением $\alpha: M \rightarrow M$* .

3.1. C^* -динамический подход. В этом параграфе $(\mathcal{A}, U)$ является C^* -динамической системой, δ и δ_* – отображения, заданные (2.14), и $\mathcal{B}$ – C^* -алгебра из теоремы 2.23. Обозначим через (M, Δ, α) частичную динамическую систему, дуальную к $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, и через $(\widetilde{M}, \widetilde{\Delta}, \tilde{\alpha})$ – обратимую частичную динамическую систему, дуальную к $\delta: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} \cong C(M), \quad \mathcal{B} = C^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} U^{*n} \mathcal{A} U^n\right) \cong C(\widetilde{M}).$$

Динамическая система $(\widetilde{M}, \widetilde{\Delta}, \tilde{\alpha})$ играет важную роль в настоящей работе. Как было отмечено в [1; замечание 3.7], чтобы получить описание $(\widetilde{M}, \widetilde{\Delta}, \tilde{\alpha})$ в терминах (M, Δ, α) , необходимо применить главный результат работы [1] к C^* -алгебре

$$\mathcal{A}_+ := C^*(\mathcal{A}, U^*U),$$

порожденной $\mathcal{A}$ и проектором U^*U . Поэтому нам надо проанализировать алгебру $\mathcal{A}_+$ и частичную динамическую систему, дуальную к эндоморфизму $\delta: \mathcal{A}_+ \rightarrow \mathcal{A}_+$. Перейдем к обсуждению этих объектов.

3.1.1. Присоединение проектора U^*U к алгебре $\mathcal{A}$. Очевидно, что C^* -алгебра $\mathcal{A}_+$ является прямой суммой идеалов

$$\mathcal{A}_+ = U^*U\mathcal{A} \oplus (1 - U^*U)\mathcal{A}, \quad (3.1)$$

где $(1 - U^*U)\mathcal{A} = \ker(\delta|_{\mathcal{A}_+})$ – ядро $\delta: \mathcal{A}_+ \rightarrow \mathcal{A}_+$, см. предложение 2.16. Как простое следствие, см., например, [28; лемма 10.1.6], мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Алгебра $\mathcal{A}_+$ изоморфна прямой сумме фактор-алгебр*

$$\mathcal{A}_+ \cong \mathcal{A} / \ker(\delta|_{\mathcal{A}}) \oplus \mathcal{A} / (U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}), \quad (3.2)$$

где $\ker(\delta|_{\mathcal{A}}) = (1 - U^*U)\mathcal{A} \cap \mathcal{A}$ – ядро $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ и $U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}$ является идеалом, содержащимся в аннуляторе $\ker(\delta|_{\mathcal{A}})^\perp$ ядра $\ker(\delta|_{\mathcal{A}})$. При изоморфизме (3.2) эндоморфизм $\delta: \mathcal{A}_+ \rightarrow \mathcal{A}_+$ принимает вид

$$a + \ker(\delta|_{\mathcal{A}}) \oplus b + (U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}) \mapsto \delta(a) + \ker(\delta|_{\mathcal{A}}) \oplus \delta(a) + (U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Слагаемое $(1 - U^*U)\mathcal{A} \cong \mathcal{A} / (U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A})$ является унитарной C^* -алгеброй, совпадающей с ядром $\delta: \mathcal{A}_+ \rightarrow \mathcal{A}_+$. Таким образом, можно интерпретировать присоединение проектора U^*U к алгебре $\mathcal{A}$ как процедуру унитализации ядра $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (эквивалентным образом, компактификацию дополнения образа α).

Пусть $(M_+, \Delta_+, \alpha_+)$ – частичная динамическая система, порожденная U на пространстве максимальных идеалов $\mathcal{A}_+$. В силу теоремы 2.22 (M_+, α_+) – расширение (M, α) , ассоциированное с множеством

$$Y = \text{hull}(U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}).$$

Переходя в предложении 3.2 к дуальным объектам, мы получим полное описание частичной динамической системы $(M_+, \Delta_+, \alpha_+)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Множество Y замкнуто и содержит $M \setminus \alpha(\Delta)$, а спектр M_+ алгебры $\mathcal{A}_+$ представим в виде следующей (топологической) прямой суммы:*

$$M_+ = \alpha(\Delta) \sqcup Y.$$

Частичное отображение α_+ , дуальное к $\delta: \mathcal{A}_+ \rightarrow \mathcal{A}_+$, определено на множестве

$$\Delta_+ = (\alpha(\Delta) \cap \Delta) \sqcup (Y \cap \Delta)$$

и принимает значения в первом слагаемом $M_+ = \alpha(\Delta) \sqcup Y$ по формуле

$$\alpha_+(x) = \alpha(x), \quad x \in \Delta_+,$$

см. рис. 1. В частности, $U^*U \in \mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+$, тогда и только тогда, когда $Y = M \setminus \alpha(\Delta)$, и тогда $\alpha(\Delta)$ является открыто-замкнутым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как пространства максимальных идеалов фактор-алгебр $\mathcal{A} / \ker(\delta|_{\mathcal{A}})$ и $\mathcal{A} / (U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A})$ могут быть отождествлены с множествами $\text{hull}(\ker(\delta|_{\mathcal{A}})) = \alpha(\Delta)$ и $\text{hull}(U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}) = Y$, то первая часть утверждения вытекает из предложения 3.2. Для доказательства второй части надо применить теорему 2.19.

Рис. 1. (а) Частичная динамическая система (M, α) , порожденная U на $\mathcal{A}$; (б) частичная динамическая система (M_+, α_+) , порожденная U на $\mathcal{A}_+$

Образно говоря, пространство M_+ возникает из (M, α) путем “вырезания” $\alpha(\Delta)$ и “замещения” множества $M \setminus \alpha(\Delta)$ замкнутым множеством Y , которое содержит $M \setminus \alpha(\Delta)$. Образом α_+ является “вырезанное” множество $\alpha(\Delta)$, оно

может быть отождествлено с образом α . Область определения α_+ увеличивается по сравнению с областью определения α на множество $Y \cap (\Delta \cap \alpha(\Delta))$.

Теперь, когда мы получили описание системы $(M_+, \Delta_+, \alpha_+)$, перейдем к главному объекту этого пункта – системе $(\widetilde{M}, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\alpha})$.

3.1.2. Описание системы $(\widetilde{M}, \widetilde{\alpha})$, дуальной к $\delta: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$. Пусть $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ – мультипликативный линейный функционал на $\mathcal{B}$. Поставим ему в соответствие последовательность функционалов на $\mathcal{A}$, заданных формулой

$$x_n(a) := \tilde{x}(\delta_*^n(a)), \quad a \in \mathcal{A}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как $\delta_*: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ является эндоморфизмом, то функционалы $x_n: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ мультипликативны и линейны, и поэтому

$$x_n \in M \quad \text{или} \quad x_n \equiv 0.$$

Более того, так как $\mathcal{B} = C^*(\bigcup_{n=0}^{\infty} \delta_*^n(\mathcal{A}))$, то последовательность $(x_0, x_1, \dots)$ определяет $\tilde{x}$ единственным образом. Следовательно, мы имеем инъективное отображение

$$\tilde{x} \mapsto (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots), \quad (3.3)$$

которое вкладывает пространство $\widetilde{M}$ в декартово произведение $\prod_{n \in \mathbb{N}} (M \cup \{0\})$ счетного числа копий пространства $M \cup \{0\}$.

Следующая теорема является обобщением главного результата работы [1] на объекты, рассматриваемые в этой работе.

ТЕОРЕМА 3.5 (описание обратимой системы $(\widetilde{M}, \widetilde{\alpha})$). *Пространство максимальных идеалов алгебры $\mathcal{B}$ может быть отождествлено при помощи отображения (3.3) со следующим топологическим пространством:*

$$\widetilde{M} = \bigcup_{N=0}^{\infty} M_N \cup M_{\infty},$$

где пространства

$$M_N = \{(x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots) : x_n \in \Delta, \alpha(x_n) = x_{n-1}, n = 1, \dots, N, x_N \in Y\},$$

$$M_{\infty} = \{(x_0, x_1, \dots) : x_n \in \Delta, \alpha(x_n) = x_{n-1}, n \geq 1\}$$

снабжены топологией произведения, порожденной топологией $\prod_{n \in \mathbb{N}} (M \cup \{0\})$, где $\{0\}$ является открыто-замкнутой точкой, а Y – замкнутое множество, содержащее $M \setminus \Delta$ (а именно $Y = \text{hull}(U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A})$). Более того, частичные гомеоморфизмы, дуальные к частичным автоморфизмам $\delta, \delta_*: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, определены соответственно на открыто-замкнутых множествах

$$\widetilde{\Delta} = \{(x_0, x_1, \dots) \in \widetilde{M} : x_0 \in \Delta\}, \quad \widetilde{\alpha}(\widetilde{\Delta}) = \{(x_0, x_1, \dots) \in \widetilde{M} : x_1 \neq 0\}$$

и задаются формулами

$$\widetilde{\alpha}(x_0, x_1, \dots) = (\alpha(x_0), x_0, x_1, \dots), \quad \widetilde{\alpha}^{-1}(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots). \quad (3.4)$$

Для доказательства достаточно применить теоремы 3.5, 4.1 из [1] к C^* -динамической системе $(\mathcal{A}_+, U)$ и потом воспользоваться предложением 3.4, см. также [1; замечание 3.7].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Отображение $\Phi: \widetilde{M} \rightarrow M$, дуальное к включению $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, задается формулой

$$\Phi(x_0, x_1, \dots) = x_0. \quad (3.5)$$

Это фактор-отображение, устанавливающее, что $(\widetilde{M}, \widetilde{\alpha})$ является обратимым расширением (M, α) , ассоциированным с Y .

Следующий результат показывает, что в ситуациях, когда U принадлежит ряду наиболее используемых классов операторов, структура $(\widetilde{M}, \widetilde{\alpha})$ становится более прозрачной.

ТЕОРЕМА 3.7. В обозначениях теоремы 3.5 имеем $M \setminus \alpha(\Delta) \subset Y$ и

- i) если $U^*U \in \mathcal{A}$, то $Y = M \setminus \alpha(\Delta)$ и, следовательно, последовательность $(x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots)$ является элементом M_N тогда и только тогда, когда

$$x_N \notin \alpha(\Delta) \quad (\text{т.е. у } x_N \text{ нет прообразов})$$

и $x_n \in \Delta$, $\alpha(x_n) = x_{n-1}$ для $n = 1, \dots, N$;

- ii) если U является изометрией, то $\alpha: \Delta \rightarrow M$ – сюръекция и, следовательно,

$$\widetilde{M} = M_\infty;$$

- iii) если U – унитарный оператор, то $\alpha: M \rightarrow M$ – сюръекция,

$$\widetilde{M} = \varprojlim (M, \alpha)$$

и $\widetilde{\alpha}: \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ будет гомеоморфизмом, порожденным $\alpha: M \rightarrow M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3.5 утверждение i) следует из предложения 3.4, а утверждения ii), iii) следуют из предложения 2.16.

3.2. Конструкция операторов, порожденных произвольной частичной динамической системой (M, α) . Пусть (M, Δ, α) – частичная динамическая система, и пусть $Y \subset M$ – замкнутое множество, содержащее $M \setminus \alpha(\Delta)$. Теорема 3.5 вызывает естественный вопрос: существует ли C^* -динамическая система $(\mathcal{A}, U)$, порождающая частичную динамическую систему (M, Δ, α) , такая, что ее обратимое расширение ассоциируется с Y ? Другими словами, все ли объекты, описанные в теореме 3.5, реализуемы. Ответ на этот вопрос – да. А именно, следуя [1; п. 4.2], мы используем явное описание обратимого расширения $(\widetilde{M}, \widetilde{\alpha})$, ассоциированного с Y , чтобы дать простую конструкцию операторов, порождающих (M, α) .

Пусть

$$(Uf)(\widetilde{x}) = \begin{cases} f(\widetilde{\alpha}(\widetilde{x})), & \widetilde{x} \in \widetilde{\Delta}, \\ 0, & \widetilde{x} \notin \widetilde{\Delta}, \end{cases}$$

действует в гильбертовом пространстве $H = \ell^2(\widetilde{M})$ (которое может рассматриваться как пространство $L^2_\mu(\widetilde{M})$, где μ – считающая мера), и пусть $\mathcal{A} \subset L(H)$ –

алгебра, состоящая из операторов умножения на функцию из $C(\widetilde{M})$, зависящую только от нулевой координаты:

$$\mathcal{A} = \{a \in C(\widetilde{M}) : a(\tilde{x}) = a(x_0), \text{ где } \tilde{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \widetilde{M}\}.$$

Ясно, что $\mathcal{A} \cong C(M)$ и U генерируют на M частичное отображение α . Проектор U^*U является оператором умножения на характеристическую функцию $\tilde{\alpha}(\widetilde{\Delta})$, и, следовательно, $U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \{a \in \mathcal{A} : U^*Ua = a\} \cong C_Y(M)$. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть (M, α) – произвольная динамическая система, и пусть Y – произвольное замкнутое множество, содержащее $M \setminus \alpha(\Delta)$. Тогда найдется гильбертово пространство H , C^* -алгебра $\mathcal{A} \subset L(H)$, спектр которой гомеоморфен M , и частичная изометрия $U \in L(H)$ такая, что

- i) на спектре $\mathcal{A}$ оператор U генерирует частичное отображение α ,
- ii) на спектре

$$\mathcal{B} := C^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^{*n} \mathcal{A} U^n\right)$$

оператор U генерирует обратимое расширение $(\widetilde{M}, \tilde{\alpha})$ системы (M, α) , ассоциированное с Y .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. Из [29; пример 1.6] следует (см. [30], [20]), что конкретные C^* -динамические системы, генерирующие фиксированный “абстрактный” эндоморфизм $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, находятся во взаимно однозначном соответствии с представлениями некоторого C^* -соответствия (гильбертова бимодуля) X , построенного по δ . Более того, для идеала J в $\mathcal{A}$ C^* -динамические системы $(\mathcal{A}, U)$, для которых выполнено $U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A} \subset J$, соответствуют представлениям X , коизометрическим на J . Следовательно, можно построить пару $(\mathcal{A}, U)$, имеющую свойства, описанные в теореме 3.8, взяв фактор фоковского представления X , см. [16], что по сравнению с нашей конструкцией является более сложным подходом. В силу вышеприведенных наблюдений можно называть $Y = \text{hull}(U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A})$ множеством *косюръективности* для $(\mathcal{A}, U)$.

3.3. Топологическое определение, связь с обратными пределами и универсальность. Мы закончим этот параграф обсуждением универсальности обратимого расширения, описанного в теореме 3.5. Эта теорема, в частности, показывает, что система $(\widetilde{M}, \tilde{\alpha})$ не зависит от ее операторно-теоретического происхождения. Поэтому мы примем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.10. Пусть (M, α) – частичная динамическая система и Y – замкнутое подмножество M , содержащее $M \setminus \alpha(\Delta)$. Частичная динамическая система $(\widetilde{M}, \tilde{\alpha})$, описанная в теореме 3.5, будет называться *естественным обратимым расширением* (M, α) , ассоциированным с Y .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.11. В случае, когда $\alpha: M \rightarrow M$ определено на всем M , естественное обратимое расширение $(\widetilde{M}, \tilde{\alpha})$, ассоциированное с $Y \supset M \setminus \alpha(M)$, имеет следующую структуру:

- система $(M_\infty, \tilde{\alpha})$ совпадает с обратным пределом системы $(\varprojlim(M, \alpha), \tilde{\alpha})$,
- для любого $N \in \mathbb{N}$ множество M_N гомеоморфно Y , и $\tilde{\alpha}$ отображает гомеоморфно M_N на M_{N+1}

$$M_0 \xrightarrow{\tilde{\alpha}} M_1 \xrightarrow{\tilde{\alpha}} M_2 \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \dots, \quad (M_\infty, \tilde{\alpha}) = (\varprojlim(M, \alpha), \tilde{\alpha}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. Система $(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$ имеет преимущество перед $(\varprojlim(M, \alpha), \tilde{\alpha})$. А именно $(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$ всегда является расширением системы (M, α) , в то время как $(\varprojlim(M, \alpha), \tilde{\alpha})$ может вырождаться. Следующий пример иллюстрирует это наблюдение.

ПРИМЕР 3.13. Пусть $\alpha: M \rightarrow M$ – постоянное отображение с единственным значением, которым является неизолированная точка $p \in M$, см. рис. 2, (a). Единственное замкнутое множество, содержащее $M \setminus \alpha(\Delta) = M \setminus \{p\}$, – это $Y = M$. Для этого множества система (M_+, α_+) , описанная в предложении 3.4, возникает из (M, α) путем присоединения открыто-замкнутой копии точки $\{p\}$, см. рис. 2, (b). Пространство $\tilde{M}$ – это счетное семейство копий множества M , компактифицированное одной точкой $M_\infty = \{p\}$, см. рис. 2, (c). А пространство $(\varprojlim(M, \alpha), \tilde{\alpha})$ вырождается в единственную точку, см. рис. 2, (d).

Рис. 2. Системы, ассоциированные с постоянными отображениями

Еще одним весомым свидетельством того, что $(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$ является подходящим обратимым напарником для (M, α) , служит его отождествление с универсальным минимальным объектом, к которому мы и переходим.

ТЕОРЕМА 3.14 (универсальность естественного обратимого расширения). Пусть (M, Δ, α) – частичная динамическая система, $(\tilde{M}, \tilde{\Delta}, \tilde{\alpha})$ – ее естественное обратимое расширение, ассоциированное с множеством $Y \subset M$, и Φ – соответствующее фактор-отображение (3.5).

- i) Если $(M_\beta, \Delta_\beta, \beta)$ – обратимое расширение (M, α) , ассоциированное с Y , и Ψ – соответствующая полусопряженность, то существует единственная полусопряженность $\tilde{\Psi}$ из (M_β, β) в $(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$ такая, что $\Psi = \Phi \circ \tilde{\Psi}$, т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (M_\beta, \beta) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & (\tilde{M}, \tilde{\alpha}) \\ & \searrow \Psi \quad \swarrow \Phi & \\ & (M, \alpha) & \end{array}$$

коммутативна, и $\tilde{\Psi}(M_\beta \setminus \beta(\Delta_\beta)) = \tilde{M} \setminus \tilde{\alpha}(\tilde{\Delta})$, таким образом, (M_β, β) является расширением $(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$, ассоциированным с $\tilde{M} \setminus \tilde{\alpha}(\tilde{\Delta})$.

- ii) Если частичная динамическая система (M_β, β) обладает свойством $(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$, описанным в i), то (M_β, β) и $(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$ эквивалентны и эквивалентность получается при помощи $\tilde{\Psi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Обозначим через M_N^β , $N \in \mathbb{N}$, множество точек, у которых в точности N прообразов при отображении β , т.е. $y \in M_N^\beta$ тогда и только тогда, когда $y, \beta^{-1}(y), \dots, \beta^{-(N-1)}(y) \in \beta(\Delta_\beta)$ и $\beta^{-N}(y) \notin \beta(\Delta_\beta)$. Подобным образом обозначим через M_∞^β множество точек, у которых бесконечно много прообразов при отображении β . Положим

$$M_N^\beta \ni y \mapsto \tilde{\Psi}(y) := (\Psi(y), \Psi(\beta^{-1}(y)), \dots, \Psi(\beta^{-N}(y)), 0, \dots) \in M_N,$$

$$M_\infty^\beta \ni y \mapsto \tilde{\Psi}(y) := (\Psi(y), \Psi(\beta^{-1}(y)), \dots, \Psi(\beta^{-n}(y)), \dots) \in M_\infty.$$

В силу (2.4) и (2.8) это задает отображение $\tilde{\Psi}: M_\beta \rightarrow \tilde{M}$. Оно непрерывно, так как для открытого множества $\tilde{U} \subset \tilde{M}$ вида

$$\tilde{U} = \{(x_0, x_1, \dots) \in \tilde{M} : x_n \in U\}, \quad \text{где } U \text{ открыто в } M,$$

множество $\tilde{\Psi}^{-1}(\tilde{U}) = \beta^n(\Psi^{-1}(U))$ также открыто. Из условия (2.8) следует, что $\tilde{\Psi}$ отображает M_N^β на M_N . В частности,

$$\tilde{\Psi}(M_\beta \setminus \beta(\Delta_\beta)) = \tilde{\Psi}(M_0^\beta) = M_0 = \tilde{M} \setminus \tilde{\alpha}(\tilde{\Delta}).$$

Для того чтобы показать, что $\tilde{\Psi}$ отображает M_∞^β на M_∞ , зафиксируем $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots) \in M_\infty$ и положим

$$D_n = \tilde{\Psi}^{-1}(\{\tilde{y} = (y_0, y_1, \dots) \in \tilde{M} : y_n = x_n\}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ образует убывающую последовательность непустых компактных множеств, и поэтому $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n \neq \emptyset$. Взяв $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$, получим, что $\tilde{\Psi}(y) = \tilde{x}$, что доказывает сюръективность $\tilde{\Psi}$. Отношения $\tilde{\Psi}^{-1}(\tilde{\Delta}) = \Delta_\beta$ и $\Psi = \Phi \circ \tilde{\Psi}$ очевидны.

Для доказательства единственности $\tilde{\Psi}$ отметим, что из обратимости систем (M_β, β) , $(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$ и равенства $\tilde{\Psi}(M_\beta \setminus \beta(\Delta_\beta)) = \tilde{M} \setminus \tilde{\alpha}(\tilde{\Delta})$ следует, что полусопряженность $\tilde{\Psi}$ из (M_β, β) в $(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$ автоматически является полусопряженностью

из (M_β, β^{-1}) в $(\widetilde{M}, \widetilde{\alpha}^{-1})$. Это, вместе с отношением $\Psi = \Phi \circ \widetilde{\Psi}$, дает систему соотношений $\Psi \circ \beta^{-n} = \Phi \circ \widetilde{\alpha}^{-n} \circ \widetilde{\Psi}$, $n \in \mathbb{N}$, понимаемую в том смысле, что совпадают не только функции, но и их естественные области определения. Это позволяет $\widetilde{\Psi}$ вести себя в соответствии с формулами, которые мы использовали как определение в первой части доказательства.

ii) У нас есть две полусопряженности $\widetilde{\Phi}: M_\beta \rightarrow \widetilde{M}$ и $\widetilde{\Psi}: \widetilde{M} \rightarrow M_\beta$, для которых в силу соотношений из i) (с тем же соглашением относительно областей определения) справедливы равенства

$$\Psi \circ \beta^{-n} = \Phi \circ \widetilde{\alpha}^{-n} \circ \widetilde{\Psi}, \quad \Phi \circ \widetilde{\alpha}^{-n} = \Psi \circ \beta^{-n} \circ \widetilde{\Phi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому $(\Phi \circ \widetilde{\alpha}^{-n}) \circ (\widetilde{\Psi} \circ \widetilde{\Phi}) = \Phi \circ \widetilde{\alpha}^{-n}$ и из вида $\widetilde{M}$ вытекает, что $\widetilde{\Psi} \circ \widetilde{\Phi} = \text{id}$. Следовательно, $\widetilde{\Phi}$ является гомеоморфизмом, что дает нужную нам эквивалентность.

Отождествляя $\mathcal{A} = C(M)$ с подалгеброй $\{a \circ \Phi : a \in C(M)\}$ алгебры $\widetilde{\mathcal{A}} := C(\widetilde{M})$, обозначая через δ и $\widetilde{\delta}$ эндоморфизмы, соответствующие α и $\widetilde{\alpha}$, и полагая $J = C_Y(M)$, можно интерпретировать вышеприведенный результат в терминах эндоморфизмов следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.15. *Каждый частичный автоморфизм $\gamma: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, который расширяет $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ таким образом, что $(\ker \gamma)^\perp \cap \mathcal{A} = J$, автоматически расширяет частичный автоморфизм $\widetilde{\delta}: \widetilde{\mathcal{A}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}}$ так, что $(\ker \gamma)^\perp \cap \widetilde{\mathcal{A}} = (\ker \widetilde{\delta})^\perp$. Более того, это свойство характеризует пару $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\delta})$ (с точностью до изоморфизмов, сопрягающих эндоморфизмы).*

§ 4. Обратимые расширения логистических отображений

Теперь, после того как вся необходимая подготовительная работа выполнена и все требуемые C^* -объекты описаны, мы переходим к изложению конкретных примеров обратимых расширений динамических систем.

В этом параграфе мы проведем полный анализ обратимых расширений семейства логистических отображений $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda \in (0,1]}$, где под *логистическим отображением с параметром* $\lambda \in (0,1]$ понимается квадратичное отображение $\alpha_\lambda: [0,1] \rightarrow [0,1]$, заданное уравнением (1.5), см. рис. 3, (а). Для лучшего иллюстрирования нашего C^* -метода определим операторы, генерирующие α_λ , $\lambda \in (0,1]$, в конкретной форме (несмотря на то, что мы уже знаем, что такие операторы всегда существуют, см. теорему 3.8). Пусть $H = L^2(\mathbb{R})$, рассмотрим C^* -алгебру $\mathcal{A}$, состоящую из операторов умножения на периодическую функцию $a(t)$ периода 1, непрерывную на $[0,1)$ и имеющую предел слева в 1, т.е.

$$a(t+1) = a(t), \quad a|_{[0,1)} \in C([0,1)) \quad \text{и существует} \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} a(t). \quad (4.1)$$

Ясно, что $\mathcal{A}$ изоморфна $C([0,1])$, и мы будем отождествлять ее спектр M с единичным интервалом $[0,1]$:

$$M = [0,1].$$

Рис. 3. (а) График логистического отображения $\alpha_\lambda: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$; (б) график инъективного отображения $\gamma_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, возникающего из α_λ

Зафиксируем $\lambda \in (0, 1]$ и определим кусочно непрерывную функцию $\gamma_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, где

$$\gamma_\lambda(x) = \begin{cases} 4\lambda t(1-t) + 2k, & t \in [k, k + \frac{1}{2}], \\ 4\lambda t(1-t) + 2k + 1, & t \in [k + \frac{1}{2}, k + 1), \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.2)$$

График γ_λ получается из графика α_λ путем “размножения” половин параболы $y = \alpha_\lambda(x)$ на $\mathbb{R}^2$ таким образом, что в результате получается график инъективного отображения на $\mathbb{R}$, см. рис. 3, (б). Отображение γ_λ является инъективным, и оно является биективным тогда и только тогда, когда $\lambda = 1$.

Пусть $U_\lambda: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ – нормализованный оператор композиции с γ_λ :

$$(U_\lambda f)(t) = \sqrt{|\gamma'_\lambda(t)|} f(\gamma_\lambda(t)) = 2\sqrt{|\lambda(1-2t)|} f(\gamma_\lambda(t)), \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \quad (4.3)$$

так что U_λ является коизометрией, где сопряженная изометрия задается следующим образом:

$$(U_\lambda^* f)(t) = \begin{cases} \sqrt{|(\gamma_\lambda^{-1})'(t)|} f(\gamma_\lambda^{-1}(t)), & t \in \gamma_\lambda(\mathbb{R}), \\ 0, & t \notin \gamma_\lambda(\mathbb{R}), \end{cases} \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

В частности, U_λ является унитарным тогда и только тогда, когда $\lambda = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Для каждого $\lambda \in (0, 1]$ оператор U_λ генерирует на спектре C^* -алгебры $\mathcal{A}$ логистическое отображение α_λ . Более того, оболочка идеала

$$J = (U_\lambda^* U_\lambda) \mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \{a \in \mathcal{A} : U_\lambda^* U_\lambda a = a\}$$

является наименьшей возможной, см. предложение 2.16, т.е.

$$Y = \text{hull}(J) = \overline{M \setminus \alpha_\lambda(M)} = \begin{cases} [\lambda, 1], & \lambda < 1, \\ \emptyset, & \lambda = 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $U_\lambda^* U_\lambda$ является оператором умножения на характеристическую функцию $\chi_{\gamma_\lambda(\mathbb{R})}$ множества $\gamma_\lambda(\mathbb{R})$, то $U_\lambda^* U_\lambda \in \mathcal{A}'$ и оболочкой J является множество $Y = \text{hull}(\{a \in \mathcal{A} : \chi_{\gamma_\lambda(\mathbb{R})} a = a\}) = [\lambda, 1]$ для $\lambda < 1$ и $Y = \emptyset$ для $\lambda = 1$. Для любого оператора a умножения на $a(t)$ $U_\lambda a U_\lambda^*$ является оператором умножения на

$$(U_\lambda a U_\lambda^*)(t) = a(\gamma_\lambda(t)) = a(\{\gamma_\lambda(t)\}) = a(\alpha_\lambda(\{t\})),$$

где $\{t\} \in [0, 1)$ означает дробную часть числа $t \in \mathbb{R}$. Поэтому легко увидеть, что U_λ генерирует на $[0, 1]$ отображение α_λ .

В силу вышесказанного первая из следующих операций:

$$\delta_\lambda(a) := U_\lambda a U_\lambda^*, \quad \delta_{*,\lambda}(a) := U_\lambda^* a U_\lambda, \quad a \in L(L^2(\mathbb{R})),$$

сохраняет алгебру $\mathcal{A}$, а логистическое отображение α_λ является ее дуальным отображением. В частности, мы можем использовать следующие тождества:

$$\mathcal{A} = C([0, 1]), \quad \delta_\lambda(a) = a \circ \alpha_\lambda, \quad a \in \mathcal{A}.$$

С другой стороны, для $a \in \mathcal{A}$ $\delta_{*,\lambda}(a)$ – это оператор умножения на функцию

$$\delta_{*,\lambda}(a)(t) = (U_\lambda^* a U_\lambda)(t) = \begin{cases} a(\gamma_\lambda^{-1}(t)), & x \in \gamma_\lambda(\mathbb{R}), \\ 0, & x \notin \gamma_\lambda(\mathbb{R}), \end{cases}$$

которая является периодической, но в общем случае ее период равен 2, а не 1. Поэтому отображения $\delta_{*,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$, не сохраняют алгебру $\mathcal{A}$ и C^* -алгебры

$$\mathcal{B}_\lambda := C^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_\lambda^{*n} \mathcal{A} U_\lambda^n\right) \quad (4.4)$$

являются существенно большими, чем $\mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть система $(\widetilde{M}_\lambda, \widetilde{\alpha}_\lambda)$, $\lambda \in (0, 1]$, – обратимое расширение $([0, 1], \alpha_\lambda)$, ассоциированное с множеством Y , где $Y = [\lambda, 1]$ при $\lambda < 1$ и $Y = \emptyset$ при $\lambda = 1$. Алгебра $\mathcal{B}_\lambda$ может быть отождествлена с $C(\widetilde{M}_\lambda)$, и при этом частичный автоморфизм $\delta_\lambda: \mathcal{B}_\lambda \rightarrow \mathcal{B}_\lambda$ становится оператором композиции с гомеоморфизмом $\widetilde{\alpha}_\lambda: \widetilde{M}_\lambda \rightarrow \widetilde{\alpha}_\lambda(\widetilde{M}_\lambda)$:

$$\mathcal{B}_\lambda = C(\widetilde{M}_\lambda), \quad \delta_\lambda(a) = a \circ \widetilde{\alpha}_\lambda, \quad a \in \mathcal{B}_\lambda.$$

В частности, оператор U_λ генерирует на $\widetilde{M}_\lambda$ частичный гомеоморфизм $\widetilde{\alpha}_\lambda$.

Теорема следует из предложения 4.1, теоремы 3.5 и определения 3.10.

Описание расширенных C^* -динамических систем $(\mathcal{B}_\lambda, \delta_\lambda)$ сводится к описанию семейства обратимых топологических систем

$$\{(\widetilde{M}_\lambda, \widetilde{\alpha}_\lambda)\}_{\lambda \in (0, 1]}.$$

Напомним, см. замечание 3.6, что отображение $\Phi: \widetilde{M}_\lambda \rightarrow [0, 1]$, дуальное к вложению $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_\lambda$, является сюръекцией такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M}_\lambda & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_\lambda} & \widetilde{M}_\lambda \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ [0, 1] & \xrightarrow{\alpha_\lambda} & [0, 1] \end{array}$$

коммутативна.

Подчеркнем, что изменение значения параметра $\lambda \in (0, 1]$ влияет не только на динамику $\tilde{\alpha}_\lambda$, но и на топологию пространства $\widetilde{M}_\lambda$. Для нашего анализа необходимы следующие понятия из теории континуума.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3 (см., например, [24]). Под *континуумом* мы будем понимать связное компактное метрическое пространство. Континуум называется

- i) *невырожденным*, если он не является точкой,
- ii) *приводимым*, если он может быть представлен как сумма двух его собственных подконтинуумов,
- iii) *неприводимым*, если он невырожденный и не приводимый,
- iv) *змееподобным* или *аркоподобным*, если он гомеоморфен обратному пределу обратной последовательности со связующими отображениями, являющимися непрерывными отображениями интервала, см. [24; п. 12.19].

Для всех $\lambda \in (0, 1]$ спектр $\widetilde{M}_\lambda$ алгебры $\mathcal{B}_\lambda$ содержит змееподобный континуум $M_\infty = \varprojlim ([0, 1], \alpha_\lambda)$, и в соответствии с общим динамическим законом, открытым М. Барге и Дж. Мартином [27], следует ожидать, что этот континуум неприводим, см. теорему 4.6 ниже.

4.1. Общая структура расширенных систем $(\widetilde{M}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$. Пусть $\lambda < 1$. В силу замечания 3.11 пространство $\widetilde{M}_\lambda$ состоит из множества M_∞ , которое является обратным пределом $\varprojlim (M, \alpha_\lambda)$ и счетного семейства дуг M_N , т.е. множеств, гомеоморфных отрезку: $M_N \cong [\lambda, 1]$.

ТЕОРЕМА 4.4. Для $\lambda < 1$ пространство максимальных идеалов $\widetilde{M}_\lambda$ алгебры $\mathcal{B}_\lambda$ состоит из змееподобного континуума $M_\infty = \varprojlim (M, \alpha_\lambda)$ и последовательности дуг M_N таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_N = M_\infty,$$

где предел берется в хаусдорфовой метрике. В частности,

$$\widetilde{M}_\lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_N \cup M_\infty = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_N}.$$

Отображение $\tilde{\alpha}_\lambda$, порожденное U_λ на $\widetilde{M}_\lambda$, отображает гомеоморфно дугу M_N на дугу M_{N+1} и на континууме $M_\infty = \varprojlim (M, \alpha_\lambda)$ совпадает с гомеоморфизмом, индуцированным α_λ (см. определение 3.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам надо доказать только равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} M_N = M_\infty$, которое (см., например, [24; теорема 4.11]) эквивалентно двум следующим включениям:

$$\begin{aligned} \limsup M_N &= \{\tilde{x} \in \widetilde{M}_\lambda : \forall \text{ открытого } U \ni \tilde{x} \\ &\quad \forall k \in \mathbb{N} \exists N > k \ U \cap M_N \neq \emptyset\} \subset M_\infty, \\ M_\infty \subset \liminf M_N &= \{\tilde{x} \in \widetilde{M}_\lambda : \forall \text{ открытого } U \ni \tilde{x} \\ &\quad \exists k \in \mathbb{N} \forall N > k \ U \cap M_N \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Если мы предположим, что $\tilde{x} \in \limsup M_N$ и $\tilde{x} \in M_{N_0}$ для некоторого $N_0 \in \mathbb{N}$, то, взяв в определении $\limsup M_N$ $U = M_{N_0}$ и $k = N_0$, приходим к противоречию. Это доказывает первое включение. Для доказательства второго включения возьмем $\tilde{x} = (x_0, \dots, x_{N_0}, \dots) \in M_\infty$ и открытую окрестность $\tilde{x}$ вида

$$U = \{\tilde{y} = (y_0, \dots, y_{N_0}, \dots) \in \widetilde{M}_\lambda : y_{N_0} \in (x_{N_0} - \varepsilon, x_{N_0} + \varepsilon)\}.$$

Заметим, что найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha_\lambda^{n_0}([\lambda, 1]) = [0, \lambda]$. В самом деле, если $\lambda \leq \frac{1}{2}$, то $\alpha_\lambda([\lambda, 1]) = [0, \lambda]$, и если $\lambda > \frac{1}{2}$, то для некоторого n_0 $\alpha_\lambda^{n_0}(\lambda) > \frac{1}{2}$ и, следовательно, $\alpha_\lambda^{n_0}([\lambda, 1]) = [0, \lambda]$. Полагая $k = N_0 + n_0$, имеем $U \cap M_N \neq \emptyset$ для каждого $N > k$ и, следовательно, $\tilde{x} \in \liminf M_N$.

Из теоремы 4.4 следует, что если у нас есть описание $(M_\infty, \tilde{\alpha}_\lambda)$, то мы легко можем описать всю систему $(\widetilde{M}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$: достаточно присоединить к M_∞ последовательность дуг $\{M_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, сходящуюся к M_∞ , и продолжить отображение $\tilde{\alpha}_\lambda$ так, чтобы оно сдвинуло гомеоморфно дуги M_N в направлении M_∞ . Значимость этого комментария заключается в том, что большое количество фактов, относящихся к системам типа $(\varprojlim(M, \alpha_\lambda), \tilde{\alpha}_\lambda)$, известны, см. [26]. Поэтому для достижения наших целей мы можем их использовать.

4.1.1. *Расширенная система для $\lambda = 1$ (Б–Я–К континуум).* Для $\lambda = 1$ отображение α_1 является сюръекцией, и пространство $\widetilde{M}_1$ совпадает с обратным пределом $\varprojlim([0, 1], \alpha_1)$ полного логистического отображения $\alpha_1(x) = 4x(1 - x)$, см. теорему 3.7, iv). Следовательно, $\widetilde{M}_1$ – один из самых известных неприводимых континуумов, называемый *Б–Я–К континуумом* в честь Браудера, Янишевского и Кнастера [26], [24], [31]. Можно графически изобразить M_1 , соединяя точки множества Кантора полуокружностями, как показано на рис. 4, (а).

Логистическое отображение $\alpha_1(x) = 4x(1 - x)$ топологически сопряжено с тент-отображением $\alpha_T(x) = 1 - |2x - 1|$, и Б–Я–К континуум обычно рассматривается [24], [31] как обратный предел $\varprojlim(M, \alpha_T)$. В этом случае существует естественная параметризация составляющей точки $(0, 0, 0, \dots)$ Б–Я–К континуума неотрицательными действительными числами [31], см. рис. 4, (б). С этой параметризацией индуцированные гомеоморфизмы $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_T$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\tilde{\alpha}_1(t) = \begin{cases} 2k + \alpha(\{t\}), & t \in \left[k, k + \frac{1}{2}\right), \\ 2(k + 1) - \alpha(\{t\}), & t \in \left[k + \frac{1}{2}, k + 1\right), \end{cases} \quad \tilde{\alpha}_T(t) = 2t, \quad (4.5)$$

где $\{t\}$ означает дробную часть числа t (очевидно, системы $(\widetilde{M}_1, \tilde{\alpha}_1)$ и $(\widetilde{M}_1, \tilde{\alpha}_T)$ топологически сопряжены). Эти комментарии дают конкретное представление о динамике системы $(\widetilde{M}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$ для $\lambda = 1$.

Рис. 4. Континуум Браудера–Янишевского–Кнастера

ТЕОРЕМА 4.5. Алгебра $\mathcal{B}_1$ может быть отождествлена с алгеброй $C(\widetilde{M}_1)$ непрерывных функций на Б–Я–К континууме $\widetilde{M}_1$, рис. 4, (а). При этом автоморфизм $\delta_1: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_1$ становится оператором композиции с гомеоморфизмом $\tilde{\alpha}_1: \widetilde{M}_1 \rightarrow \widetilde{M}_1$, который с параметризацией, представленной на рис. 4, (b), принимает вид (4.5).

Более того, неприводимость $\widetilde{M}_1$ выражает следующее свойство $\mathcal{B}_1$: если I_1, I_2 – идеалы в $\mathcal{B}_1$ такие, что $\mathcal{B}_1/I_i$ для $i = 1, 2$ не содержит нетривиальных идемпотентов, то

$$I_1 \cap I_2 = \{0\} \implies I_1 = \{0\} \text{ или } I_2 = \{0\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть утверждения в теореме следует из теоремы 4.2. Чтобы доказать вторую часть, заметим, что для $i = 1, 2$ выполняется

$$I_i = C_{Y_i}(\widetilde{M}_1), \quad \text{где } Y_i = \text{hull}(I_i) \subset \widetilde{M}_1.$$

Алгебра $C(\widetilde{M}_1)/I_i \cong C(Y_i)$ не содержит нетривиальных идемпотентов тогда и только тогда, когда Y_i связно, т.е. в случае, когда Y_i является подконтинуумом $\widetilde{M}_1$. Так как $I_1 \cap I_2 = C_{Y_1 \cup Y_2}(\widetilde{M}_1)$, то условие $I_1 \cap I_2 = \{0\}$ эквивалентно равенству $Y_1 \cup Y_2 = \widetilde{M}_1$, и поэтому заявленное свойство $\mathcal{B}_1$ эквивалентно неприводимости континуума $\widetilde{M}_1$.

4.1.2. Предел Фейгенбаума λ_∞ . Пусть

$$\lambda_1 = \frac{3}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{6}}{4} \approx 0.862, \quad \lambda_3, \quad \dots$$

– последовательность значений параметра λ , соответствующих первому каскаду бифуркации удвоения периодов системы $([0, 1], \alpha_\lambda)$. Она является возрастающей, и значение $\lambda_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \approx 0.89249$ называется *пределом Фейгенбаума* [26], [32], [23]. Интервал параметров распадается на две части $(0, \lambda_\infty)$ и $(\lambda_\infty, 1]$, которые соответствуют регулярному и хаотическому поведению систем $([0, 1], \alpha_\lambda)$, см. рис. 5. Этот факт находит отражение в структуре алгебры $\mathcal{B}_\lambda$.

Рис. 5. Диаграмма бифуркаций для $\lambda \in [0.74, 1]$

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть $\lambda \in (0, 1]$. Следующие условия эквивалентны:

- i) $\lambda > \lambda_\infty$;
- ii) спектр $\widetilde{M}_\lambda$ алгебры $\mathcal{B}_\lambda$ содержит неприводимый континуум;
- iii) существует собственный идеал J в максимальном идеале в C^* -алгебре $\mathcal{B}_\lambda$ со следующим свойством: для любых двух идеалов I_1, I_2 в $\mathcal{B} := \mathcal{B}_\lambda/J$ таких, что $\mathcal{B}/I_1, \mathcal{B}/I_2$ не содержат нетривиальных идемпотентов, имеем

$$I_1 \cap I_2 = \{0\} \implies I_1 = \{0\} \text{ или } I_2 = \{0\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность i) и ii) следует из теоремы 4.4 и [26; теоремы 3, 4, 7]. В доказательстве теоремы 4.5 мы показали, что условие iii) эквивалентно неприводимости континуумов. Более того, утверждение “ J является собственным идеалом в максимальном идеале алгебры $\mathcal{B}_\lambda$ ” означает, что “множество $Z = \text{hull}(J)$ содержит более одной точки”. Это объясняет эквивалентность ii) и iii).

4.2. Первый каскад бифуркаций: $\lambda \in (0, \lambda_\infty]$. Для $\lambda < \lambda_\infty$ динамика $([0, 1], \alpha_\lambda)$ полностью понятна: α_λ имеет ровно одну устойчивую орбиту, периодическую с периодом 2^n , $n \in \mathbb{N}$, в точности одну отталкивающую периодическую орбиту с периодом 2^k для каждого $k = 0, \dots, n-1$ и максимум две отталкивающие неподвижные точки. При увеличении λ от 0 до λ_∞ число n постепенно растет – система испытывает бифуркацию удвоения периода. В частности, период устойчивой орбиты α_λ для $\lambda \in (0, \lambda_\infty)$ увеличивается в соответствии с порядком Шарковского [22], [23]:

$$\begin{aligned} & 1 \triangleleft 2 \triangleleft 4 \triangleleft \dots \triangleleft 2^n \triangleleft \dots \\ & \dots \triangleleft 2^m(2n+1) \triangleleft \dots \triangleleft 2^m \cdot 7 \triangleleft 2^m \cdot 5 \triangleleft 2^m \cdot 3 \triangleleft \dots \\ & \dots \triangleleft 2(2n+1) \triangleleft \dots \triangleleft 14 \triangleleft 10 \triangleleft 6 \triangleleft \dots \\ & \dots \triangleleft (2n+1) \triangleleft \dots \triangleleft 7 \triangleleft 5 \triangleleft 3. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Представим теперь, что мы двигаем параметр λ от 0 до λ_∞ и одновременно наблюдаем за пространством максимальных идеалов

$$\widetilde{M}_\lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_N \cup M_\infty$$

алгебры $\mathcal{B}_\lambda$. Предположим также, что мы смотрим за изменениями в $\widetilde{M}_\lambda$ с точки зрения исходного пространства $M = [0, 1]$ – глядя на точку $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \widetilde{M}_\lambda$, мы производим отсчет от $x_0 \in [0, 1]$. Такой подход позволит нам детально понять, как изменение параметра λ влияет на топологию пространства $\widetilde{M}_\lambda$. Другими словами, мы построим изображение пространства $\widetilde{M}_\lambda$ при помощи фактор-отображения

$$\Phi(x_0, x_1, \dots) = x_0, \quad (x_0, x_1, \dots) \in \widetilde{M}_\lambda,$$

см. замечание 3.6. Однако, так как Φ не является инъекцией, оно может “накрутить” кусок дуги M_N несколько раз на интервал. Таким образом, для того чтобы получить гомеоморфный образ $\widetilde{M}_\lambda$, необходимо модифицировать Φ , присоединяя копии соответствующих дуг. Таким способом можно построить гомеоморфизм из $\widetilde{M}_\lambda$ на некоторое подмножество плоскости, см. [33]. Здесь

Рис. 6. (а) График α_λ для $0 < \lambda \leq \frac{1}{4}$; (б) для $\frac{1}{4} < \lambda \leq \frac{1}{2}$

мы ограничимся обсуждением результатов этой процедуры, след которой будет виден на рисунках $\widetilde{M}_\lambda$, где точка $\tilde{x} \in \widetilde{M}_\lambda$ помечена своей нулевой координатой $\Phi(\tilde{x}) \in M$. Принципиальную роль в этой интерпретации играет орбита $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ критической точки отображения α_λ . Положим

$$q_n := \alpha_\lambda^n\left(\frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Мы начнем со значений параметра λ немного больших нуля (но меньших чем $\frac{1}{4}$), см. рис. 6, (а). Единственная периодическая точка отображения α_λ – это устойчивая неподвижная точка 0. В частности, мы имеем

$$q_1 > q_2 > q_3 > \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0.$$

Рис. 7. (а) Динамика $(\widetilde{M}_\lambda, \widetilde{\alpha}_\lambda)$ при $0 < \lambda \leq \frac{1}{4}$; (б) при $\frac{1}{4} < \lambda \leq \frac{1}{2}$

Соответственно, пространство $\widetilde{M}_\lambda$ состоит из точки M_∞ и последовательности дуг M_N , сходящейся к M_∞ , см. рис. 7, (а). При увеличении параметра λ длина интервалов $[0, q_N]$ увеличивается. Наконец, когда λ превышает $\frac{1}{4}$, неподвижная точка 0 теряет свою устойчивость, перенося ее на новую появившуюся неподвижную точку $\omega_{1,1} > 0$:

$$q_1 > q_2 > q_3 > \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \omega_{1,1} > 0,$$

см. рис. 6, (б). Множество M_∞ становится дугой, соответствующей отрезку $[0, \omega_{1,1}]$, и оно растет по мере увеличения λ , см. рис. 7, (б).

Когда λ достигает значения $\frac{1}{2}$, все отрезки $[0, q_n]$, $n \in \mathbb{N}$, $[0, \omega_{1,1}]$ становятся равными $[0, \frac{1}{2}]$ и пространство $\widetilde{M}_\lambda$ принимает форму “регулярной лестницы” (в которой все шаги имеют одинаковую длину). Когда мы проходим $\lambda = \frac{1}{2}$,

Рис. 8. (а) График α_λ для $\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{3}{4}$; (б) для $\frac{3}{4} < \lambda \leq \frac{1+\sqrt{6}}{4}$

Рис. 10. Змееподобный континуум $M_\infty \subset \widetilde{M}_\lambda$ для λ , приближающихся ко второй бифуркации

Следовательно, периодические точки M_∞ вырастут в дуги, соответствующие отрезкам $[\omega_{4,1}, \omega_{4,3}]$ и $[\omega_{4,2}, \omega_{4,4}]$:

пространство максимальных идеалов $\widetilde{M}_\lambda$ алгебры $\mathcal{B}_\lambda$ для $\lambda \in (\lambda_2, \lambda_3]$ состоит из змееподобного континуума M_∞ , представленного на рис. 11, и последовательности дуг $\{M_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, сходящейся к M_∞ в хаусдорфовой метрике.

Этот процесс продолжается: по мере того, как λ достигает примерно середины отрезка $(\lambda_2, \lambda_3]$, орбита $\{\omega_{4,1}, \omega_{4,2}, \omega_{4,3}, \omega_{4,4}\}$ становится суперстабильной и пространство M_∞ принимает регулярный вид. Позже континуум M_∞ порождает завитки вокруг точек, соответствующих орбите $\{\omega_{4,1}, \omega_{4,2}, \omega_{4,3}, \omega_{4,4}\}$, пока мы не дойдем до $\lambda = \lambda_3$, где каждая из этих точек вырастает в дугу. И так далее, см. рис. 12.

Чтобы формально сформулировать результат, мы расширим последовательность $\lambda_1 = \frac{3}{4}, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, полагая $\lambda_{-1} = 0$ и $\lambda_0 = \frac{1}{4}$. Под *лучом* мы будем понимать топологическое пространство, гомеоморфное $(0, 1]$, и мы будем называть *концевой точкой* топологического пространства M точку $p \in M$, для которой каждая ее окрестность U содержит открытую окрестность V такую, что граница V является точкой, см. [24]. Подпространство $M_\infty = \varprojlim (M, \alpha_\lambda) \subset M_\lambda$ для $\lambda < \lambda_\infty$ задается следующим рекуррентным описанием.

ТЕОРЕМА 4.7 (см. [26; теорема 3]). *Если $\lambda \in (\lambda_n, \lambda_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$, то континуум $\varprojlim (M, \alpha_\lambda)$ является замыканием луча R такого, что $\varprojlim (M, \alpha_\lambda) \setminus R$ является объединением двух копий $\varprojlim (M, \alpha_{\lambda'})$, где $\lambda' \in (\lambda_{n-1}, \lambda_n]$, пересекающихся в общей концевой точке.*

Теперь мы готовы дать полное описание системы $(\widetilde{M}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$ для λ , лежащих в промежутке $(0, \lambda_\infty) = \bigcup_{n=-1}^\infty (\lambda_n, \lambda_{n+1}]$. Если $\lambda \in (0, \frac{3}{4}]$, то такая система представлена на рис. 7, 9.

ТЕОРЕМА 4.8. *Пусть U_λ – оператор, заданный (4.3), и $\mathcal{B}_\lambda$ – C^* -алгебра, заданная (4.4). Если $\lambda \in (\lambda_n, \lambda_{n+1}]$, $n > 0$, то*

- i) пространство максимальных идеалов $\widetilde{M}_\lambda$ алгебры $\mathcal{B}_\lambda$ состоит из змееподобного континуума M_∞ и последовательности дуг $\{M_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, сходящейся к M_∞ , где

$$M_\infty = R \cup (R_{1,1} \cup R_{1,2}) \cup \dots \cup (R_{n-1,1} \cup \dots \cup R_{n-1,2^{n-1}}) \cup (I_1 \cup \dots \cup I_{2^{n-1}})$$

является суммой $2^n - 1$ лучей R , $R_{k,i}$, $k = 1, \dots, n-1$, $i = 1, \dots, 2^k$, и 2^{n-1} дуг I_i , $i = 1, \dots, 2^{n-1}$, см. рис. 12. Замыкание R дает M_∞ и

$$\overline{R_{k,i}} = \bigcup_{j=0}^{n-k-1} \bigcup_{l=0}^{2^j-1} R_{k+j,i+l \cdot 2^k} \cup \bigcup_{l=0}^{2^{n-k-1}-1} I_{i+l \cdot 2^k}, \\ k = 1, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, 2^k;$$

- ii) частичный гомеоморфизм $\tilde{\alpha}_\lambda$, порожденный U_λ на $\widetilde{M}_\lambda$, переносит M_N на M_{N+1} , $N \in \mathbb{N}$, и $\tilde{\alpha}_\lambda: M_\infty \rightarrow M_\infty$ является гомеоморфизмом, сохраняющим R и циклично переставляющим дуги I_i и лучи $R_{k,i}$ (для каждого фиксированного $k = 1, \dots, n-1$):

$$\tilde{\alpha}_\lambda(I_1) = I_2, \dots, \tilde{\alpha}_\lambda(I_{2^n}) = I_1, \quad \tilde{\alpha}_\lambda(R_{k,1}) = R_{k,2}, \dots, \tilde{\alpha}_\lambda(R_{k,2^k}) = R_{k,1}.$$

Рис. 11. Змееподобный континуум $M_\infty \subset \widetilde{M}_\lambda$ после второй бифуркации (погруженный в 3-мерное пространство $Oxyz$)

Рис. 12. Подпространство $M_\infty \subset \widetilde{M}_\lambda$ после четвертой бифуркации (схематическое изображение)

Более того, все лучи R , $R_{k,i}$ и дуги I_i попарно не пересекаются, кроме следующих случаев:

$$R_{k,i} \cap R_{k,2^{k-1}+i} = \{\tilde{\omega}_{2^{k-1},i}\}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, 2^{k-1},$$

которые образуют периодические орбиты $\{\tilde{\omega}_{2^k,1}, \dots, \tilde{\omega}_{2^k,2^k}\}$ с периодом 2^k , $k = 1, \dots, n-2$. Середины дуг I_i образуют периодическую орбиту $\{\tilde{\omega}_{2^{n-1},1}, \dots, \tilde{\omega}_{2^{n-1},2^{n-1}}\}$ с периодом 2^{n-1} , и концевые точки дуг I_i образуют периодическую орбиту $\{\tilde{\omega}_{2^n,1}, \dots, \tilde{\omega}_{2^n,2^n}\}$ с периодом 2^n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для описания пространства $\widetilde{M}_\lambda$ применим теоремы 4.4, 4.7. Динамика отображения $\tilde{\alpha}_\lambda$ на M_∞ может быть выведена из доказательства [26; теорема 3], см. также [26; 6].

Бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периодов оставляет следующий отпечаток на структуре $\widetilde{M}_\lambda$ для λ , достигающих предела Фейгенбаума.

ТЕОРЕМА 4.9. Для $\lambda = \lambda_\infty$ пространство максимальных идеалов $\widetilde{M}_\lambda$ алгебры $\mathcal{B}_\lambda$ обладает следующим свойством: каждый невырожденный подконтинуум $\widetilde{M}_\lambda$ является приводимым. Более того, M_λ содержит только три топологически различных невырожденных подконтинуума: дуги, копии пространства M_∞ , суммы двух копий M_∞ , пересекающиеся в общей концевой точке.

Для доказательства достаточно применить теорему 4.4 и [26; теорема 7].

4.3. Параметры, соответствующие хаотической динамике. Для $\lambda > \lambda_\infty$ динамика системы $([0, 1], \alpha_\lambda)$ хаотична и имеющиеся знания относительно отображений $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda > \lambda_\infty}$ далеки от полноты. Однако, мы можем представить ряд результатов, которые проливают свет на структуру рассматриваемых систем. К примеру, мы уже знаем, что $\widetilde{M}_\lambda$ содержит неприводимые континуумы (теорема 4.6) и для $\lambda = 1$ $\widetilde{M}_\lambda$ является Б–Я–К континуумом. Мы начнем со случая, когда Б–Я–К континуумы являются единственными неприводимыми подконтинуумами $\widetilde{M}_\lambda$.

4.3.1. Каскад удвоения Б–Я–К континуума. Рассмотрим последовательность $\mu_0 = 1, \mu_1, \mu_2, \dots$ значений параметров, в которой бифуркационная диаграмма распадается на две свои копии, см. рис. 5. Это убывающая последовательность, сходящаяся к λ_∞ , и формально μ_n может быть определено как решение следующего уравнения:

$$\alpha_\lambda^{2^n}(\lambda) = \text{наибольшая неподвижная точка отображения } \alpha_\lambda^{2^{n-1}},$$

см. [26], [32]. Последовательность $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ допускает индуктивную процедуру, на удивление похожую на представленную в теореме 4.7.

ТЕОРЕМА 4.10 (см. [26; теорема 6]). Для $n > 0$ $\varprojlim(M, \alpha_{\mu_n})$ – замыкание луча R такое, что $\varprojlim(M, \alpha_{\mu_n}) \setminus R$ является объединением двух копий пространства $\varprojlim(M, \alpha_{\mu_{n-1}})$, пересекающихся в общей концевой точке.

Теорема 4.10 вместе с теоремами 4.4, 4.5 говорит, что для $\lambda = \mu_1$ пространство $\widetilde{M}_\lambda$ состоит из последовательности дуг $\{M_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, сходящихся к змееподобному континууму M_∞ , который является объединением двух копий B_1, B_2 Б–Я–К континуума и луча R , см. рис. 13, (а). Частичный гомеоморфизм $\tilde{\alpha}_\lambda$ переводит M_N на M_{N+1} , $N \in \mathbb{N}$, и динамика $\tilde{\alpha}_\lambda$ на M_∞ следующая: концевая точка луча R является неподвижной точкой, а оставшиеся точки R скользят

Рис. 13. (а) Подпространство $M_\infty \subset \widetilde{M}_\lambda$: для $\lambda = \mu_1$; (б) для $\lambda = \mu_2$

M_∞ и

$$\overline{R_{k,i}} = \bigcup_{j=0}^{n-k-1} \bigcup_{l=0}^{2^{j-1}} R_{k+j,i+l \cdot 2^k} \cup \bigcup_{l=0}^{2^{n-k}-1} B_{i+l \cdot 2^k}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, 2^k;$$

- ii) *частичный гомеоморфизм $\tilde{\alpha}_\lambda$, порожденный U_λ на $\widetilde{M}_\lambda$, переносит M_N на M_{N+1} , $N \in \mathbb{N}$, и $\tilde{\alpha}_\lambda: M_\infty \rightarrow M_\infty$ – гомеоморфизм, сохраняющий R и циклично переставляющий континуумы B_i и лучи $R_{k,i}$ (для фиксированного $k = 1, \dots, n-1$):*

$$\tilde{\alpha}_\lambda(B_1) = B_2, \dots, \tilde{\alpha}_\lambda(B_{2^n}) = B_1, \quad \tilde{\alpha}_\lambda(R_{k,1}) = R_{k,2}, \dots, \tilde{\alpha}_\lambda(R_{k,2^k}) = R_{k,1}.$$

Более того, все лучи R , $R_{k,i}$ и континуумы B_i попарно не пересекаются, кроме следующих пересечений:

$$\begin{aligned} R_{k,i} \cap R_{k,2^{k-1}+i} &= \{\tilde{\omega}_{2^{k-1},i}\}, & i &= 1, \dots, 2^{k-1}, \\ B_i \cap B_{2^{n-1}+i} &= \{\tilde{\omega}_{2^{n-1},i}\}, & i &= 1, \dots, 2^{n-1}, \end{aligned}$$

которые образуют периодические орбиты $\{\tilde{\omega}_{2^k,1}, \dots, \tilde{\omega}_{2^k,2^k}\}$ с периодом 2^k , $k = 1, \dots, n-1$.

Доказательство следует из теорем 4.4, 4.5 и индуктивно применяемой теоремы 4.10; см. также доказательство [26; теорема 6].

4.4. Окна устойчивых периодических орбит нечетного периода.

Пусть $(\eta_n, \nu_n]$, $n > 0$, – интервал значений параметра λ , где α_λ имеет свою первую устойчивую орбиту периода $2n+1$. Последовательности η_n , ν_n убывают и сходятся к μ_1 , см. рис. 15. При переходе по параметрам λ от $(\eta_n, \nu_n]$ к $(\eta_{n+1}, \nu_{n+1}]$ период устойчивой периодической орбиты α_λ уменьшается в соответствии с порядком Шарковского (см. (4.6)).

Рис. 15. Диаграмма бифуркаций $\lambda \in [0.91, 1]$

ТЕОРЕМА 4.12. Пусть U_λ – оператор, заданный (4.3), и $\mathcal{B}_\lambda$ – C^* -алгебра, заданная (4.4). Если $\lambda \in (\eta_n, \nu_n]$, $n > 0$, то

- i) пространство максимальных идеалов $\widetilde{M}_\lambda$ алгебры $\mathcal{B}_\lambda$ состоит из змееподобного континуума M_∞ и последовательности дуг $\{M_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, сходящихся к M_∞ , и

$$M_\infty = R \cup C_{2n+1},$$

где R – луч, C_{2n+1} – неприводимый континуум, у которого ровно $2n+1$ концевая точка, такой, что его единственными невырожденными собственными подконтинуумами являются дуги. Более того, $C_{2n+1} \cap R = \emptyset$ и $\overline{R} = R \cup C_{2n+1}$;

- ii) частичный гомеоморфизм $\tilde{\alpha}_\lambda$, порожденный U_λ на $\widetilde{M}_\lambda$, переводит M_N на M_{N+1} для $N \in \mathbb{N}$ и сохраняет R , и C_{2n+1} . Концевая точка R является неподвижной точкой, а остальные точки R двигаются по направлению к C_{2n+1} . Концевые точки C_{2n+1} образуют периодическую орбиту с периодом $2n+1$.

Для доказательства в силу теоремы 4.4 достаточно индуктивно применить теорему 8 из [26].

Для $\lambda \in (\eta_1, \nu_1]$ континуум $C_3 \subset \widetilde{M}_\lambda$ считается самым простым примером неприводимого континуума, см. [24]. Он может быть получен как аттрактор непрерывного инъективного отображения $T: \Omega \rightarrow \Omega$, определенного на компактном подмножестве $\Omega = A \cup B \cup C$ из $\mathbb{R}^2$, которое ведет себя согласно рис. 16. В действительности, подсистема $(C_3, \tilde{\alpha}_\lambda)$ системы $(\widetilde{M}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$ топологически сопряжена с системой (Λ, T) , где $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n(\Omega)$.

Рис. 16. Континуум C_3 как аттрактор

4.4.1. Каскады бифуркаций, следующие за окнами стабильности. После каждого из интервалов $(\eta_n, \nu_n]$, см. рис. 15, возникает каскад бифуркаций удвоения периодов. Например, увеличивая значения параметра λ в окне $(\eta_1, \nu_1]$ устойчивой орбиты периода 3, мы наблюдаем, что континуум $C_3 \subset \widetilde{M}_\lambda$ завивается вокруг своих концевых точек $\{\tilde{\omega}_{3,1}, \tilde{\omega}_{3,2}, \tilde{\omega}_{3,3}\}$, см. рис. 17, (а). Когда мы проходим $\lambda = \nu_1$, концевые точки C_3 вырастают в дуги: континуум C_3 превращается в неприводимый континуум C_6 с 6 концевыми точками, см. рис. 17, (б). После этого континуум C_6 начинает завиваться вокруг своих концевых точек так, что в итоге перерастает в 6 дуг, чьи концевые точки являются концевыми точками неприводимого континуума C_{12} . И так далее. В частности, после четырех таких бифуркаций получим континуум C_{64} , который возникает из континуума C_3 путем замены каждой его крайней точки копией континуума, представленного на рис. 12.

Рис. 17. Континуумы C_3 и C_6

Похожий феномен возникает после каждого окна устойчивости $(\eta_n, \nu_n]$, $n > 0$. Чтобы получить формальное описание, для каждого $n > 0$ обозначим через $\lambda_1^{(n)} = \nu_n, \lambda_2^{(n)}, \lambda_3^{(n)}, \dots$ последовательность значений параметра λ , которая соответствует каскаду бифуркаций удвоения периода устойчивой орбиты, появляющейся сразу после $\lambda_0^{(n)} := \eta_n$.

ТЕОРЕМА 4.13. Пусть U_λ – оператор, заданный (4.3), и $\mathcal{B}_\lambda$ – C^* -алгебра, заданная (4.4). Если $\lambda \in (\lambda_m^{(n)}, \lambda_{m+1}^{(n)}]$ для $n > 0$, $m \geq 0$, то

- i) пространство максимальных идеалов $\widetilde{M}_\lambda$ алгебры $\mathcal{B}_\lambda$ состоит из змееподобного континуума M_∞ и последовательности дуг $\{M_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, сходящейся к M_∞ , где

$$M_\infty = R \cup C_{2^m(2n+1)}$$

есть объединение луча R и неприводимого континуума $C_{2^m(2n+1)}$, у которого ровно $2^m(2n+1)$ концевых точек. Более того, $\overline{R} = R \cup C_{2^m(2n+1)}$ и

$$C_{2^m(2n+1)} = C_{2n+1} \cup \bigcup_{k=0}^{m-1} \bigcup_{i=1}^{2^k(2n+1)} R_{k,i} \cup \bigcup_{i=1}^{2^{m-1}(2n+1)} I_i$$

является объединением $(2^m - 1)(2n+1)$ лучей $R_{k,i}$ и $2^{m-1}(2n+1)$ дуг I_i . Замыкание C_{2n+1} совпадает с $C_{2^m(2n+1)}$ и

$$\overline{R_{k,i}} = \bigcup_{j=0}^{m-k-1} \bigcup_{l=0}^{2^j-1} R_{k+j, i+l \cdot 2^k(2n+1)} \cup \bigcup_{l=0}^{2^{m-k-1}} I_{i+l \cdot 2^k(2n+1)}$$

для $i = 1, \dots, 2^k(2n+1)$, $k = 0, \dots, m-1$;

- ii) частичный гомеоморфизм $\tilde{\alpha}_\lambda$, порожденный U_λ на $\widetilde{M}_\lambda$, переводит M_N на M_{N+1} , $N \in \mathbb{N}$, и $\tilde{\alpha}_\lambda: M_\infty \rightarrow M_\infty$ является гомеоморфизмом, сохраняющим R и C_{2n+1} , циклично переставляющим дуги I_i и (для каждого фиксированного $k = 0, \dots, m-1$) лучи $R_{k,i}$.

Более того, все лучи $R, R_{k,i}$, все дуги I_i и континуум C_{2n+1} попарно не пересекаются, кроме следующих пересечений:

$$\begin{aligned} C_{2n+1} \cap R_{0,i}, \quad i &= 1, \dots, 2n+1, \\ R_{k,i} \cap R_{k,i+2^{k-1}(2n+1)} &= \{\tilde{\omega}_{2^{k-1}(2n+1),i}\}, \\ i &= 1, \dots, 2^{k-1}(2n+1), \quad k = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Множества $\{\tilde{\omega}_{2^k(2n+1),1}, \dots, \tilde{\omega}_{2^k(2n+1),2^k(2n+1)}\}$ формируют периодические орбиты с периодами $2^k(2n+1)$ для $k = 0, \dots, m-2$. Середины дуг I_i формируют периодическую орбиту с периодом $2^{m-1}(2n+1)$, и их концевые точки формируют периодические орбиты с периодами $2^m(2n+1)$.

В силу теоремы 4.4 для доказательства достаточно повторить рассуждение теоремы 8 из [26], см. также замечания, предшествующие теореме 9 в [26], и введение в [26; 6].

§ 5. Обратимые расширения гомеоморфизмов окружности

Характерная черта C^* -метода, развитого в этой работе, заключается в том, что он ведет от необратимой динамики к обратимой динамике. Поэтому может показаться удивительным, что, применяя его к (уже) обратимым системам, можно также получить нетривиальные результаты. Ясно, что все интересные явления, возникающие в этом случае, связаны со свободой выбора множества Y или, эквивалентно, идеала J , см. п. 3.1.1. Как мы покажем ниже, такие рассуждения возникают естественным образом при исследовании сжатий унитарных операторов. Мы начнем с общей структуры динамической системы, с которой будем работать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Если $\alpha: M \rightarrow M$ – гомеоморфизм и $(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$ – обратимое расширение (M, α) , ассоциированное с множеством $Y \subset M$, то $\tilde{M}$ может рассматриваться как замкнутое подмножество

$$\tilde{M} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} M_N \cup M_\infty \subset \overline{\mathbb{N}} \times M$$

произведения пространств, где $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ – это одноточечная компактификация дискретного пространства $\mathbb{N}$,

$$M_\infty = \{\infty\} \times M, \quad M_N = \{N\} \times \alpha^N(Y), \quad N \in \mathbb{N},$$

и частичный гомеоморфизм $\tilde{\alpha}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ ведет себя в соответствии с формулами

$$\tilde{\alpha}(N, x) = (N+1, \alpha(x)), \quad \tilde{\alpha}(\infty, x) = (\infty, \alpha(x)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим гомеоморфизм Ψ множества

$$\tilde{M} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} M_N \cup M_\infty$$

на замкнутое подмножество $\overline{\mathbb{N}} \times M$, используя фактор-отображение $\Phi: \widetilde{M} \rightarrow M$, см. (3.5), формулами

$$\Psi(\tilde{x}) := (\infty, \Phi(\tilde{x})), \quad \tilde{x} \in M_\infty, \quad \Psi(\tilde{x}) := (N, \Phi(\tilde{x})), \quad \tilde{x} \in M_N, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Так как α – гомеоморфизм, видно, что

$$\Psi: \bigcup_{N \in \mathbb{N}} M_N \cup M_\infty \rightarrow \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \{N\} \times \alpha^N(Y) \cup \{\infty\} \times M$$

является также гомеоморфизмом, и, отождествляя $\widetilde{M}$ с $\Psi(\widetilde{M})$, получаем нужное утверждение.

5.1. Сокращение унитарных операторов, генерирующих гомеоморфизмы окружности. Пусть $\alpha: S^1 \rightarrow S^1$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности, и пусть $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – его *поднятие* на $\mathbb{R}$, т.е. непрерывное отображение, удовлетворяющее равенству

$$\alpha(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i \gamma(t)}, \quad t \in [0, 1].$$

Напомним, что γ – возрастающий гомеоморфизм такой, что $\gamma(t+1) = \gamma(t) + 1$, $t \in \mathbb{R}$, определяемый α с точностью до сдвига на целую постоянную. Зададим унитарный оператор $U \in L(\mathbb{H})$ на пространстве $\mathbb{H} = L^2(\mathbb{R})$ формулой

$$(Uf)(t) = \sqrt{|\gamma'(t)|} f(\gamma(t)),$$

которая (в силу монотонности γ) определена для почти всех t в $\mathbb{R}$. В частности, $(U^*f)(t) = \sqrt{|(\gamma^{-1})'(t)|} f(\gamma^{-1}(t))$. Пусть $\mathbb{A} \subset L(\mathbb{H})$ – алгебра операторов умножения на непрерывные периодические функции с периодом 1: $\mathbb{A} \cong C(S^1)$. Очевидно, что

$$U\mathbb{A}U^* \subset \mathbb{A}, \quad U^* \mathbb{A}U \subset \mathbb{A}, \quad (5.1)$$

и мы имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Операторы U и U^* генерируют на пространстве максимальных идеалов алгебры $\mathbb{A}$ (отождествленной с S^1) системы (S^1, α) и (S^1, α^{-1}) соответственно.*

Рассмотрим теперь сокращения представленных объектов в пространстве $H := L^2([0, \infty))$, естественным образом рассматриваемом как подпространство $\mathbb{H} = L^2(\mathbb{R})$. А именно обозначим через $P: \mathbb{H} \rightarrow H$ проекцию из $\mathbb{H}$ на H и положим

$$U := PUP, \quad \mathcal{A} := PAP.$$

Тогда алгебра $\mathcal{A} \subset L(H)$ изоморфна $C(S^1)$, и $U \in L(H)$ – частичная изометрия такая, что $U^* = PU^*P \in L(H)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Для объектов, представленных выше, возможны следующие ситуации.*

i) Если $\gamma(0) > 0$, то U является необратимой коизометрией в $L(H)$,

$$U\mathcal{A}U^* \subset \mathcal{A}, \quad U^*\mathcal{A}U \not\subset \mathcal{A},$$

оператор U порождает на спектре $\mathcal{A}$ систему (S^1, α) и

$$\text{hull}(U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}) = \{e^{2\pi it} : t \in [0, \gamma(0)]\}.$$

ii) Если $\gamma(0) = 0$, то U – унитарный оператор,

$$U\mathcal{A}U^* \subset \mathcal{A}, \quad U^*\mathcal{A}U \subset \mathcal{A},$$

U и U^* порождают соответственно системы (S^1, α) и (S^1, α^{-1}) .

iii) Если $\gamma(0) < 0$, то U является необратимой изометрией,

$$U^*\mathcal{A}U \subset \mathcal{A}, \quad U\mathcal{A}U^* \not\subset \mathcal{A},$$

оператор U^* порождает на спектре $\mathcal{A}$ систему (S^1, α^{-1}) и

$$\text{hull}(U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}) = \{e^{2\pi it} : t \in [0, \gamma^{-1}(0)]\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\gamma(0) > 0$, то

$$(Uf)(t) = \sqrt{|\gamma'(t)|} f(\gamma(t)), \quad (U^*f)(t) = \begin{cases} \sqrt{|(\gamma^{-1})'(t)|} f(\gamma^{-1}(t)), & t \in [\gamma(0), \infty), \\ 0, & t \in [0, \gamma(0)). \end{cases}$$

В частности, проектор U^*U является оператором умножения на характеристическую функцию множества $[\gamma(0), \infty)$, и поэтому $\text{hull}(U^*U\mathcal{A} \cap \mathcal{A}) = \{e^{2\pi it} : t \in [0, \gamma(0)]\}$. Пункт iii) получается заменой ролей γ и γ^{-1} в п. i), а п. ii) очевиден.

Мы видим, что в процессе сокращения можно потерять одно из отношений (5.1). Однако, как видно из наших результатов, потерянную часть всегда можно вернуть, переходя к большей алгебре. Не теряя общности, предположим далее, что

$$\gamma(0) > 0$$

(случай, когда $\gamma(0) < 0$, совершенно аналогичен). Рассмотрим алгебру

$$\mathcal{B} = C^* \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} U^{*n} \mathcal{A} U^n \right),$$

которая в силу теоремы 2.23 является наименьшей C^* -алгеброй, содержащей $\mathcal{A}$, такой, что

$$U\mathcal{B}U^* \subset \mathcal{B}, \quad U^*\mathcal{B}U \subset \mathcal{B}.$$

ТЕОРЕМА 5.4. Спектр $\mathcal{B}$ принимает одну из следующих форм:

- i) если $\gamma(0) \geq 1$, то $\widetilde{M} = \overline{\mathbb{N}} \times S^1$, см. рис. 18, (a);
- ii) если $\gamma(0) \in (0, 1)$, то $\widetilde{M} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} M_N \cup M_\infty \subset \overline{\mathbb{N}} \times S^1$, где $M_\infty = \{\infty\} \times S^1$ является окружностью и множества M_N , $N \in \mathbb{N}$, – дуги:

$$M_N = \{N\} \times [\alpha^N(1), \alpha^{N+1}(1)],$$

где $[\alpha^N(1), \alpha^{N+1}(1)]$ обозначает дугу на S^1 с началом $\alpha^N(1)$ и концом $\alpha^{N+1}(1)$, см. рис. 18, (b).

Рис. 18. Спектр $\mathcal{B}$, связанный с гомеоморфизмом окружности

При отождествлении $\mathcal{B} = C(\widetilde{M})$ оператор U генерирует на $\widetilde{M}$ отображение $\tilde{\alpha}$, действующее по формулам

$$\tilde{\alpha}(N, x) = (N + 1, \alpha(x)), \quad \tilde{\alpha}(\infty, x) = (\infty, \alpha(x)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 5.3 и теоремы 3.5 система $(\widetilde{M}, \tilde{\alpha})$ является обратимым расширением (S^1, α) , ассоциированным с множеством $Y = \{e^{2\pi i t} : t \in [0, \gamma(0)]\}$, которое является либо окружностью S^1 , когда $\gamma(0) \geq 1$, либо дугой с началом $1 = e^{2\pi i 0}$ и концом $\alpha(1) = e^{2\pi i \gamma(0)}$. Таким образом, достаточно применить предложение 5.1.

Получается, что алгебра $\mathcal{B}$ зависит не только от гомеоморфизма α , но также от выбора поднятия γ . В частности, если $\gamma(0) \geq 1$, то независимо от α

$$\mathcal{B} \cong C(\overline{\mathbb{N}} \times S^1).$$

Если, однако, $\gamma(0) \in (0, 1)$, то структура $\mathcal{B}$ единственным образом определяется орбитой точки $1 \in S^1$. Ниже мы обсудим этот факт подробно.

5.2. Классификация расширенных алгебр числами вращения. Напомним [22], [23], что если $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является поднятием гомеоморфизма $\alpha: S^1 \rightarrow S^1$, то предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t)}{n}$ всегда существует и не зависит от $t \in \mathbb{R}$ и его дробная часть

$$\tau(\alpha) := \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t)}{n} \right\} \in [0, 1) \quad (5.2)$$

зависит только от α . Число $\tau(\alpha)$ называется *числом вращения* α . Его роль объясняется в следующей теореме, доказанной Пуанкаре, см. [22], [23]. Символ Θ_τ , $\tau \in [0, 1)$, обозначает вращение на угол $2\pi\tau$: $\Theta_\tau(z) = z \cdot e^{2\pi i \tau}$, $z \in S^1$.

ТЕОРЕМА 5.5 (классификация Пуанкаре). Пусть $\alpha: S^1 \rightarrow S^1$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности.

- 1) Если $\tau(\alpha) = \frac{m}{n}$, где m и n взаимно просты, то все периодические точки для α имеют период n (и существует по крайней мере одна такая точка).

- 2) Если $\tau(\alpha) \notin \mathbb{Q}$, то α не имеет периодических точек и множество $\Omega(\alpha)$, состоящее из неблуждающих точек произвольной орбиты $\{\alpha(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, не зависит от выбора $x \in S^1$. Возможны два подслучая:
- а) если $\Omega(\alpha) = S^1$, т.е. α топологически транзитивно, то система (S^1, α) топологически сопряжена с $(S^1, \Theta_{\tau(\alpha)})$;
 - б) если α не топологически транзитивно, то $\Omega(\alpha)$ – совершенное нигде не плотное подмножество S^1 и существует непрерывная сюръекция $\varphi: \Omega(\alpha) \rightarrow S^1$, которая является полусопряженностью $(\Omega(\alpha), \alpha)$ на $(S^1, \Theta_{\tau(\alpha)})$.

Мы будем использовать вышеприведенную теорему для классификации алгебр B , описанных в п. ii) теоремы 5.4, т.е. в этом пункте мы предположим, что поднятие $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$0 < \gamma(0) < 1. \quad (5.3)$$

Такое поднятие всегда существует, при условии что $1 \in S^1$ не является неподвижной точкой $\alpha: S^1 \rightarrow S^1$. Число γ определяется единственным образом через α , так же, как и оператор U и алгебра $\mathcal{B} \cong C(\widetilde{M})$, определенные в предыдущем пункте. Поэтому имеет смысл использовать следующие обозначения:

$$\mathcal{B}_\alpha := \mathcal{B}, \quad \widetilde{M}_\alpha := \widetilde{M}.$$

Пространство M_α состоит из окружности M_∞ и последовательности дуг $\{M_N\}$, $N \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 5.6. В рассматриваемой ситуации возможны следующие случаи:

- 1) если $\tau(\alpha) = \frac{m}{n}$, где m и n взаимно просты, то предельные точки концевых точек дуг $\{M_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ образуют подмножество M_∞ , число элементов которого равно n , и

$$\mathcal{B}_\alpha \cong \mathcal{B}_{\Theta_{m/n}};$$

- 2) если $\tau(\alpha) \notin \mathbb{Q}$, то возможны 2 подслучая:

- а) α топологически транзитивно, и тогда M_∞ – множество предельных точек концевых точек дуг $\{M_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ и

$$\mathcal{B}_\alpha \cong \mathcal{B}_{\Theta_{\tau(\alpha)}};$$

- б) α не топологически транзитивно, и тогда множество предельных точек концевых точек дуг $\{M_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ образует совершенное нигде не плотное подмножество M_∞ . В частности,

$$\mathcal{B}_\alpha \neq \mathcal{B}_{\Theta_\tau}, \quad \tau \in [0, 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество предельных точек концевых точек дуг $\{M_N\}$, $N \in \mathbb{N}$, совпадает с множеством $\{\infty\} \times \Omega(\alpha) \subset M_\infty$, где $\Omega(\alpha)$ – множество предельных точек орбиты $\{\alpha^N(1)\}_{N \in \mathbb{N}}$. В силу теоремы 5.5 нам необходимо рассмотреть только случаи, приведенные ниже.

1) Множество $\Omega(\alpha)$ состоит из n точек, которые составляют периодическую орбиту α . Более точно, найдется n точек $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in S^1$, занумерованных в соответствии с ориентацией и таких, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha^{Nn+k}(1) = x_{km}, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

см. [22]. Поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M_{Nn+k} = \{\infty\} \times [x_{km \pmod n}, x_{(k+1)m \pmod n}], \quad k = 0, \dots, n-1,$$

т.е. последовательность дуг $\{M_{Nn+k}\}_{N \in \mathbb{N}}$ сходится в хаусдорфовой метрике к дуге на M_∞ с началом $(\infty, x_{kn \pmod m})$ и концом $(\infty, x_{(k+1)n \pmod m})$. Пусть $\varphi: \widetilde{M}_\alpha \rightarrow \widetilde{M}_{\Theta_{m/n}}$ – отображение, которое ведет себя “линейно” в соответствии со схемой

$$\begin{aligned} \{\infty\} \times [x_k, x_{k+1 \pmod n}] &\xrightarrow{\varphi} \{\infty\} \times \left[\exp\left(2\pi i \frac{k}{n}\right), \exp\left(2\pi i \frac{k+1}{n}\right) \right], \\ k &= 0, \dots, n-1, \\ \{N\} \times [\alpha^N(1), \alpha^{N+1}(1)] &\xrightarrow{\varphi} \{N\} \times \left[\exp\left(2\pi i \frac{N}{n}\right), \exp\left(2\pi i \frac{N+1}{n}\right) \right], \quad N \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Очевидно, что φ – гомеоморфизм и, следовательно, алгебры $\mathcal{B}_\alpha = C(\widetilde{M}_\alpha)$ и $\mathcal{B}_{\Theta_{m/n}} = C(\widetilde{M}_{\Theta_{m/n}})$ изоморфны.

2а) $\{\infty\} \times \Omega(\alpha) = \{\infty\} \times S^1 = M_\infty$ и существует гомеоморфизм $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\alpha} & S^1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ S^1 & \xrightarrow{\Theta_{\tau(\alpha)}} & S^1 \end{array}$$

коммутативна. Кроме того, φ может быть выбран так, что $\varphi(1) = 1$, см. доказательство теоремы 7.1.9 из [22]. Отсюда следует, что отображение $\text{id} \times \varphi: \widetilde{M}_\alpha \rightarrow \widetilde{M}_{\Theta_{\tau(\alpha)}}$:

$$(\text{id} \times \varphi)(N, x) = (N, \varphi(x)), \quad (N, x) \in M_N, \quad N \in \overline{\mathbb{N}},$$

является гомеоморфизмом. Следовательно, $\mathcal{B}_\alpha \cong \mathcal{B}_{\Theta_{\tau(\alpha)}}$.

2б) Так как $\{\infty\} \times \Omega(\alpha)$ – совершенное нигде не плотное подмножество M_∞ , то пространство $\widetilde{M}_\alpha$ не изоморфно ни одному из пространств $\widetilde{M}_{\Theta_\tau}$, $\tau \in [0, 1)$. Эквивалентным образом, $\mathcal{B}_\alpha \neq \mathcal{B}_{\Theta_\tau}$ для всех $\tau \in [0, 1)$.

Если φ – топологическая сопряженность между (S^1, α) и (S^1, β) , то либо $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$ (когда φ сохраняет ориентацию), либо $\tau(\alpha) + \tau(\beta) = 1$ (когда φ изменяет ориентацию), поэтому для гомеоморфизмов окружности число вращения “почти инвариантно”. Для алгебр $\mathcal{B}_\alpha$ число вращения постоянно *sensu stricto*.

ТЕОРЕМА 5.7. *Если алгебры $\mathcal{B}_\alpha$ и $\mathcal{B}_\beta$ изоморфны, то $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathcal{B}_\alpha$ и $\mathcal{B}_\beta$ изоморфны. Тогда существует гомеоморфизм $\varphi: \widetilde{M}_\alpha \rightarrow \widetilde{M}_\beta$, где $\widetilde{M}_\alpha = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} M_N$ и $\widetilde{M}_\beta = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} M'_N$ — пространства максимальных идеалов $\mathcal{B}_\alpha$ и $\mathcal{B}_\beta$ соответственно. Ясно, что φ переводит дуги $\{M_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ на дуги $\{M'_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, окружность M_∞ на окружность M'_∞ и множество $\Omega(\alpha) \subset M_\infty$ предельных точек концевых точек дуг $\{M_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ на множество $\Omega(\beta) \subset M'_\infty$ предельных точек концевых точек дуг $\{M'_N\}_{N \in \mathbb{N}}$. Для простоты обозначений будем использовать отождествление $M_\infty = M'_\infty = S^1$. Мы утверждаем, что φ устанавливает сопряженность между системами $(\Omega(\alpha), \alpha)$ и $(\Omega(\beta), \beta)$ или $(\Omega(\alpha), \alpha)$ и $(\Omega(\beta), \beta^{-1})$ в зависимости от того, сохраняет или меняет ориентацию $\varphi: M_\infty \rightarrow M'_\infty$. Если это доказано, стандартное рассуждение дает нам либо $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$, либо $\tau(\alpha) + \tau(\beta^{-1}) = 1$, где в последнем случае мы получим $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$, так как $\tau(\beta^{-1}) = 1 - \tau(\beta)$.

Для доказательства зафиксируем последовательность $\{\alpha^{N_k}(1)\}_{k \in \mathbb{N}}$, сходящуюся к произвольно выбранной точке $x_0 \in \Omega(\alpha)$. Тогда последовательность $\{\alpha^{N_k+1}(1)\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходится к $\alpha(x_0)$ и последовательность дуг $\{M_{N_k}\}_{N \in \mathbb{N}}$ сходится (в хаусдорфовой метрике) к дуге $[x_0, \alpha(x_0)]$. В случае, когда $\varphi: M_\infty \rightarrow M'_\infty$ сохраняет ориентацию, почти все дуги из последовательности $\{M_{N_k}\}_{N \in \mathbb{N}}$ отображаются в соответствии с (естественной) ориентацией на почти все дуги последовательности $\{\varphi(M_{N_k})\}_{N \in \mathbb{N}}$. Следовательно,

$$[\varphi(x_0), \varphi(\alpha(x_0))] = \varphi([x_0, \alpha(x_0)]) = \varphi(\lim_{k \rightarrow \infty} M_{N_k}) = [\varphi(x_0), \beta(\varphi(x_0))].$$

Таким образом, $\varphi(\alpha(x_0)) = \beta(\varphi(x_0))$ и, следовательно, φ является сопряжением для систем $(\Omega(\alpha), \alpha)$, $(\Omega(\beta), \beta)$. В случае, когда $\varphi: M_\infty \rightarrow M'_\infty$ изменяет ориентацию, используя аргументы, подобные приведенным выше, получим

$$[\varphi(\alpha(x_0)), \varphi(x_0)] = \varphi([x_0, \alpha(x_0)]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(M_{N_k}) = [\beta^{-1}(\varphi(x_0)), \varphi(x_0)].$$

Таким образом, $\varphi(\alpha(x_0)) = \beta^{-1}(\varphi(x_0))$ и, следовательно, φ является сопряжением для систем $(\Omega(\alpha), \alpha)$ и $(\Omega(\beta), \beta^{-1})$. Это доказывает наше утверждение.

Применяя классический результат А. Данжуа [34], [22], [23], который утверждает, что каждый диффеоморфизм окружности с конечной вариацией и иррациональным числом вращения топологически транзитивен, мы получим, что в классе алгебр $\mathcal{B}_\alpha$, ассоциированных с такими диффеоморфизмами, число вращения является не только инвариантом, но фактически числовым эквивалентом.

ТЕОРЕМА 5.8. *Если один из гомеоморфизмов α, β является диффеоморфизмом с конечной вариацией, то алгебры $\mathcal{B}_\alpha$ и $\mathcal{B}_\beta$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$.*

Для доказательства достаточно применить теоремы 5.6, 5.7 и теорему Данжуа.

Список литературы

- [1] Б. К. Квасневски, А. В. Лебедев, “Обратимые расширения необратимых динамических систем: C^* -метод”, *Матем. сб.*, **199**:11 (2008), 45–74; англ. пер.:

- B. K. Kwaśniewski, A. V. Lebedev, “Reversible extensions of irreversible dynamical systems: the C^* -method”, *Sb. Math.*, **199**:11 (2008), 1621–1648.
- [2] B. K. Kwaśniewski, *Spectral analysis of operators generating irreversible dynamical systems*, Doctoral dissertation, Warsaw, 2009.
- [3] A. B. Antonevich, A. V. Lebedev, *Functional differential equations: I. C^* -theory*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **70**, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994.
- [4] А. В. Лебедев, А. Одзиевич, “Расширения C^* -алгебр частичными изометриями”, *Матем. сб.*, **195**:7 (2004), 37–70; англ. пер.: A. V. Lebedev, A. Odziejewicz, “Extensions of C^* -algebras by partial isometries”, *Sb. Math.*, **195**:7 (2004), 951–982.
- [5] J. Cuntz, “Simple C^* -algebras generated by isometries”, *Comm. Math. Phys.*, **57**:2 (1977), 173–185.
- [6] J. Cuntz, W. Krieger, “A class of C^* -algebras and topological Markov chains”, *Invent. Math.*, **56**:3 (1980), 251–268.
- [7] W. L. Paschke, “The crossed product of a C^* -algebra by an endomorphism”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **80**:1 (1980), 113–118.
- [8] G. J. Murphy, “Crossed products of C^* -algebras by endomorphisms”, *Integral Equations Operator Theory*, **24**:3 (1996), 298–319.
- [9] R. Exel, “Circle actions on C^* -algebras, partial automorphisms, and a generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence”, *J. Funct. Anal.*, **122**:2 (1994), 361–401.
- [10] R. Exel, “A new look at the crossed-product of a C^* -algebra by an endomorphism”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23**:6 (2003), 1733–1750.
- [11] V. I. Bakhtin, A. V. Lebedev, *When a C^* -algebra is a coefficient algebra for a given endomorphism*, arXiv:math.OA/0502414.
- [12] А. Б. Антоневи́ч, В. И. Бахтин, А. В. Лебедев, “Скращенное произведение C^* -алгебры на эндоморфизм, алгебры коэффициентов и трансфер-операторы”, *Матем. сб.*, **202**:9 (2011), 3–34; англ. пер.: A. B. Antonevich, V. I. Bakhtin, A. V. Lebedev, “Crossed product of a C^* -algebra by an endomorphism, coefficient algebras and transfer operators”, *Sb. Math.*, **202**:9 (2011), 1253–1283.
- [13] B. K. Kwaśniewski, A. V. Lebedev, “Crossed product of a C^* -algebra by a semigroup of endomorphisms generated by partial isometries”, *Integral Equations Operator Theory*, **63**:3 (2009), 403–425.
- [14] B. K. Kwaśniewski, “On transfer operators for C^* -dynamical systems”, *Rocky Mountain J. Math.*, **42**:3 (2012), 919–936.
- [15] B. Abadie, S. Eilers, R. Exel, “Morita equivalence for crossed products by Hilbert C^* -bimodules”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350**:8 (1998), 3043–3054.
- [16] P. S. Muhly, B. Solel, “Tensor algebras over C^* -correspondences: representations, dilations, and C^* -envelopes”, *J. Funct. Anal.*, **158**:2 (1998), 389–457.
- [17] T. Katsura, “On C^* -algebras associated with C^* -correspondences”, *J. Funct. Anal.*, **217**:2 (2004), 366–401.
- [18] T. Katsura, “A construction of C^* -algebras from C^* -correspondences”, *Advances in quantum dynamics* (South Hadley, MA, 2002), Contemp. Math., **335**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, 173–182.
- [19] S. Doplicher, J. E. Roberts, “A new duality theory for compact groups”, *Invent. Math.*, **98**:1 (1989), 157–218.
- [20] B. K. Kwaśniewski, “ C^* -algebras generalizing both relative Cuntz–Pimsner and Doplicher–Roberts algebras”, *Trans. Amer. Math.* (to appear); arXiv:0906.4382.
- [21] R. F. Williams, “Classification of one dimensional attractors”, *Global Analysis* (Berkeley, CA, 1968), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, 341–361.
- [22] M. Brin, G. Stuck, *Introduction to dynamical systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

- [23] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley Stud. Nonlinearity, Addison-Wesley Publ., Redwood City, CA, 1989.
- [24] S. B. Nadler, *Continuum theory*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **158**, Dekker, New York, 1992.
- [25] J. E. Anderson, I. F. Putnam, “Topological invariants for substitution tilings and their associated C^* -algebras”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **18**:3 (1998), 509–537.
- [26] M. Barge, W. T. Ingram, “Inverse limits on $[0, 1]$ using logistic bonding maps”, *Topology Appl.*, **72**:2 (1996), 159–172.
- [27] M. Barge, J. Martin, “Chaos, periodicity, and snakelike continua”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **289**:1 (1985), 355–365.
- [28] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras*, v. II: *Advanced theory*, Grad. Stud. Math., **16**, Amer Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [29] N. J. Fowler, P. S. Muhly, I. Raeburn, “Representations of Cuntz–Pimsner algebras”, *Indiana Univ. Math. J.*, **52**:3 (2003), 569–605.
- [30] B. K. Kwaśniewski, A. V. Lebedev, *Relative Cuntz–Pimsner algebras, partial isometric crossed products and reduction of relations*, arXiv:0704.3811.
- [31] W. T. Watkins, “Homeomorphic classification of certain inverse limit spaces with open bonding maps”, *Pacific J. Math.*, **103**:2 (1982), 589–601.
- [32] P. Collet, J.-P. Eckmann, *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Progr. Phys., **1**, Birkhäuser, Boston, MA, 1980.
- [33] B. K. Kwaśniewski, “Inverse limit systems associated with F_2^n zero Schwarzian unimodal maps”, *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform.*, **48** (2005), 83–109.
- [34] A. Denjoy, “Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore”, *J. Math Pures et Appl.*, **11** (1932), 333–375.

Б. К. Квачевски (B. K. Kwaśniewski)
 Institute of Mathematics,
 University of Białystok, Poland
E-mail: bartoszk@math.uwb.edu.pl

Поступила в редакцию
 20.09.2010 и 15.05.2012