Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Нерациональность четырехмерного гладкого полного пересечения квадрики и квартики, не содержащего плоскости, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 11, 95–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm782>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 12:42:48

УДК 513.6

И. А. Чельцов

**Нерациональность четырехмерного
гладкого полного пересечения квадрики
и кватрики, не содержащего плоскости**

В работе доказана нерациональность и бирациональная жесткость четырехмерного гладкого полного пересечения квадрики и кватрики в $\mathbb{P}^6$, которое не содержит двумерных линейных подпространств в $\mathbb{P}^6$, и доказана невозможность его бирациональной перестройки в расслоение на эллиптические кривые.

Библиография: 24 названия.

Рассматриваемые многообразия подразумеваются проективными, нормальными и определенными над $\mathbb{C}$, дивизоры считаются $\mathbb{Q}$ -дивизорами, для произвольного расслоения $\tau: V \rightarrow Z$ подразумевается, что размерность Z меньше размерности V , слои τ связны и Z не является точкой.

Автор выражает признательность В. Алексееву, Ф. Амбро, Р. Варлею, Л. Вотцлаву, М. Гриненко, В. Исковских, А. Корти, Дж. Парку, Ю. Прохорову, А. Пухликову и В. Шокурову за плодотворные беседы.

§ 1. Введение

Рассмотрим гладкое полное пересечение $V_8 = F_2 \cap F_4 \subset \mathbb{P}^6$, где F_2 и F_4 — квадратика и кватрика в $\mathbb{P}^6$ соответственно. Легко видеть, что многообразие V_8 является многообразием Фано размерности четыре, дивизор $-K_{V_8}$ рационально эквивалентен гиперплоскому сечению многообразия V_8 , группа Пикара многообразия V_8 порождена антиканоническим дивизором $-K_{V_8}$ и $K_{V_8}^4 = 8$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Терминальное $\mathbb{Q}$ -факториальное многообразие Фано V с группой Пикара $\mathbb{Z}$ называется *бирационально сверхжестким*, если выполнены следующие три условия:

- 1) V не может быть бирационально перестроено в расслоение на многообразие, чей общий слой имеет размерность Кодаиры $-\infty$;
- 2) многообразие V не может быть бирационально перестроено в отличное от V терминальное $\mathbb{Q}$ -факториальное многообразие Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$;
- 3) у многообразия V нет небирегулярных бирациональных автоморфизмов.

Основная цель данной работы состоит в доказательстве следующего результата.

ТЕОРЕМА 1.2. *Полное пересечение V_8 является бирационально сверхжестким, если оно не содержит никаких двумерных линейных подпространств в $\mathbb{P}^6$.*

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Каждое гладкое полное пересечение квадрики и кватрики в $\mathbb{P}^6$, которое не содержит двумерных линейных подпространств в $\mathbb{P}^6$, нерационально, а группа его бирациональных автоморфизмов конечна и порождена проективными бирегулярными автоморфизмами.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Из подсчета размерностей следует, что общее полное пересечение квадрики и кватрики в $\mathbb{P}^6$ не содержит двумерных линейных подпространств в $\mathbb{P}^6$.

Отметим, что теорема 1.2 является частным случаем общей гипотезы в [1].

ГИПОТЕЗА 1.5. *Гладкое полное пересечение $\bigcap_{i=1}^k F_i \subset \mathbb{P}^M$ с $\sum_{i=1}^k d_i = M$ бирационально сверхжестко, если $M - k \geq 4$, где F_i — гиперповерхность степени $d_i \geq 2$.*

Бирациональная сверхжесткость гладкой трехмерной кватрики в $\mathbb{P}^4$ была доказана в работе [2], бирациональная сверхжесткость достаточно общей гиперповерхности степени M в $\mathbb{P}^M$ — в [3] для $M > 5$, бирациональная сверхжесткость гладкой четырехмерной квинтики в $\mathbb{P}^5$ — в [4], бирациональная сверхжесткость гладкой гиперповерхности степени N в $\mathbb{P}^N$ для $6 \leq N \leq 8$ — в [5], бирациональная сверхжесткость общего полного пересечения $\bigcap_{i=1}^k F_i \subset \mathbb{P}^M$, где F_i — гиперповерхность степени $d_i \geq 2$, с $\sum_{i=1}^k d_i = M$ и $M > 3k \geq 6$ — в [1]. Недавно в работе [6] была доказана бирациональная сверхжесткость любой гладкой гиперповерхности степени N в $\mathbb{P}^N$ для $N \geq 6$, но, как было показано в [7], доказательство содержит небольшую ошибку. Бирациональная сверхжесткость гладкой гиперповерхности степени N в $\mathbb{P}^N$ для $4 \leq N \leq 12$ и бирациональная сверхжесткость гладкого полного пересечения квадрики и секстики в $\mathbb{P}^8$ были доказаны в [7].

По-видимому, утверждение теоремы 1.2 выполнено для любого гладкого полного пересечения V_8 . Однако в случае, когда многообразие V_8 содержит двумерное линейное подпространство, его бирациональная геометрия имеет более сложную структуру.

ПРИМЕР 1.6. Предположим, что многообразие V_8 содержит двумерное линейное подпространство $\Pi \subset \mathbb{P}^6$, тогда общий слой проекции $\tau: V_8 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ из Π является эллиптической кривой.

С другой стороны, в последнем параграфе будет доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.7. *Полное пересечение V_8 не может быть бирационально перестроено в расслоение на эллиптические кривые в том и только том случае, когда многообразие V_8 не содержит никаких двумерных линейных подпространств в $\mathbb{P}^6$.*

Бирациональные перестройки в расслоения на эллиптические кривые были эффективно использованы в работах [8], [9] для доказательства потенциальной плотности¹ рациональных точек на трехмерных многообразиях Фано, где был получен следующий результат.

¹Рациональные точки на многообразии X , определенном над числовым полем $\mathbb{F}$, потенциально плотны, если для некоторого конечного расширения $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ множество $\mathbb{K}$ -рациональных точек $X(\mathbb{K})$ плотно по Зарискому в X .

ТЕОРЕМА 1.8. *Рациональные точки потенциально плотны на всех трехмерных многообразиях Фано кроме, быть может, двойного накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в гладкой поверхности степени шесть.*

Появление возможного исключения в теореме 1.8 объясняется исключительно тем, что двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в гладкой секстике является единственным гладким трехмерным многообразием Фано, которое не может быть бирационально перестроено в эллиптическое расслоение (см. [10]). Бирациональные перестройки многомерных многообразий в расслоения на многообразия кодаировой размерности нуль были рассмотрены в работах [5] и [10]–[14].

§ 2. Свойства подвижных лог-пар

В этом параграфе будут рассмотрены свойства лог-пар, введенных в [15].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Под *подвижной лог-парой* (X, M_X) подразумевается многообразие X вместе с подвижной границей M_X , где $M_X = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{M}_i$ — формальная конечная линейная комбинация линейных систем $\mathcal{M}_i$ на X без неподвижных компонент такая, что $a_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Подвижная лог-пара может быть рассмотрена как обычная лог-пара путем замены каждой линейной системы либо на ее общий элемент, либо на взвешенную сумму ее общих элементов. В частности, для данной подвижной лог-пары (X, M_X) подвижная граница M_X может быть рассмотрена как эффективный дивизор, а $K_X + M_X$ будет называться *лог-каноническим дивизором подвижной лог-пары* (X, M_X) . В оставшейся части этого параграфа лог-канонические дивизоры всех рассматриваемых лог-пар будут считаться дивизорами $\mathbb{Q}$ -Картье.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Для подвижной лог-пары (X, M_X) самопересечение M_X^2 может быть рассмотрено как корректно определенный эффективный цикл коразмерности два на многообразии X , если многообразие X имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности.

В отличие от обычных лог-пар прямой образ подвижной границы при бирациональном отображении естественно и корректно определен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Подвижные лог-пары (X, M_X) и (Y, M_Y) называются *бирационально эквивалентными*, если существует бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow Y$ такое, что $M_Y = \rho(M_X)$.

Дискрепантности, терминальность, каноничность, лог-терминальность и лог-каноничность могут быть определены для подвижных лог-пар аналогично тому, как они определяются для обычных лог-пар (см. [16]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Применение лог-программы минимальных моделей к каноничным и терминальным подвижным лог-парам сохраняет их каноничность и терминальность соответственно.

Каждая подвижная лог-пара бирациональна эквивалентна подвижной лог-паре с каноническими особенностями, и особенности подвижной лог-пары совпадают с особенностями многообразия вне объединения базисных множеств компонент подвижной границы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Собственное неприводимое подмногообразие $Y \subset X$ называется *центром канонических особенностей подвижной лог-пары* (X, M_X) , если существуют бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ и f -исключительный дивизор $E_1 \subset W$ такие, что

$$K_W + f^{-1}(M_X) \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + M_X) + \sum_{i=1}^k a(X, M_X, E_i) E_i,$$

выполнено неравенство $a(X, M_X, E_1) \leq 0$ и $f(E_1) = Y$, где $a(X, M_X, E_i) \in \mathbb{Q}$, а дивизор E_i является f -исключительным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Запись $\mathbb{CS}(X, M_X)$ будет обозначать множество всех центров канонических особенностей подвижной лог-пары (X, M_X) , а $CS(X, M_X)$ – объединение всех центров канонических особенностей подвижной лог-пары (X, M_X) , рассматриваемое как собственное подмножество многообразия X .

В частности, подвижная лог-пара (X, M_X) терминальна $\iff \mathbb{CS}(X, M_X) = \emptyset$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Число

$$\kappa(X, M_X) = \begin{cases} \dim(\varphi_{|nm(K_W + M_W)|}(W)) \\ \text{для таких } n \gg 0, \text{ что } |n(K_W + M_W)| \neq \emptyset; \\ -\infty, \text{ когда } |nm(K_W + M_W)| = \emptyset \text{ для всех натуральных чисел } n \end{cases}$$

называется *размерностью Кодайры подвижной лог-пары* (X, M_X) , где подвижная лог-пара (W, M_W) бирациональна эквивалентна лог-паре (X, M_X) и имеет канонические особенности, а $m \in \mathbb{N}$ такое, что дивизор $m(K_W + M_W)$ является дивизором Картье.

Можно показать, что размерность Кодайры подвижной лог-пары корректно определена и не зависит от выбора бирационально эквивалентной подвижной лог-пары с каноническими особенностями. По определению размерность Кодайры подвижной лог-пары является бирациональным инвариантом и неубывающей функцией от коэффициентов подвижной границы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Подвижная (V, M_V) называется *канонической моделью подвижной лог-пары* (X, M_X) , если существует бирациональное отображение $\psi: X \dashrightarrow V$ такое, что $M_V = \psi(M_X)$, лог-канонический дивизор $K_V + M_V$ обилен, а особенности лог-пары (V, M_V) каноничны.

ТЕОРЕМА 2.9. *Каноническая модель единственна, если существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что подвижные лог-пары (X, M_X) и (V, M_V) являются каноническими моделями и $M_X = \rho(M_V)$ для некоторого бирационального отображения $\rho: V \dashrightarrow X$. Пусть $g: W \rightarrow X$ и $f: W \rightarrow V$ – бирациональные отображения такие, что $\rho = g \circ f^{-1}$. Тогда выполнено соотношение

$$K_W + M_W \sim_{\mathbb{Q}} g^*(K_X + M_X) + \Sigma_X \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_V + M_V) + \Sigma_V,$$

где $M_W = g^{-1}(M_X) = f^{-1}(M_V)$ и дивизоры Σ_X и Σ_V являются исключительными дивизорами бирациональных морфизмов g и f соответственно. Из каноничности особенностей лог-пар (X, M_X) и (V, M_V) следует, что оба дивизора Σ_X и Σ_V эффективны. Рассмотрим достаточно большое и делимое натуральное число n такое, что все три дивизора $n(K_W + M_W)$, $n(K_X + M_X)$ и $n(K_V + M_V)$ одновременно являются дивизорами Картье. Из эффективности дивизоров Σ_X и Σ_V следует, что

$$\varphi|_{n(K_W + M_W)} = \varphi|_{g^*(n(K_X + M_X))} = \varphi|_{f^*(n(K_V + M_V))}$$

и ρ является изоморфизмом, поскольку дивизоры $K_X + M_X$ и $K_V + M_V$ обильны.

Отметим, что из существования канонической модели подвижной лог-пары следует, что ее размерность Кодаиры равна размерности многообразия.

§ 3. Предварительные результаты

Как уже упоминалось в предыдущем параграфе, подвижные границы могут рассматриваться как эффективные дивизоры, а подвижные лог-пары могут рассматриваться как обычные лог-пары. Таким образом, можно рассматривать и лог-пары, имеющие подвижные компоненты.

ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ 3.1. В дальнейшем не будут накладываться никакие ограничения на коэффициенты границ, в частности, границы могут не быть эффективными.

Все лог-канонические дивизоры будут подразумеваться дивизорами $\mathbb{Q}$ -Картье.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Для лог-пары (X, B_X) и бирационального морфизма $f: V \rightarrow X$ лог-пара (V, B^V) называется *лог-поднятием лог-пары* (X, B_X) , если $B^V = f^{-1}(B_X) - \sum_{i=1}^n a(X, B_X, E_i)E_i$ и $K_V + B^V \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X)$, где $a(X, B_X, E_i) \in \mathbb{Q}$ и дивизор E_i является f -исключительным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Собственное неприводимое подмногообразие $Y \subset X$ называется *центром лог-канонических особенностей лог-пары* (X, B_X) , если существуют бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ и дивизор $E \subset W$ такие, что дивизор E содержится в носителе эффективной части дивизора $[B^Y]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Запись $\text{LCS}(X, B_X)$ будет обозначать множество всех центров лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) , а $\text{LCS}(X, B_X)$ – объединение всех центров лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) , рассматриваемое как собственное подмножество многообразия X .

Рассмотрим лог-пару (X, B_X) , где $B_X = \sum_{i=1}^k a_i B_i$, дивизор B_i эффективен и неприводим и $a_i \in \mathbb{Q}$. Возьмем бирациональный морфизм $f: Y \rightarrow X$ такой, что Y гладкое, а объединение всех дивизоров $f^{-1}(B_i)$ и всех f -исключительных дивизоров образуют дивизор с простыми нормальными пересечениями. Морфизм f называется *лог-разрешением лог-пары* (X, B_X) и для лог-поднятия (Y, B^Y) лог-пары (X, B_X) выполнено $K_Y + B^Y \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Подсхемой лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) называется подсхема, ассоциированная с пучком идеалов $\mathcal{I}(X, B_X) = f_*([\neg B^Y])$, которая будет обозначаться $\mathcal{L}(X, B_X)$.

Носитель подсхемы $\mathcal{L}(X, B_X)$ совпадает с множеством $LCS(X, B_X) \subset X$. Следующий результат является теоремой В. В. Шокурова об обращении в нуль.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть (X, B_X) – лог-пара, граница B_X эффективна, а H – численно эффективный и объемный дивизор на X такой, что $D = K_X + B_X + H$ является дивизором Картье. Тогда $H^i(X, \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D) = 0$ для всех $i > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По относительной теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль $R^i f_*(f^*(K_X + B_X + H) + [\neg B^W]) = 0$ для всех $i > 0$. Из вырождения соответствующей спектральной последовательности и равенства

$$R^0 f_*(f^*(K_X + B_X + H) + [\neg B^W]) = \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D$$

следует, что для всех $i \geq 0$

$$H^i(X, \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D) = H^i(W, f^*(K_X + B_X + H) + [\neg B^W]),$$

но $H^i(W, f^*(K_X + B_X + H) + [\neg B^W]) = 0$ для $i > 0$ по теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль.

Для дивизора Картье D на X рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{L}(X, B_X)}(D) \rightarrow 0,$$

из теоремы 3.6 следуют следующие три теоремы о связности В. В. Шокурова.

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть (X, B_X) – лог-пара, B_X эффективна, $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объемен. Тогда $LCS(X, B_X)$ связно.

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть (X, B_X) – лог-пара, B_X эффективна, $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объемен относительно некоторого морфизма $g: X \rightarrow Z$ со связными слоями. Тогда $LCS(X, B_X)$ связно в окрестности каждого слоя морфизма g .

ТЕОРЕМА 3.9. Пусть $g: X \rightarrow Z$ – морфизм, $D_X = \sum_{i \in I} d_i D_i$ – дивизор на многообразии X , $h: V \rightarrow X$ – разрешение особенностей X такие, что $g_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Z$, дивизор $-(K_X + D_X)$ численно эффективен и объемен относительно морфизма g , коразмерность каждого подмногообразия $g(D_i) \subset Z$ больше либо равна 2 в случае $d_i < 0$, объединение всех дивизоров $h^{-1}(D_i)$ и всех h -исключительных дивизоров образует дивизор с простыми нормальными пересечениями. Тогда множество $\bigcup_{a_E \leq -1} E$ связно в окрестности каждого слоя морфизма $g \circ h$, где рациональные числа a_E заданы посредством $\mathbb{Q}$ -рациональной эквивалентности $K_V \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + D_X) + \sum_{E \subset V} a_E E$.

Отметим, что теорема 3.9 является теоремой 17.4 работы [17].

В предыдущем параграфе были даны определения центра канонических особенностей подвижной лог-пары и нескольких связанных с ним объектов, в которых подвижность границы нигде реально не использовалась. Таким образом, эти понятия имеют место и для обыкновенных лог-пар.

ТЕОРЕМА 3.10. Пусть (X, B_X) – лог-пара, B_X эффективна, $Z \in \mathbb{CS}(X, B_X)$, дивизор H является эффективным и неприводимым дивизором Картье на X таким, что $Z \subset H$, дивизор H не является компонентой границы B_X , подмногообразие H гладко в общей точке многообразия Z . Тогда $Z \in \mathbb{LCS}(H, B_X|_H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим лог-разрешение $f: W \rightarrow X$ лог-пары $(X, B_X + H)$ и положим $\hat{H} = f^{-1}(H)$. Тогда выполнено соотношение

$$K_W + \hat{H} \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X + H) + \sum_{E \neq \hat{H}} a(X, B_X + H, E)E$$

и по предположению $\{Z, H\} \subset LCS(X, B_X + H)$. Из применения теоремы 3.9 к лог-поднятию лог-пары $(X, B_X + H)$ на W следует, что $\hat{H} \cap E \neq \emptyset$ для некоторого f -исключительного дивизора E на W с $f(E) = Z$ и $a(X, B_X, E) \leq -1$. Из эквивалентности

$$K_{\hat{H}} \sim (K_W + \hat{H})|_{\hat{H}} \sim_{\mathbb{Q}} f|_{\hat{H}}^*(K_H + B_X|_H) + \sum_{E \neq \hat{H}} a(X, B_X + H, E)E|_{\hat{H}}$$

следует необходимое утверждение.

Следующий результат является теоремой 3.1 работы [18], который будет в дальнейшем настолько эффективно использован, что ниже будет приведено его доказательство из работы [18].

ТЕОРЕМА 3.11. Пусть H – поверхность, O – гладкая точка на H , M_H – эффективная подвижная граница на поверхности H , a_1 и a_2 – неотрицательные рациональные числа, Δ_1 и Δ_2 – неприводимые и приведенные кривые на H , которые пересекаются нормально в точке O . Тогда из $O \in \mathbb{LCS}(H, (1 - a_1)\Delta_1 + (1 - a_2)\Delta_2 + M_H)$ следует

$$\text{mult}_O(M_H^2) \geq \begin{cases} 4a_1a_2 & \text{в случае } a_1 \leq 1 \text{ или } a_2 \leq 1; \\ 4(a_1 + a_2 - 1) & \text{в случае } a_1 > 1 \text{ и } a_2 > 1 \end{cases}$$

и неравенство строгое, если $(H, (1 - a_1)\Delta_1 + (1 - a_2)\Delta_2 + M_H)$ не лог-канонична в O .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D = (1 - a_1)\Delta_1 + (1 - a_2)\Delta_2 + M_H$. Рассмотрим бирациональный морфизм $f: S \rightarrow H$ такой, что поверхность S гладкая и выполнено

$$K_S + f^{-1}(D) \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_H + D) + \sum_{i=1}^k a(H, D, E_i)E_i,$$

где E_i – f -исключительная кривая, $a(H, D, E_i) \in \mathbb{Q}$ и $a(H, D, E_1) \leq -1$. Тогда бирациональный морфизм f является композицией k раздутий гладких точек.

Предположим, что необходимое утверждение уже доказано во всех случаях, когда либо $a_1 \leq 1$, либо $a_2 \leq 1$. Следовательно, можно считать, что $a_1 > 1$ и $a_2 > 1$.

Определим рациональные числа $a(H, E_i)$, $m(H, M_H, E_i)$ и $m(H, \Delta_j, E_i)$ посредством соотношений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k a(H, E_i) E_i &\sim_{\mathbb{Q}} K_S - f^*(K_H), \\ \sum_{i=1}^k m(H, M_H, E_i) E_i &\sim_{\mathbb{Q}} f^{-1}(M_H) - f^*(M_H), \\ \sum_{i=1}^k m(H, \Delta_j, E_i) E_i &\sim_{\mathbb{Q}} f^{-1}(\Delta_j) - f^*(\Delta_j). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} a(H, D, E_i) &= a(H, E_i) - m(H, M_H, E_i) \\ &\quad + m(H, \Delta_1, E_i)(a_1 - 1) + m(H, \Delta_2, E_i)(a_2 - 1) \end{aligned}$$

и можно считать, что $m(H, \Delta_1, E_1) \geq m(H, \Delta_2, E_1)$. Таким образом, выполнено

$$-1 \geq a(H, D, E_1) \geq a(H, E_1) - m(H, M_H, E_1) + m(H, \Delta_2, E_1)(a_1 + a_2 - 2)$$

и $O \in \mathbb{LCD}(H, (2 - a_1 - a_2)\Delta_2 + M_H)$. Значит, $\text{mult}_O(M_H^2) \geq 4(a_1 + a_2 - 1)$, поскольку по предположению для $(H, (2 - a_1 - a_2)\Delta_2 + M_H)$ утверждение теоремы выполнено.

Можно считать, что $a_1 \leq 1$. Пусть $h: T \rightarrow H$ — раздутие O , а E — h -исключительная кривая. Тогда $f = g \circ h$ для некоторого бирационального морфизма $g: S \rightarrow T$, состоящего из композиции $k - 1$ раздутий гладких точек. В этом случае

$$K_T + (1 - a_1)\overline{\Delta}_1 + (1 - a_2)\overline{\Delta}_2 + (1 - a_1 - a_2 + m)E + M_T \sim_{\mathbb{Q}} h^*(K_H + D),$$

где $\overline{\Delta}_j = h^{-1}(\Delta_j)$, $m = \text{mult}_O(M_H)$ и $M_T = h^{-1}(M_H)$.

Если $k = 1$, то $S = T$, $E_1 = E$ и $a(H, D, E_1) = a_1 + a_2 - m - 1 \leq -1$. Таким образом,

$$\text{mult}_O(M_H^2) \geq m^2 \geq (a_1 + a_2)^2 \geq 4a_1a_2$$

и необходимое утверждение доказано. Значит, можно считать, что выполнено неравенство $k > 1$ и $P = g(E_1)$ — точка на кривой E .

По построению $P \in \mathbb{LCD}(T, (1 - a_1)\overline{\Delta}_1 + (1 - a_2)\overline{\Delta}_2 + (1 - a_1 - a_2 + m)E + M_T)$ и возможны три случая: $P \in E \cap \overline{\Delta}_1$, $P \in E \cap \overline{\Delta}_2$ и $P \notin \overline{\Delta}_1 \cup \overline{\Delta}_2$. Можно считать, что утверждение теоремы выполнено для лог-пары $(T, (1 - a_1)\overline{\Delta}_1 + (1 - a_1 - a_2 + m)E + M_T)$ в случае, когда $P \in E \cap \overline{\Delta}_1$, для лог-пары $(T, (1 - a_2)\overline{\Delta}_2 + (1 - a_1 - a_2 + m)E + M_T)$ в случае, когда $P \in E \cap \overline{\Delta}_2$, и для лог-пары $(T, (1 - a_1 - a_2 + m)E + M_T)$ в случае, когда $P \notin \overline{\Delta}_1 \cup \overline{\Delta}_2$, поскольку все условия теоремы выполнены в каждом из трех возможных случаев и бирациональный морфизм g состоит из $k - 1$ раздутий гладких точек. Более того, выполнено неравенство $\text{mult}_O(M_H^2) \geq m^2 + \text{mult}_P(M_T^2)$.

Рассмотрим случай $P \in E \cap \overline{\Delta}_1$. По индукции

$$\text{mult}_O(M_H^2) \geq m^2 + 4a_1(a_1 + a_2 - m) = (2a_1 - m)^2 + 4a_1a_2 \geq 4a_1^2 + 4a_1a_2.$$

Рассмотрим случай $P \in E \cap \overline{\Delta}_2$. При $a_2 \leq 1$ или $a_1 + a_2 - m \leq 1$ необходимое неравенство выводится, как и в предыдущем случае. Таким образом, можно считать, что $a_2 < 1$ и $a_1 + a_2 - m < 1$. Тогда

$$\text{mult}_O(M_H^2) \geq m^2 + 4(a_1 + 2a_2 - m - 1) > 4a_2 \geq 4a_1 4a_2.$$

Рассмотрим случай $P \notin \overline{\Delta}_1 \cup \overline{\Delta}_2$. По индукции

$$\text{mult}_O(M_H^2) \geq m^2 + 4(a_1 + a_2 - m) > m^2 + 4a_1(a_1 + a_2 - m) \geq 4a_1 4a_2.$$

Основные применения используют следующий частный случай теоремы 3.11.

ЛЕММА 3.12. *Пусть H – поверхность, O – гладкая точка на H , M_H – эффективная подвижная граница на H и $O \in \text{LCS}(H, M_H)$. Тогда $\text{mult}_O(M_H^2) \geq 4$ и равенство выполнено, только если $\text{mult}_O(M_H) = 2$.*

Следующий результат является следствием 7.3 работы [19].

ТЕОРЕМА 3.13. *Пусть X – трехмерное многообразие, O – гладкая точка на многообразии X , M_X – эффективная подвижная граница на X и $O \in \text{CS}(X, M_X)$. Тогда $\text{mult}_O(M_X^2) \geq 4$ и равенство выполнено, только если $\text{mult}_O(M_X) = 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – общее гиперплоское сечение многообразия X , проходящее через точку O . Тогда O является центром лог-канонических особенностей лог-пары $(H, M_X|_H)$ по теореме 3.10. С другой стороны,

$$\text{mult}_O(M_X) = \text{mult}_O(M_X|_H), \quad \text{mult}_O(M_X^2) = \text{mult}_O((M_X|_H)^2)$$

и необходимое утверждение следует из теоремы 3.11.

Из итеративного применения теоремы 3.10 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.14. *Пусть X – многообразие размерности не менее трех, Z – подмногообразие многообразия X коразмерности не менее трех, M_X – подвижная эффективная граница на X и $Z \in \text{CS}(X, M_X)$. Тогда $\text{mult}_Z(M_X^2) \geq 4$ и равенство выполнено, только если $\text{mult}_O(M_X) = 2$ и коразмерность Z равна трем.*

Следующий результат является следствием 3.5 работы [18].

ЛЕММА 3.15. *Пусть X – трехмерное многообразие, O – гладкая точка на многообразии X , M_X – эффективная подвижная граница на X , $f: V \rightarrow X$ – раздутие точки O , E – исключительный дивизор раздутия f , $O \in \text{CS}(X, M_X)$. Тогда либо выполнено неравенство $\text{mult}_O(M_X) \geq 2$, либо существует прямая $L \subset E \cong \mathbb{P}^2$ такая, что $L \in \text{LCS}(V, M_X^V + E)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимое утверждение локально по X . Значит, можно считать, что $O \in X$ – росток трехмерного гладкого многообразия. Рассмотрим общее гиперплоское сечение H многообразия X , содержащее O . Пусть $T = f^{-1}(H)$. Тогда

$$K_V + M^V + E + T = K_V + f^{-1}(M_X) + (\text{mult}_O(M_X) - 1)E + T \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + M_X + H),$$

где можно считать, что выполнено строгое неравенство $\text{mult}_O(M_X) < 2$. Таким образом, $O \in \mathbb{LCS}(H, M_X|_H)$ по теореме 3.10. Следовательно, лог-пара $(T, M^V|_T + E|_T)$ не лог-терминальна. Более того, из применения теоремы 3.9 к морфизму $f: T \rightarrow H$ следует, что множество $\mathbb{LCS}(T, M^V|_T + E|_T)$ состоит из одной точки, которая является пересечением T с элементом множества $\mathbb{LCS}(V, M^V + E)$. Следовательно, единственный не содержащийся в исключительном дивизоре E одномерный центр лог-канонических особенностей лог-пары $(V, M^V + E)$ является прямой в $E \cong \mathbb{P}^2$.

Следующий результат является естественным прямым обобщением леммы 3.15.

ЛЕММА 3.16. Пусть X – четырехмерное многообразие, O – гладкая точка на многообразии X , M_X – эффективная подвижная граница на X , $f: V \rightarrow X$ – раздутие точки O , E – исключительный дивизор раздутия f , $O \in \mathbb{CS}(X, M_X)$ и выполнено неравенство $\text{mult}_O(M_X) < 3$. Тогда либо существует поверхность $S \subset E$ такая, что $S \in \mathbb{LCS}(V, M^V + E)$, либо существует прямая $L \subset E \cong \mathbb{P}^3$ и $L \in \mathbb{LCS}(V, M^V + E)$.

Идея доказательства леммы 3.15 позволяет получить следующий результат.

ЛЕММА 3.17. Пусть X – четырехмерное многообразие, O – гладкая точка на многообразии X , M_X – эффективная подвижная граница на X , $f: V \rightarrow X$ – раздутие точки O , E – исключительный дивизор раздутия f , $O \in \mathbb{CS}(X, M_X)$, выполнено неравенство $\text{mult}_O(M_X) < 3$, множество $\mathbb{LCS}(V, M^V + E)$ не содержит поверхностей в E и содержит прямую $L \subset E \cong \mathbb{P}^3$, $g: W \rightarrow V$ – раздутие L , F – исключительный дивизор g и $E_W = g^{-1}(E)$. Тогда либо $F \in \mathbb{LCS}(W, M^W + E_W + 2F)$, либо существует поверхность $Z \subset F$, доминирующая L , такая, что $Z \in \mathbb{LCS}(W, M^W + E_W + 2F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимое утверждение локально по X . Следовательно, можно считать, что $O \in X$ – росток гладкого четырехмерного многообразия. Рассмотрим общее гиперплоское сечение H многообразия X , проходящее через точку O , такое, что $L \subset T = f^{-1}(H)$. Пусть $M_V = f^{-1}(M_X)$, $M_W = g^{-1}(M_V)$, $S = g^{-1}(T)$. Тогда

$$K_W + M^W + E_W + 2F + S \sim_{\mathbb{Q}} (f \circ g)^*(K_X + M_X + H)$$

и дивизор $M^W + E_W + 2F + S$ может быть представлен в виде

$$M_W + (\text{mult}_O(M_X) - 2)E_W + (\text{mult}_O(M_X) + \text{mult}_L(M_V) - 3)F + S,$$

где $\text{mult}_O(M_X) < 3$. Можно считать, что $\text{mult}_O(M_X) + \text{mult}_L(M_V) < 4$. Необходимо показать, что существует поверхность $Z \subset F$ такая, что Z доминирует кривую L и $Z \in \mathbb{LCS}(W, M^W + E_W + 2F)$.

Пусть $\overline{H}$ – общее гиперплоское сечение многообразия X , проходящее через O , такое, что $L \not\subset \overline{T} = f^{-1}(\overline{H})$, где $\overline{S} = g^{-1}(T)$. Тогда $O \in \mathbb{LCS}(\overline{H}, M_X|_{\overline{H}})$ по теореме 3.10 и из

$$K_W + M^W + E_W + F + \overline{S} \sim_{\mathbb{Q}} (f \circ g)^*(K_X + M_X + H)$$

следует, что $(\overline{S}, (M^W + E_W + F)|_{\overline{S}})$ не лог-терминальна. Из применения теоремы 3.9 к морфизму $f \circ g: \overline{S} \rightarrow \overline{H}$ следует, что часть множества $LCS(\overline{S}, (M^W + E_W + F)|_{\overline{S}})$, которая содержится в слое морфизма g над точкой $\overline{T} \cap L$, либо состоит из одной точки, либо содержит кривую в этом слое. Элементы $\mathbb{LCS}(\overline{S}, (M^W + E_W + F)|_{\overline{S}})$, лежащие в слое g над точкой $\overline{T} \cap L$, получаются пересечением дивизора $\overline{S}$ с элементами множества $\mathbb{LCS}(W, M^W + E_W + F)$. Таким образом, либо множество $\mathbb{LCS}(W, M^W + E_W + F)$ содержит поверхность F , либо единственный центр лог-канонических особенностей лог-пары $(W, M^W + E_W + F)$, содержащийся в F , является кривой $C \subset F$ такой, что кривая C является сечением $\mathbb{P}^2$ -расслоения $g: F \rightarrow L$. Однако каждый элемент множества $\mathbb{LCS}(W, M^W + E_W + F)$ содержится в $\mathbb{LCS}(W, M^W + E_W + 2F)$. Для доказательства необходимого утверждения можно предположить, что C является единственным центром лог-канонических особенностей лог-пары $(W, M^W + E_W + F)$ и лог-пары $(W, M^W + E_W + 2F)$, который содержится в исключительном дивизоре F .

Точка O содержится в $\mathbb{LCS}(H, M_X|_H)$ по теореме 3.10. По предположению теоремы лог-пара $(S, M^W|_S + E_W|_S + 2F|_S)$ не лог-терминальна над O . Применяя теорему 3.9 к морфизму $f \circ g: S \rightarrow H$, получаем, что $LCS(S, (M^W + E_W + 2F)|_S)$ над O состоит из точки $S \cap C$. Применяя теорему Каваматы–Фивега об обращении в нуль (см. [16]) к дивизору $S - F$, получаем сюръективность $H^0(S) \rightarrow H^0(S|_F)$. С другой стороны, линейная система $|S|_F$ не имеет базисных точек (см. [20; § 2.8]) и, в частности, $C \not\subset S$ ввиду общности гиперплоского сечения H . Более того,

$$L \cong C \cong \mathbb{P}^1, \quad F \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_L(-1) \oplus \mathcal{O}_L(1) \oplus \mathcal{O}_L(1))$$

и $S|_F \sim B + D$, где $B = \mathcal{O}_F(1)$, а D – слой отображения $\tau = g|_F$. Рассмотрим пучок идеалов $\mathcal{I}_C$ кривой C на трехмерном многообразии F . Тогда $R^1 \tau_*(B \otimes \mathcal{I}_C) = 0$ и отображение $\pi: \mathcal{O}_L(-1) \oplus \mathcal{O}_L(1) \oplus \mathcal{O}_L(1) \rightarrow \mathcal{O}_L(k)$ сюръективно, где $k = B \cdot C$ и отображение π лежит в $H^0(\mathcal{O}_L(k+1)) \oplus H^0(\mathcal{O}_L(k-1)) \oplus H^0(\mathcal{O}_L(k-1))$. В частности, обязательно $k \geq -1$. Равенство $k = 0$ невозможно, поскольку в этом случае отображение π может быть задано матрицей $(ax + by, 0, 0)$, где a и b – комплексные числа, а $(x : y)$ – однородные координаты на $L \cong \mathbb{P}^1$, что противоречит сюръективности отображения π в точке $ax + by = 0$. Таким образом, дивизор B на F не может иметь тривиального пересечения с сечением C . Значит, пересечение $S \cap C$ либо тривиально, либо состоит более чем из одной точки, но мы показали ранее, что $S \cap C$ состоит ровно из одной точки.

Следующий результат обобщает теорему 2 работы [21].

ЛЕММА 3.18. Пусть V – гладкое полное пересечение $\bigcap_{i=1}^k G_i \subset \mathbb{P}^M$ размерности не менее чем три, D – эффективный дивизор на V с $D \equiv \mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(n)|_V$, $S \subset V$ – неприводимое подмногообразие размерности не менее чем k и ко-размерности не менее чем два, где G_i – гиперповерхность в $\mathbb{P}^M$. Тогда $\text{mult}_S(D) \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что размерность многообразия S равна k и выполнено неравенство $k < (M - 1)/2$. Рассмотрим конус $C_S \in \mathbb{P}^M$ над S с вершиной в достаточно общей точке $P \in \mathbb{P}^M$. Тогда $C_S \cap V = S \cup R_S$, где R_S – кривая на многообразии V , а последнее равенство верно и в теоретико-схемном смысле ввиду общности конуса C_S .

Пусть $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^{M-1}$ – проекция из P , а $D_\pi \subset V$ – подмногообразие ветвления морфизма π . Покажем, что выполнено равенство

$$R_S \cap S = D_\pi \cap S$$

в теоретико-множественном смысле. Пусть $C_S \cap G_i = S \cup R_S^i$. Тогда в теоретико-множественном смысле $R_S^i \cap S = D_\pi^i \cap S$ для гладкого дивизора ветвления $D_\pi^i \subset G_i$ проекции $\pi^i: G_i \rightarrow \mathbb{P}^{M-1}$ из точки P по лемме 3 работы [6]. С другой стороны, выполнены равенства $R_S = \bigcap_{i=1}^k R_S^i$ и $D_\pi = \bigcap_{i=1}^k D_\pi^i$, таким образом, $R_S \cap S = D_\pi \cap S$.

Пусть $(z_0 : \dots : z_M)$ – однородные координаты на $\mathbb{P}^M$, в которых G_j задано уравнением $F_j = 0$, а $(p_0 : \dots : p_M)$ – координата точки P . В этом случае D_π задается k уравнениями

$$\sum_{i=0}^M \frac{\partial F_j}{\partial z_i} p_i = 0,$$

но линейные системы

$$\left| \sum_{i=0}^M \lambda_i \frac{\partial F_j}{\partial z_i} = 0 \right|$$

свободны на V , поскольку многообразие V гладкое. Таким образом, $D_\pi \cap S$ состоит из $d_S \prod_{i=1}^k (d_i - 1)$ различных достаточно общих точек на S , где d_S – степень S в $\mathbb{P}^M$, но степень R_S равна в точности $d_S \prod_{i=1}^k (d_i - 1)$, а общность C_S влечет $R_S \not\subset D$, откуда $\text{mult}_S(D) \leq n$.

§ 4. Подвижные лог-пары на многообразии V_8

Пусть V_8 – гладкое полное пересечение $F_2 \cap F_4 \subset \mathbb{P}^6$ такое, что V_8 не содержит плоскостей в $\mathbb{P}^6$, где F_2 и F_4 – квадрика и кватрика в $\mathbb{P}^6$ соответственно.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть M_{V_8} – произвольная эффективная подвижная граница на многообразии V_8 такая, что $K_{V_8} + M_{V_8} \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Тогда лог-пара (V_8, M_{V_8}) канонична.

Следующая импликация хорошо известна (см. [22]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. Бирациональная супержесткость V_8 следует из теоремы 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ρ – бирациональная перестройка многообразия V_8 в многообразие Y такое, что либо Y обладает структурой расслоения $\tau: Y \rightarrow Z$ на многообразии с размерностью Кодaira $-\infty$, либо Y является $\mathbb{Q}$ -факториальным терминальным многообразием Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$. Требуется показать, что первый случай невозможен, $Y \cong V_8$ и ρ брегулярен.

Предположим, что существует расслоение $\tau : Y \rightarrow Z$ на многообразия с размерностью Кодaira $-\infty$. Выберем достаточно общий очень обильный дивизор H на многообразии Z и рассмотрим $\mu \in \mathbb{Q}_{>0}$ и подвижную границу $M_{V_8} = \mu \rho^{-1}(|\tau^*(H)|)$ такие, что выполнено соотношение $K_{V_8} + M_{V_8} \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Тогда особенности (V_8, M_{V_8}) каноничны по теореме 4.1. В частности, $\kappa(V_8, M_{V_8}) = 0$, но по построению $\kappa(V_8, M_{V_8}) = -\infty$.

Предположим, что многообразие Y является терминальным $\mathbb{Q}$ -факториальным многообразием Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$. Рассмотрим натуральное $n \gg 0$, $\mu \in \mathbb{Q}_{>0}$ и две границы $M_Y = \mu/n | -nK_Y |$ и $M_{V_8} = \rho^{-1}(M_Y)$ такие, что $K_{V_8} + M_{V_8} \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Особенности (V_8, M_{V_8}) каноничны по теореме 4.1, но $\kappa(V_8, M_{V_8}) = \kappa(Y, M_Y)$, откуда $\mu = 1$.

Рассмотрим бирациональный морфизм $f : W \rightarrow V_8$ такой, что $g = \rho \circ f$ регулярен, а W гладкое. Тогда выполнено соотношение

$$\sum_{j=1}^k a(V_8, M_{V_8}, F_j) F_j \sim_{\mathbb{Q}} \sum_{i=1}^l a(Y, M_Y, G_i) G_i,$$

где G_i — g -исключительный дивизор, а F_j — f -исключительный дивизор. Особенности лог-пар (V_8, M_{V_8}) и (Y, M_Y) каноничны. Более того, особенности (Y, M_Y) терминальны. В частности, все $a(V_8, M_{V_8}, F_j)$ неотрицательны, а все $a(Y, M_Y, G_i)$ положительны. Отрицательность исключительного множества (см. [17; лемма 2.19]) влечет равенство $a(V_8, M_{V_8}, E) = a(Y, M_Y, E)$ для каждого дивизора E на W . В частности, выполнено равенство $\sum_{j=1}^k a(V_8, M_{V_8}, F_j) F_j = \sum_{i=1}^l a(Y, M_Y, G_i) G_i$, где носитель дивизора в правой части равенства содержит все g -исключительные дивизоры. С другой стороны, $\text{Pic}(V_8) = \mathbb{Z}$ влечет $\text{Pic}(W) = \mathbb{Z}^{1+k}$, а $\text{Pic}(Y) = \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ -факториальность многообразия Y влекут $\text{Pic}(W) = \mathbb{Z}^{1+l}$. Значит, $k = l$ и все числа $a(V_8, M_{V_8}, F_j)$ строго положительны. В частности, особенности лог-пары (V_8, M_{V_8}) терминальны.

Рассмотрим $\zeta \in \mathbb{Q}_{>1}$ такое, что особенности лог-пар $(V_8, \zeta M_{V_8})$ и $(Y, \zeta M_Y)$ терминальны. Дивизоры $K_{V_8} + \zeta M_{V_8}$ и $K_Y + \zeta M_Y$ обильны и лог-пары $(V_8, \zeta M_{V_8})$ и $(Y, \zeta M_Y)$ являются каноническими моделями. Значит, ρ бирегулярен по теореме 2.9.

Следующее утверждение эквивалентно теореме 4.1.

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть M_{V_8} — произвольная эффективная подвижная граница на многообразии V_8 такая, что дивизор $-(K_{V_8} + M_{V_8})$ обилен. Тогда $\text{CS}(V_8, M_{V_8}) = \emptyset$.*

Доказательство теоремы 4.3 будет приведено в следующих двух параграфах.

§ 5. Точки на многообразии V_8

Пусть V_8 — гладкое полное пересечение $F_2 \cap F_4 \subset \mathbb{P}^6$ такое, что V_8 не содержит двумерных линейных подпространств в $\mathbb{P}^6$, где F_2 и F_4 — квадратика и квартака соответственно. Пусть M_{V_8} — эффективная подвижная граница на V_8 , а дивизор $-(K_{V_8} + M_{V_8})$ обилен. В этом параграфе будет доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 5.1. *Множество $\mathbb{CS}(V_8, M_{V_8})$ не содержит точек на V_8 .*

Пусть $\mathbb{CS}(V_8, M_{V_8})$ содержит точку O на V_8 , H_{V_8} — гиперплоское сечение V_8 , проходящее через O , $B_{V_8} = H_{V_8} + M_{V_8}$, $f: W \rightarrow V_8$ — раздутие O , E — f -исключительный дивизор, $M_W = f^{-1}(M_{V_8})$, $H_W = f^{-1}(H_{V_8})$. Тогда $O \in \mathbb{LCS}(V_8, B_{V_8})$ по теореме 3.10,

$$K_W + M_W + H_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_{V_8} + M_{V_8} + H_{V_8}) + a(V_8, B_{V_8}, E)E,$$

где $a(V_8, B_{V_8}, E) = \text{mult}_O(M_{V_8}) - 2$.

ЛЕММА 5.2. *Выполнено неравенство $a(V_8, B_{V_8}, E) > -1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a(V_8, B_{V_8}, E) \leq -1$. Тогда $\text{mult}_O(M_{V_8}) \geq 3$. Следовательно, $\text{mult}_O(M_{V_8}^2) \geq 9$, но $\text{mult}_O(M_{V_8}^2) \leq H_1 \cdot H_2 \cdot M_{V_8}^2$, где H_1 и H_2 — достаточно общие гиперплоские сечения V_8 , содержащие точку O , а $H_1 \cdot H_2 \cdot M_{V_8}^2 < 8$.

Пусть $B^W = (\text{mult}_O(M_{V_8}) - 2)E + H_W + M_W$. Тогда лог-пара (W, B^W) является лог-поднятием лог-пары (V_8, B_{V_8}) и $K_W + B^W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X)$.

ЛЕММА 5.3. *Множество $\mathbb{LCS}(W, B^W)$ содержит собственное подмногообразие многообразия E , не содержащееся в многообразии H_W .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения

$$(\text{mult}_O(M_{V_8}) - 3)E + M_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_{V_8} + M_{V_8})$$

и леммы 5.2 следует существование собственного подмногообразия S дивизора E такого, что $S \in \mathbb{CS}(W, (\text{mult}_O(M_{V_8}) - 3)E + M_W)$ и $S \not\subset H_{V_8}$ в силу общности H_{V_8} , откуда следует, что множество $\mathbb{LCS}(W, (\text{mult}_O(M_{V_8}) - 2)E + M_W)$ содержит S .

Пусть S — элемент максимальной размерности в $\mathbb{LCS}(W, B^W)$ такой, что S является собственным подмногообразием дивизора E и $S \not\subset H_W$. Тогда S может быть точкой, кривой или поверхностью.

ЛЕММА 5.4. *Подмногообразие S не является поверхностью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что S — поверхность. Применим теорему 3.11 к общей точке поверхности S и лог-паре $(W, (\text{mult}_O(M_{V_8}) - 2)E + M_W)$ и получим неравенство $\text{mult}_S(M_W^2) \geq 4(3 - \text{mult}_O(M_{V_8}))$. Таким образом,

$$\text{mult}_O(M_{V_8}^2) \geq \text{mult}_O^2(M_{V_8}) + \text{mult}_S(M_W^2) \geq \text{mult}_O^2(M_{V_8}) + 4(3 - \text{mult}_O(M_{V_8}))$$

и $H_1 \cdot H_2 \cdot M_{V_8}^2 \geq \text{mult}_O(M_{V_8}^2) \geq (\text{mult}_O(M_{V_8}) - 2)^2 + 8$, где H_1 и H_2 — общие гиперплоские сечения многообразия V_8 , проходящие через O . С другой стороны, $H_1 \cdot H_2 \cdot M_{V_8}^2 < 8$.

Множество $\mathbb{LCS}(W, B^W)$ связно около E по теореме 3.9 и $H_W \in \mathbb{LCS}(W, B^W)$.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. *Подмногообразие S не может быть точкой.*

ЛЕММА 5.6. *Подмногообразие S — прямая в $E \cong \mathbb{P}^3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из связности $LCS(W, (\text{mult}_O(M_{V_8}) - 2)E + H_W + M_W)$ в окрестности E , общности в выборе гиперплоского сечения H_{V_8} и формулы присоединения следует, что множество $\mathbb{LCS}(H_W, (\text{mult}_O(M_{V_8}) - 2)E|_{H_W} + M_W|_{H_W})$ содержит только точки среди подмногообразий дивизора E . С другой стороны,

$$\{S \cap H_W\} \subset \mathbb{LCS}(H_W, (\text{mult}_O(M_X) - 2)E|_{H_W} + M_W|_{H_W})$$

и геометрическое место точек $LCS(H_W, (\text{mult}_O(M_{V_8}) - 2)E|_{H_W} + M_W|_{H_W})$ связно в окрестности исключительного дивизора $E|_{H_W}$ по теореме 3.9. Следовательно, пересечение $S \cap H_W$ состоит из одной точки.

Пусть Y — достаточно общее гиперплоское сечение многообразия V_8 , проходящее через точку O , такое, что $S \subset f^{-1}(Y)$. Положим $M_Y = M_{V_8}|_Y$.

ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ 5.7. Многообразие Y может быть особым.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.8. Точка O гладкая на Y и $O \in \mathbb{LCS}(Y, M_Y)$ по теореме 3.10, а эффективная граница M_Y подвижна, поскольку V_8 не содержит плоскостей в $\mathbb{P}^6$.

Пусть $g: V \rightarrow Y$ — раздутие точки O , $F = g^{-1}(O)$ и $M_V = g^{-1}(M_Y)$. Тогда кривая S содержится в F , $E|_V = F$, $\text{mult}_O(M_Y) = \text{mult}_O(M_{V_8})$ и $M_V = M_W|_V$, где многообразие V рассматривается как подмногообразие многообразия W . Рассмотрим границу $M^V = (\text{mult}_O(M_Y) - 2)F + M_V$ такую, что

$$K_V + M^V \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_Y + M_Y).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.9. Кривая S содержится в $\mathbb{LCS}(V, M^V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раздуем $h: U \rightarrow W$ кривую S , положим $G = h^{-1}(S)$ и

$$B^U = M_U + (\text{mult}_O(M_{V_8}) - 2)E_U + (\text{mult}_O(M_{V_8}) + \text{mult}_S(M_W) - 3)G + V_U,$$

где $M_U = h^{-1}(M_W)$, $E_U = h^{-1}(E)$ и $V_U = h^{-1}(V)$. Тогда

$$K_U + B^U \sim_{\mathbb{Q}} (f \circ h)^*(K_{V_8} + M_{V_8} + Y)$$

и из леммы 3.17 следует, что либо $G \in \mathbb{LCS}(U, B^U)$, либо существует такая поверхность $Z \subset G$, доминирующая кривую S , что $Z \in \mathbb{LCS}(U, B^U)$. Следовательно, по формуле присоединения $S \in \mathbb{LCS}(V, M^V)$.

Применим теорему 3.11 к лог-паре $(V, (\text{mult}_O(M_Y) - 2)F + M_V)$ и общей точке кривой $S \subset V$. Получим неравенство $\text{mult}_S(M_V^2) \geq 4(3 - \text{mult}_O(M_Y))$. Следовательно,

$$\text{mult}_O(M_Y^2) \geq \text{mult}_O(M_Y) + \text{mult}_S(M_V^2) \geq \text{mult}_O(M_Y) + 4(3 - \text{mult}_O(M_Y))$$

и $H_O \cdot M_Y^2 \geq \text{mult}_O(M_Y^2) \geq (\text{mult}_O(M_Y) - 2)^2 + 8$, где H_O — общее гиперплоское сечение многообразия Y , проходящее через O . С другой стороны, $H_O \cdot M_Y^2 < 8$, поскольку дивизор $-(K_{V_8} + M_{V_8})$ обилён. Теорема 5.1 доказана.

§6. Кривые и поверхности на многообразии V_8

Пусть V_8 – гладкое полное пересечение $F_2 \cap F_4 \subset \mathbb{P}^6$ такое, что V_8 не содержит двумерных линейных подпространств в $\mathbb{P}^6$, где F_2 и F_4 – квадрака и квартика соответственно. Рассмотрим эффективную подвижную границу M_{V_8} на V_8 такую, что дивизор $-(K_{V_8} + M_{V_8})$ обилен. В предыдущем параграфе было показано, что множество $\text{CS}(V_8, M_{V_8})$ не содержит точек. Необходимо показать, что $\text{CS}(V_8, M_{V_8}) = \emptyset$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Множество $\text{CS}(V_8, M_{V_8})$ не содержит поверхностей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{CS}(V_8, M_{V_8})$ содержит поверхность $S \subset V_8$. Тогда выполнено неравенство $\text{mult}_S(M_{V_8}) \geq 1$, что противоречит лемме 3.18.

Предположим, что $\text{CS}(V_8, M_{V_8})$ содержит кривую $C \subset V_8$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.2. *Кривая C является прямой в $\mathbb{P}^6$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что C не является прямой. Пусть L – прямая в $\mathbb{P}^6$, проходящая через две достаточно общие точки кривой C . Тогда $L \not\subset V_8$, поскольку в противном случае $L \subset M_{V_8}$ ввиду $\text{mult}_C(M_{V_8}) \geq 1$, что противоречит подвижности границы M_{V_8} , поскольку V_8 не содержит плоскостей. Значит, выполнено $8 > H_1 \cdot H_2 \cdot M_{V_8}^2 \geq 2 \text{mult}_C(M_{V_8}^4)$, где H_1 и H_2 – два общих гиперплоских сечения V_8 , проходящих через прямую L , но $\text{mult}_C(M_{V_8}^2) \geq 4$ по теореме 3.14.

ЛЕММА 6.3. *Выполнено неравенство $\text{mult}_C(V_8) \leq \frac{4}{3}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – пересечение двух общих гиперплоских сечений многообразия V_8 , проходящих через прямую C . Тогда S – гладкая поверхность, канонический дивизор K_S эквивалентен гиперплоскому сечению поверхности S и выполнено равенство $K_S^2 = 8$. Более того, $M_{V_8}|_S = M_S + \text{mult}_C(V_8)C$, где граница M_S подвижна и эффективна. Следовательно, $M_S^2 \geq 0$ на поверхности S . С другой стороны,

$$M_S^2 = (K_S - \text{mult}_C(V_8)C)^2 = 8 - 2 \text{mult}_C(V_8) - 3 \text{mult}_C^2(V_8),$$

поскольку $K_S \cdot C = 1$, а по формуле присоединения $C^2 = -3$. Откуда следует неравенство $\text{mult}_C(V_8) \leq \frac{4}{3}$.

Раздвем $f: V \rightarrow V_8$ прямую C , положим $E = f^{-1}(C)$ и $M_V = f^{-1}(M_{V_8})$. Рассмотрим общее гиперплоское сечение H_C многообразия V_8 , проходящее через прямую C , положим $B_{V_8} = M_{V_8} + H_C$ и $H_V = f^{-1}(H_C)$. Тогда

$$K_V + M_V + H_V \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_{V_8} + M_{V_8} + H_C) + a(V_8, B_{V_8}, E)E,$$

где $a(V_8, B_{V_8}, E) = \text{mult}_C(M_{V_8}) - 1$. Более того, $C \in \text{LCS}(V_8, B_{V_8})$ по теореме 3.10.

ЛЕММА 6.4. *Множество $\text{LCS}(V, M_V + H_V - a(V_8, B_{V_8}, E)E)$ содержит такую поверхность S , что слой морфизма $f|_S: S \rightarrow C$ над каждой точкой $P \in C$ является прямой в $f^{-1}(P) \cong \mathbb{P}^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H_P — общее гиперплоское сечение многообразия V_8 , проходящее через точку $P \in C$. Тогда выполняется $P \in \mathbb{LCS}(H_P, B_{V_8}|_{H_P})$ и $P \in \mathbb{CS}(H_P, M_{V_8}|_{H_P})$, а необходимое утверждение следует из леммы 3.15.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.5. *Выполнено неравенство $\text{mult}_S(M_V^2) \geq \frac{8}{3}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему 3.11 к $(V, M_V + H_V - a(V_8, B_{V_8}, E)E)$, получаем неравенство $\text{mult}_S(M_V^2) \geq 4(2 - \text{mult}_C(V_8))$, но $\text{mult}_C(V_8) \leq \frac{4}{3}$ по лемме 6.3.

Линейная система $|H_V|$ свободна, $H_V^4 = 3$ и $\varphi_{|H_V|}: V \rightarrow \mathbb{P}^4$ является морфизмом степени три, который не стягивает никакую поверхность в точку, поскольку V_8 не содержит плоскостей в $\mathbb{P}^6$. Возьмем общий дивизор $H \subset |H_V|$. Непосредственные вычисления показывают, что H пересекает кривую $H_V \cap S$ по крайней мере в двух различных точках. Таким образом, $H \cdot H_V \cdot M_V^2 \geq 2\frac{8}{3}$, но

$$H \cdot H_V \cdot M_V^2 = H_V^2 \cdot M_V^2 = (f^*(-K_{V_8}) - E)^2 \cdot (f^*(-\lambda K_{V_8}) - \text{mult}_C(M_{V_8})E)^2 < 3,$$

поскольку из $C \in \mathbb{CS}(V_8, M_{V_8})$ следует, что $\text{mult}_C(M_{V_8}) \geq 1$, где $\lambda \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ такое, что $M_{V_8} \sim_{\mathbb{Q}} -\lambda K_{V_8}$. Значит, мы доказали следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.6. *Множество $\mathbb{CS}(V_8, M_{V_8})$ не содержит кривых.*

Таким образом, теорема 4.3 доказана.

§ 7. Эллиптические расслоения

Пусть V_8 — гладкое полное пересечение $F_2 \cap F_4 \subset \mathbb{P}^6$, не содержащее двумерных линейных подпространств, где F_2 и F_4 — квадратика и кватрика соответственно. Предположим, что существует бирациональное отображение $\rho: V \dashrightarrow V_8$, где V обладает структурой расслоения на эллиптические кривые $\tau: V \rightarrow Z$. Рассмотрим очень обильный дивизор D_Z на Z , положим $\mathcal{D}_{V_8} = \rho(|\tau^*(D_Z)|)$ и рассмотрим подвижную границу $1/n\mathcal{D}_{V_8}$, где $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathcal{D}_{V_8} \sim -nK_{V_8} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(n)|_{V_8}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Особенности лог-пары $(V_8, 1/n\mathcal{D}_{V_8})$ каноничны по теореме 4.1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.2. *Справедливо следующее: $\mathbb{CS}(V_8, 1/n\mathcal{D}_{V_8}) \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что лог-пара $(V_8, 1/n\mathcal{D}_{V_8})$ терминальна. Тогда лог-пара $(V_8, (1 + \varepsilon)/n\mathcal{D}_{V_8})$ является канонической моделью некоторого $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$. С другой стороны, $\kappa(V_8, (1 + \varepsilon)/n\mathcal{D}_{V_8})$ не превышает размерности многообразия Z .

В оставшейся части данного параграфа будет показано, что $\mathbb{CS}(V_8, 1/n\mathcal{D}_{V_8}) \neq \emptyset$ противоречит тому, что размерность многообразия Z равна трем.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.3. *Множество $\mathbb{CS}(V_8, 1/n\mathcal{D}_{V_8})$ не содержит точек на V_8 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(V_8, 1/n\mathcal{D}_{V_8})$ содержит точку O многообразия V_8 . Пусть D – общий дивизор в $\mathcal{D}_{V_8}$, $f: W \rightarrow V_8$ – раздутие O , E – исключительный дивизор раздутия f , $\mathcal{D}_W = f^{-1}(\mathcal{D}_{V_8})$ и $D_W = f^{-1}(D)$. Из результатов, полученных в §5, следует, что $\text{mult}_O(D) = 2n$ и $\text{mult}_S(D_W) = 2n$ для некоторой поверхности $S \subset E$. Более того, из очень обильности дивизора $-K_{V_8}$ и эквивалентности $\mathcal{D}_{V_8} \sim -nK_{V_8}$ следует, что $\text{mult}_O(\mathcal{D}_{V_8}^2) \leq 8n^2$. С другой стороны,

$$\text{mult}_O(\mathcal{D}_{V_8}^2) \geq \text{mult}_O^2(\mathcal{D}_{V_8}) + \text{mult}_S(\mathcal{D}_W^2) \geq (4 + 4d)n^2,$$

где d – степень поверхности S в $E \cong \mathbb{P}^3$. Таким образом, поверхность S является плоскостью в $E \cong \mathbb{P}^3$, $\text{mult}_O(\mathcal{D}_{V_8}^2) = 8n^2$ и $\text{mult}_S(\mathcal{D}_W^2) = 4n^2$.

Пусть H и H' – общие гиперплоские сечения многообразия V_8 , проходящие через точку O , $Y = H \cap H'$, $g: V \rightarrow W$ – раздутие поверхности S , F – g -исключительный дивизор, $\mathcal{D}_V = g^{-1}(\mathcal{D}_W)$, $D_V = g^{-1}(D_W)$, $\tilde{Y} = (f \circ g)^{-1}(Y)$, $\tilde{H} = (f \circ g)^{-1}(H)$. Тогда ограничения $\mathcal{D}_V|_{\tilde{H}}$ и $\mathcal{D}_V|_{\tilde{Y}}$ не имеют неподвижных компонент и $(\mathcal{D}_V|_{\tilde{Y}})^2 = 0$. Более того, группы $H^0(rD_V - \tilde{H})$ и $H^0(rD_V|_{\tilde{H}} - \tilde{Y})$ пусты, поскольку для дивизора R в любой из этих групп кратность эффективного цикла $f(g(R))D$ степени $8r^2n^2$ в O будет больше чем $8r^2n^2$, где $r \in \mathbb{N}$ и поверхность $\tilde{Y}$ рассматривается как дивизор на многообразии $\tilde{H}$. Таким образом, имеется вложение $H^0(rD_V) \subset H^0(rD_V|_{\tilde{S}})$, но линейная система $|rD_V|_{\tilde{S}}$ составлена из свободного пучка, поскольку $\mathcal{D}_V|_{\tilde{Y}} \subset |D_V|_{\tilde{S}}$ и выполнено равенство $(rD_V|_{\tilde{S}})^2 = 0$. Таким образом, $h^0(rD_V)$ растёт линейно при $r \gg 0$ и линейная система $|rD_V|$ не имеет неподвижных компонент, потому что линейная система $|D_V|$ не имеет неподвижных компонент, поскольку $\mathcal{D}_V \subset |D_V|$. Следовательно, линейная система $|D_V|$ составлена из пучка. Значит, линейная система $|\tau^*(D_Z)|$ также составлена из пучка, что противоречит тому, что размерность многообразия Z равна трём.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.4. Множество $\mathbb{CS}(V_8, 1/n\mathcal{D}_{V_8})$ не содержит кривых на V_8 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим $\mathbb{CS}(V_8, 1/n\mathcal{D}_{V_8})$ содержит кривую $C \subset V_8$. Рассмотрим общий дивизор $D \subset \mathcal{D}_{V_8}$. Из результатов §6 и теоремы 3.14 следует, что C является коникой и $\text{mult}_C(D) = 2n$. Пусть H и H' – общие гиперплоские сечения V_8 , $Y = H \cap H'$, $f: V \rightarrow V_8$ – раздутие кривой C , E – исключительный дивизор раздутия f , $\mathcal{D}_V = f^{-1}(\mathcal{D}_{V_8})$, $D_V = f^{-1}(D)$, $\tilde{Y} = f^{-1}(Y)$ и $\tilde{H} = f^{-1}(H)$. Тогда ограничения $\mathcal{D}_V|_{\tilde{H}}$ и $\mathcal{D}_V|_{\tilde{Y}}$ не имеют неподвижных компонент, поскольку гиперплоские сечения H и H' достаточно общие, а многообразие V_8 не содержит прямой, проходящей через две достаточно общие точки коники C . Более того, $(\mathcal{D}_V|_{\tilde{Y}})^2 = 0$ на поверхности $\tilde{Y}$. Из аргументов доказательства утверждения 7.3 следует, что линейные системы $|D_V|$, $\mathcal{D}_{V_8}$ и $|\tau^*(D_Z)|$ составлены из пучков, что невозможно, поскольку размерность многообразия Z равна трём.

Можно считать, что множество $\mathbb{CS}(V_8, 1/n\mathcal{D}_{V_8})$ содержит поверхность $S \subset V_8$ такую, что $\text{mult}_S(\mathcal{D}_{V_8}) = n$. Более того, степень поверхности S больше либо равна двум, поскольку многообразие V_8 не содержит плоскостей.

ЛЕММА 7.5. Поверхность S содержится в некотором четырёхмерном линейном подпространстве в $\mathbb{P}^6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим общий конус $C_S \subset \mathbb{P}^6$ над поверхностью S с вершиной в точке $P \in \mathbb{P}^6$. Тогда $C_S \cap V_8 = S \cup R_S$ для неприводимой кривой R_S на многообразии V_8 , где последнее равенство выполнено в теоретико-схемном смысле в силу общности конуса C_S . При доказательстве леммы 3.18 было показано, что пересечение $R_S \cap S$ состоит из d_R различных точек, где d_R – степень кривой R_S в $\mathbb{P}^6$. Таким образом, любой дивизор D в линейной системе $\mathcal{D}_{V_8}$ либо пересекает кривую R_S только в точках пересечения $R_S \cap S$, либо содержит кривую R_S , поскольку $D \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(n)|_{V_8}$.

Пусть Π – плоскость в $\mathbb{P}^6$, проходящая через две общие точки P_1 и P_2 на поверхности S и через общую точку P_D на дивизоре D в $\mathcal{D}_{V_8}$. Тогда Π содержит еще некоторую точку $P_{V_8} \in V_8$ такую, что $P_{V_8} \notin S$ и $P_{V_8} \neq P_D$. Предположим, что дивизор D достаточно общий. Тогда в приведенной конструкции кривой R_S можно считать, что точка P является пересечением прямой L_1 , проходящей через точку P_1 и точку P_D , и прямой L_2 , проходящей через P_2 и P_{V_8} . Таким образом, $P_D \in R_S$ и $P_{V_8} \in R_S$. Следовательно, $R_S \subset D$. В частности, $P_{V_8} \in D$. Значит, для плоскости Π , проходящей через две общие точки P_1 и P_2 на поверхности S и одну общую точку P_D на D , другие точки пересечения $V_8 \cap \Pi$ также содержатся в дивизоре D . Последнее условие замкнутое по отношению к P_D и можно считать, что $P_D \in S \subset D$.

Таким образом, для общего дивизора D в $\mathcal{D}_{V_8}$ и двумерного линейного подпространства $\Pi \subset \mathbb{P}^6$, проходящего через три общие точки на S , пересечение $\Pi \cap V_8$ содержится в дивизоре D . Более того, можно выбрать другой достаточно общий дивизор D' в линейной системе $\mathcal{D}_{V_8}$ и получить $\Pi \cap V_8 \subset D'$. С другой стороны, $D \cap D'$ является поверхностью. Следовательно, каждая плоскость Π , проходящая через три общие точки поверхности S , пересекает некоторую поверхность $\tilde{S} \in \mathbb{P}^6$, которая содержит поверхность S в качестве неприводимой компоненты, по крайней мере еще в одной точке. Последнее возможно только в случае, когда S содержится в некотором четырехмерном линейном подпространстве в $\mathbb{P}^6$.

Пусть Π – четырехмерное линейное подпространство в $\mathbb{P}^6$ такое, что $S \subset \Pi$.

ЛЕММА 7.6. *Теоретико-схемное пересечение $\Pi \cap V_8$ приведено.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H_1 и H_2 – два общих гиперплоских сечения V_8 , проходящих через $\Pi \cap V_8$, а H – общее гиперплоское сечение V_8 . Тогда H_1 имеет только изолированные особенности по теореме Ф. Л. Зака (см. [23]). Значит, $Y = H \cap H_1$ гладкое и теоретико-схемное пересечение $C = Y \cap H_2 = \Pi \cap V_8 \cap H$ имеет только изолированные особенности и приведено вновь по теореме Ф. Л. Зака. Следовательно, пересечение $\Pi \cap V_8$ также приведено.

ЛЕММА 7.7. *Допустим, что поверхность S является квадрикой, а T_3 – трехмерное линейное подпространство в $\mathbb{P}^6$ такое, что $S \subset T_3$. Тогда $S \neq V_8 \cap T_3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $S = V_8 \cap T_3$. Пусть $\psi: V_8 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – проекция из подпространства T_3 . Тогда общий слой рационального отображения ψ является пересечением квадрики и кубики в $\mathbb{P}^4$. Пусть $f: W \rightarrow V_8$ – разрешение неопределенностей отображения ψ и $\mathcal{D}_W = f^{-1}(\mathcal{D}_{V_8})$ такое, что многообразие V гладкое, существует ровно один f -исключительный дивизор E , доминирующий S ,

f является изоморфизмом вне S . Тогда из равенства $\text{mult}_S(\mathcal{D}_{V_8}) = n$ следует, что линейная система $\mathcal{D}_W$ лежит в слоях $\tau = \psi \circ f$, что невозможно, так как размерность Z равна трем.

Пусть $\Pi \cap V_8 = \bigcup_{i=0}^r S_i$, где поверхности S_i неприводимы и приведены и $S_0 = S$.

ЛЕММА 7.8. Пусть $S \subset T_3$, где T_3 – трехмерное линейное подпространство в $\mathbb{P}^6$ такое, что $T_3 \subset F_2$. Тогда $\mathbb{CS}(V_8, 1/n\mathcal{D}_{V_8})$ содержит все компоненты $T_3 \cap V_8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H \subset \mathbb{P}^6$ – общая гиперплоскость, $Y \subset V_8$ – гиперплоское сечение, содержащее пересечение $T_3 \cap V_8$, $X = Y \cap H$, D – общий дивизор в линейной системе $\mathcal{D}_{V_8}$, $D_X = D|_X$ и $T_2 = T_3 \cap H$. Тогда X является гладким полным пересечением $G_2 \cap G_4 \subset \mathbb{P}^4$, где G_2 и G_4 – квадрака и кватрика соответственно, $T_2 \subset G_2$,

$$T_2 \cap X = C + \sum_{i \in I} C_i,$$

здесь $C = S \cap X$, $C_i = S_i \cap X$ для $I \subset \{1, \dots, r\}$, $(\sum_{i \in I} C_i) \cdot C_j = d_{C_j} - C \cdot C_j$ для $j \in I$ на X и $\text{mult}_C(D_X) = n$, а d_{C_j} – степень кривой C_j в $\mathbb{P}^6$. Однако пересечение $C \cdot C_j$ может быть вычислено на T_2 , откуда следует $C \cdot C_j > d_{C_j}$. Значит, $(\sum_{i \in I} C_i) \cdot C_j < 0$ для $j \in I$ и, как следует из работы [23], форма пересечения кривых $\{C_i\}_{i \in I}$ на поверхности X отрицательно определена. С другой стороны, эффeктивный дивизор

$$D_X - nC - \sum_{i \in I} \text{mult}_{C_i}(D_X)C_i \sim \sum_{i \in I} (n - \text{mult}_{C_i}(D_X))C_i$$

численно эффeктивен на X , откуда $\text{mult}_{S_i}(\mathcal{D}_{V_8}) = n$ для $i \in I$. Значит, все компоненты пересечения $T_3 \cap V_8$ содержатся в $\mathbb{CS}(V_8, 1/n\mathcal{D}_{V_8})$.

ЛЕММА 7.9. Поверхность S не содержится ни в каком трехмерном линейном подпространстве $T_3 \subset F_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что поверхность S содержится в таком трехмерном линейном подпространстве $T_3 \subset \mathbb{P}^6$, что $T_3 \subset F_2$. Тогда квадрака F_2 особа, а множество $\mathbb{CS}(V_8, 1/n\mathcal{D}_{V_8})$ содержит все компоненты $T_3 \cap V_8$ по лемме 7.8. Рассмотрим проекцию $\pi: V_8 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ из T_3 , чей общий слой является кватрикой в $\mathbb{P}^3$. Разрешим неопределенности $\psi: V \rightarrow V_8$ отображения π и положим $\mathcal{D}_V = \psi^{-1}(\mathcal{D}_{V_8})$. Можно считать, что многообразие V гладкое, существует ровно один ψ -исключительный дивизор E_j над общей точкой каждой неприводимой компоненты S_j пересечения $T_3 \cap V_8$, морфизм ψ является изоморфизмом вне $T_3 \cap V_8$. Тогда линейная система $\mathcal{D}_V$ лежит в слоях расслоения $\pi \circ \psi$, поскольку кратность линейной системы $\mathcal{D}_{V_8}$ в каждой неприводимой компоненте пересечения $T_3 \cap V_8$ равна n . С другой стороны, линейная система $\mathcal{D}_{V_8}$ является бирациональным образом полной линейной системы $|\tau^*(D_Z)|$, где D_Z – очень обильный дивизор на трехмерном многообразии Z . Последнее является противоречием.

Итак, степень поверхности S не меньше чем три и S не содержится ни в каком трехмерном линейном подпространстве $T_3 \subset \mathbb{P}^6$ таком, что $T_3 \subset F_2$.

ЛЕММА 7.10. Множество $\mathbb{CS}(V_8, 1/n\mathcal{D}_{V_8})$ содержит все неприводимые компоненты $\Pi \cap V_8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Y – гиперплоское сечение многообразия V_8 , которое содержит $\Pi \cap V_8$, X – общее гиперплоское сечение многообразия Y , D – общий дивизор в линейной системе $\mathcal{D}_{V_8}$ и $D_X = D|_X$. Тогда многообразие X является гладким полным пересечением $G_2 \cap G_4 \subset \mathbb{P}^4$, где G_2 и G_4 – квадрака и квартика соответственно, а эффективный дивизор

$$\Pi \cap X = C + \sum_{i=1}^r C_i$$

приведен на X , где $C = S \cap X$ и $C_i = S_i \cap X$. Выполнено равенство $\text{mult}_C(D_X) = n$ и $(\sum_{i=1}^r C_i) \cdot C_j = d_{C_j} - C \cdot C_j$ на X , где d_{C_j} – степень кривой C_j . С другой стороны, пересечение $C \cdot C_j$ может быть посчитано на $Q_2 = G_2 \cap \Pi$, поскольку Q_2 может иметь лишь одну особую точку в силу общности поверхности X и в силу предположения, что поверхность S не содержится ни в каком трехмерном линейном подпространстве, лежащем на квадраке F_2 . Более того, в случае, когда Q_2 является квадратичным конусом, кривая C не проходит через его вершину, поскольку кривая C неприводима и имеет степень не меньше трех. Таким образом, квадрака Q_2 гладкая в точках пересечения $C \cap C_j$ и $C \cdot C_j > d_{C_j}$ на поверхности Q_2 . Значит, $(\sum_{i=1}^r C_i) \cdot C_j < 0$ и форма пересечения кривых $\{C_i\}_{i=1, \dots, r}$ отрицательно определена по [24]. Однако

$$D_X - nC - \sum_{i=1}^r \text{mult}_{C_i}(D_X)C_i \sim \sum_{i=1}^r (n - \text{mult}_{C_i}(D_X))C_i$$

численно эффективен на поверхности X , откуда следует $\text{mult}_{C_i}(D_X) = n$. Следовательно, $\text{mult}_{S_i}(\mathcal{D}_{V_8}) = n$. В частности, множество $\mathbb{CS}(V_8, 1/n\mathcal{D}_{V_8})$ содержит все неприводимые компоненты пересечения $\Pi \cap V_8$.

Рассмотрим проекцию $\pi: V_8 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ из пространства Π и разрешим неопределенности $\psi: V \rightarrow V_8$ рационального отображения π так, что многообразие V гладкое, над общей точкой каждой компоненты S_j пересечения $\Pi \cap V_8$ лежит ровно один ψ -исключительный дивизор E_j , ψ является изоморфизмом вне пересечения $\Pi \cap V_8$. Пусть D – общий слой расслоения $\pi \circ \psi$. Тогда имеет место эквивалентность

$$D \sim \psi^*(-K_{V_8}) - \sum_{j=0}^r E_j - \sum_{i=1}^k a_i F_i,$$

где $a_i \in \mathbb{N}$ и коразмерность образа $\psi(F_i)$ больше чем два. С другой стороны, выполнено соотношение $\psi^{-1}(\mathcal{D}_{V_8})|_D \sim \sum_{i=1}^k c_i F_i|_D$ для $c_i \in \mathbb{Z}$, откуда следует, что линейная система $\mathcal{D}_{V_8}$ лежит в слоях расслоения $\pi \circ \psi$, что невозможно, поскольку размерность многообразия Z равна трем. Таким образом, теорема 1.7 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.11. Неявно было доказано, что каждая бирациональная перестройка многообразия V_8 в расслоения на поверхности размерности Кодаиры нуль может быть получена путем проекции из трехмерного линейного подпространства $T_3 \subset \mathbb{P}^6$ такого, что либо $T_3 \cap V_8$ является квадракой, либо $T_3 \subset F_2$ и квадрака F_2 особа.

Список литературы

1. *Pukhlikov A. V.* Birationally rigid Fano complete intersections // J. Reine Angew. Math. 2001. V. 541. P. 55–79.
2. *Исковских В. А., Манин Ю. И.* Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86 (128). № 1. С. 140–166.
3. *Pukhlikov A. V.* Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // Invent. Math. 1998. V. 134. P. 401–426.
4. *Pukhlikov A. V.* Birational automorphisms of four-dimensional quintic // Invent. Math. 1987. V. 87. P. 303–329.
5. *Чельцов И. А.* О гладкой четырехмерной квинтике // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 139–162.
6. *Пухликов А. В.* Бирационально жесткие гиперповерхности Фано // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 6. С. 159–186.
7. *Ein L., de Fernex T., Mustata M.* Bounds for log canonical thresholds with applications to birational rigidity // Math. Res. Lett. 2003. V. 10. № 2–3. P. 219–236.
8. *Bogomolov F., Tschinkel Yu.* On the density of rational points on elliptic fibrations // J. Reine Angew. Math. 1999. V. 511. P. 87–93.
9. *Harris J., Tschinkel Yu.* Rational points on quartics // Duke Math. J. 2000. V. 104. P. 477–500.
10. *Cheltsov I.* Log pairs on birationally rigid varieties // J. Math. Sci. (New York). 2000. V. 102. P. 3843–3875.
11. *Чельцов И. А.* Лог пары на гиперповерхностях степени N в $\mathbb{P}^N$ // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 1. С. 113–119.
12. *Чельцов И. А.* Многообразие Фано с единственной эллиптической структурой // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 5. С. 785–156.
13. *Чельцов И. А.* Антиканоические модели трехмерных многообразий Фано степени четыре // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 4. С. 147–172.
14. *Ryder D.* Elliptic and K3 fibrations birational to Fano 3-fold weighted hypersurfaces // Thesis. Warwick: Univ. Warwick, 2002.
15. *Alexeev V.* General elephants of $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds // Compositio Math. 1994. V. 91. P. 91–116.
16. *Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K.* Introduction to the minimal model problem // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
17. Kollár J. et al (ed.) Flips and abundance for algebraic threefolds. A summer seminar at the Utah, Salt Lake City, 1991 // Astérisque. 1992. V. 211.
18. *Corti A.* Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry // Explicit birational geometry of 3-folds / ed. A. Corti et al. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 259–312. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 281.)
19. *Pukhlikov A.* Essentials of the method of maximal singularities // Explicit birational geometry of 3-folds / ed. A. Corti et al. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 73–100. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 281.)
20. *Reid M.* Chapters on algebraic surfaces // Complex algebraic geometry / ed. J. Kollár. Lecture of a summer program, Park City, Utah, 1993. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. P. 5–159.
21. *Пухликов А. В.* Замечание о теореме В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерной квартирке // Труды МИАН. 1995. Т. 208. С. 278–289.
22. *Corti A.* Factorizing birational maps of threefolds after Sarkisov // J. Algebraic Geom. 1995. V. 4. P. 223–254.
23. *Ishii Sh.* A characterization of hyperplane cuts of a smooth complete intersection // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 1982. V. 58. P. 309–311.
24. *Artin M.* On isolated rational singularities of surfaces // Amer. J. Math. 1966. V. 88. P. 129–136.