Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Жукова, Глобальные аттракторы полных конформных слоений, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 3, 79–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7821>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:04:04

УДК 514.77

Н. И. Жукова

Глобальные аттракторы полных конформных слоений

Доказано, что любое полное конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ коразмерности $q \geq 3$ является либо римановым, либо $(\text{Conf}(S^q), S^q)$ -слоением. Если $(M, \mathcal{F})$ не является римановым слоением, то оно имеет глобальный аттрактор, представляющий собой либо нетривиальное минимальное множество, либо один замкнутый слой или объединение двух замкнутых слоев. При этом компактность многообразия M не предполагается. В частности, каждое собственное полное конформное не риманово слоение $(M, \mathcal{F})$ имеет глобальный аттрактор, являющийся либо замкнутым слоем, либо объединением двух замкнутых слоев, а пространство всех незамкнутых слоев образует связный q -мерный орбифолд. Показано, что любая счетная группа конформных преобразований сферы S^q реализуется в качестве глобальной группы голономии некоторого полного конформного слоения. Построены примеры полных конформных слоений с глобальными аттракторами, являющимися исключительными и экзотическими минимальными множествами.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: конформное слоение, глобальная группа голономии, минимальное множество, глобальный аттрактор.

§ 1. Введение. Основные результаты

Пусть $(M, \mathcal{F})$ – произвольное гладкое слоение коразмерности $q \geq 1$. Напомним, что подмножество многообразия M называется насыщенным, если оно является объединением некоторых слоев слоения $(M, \mathcal{F})$.

Непустое замкнутое насыщенное подмножество $\mathcal{M}$ слоения $(M, \mathcal{F})$, для которого существует такая открытая насыщенная окрестность $\mathcal{U}$, что замыкание произвольного слоя из $\mathcal{U}$ содержит множество $\mathcal{M}$, называется *аттрактором* этого слоения, а окрестность $\mathcal{U}$ называется бассейном аттрактора $\mathcal{M}$ и обозначается через $\text{Attr}(\mathcal{M})$. Если, более того, $\text{Attr}(\mathcal{M}) = M$, то аттрактор $\mathcal{M}$ называется *глобальным*.

Минимальным множеством слоения $(M, \mathcal{F})$ называется непустое замкнутое насыщенное подмножество в M , не имеющее собственных подмножеств, обладающих этими свойствами. Непустое замкнутое насыщенное подмножество $\mathcal{M}$ в M является минимальным тогда и только тогда, когда каждый слой из $\mathcal{M}$ всюду плотен в $\mathcal{M}$.

Минимальное множество $\mathcal{M}$ называется *регулярным*, если $\mathcal{M}$ – подмногообразие в M . Пусть $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ – не более чем счетное локально конечное

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00457-а).

открытое покрытие многообразия M расслоенными координатными окрестностями, T_i – подмногообразие в U_i , трансверсально пересекающее каждый слой слоения $(U_i, \mathcal{F}_{U_i})$ и $T = \bigcup T_i$, $i \in \mathbb{N}$, – полная трансверсаль. Минимальное множество $\mathcal{M}$, не имеющее внутренних точек, называется:

- *исключительным*, если пересечение $\mathcal{M} \cap T$ есть канторово множество;
- *экзотическим*, если $\mathcal{M} \cap T$ не является вполне несвязным топологическим пространством.

Аналогично определяются аттракторы и минимальные множества групп гомеоморфизмов (§ 6).

Слой L слоения $(M, \mathcal{F})$ называется собственным, если L – вложенное подмногообразие в M . Слоение $(M, \mathcal{F})$ называется собственным, если все его слои собственные. Слой L называется замкнутым, если L – замкнутое подмножество M . Как известно, любой замкнутый слой слоения является собственным; обратное, вообще говоря, неверно.

В настоящее время среди слоений, допускающих трансверсальные геометрические структуры, наиболее изученными являются римановы слоения.

Молино (см. [1]) создал теорию римановых слоений на компактных многообразиях. Им доказано, что замыкание любого слоя такого слоения образует минимальное множество и представляет собой компактное подмногообразие. При этом Молино существенно использовал конструкцию слоеного расслоения над исходным римановым слоением.

Аналогичные результаты получены Салем (см. [2]) для римановых слоений на многообразиях с полной трансверсально проектируемой римановой метрикой. Салем применила метод псевдогрупп голономии, образованных локальными изометриями, вообще говоря, несвязного трансверсального многообразия.

Указанные результаты Молино и Салем обобщены автором (см. [3]) на полные картановы слоения произвольной коразмерности (определения которых даны в п. 4.3) с трансверсальной картановой геометрией типа $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ – подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$, компактно вложенная в $\mathfrak{g}$. При этом существенно использована конструкция слоеного расслоения, индуцированное слоение которого является ϵ -слоением и называется поднятым слоением.

Напомним, что картаново слоение $(M, \mathcal{F})$ называется полным (см. [3]), если существует такое трансверсальное распределение $\mathfrak{M}$ на M , что поднятое ϵ -слоение является $\mathfrak{N}$ -полным в смысле Конлона (см. [4]), где $\mathfrak{N}$ – распределение, трансверсальное поднятому слоению и проектируемое в $\mathfrak{M}$. Как доказано автором (см. [3; предложение 3]), для $\mathfrak{M}$ -полного картанова слоения распределение $\mathfrak{M}$ является связностью Эресмана в смысле Блюменталья и Хебды (см. определение в п. 2.3). Заметим, что римановы слоения, исследованные Молино и Салем, являются полными.

Конформные слоения $(M, \mathcal{F})$ введены Вайсманом (см. [5]) как слоения коразмерности $q \geq 3$, допускающие трансверсальную конформную структуру (точное определение приведено в п. 2.2). Подчеркнем, что римановы слоения образуют подкласс конформных слоений. Конформные слоения рассматриваются нами как картановы с нормальной конформной связностью. Конформное слоение называется полным, если оно является полным картановым слоением (определение дано в п. 5.1).

Цель настоящей работы – доказать существование глобальных аттракторов для полных конформных слоений, не являющихся римановыми, и описать строение таких слоений. Сначала, применяя результаты Салем [2], мы докажем теорему 1, согласно которой римановы слоения со связностью Эресмана обладают свойствами полных римановых слоений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – риманово слоение, допускающее связность Эресмана. Тогда замыкание $\bar{L}$ каждого слоя L представляет собой гладкое вложенное подмногообразие в M , являющееся минимальным множеством этого слоения. Замыкания слоев слоения $(M, \mathcal{F})$ образуют риманово слоение с особенностями.

В частности, если $(M, \mathcal{F})$ – собственное слоение, то все его слои замкнуты, а пространство его слоев – гладкий q -мерный орбифолд.

В § 3 мы напомним определения (G, N) -слоения, (G, N) -многообразия и изучим (G, N) -слоения со связностями Эресмана. Докажем следующую теорему, играющую ключевую роль в исследовании строения полных конформных слоений. (Везде далее будем говорить о накрывающих отображениях пространств с отмеченными точками, хотя это не указывается явно.)

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – (G, N) -слоение, допускающее связность Эресмана. Тогда:

- 1) существует такое регулярное накрывающее отображение $f: \widehat{M} \rightarrow M$, что индуцированное слоение $\widehat{\mathcal{F}}$ на $\widehat{M}$ образовано слоями локально тривиального расслоения $r: \widehat{M} \rightarrow B$ над односвязным (G, N) -многообразием B ;
- 2) на (G, N) -многообразии B индуцированы группа автоморфизмов Ψ и эпиморфизм

$$\chi: \pi_1(M, x) \rightarrow \Psi$$

фундаментальной группы $\pi_1(M, x)$, $x \in M$, на Ψ , причем группа накрывающих преобразований накрытия $\widehat{M}$ изоморфна группе Ψ ;

- 3) для любых точек $y \in M$ и $z \in f^{-1}(y)$ сужение $f|_{\widehat{L}}: \widehat{L} \rightarrow L$ на слой $\widehat{L} := \widehat{L}(z)$ слоения $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$ является регулярным накрывающим отображением на слой $L := L(y)$ слоения $(M, \mathcal{F})$ с группой накрывающих преобразований, изоморфной стационарной подгруппе Ψ_b в точке $b := r(z) \in B$ группы Ψ . Более того, подгруппа Ψ_b изоморфна группе голономии $\Gamma(L, y)$ слоя L .

Группа $\Psi = \Psi(M, \mathcal{F})$, удовлетворяющая теореме 2, называется глобальной группой голономии (G, N) -слоения $(M, \mathcal{F})$, допускающего связность Эресмана.

Как известно (см., например, [6]), группа Ли $\text{Conf}(S^q)$ всех конформных преобразований q -мерной сферы S^q изоморфна мёбиусовой группе $\text{Mob}(q)$. Обозначим через $\mathbb{E}^q$ q -мерное евклидово пространство. Группа Ли $\text{Sim}(\mathbb{E}^q)$ всех подобий равна группе конформных преобразований $\text{Conf}(\mathbb{E}^q)$ пространства $\mathbb{E}^q$ и представляет собой полупрямое произведение $CO(q) \ltimes \mathbb{R}^q$ конформной группы $CO(q) = \mathbb{R}^+ \cdot O(q)$ и абелевой нормальной подгруппы $\mathbb{R}^q$. Мы покажем, что группа голономии произвольного слоя конформного слоения изоморфна некоторой подгруппе группы Ли $H = CO(q) \ltimes \mathbb{R}^q$, причем эта подгруппа определена с точностью до сопряженности (предложение 5). Поэтому корректно следующее определение. Группа голономии слоя конформного слоения называется

нами *несущественной*, если соответствующая ей подгруппа в группе Ли H относительно компактна. В противном случае группа голономии слоя называется *существенной*.

Докажем следующий критерий римановости конформного слоения без предположения его полноты.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – конформное слоение коразмерности $q \geq 3$, моделируемое на конформной геометрии $(N, [g])$. Тогда для существования римановой метрики $d \in [g]$ такой, что $(M, \mathcal{F})$ – риманово слоение, моделируемое на (N, d) , необходимо и достаточно, чтобы все группы голономии этого слоения были несущественными.

Применяя теоремы 2 и 3 и некоторые результаты Алексеевского (см. [7]) и Ферран (см. [8]), мы докажем, что любое полное конформное слоение, не являющееся римановым, есть $(\text{Conf}(S^q), S^q)$ -слоение, причем полнота нериманова конформного слоения эквивалентна существованию связности Эресмана (теорема 4), а затем опишем строение таких слоений (теоремы 5 и 6). Подчеркнем, что при этом компактность слоеного многообразия не предполагается.

ТЕОРЕМА 4. Для любого не риманова конформного слоения $(M, \mathcal{F})$ коразмерности $q \geq 3$ следующие два условия эквивалентны:

- (i) существует связность Эресмана для $(M, \mathcal{F})$;
- (ii) конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ является полным.

Трансверсально подобным называется произвольное $(\text{Sim}(\mathbb{E}^q), \mathbb{E}^q)$ -слоение. Мы доказали (см. [3; теорема 7]), что любое полное трансверсально подобное слоение коразмерности $q \geq 1$, не являющееся римановым, имеет глобальный аттрактор, а также указали достаточное условие для регулярности этого аттрактора (см. [3; теорема 9]).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – полное конформное слоение коразмерности $q \geq 3$. Тогда выполняется одно из следующих трех утверждений:

- 1) $(M, \mathcal{F})$ – полное риманово слоение и замыкание каждого слоя образует минимальное множество;
- 2) $(M, \mathcal{F})$ – полное трансверсально подобное слоение с глобальным аттрактором $\mathcal{M}$, являющимся минимальным множеством, содержащим все слои с существенными группами голономии;
- 3) $(M, \mathcal{F})$ накрыто расслоением $r: \widehat{M} \rightarrow S^q$, где $f: \widehat{M} \rightarrow M$ – некоторое регулярное накрытие, и определена глобальная группа голономии $\Psi = \Psi(M, \mathcal{F})$ – подгруппа группы Ли $\text{Conf}(S^q)$; кроме того, в этом случае выполняется одно из следующих двух утверждений:

- (i) слоение $(M, \mathcal{F})$ имеет глобальный аттрактор $\mathcal{M}$, представляющий собой или замкнутый слой, или объединение двух замкнутых слоев;
- (ii) существует глобальный аттрактор $\mathcal{M}$ слоения $(M, \mathcal{F})$, совпадающий с замыканием любого слоя с существенной группой голономии и являющийся нетривиальным минимальным множеством, причем $\mathcal{M} = f(r^{-1}(\Lambda(\Psi)))$, где $\Lambda(\Psi)$ – минимальное множество глобальной группы голономии Ψ .

В случаях 2) и 3) индуцированное слоение $(M_0, \mathcal{F}_{M_0})$ на дополнении $M_0 := M \setminus \mathcal{M}$ является римановым слоением со связностью Эресмана, замыкание слоев которого в M_0 образует риманово слоение с особенностями, причем замыкание $\bar{L}$ в M любого слоя $L \in \mathcal{F}$ из M_0 равно $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$, где $\mathcal{L}$ – вложенное подмногообразие в M , совпадающее с замыканием слоя L в M_0 .

СЛЕДСТВИЕ 1. У произвольного полного конформного слоения коразмерности $q \geq 3$ существует минимальное множество.

СЛЕДСТВИЕ 2. Любое полное конформное слоение коразмерности $q \geq 3$ является либо римановым, либо $(\text{Conf}(S^q), S^q)$ -слоением.

Согласно теореме 5 трансверсальное строение глобальных аттракторов полных конформных слоений полностью определяется строением глобальных аттракторов глобальных групп голономии этих слоений. В частности, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 3. Полное конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ имеет глобальный аттрактор, являющийся исключительным (или экзотическим) минимальным множеством тогда и только тогда, когда его глобальная группа голономии Ψ имеет глобальный аттрактор, являющийся исключительным (соответственно экзотическим) минимальным множеством.

В качестве приложения теорем 1 и 5 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. Любое полное собственное конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ коразмерности $q \geq 3$ имеет строение одного из следующих трех типов:

- 1) полное риманово слоение, каждый слой которого замкнут, а пространство слоев – гладкий q -мерный орбифолд;
- 2) полное трансверсально подобное нериманово слоение, имеющее единственный замкнутый слой, представляющий собой глобальный аттрактор;
- 3) полное (Ψ, S^q) -слоение, накрытое расслоением $r: \widehat{M} \rightarrow S^q$, где Ψ – элементарная дискретная подгруппа конформной группы $\text{Conf}(S^q)$. Существует глобальный аттрактор, являющийся либо замкнутым слоем, либо объединением двух замкнутых слоев.

Более того, в случаях 2) и 3) объединение M_0 незамкнутых слоев представляет собой открытое связное всюду плотное подмногообразие, причем $(M_0, \mathcal{F}_{M_0})$ – риманово слоение со связностью Эресмана, пространство слоев которого есть гладкий q -мерный орбифолд, а замыкание $\bar{L}_\alpha$ в M произвольного слоя L_α из M_0 равно $L_\alpha \cup \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ – глобальный аттрактор.

СЛЕДСТВИЕ 4. Каждое полное собственное нериманово конформное слоение коразмерности $q \geq 3$ имеет один или два замкнутых слоя.

Следующая теорема о реализации доказана нами конструктивным путем.

ТЕОРЕМА 7. Любая счетная подгруппа Ψ группы $\text{Conf}(S^q)$, где $q \geq 3$, реализуется в качестве глобальной группы голономии некоторого двумерного конформного слоения $(M, \mathcal{F})$ коразмерности q . Если группа Ψ имеет конечное число образующих, то такое слоение $(M, \mathcal{F})$ существует на замкнутом многообразии M размерности $q + 2$.

В § 7 будут построены примеры полных конформных слоений, глобальные аттракторы которых являются исключительными и экзотическими минимальными множествами.

Будем обозначать через $\mathfrak{X}(M)$ модуль векторных полей на многообразии M . Если $\mathfrak{M}$ – гладкое распределение на M , то через $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ обозначается множество векторных полей из $\mathfrak{X}(M)$, касательных к $\mathfrak{M}$. Пусть $f: \widetilde{M} \rightarrow M$ – субмерсия. Тогда индуцированное распределение $\widetilde{\mathfrak{M}}$, образованное подпространствами $\widetilde{\mathfrak{M}}_y := \{Y \in T_y(\widetilde{M}) \mid f_{*y}(Y) \in \mathfrak{M}_{f(y)}\}$, обозначается через $f^*\mathfrak{M}$. Аналогичное обозначение используется и для слоений.

Следуя [9], через $P(M, H)$ обозначается главное H -расслоение с базой M и пространством расслоения P .

В настоящей работе рассматриваются только открытые окрестности.

§ 2. Минимальные множества римановых слоений со связностями Эресмана

2.1. Задание слоения N -коциклом. Предположим, что заданы:

- 1) n -мерное многообразие M и, возможно, несвязное q -мерное многообразие N , где $q < n$;
- 2) открытое покрытие $\{U_i \mid i \in J\}$ многообразия M ;
- 3) субмерсии со связными слоями $f_i: U_i \rightarrow V_i$ на $V_i \subset N$;
- 4) если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то существует такой диффеоморфизм

$$\gamma_{ij}: f_j(U_i \cap U_j) \rightarrow f_i(U_i \cap U_j)$$

открытых подмножеств многообразия N , что $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ на $U_i \cap U_j$.

Из 4) следует, что при $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ выполняется равенство $\gamma_{ik} = \gamma_{ij} \circ \gamma_{jk}$ и, кроме того, $\gamma_{ii} = \text{id}|_{U_i}$.

Максимальный N -коцикл $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in J}\}$, обладающий указанными выше свойствами, определяет новую топологию $\tau_{\mathcal{F}}$ на M , называемую *слоевой*, базой которой является множество слоев всех субмерсий f_i . Компоненты линейной связности топологического пространства $(M, \tau_{\mathcal{F}})$ образуют разбиение M , которое обозначается через $\mathcal{F} = \{L_\alpha \mid \alpha \in A\}$ и называется *слоением, заданным N -коциклом* $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in J}$, а L_α , $\alpha \in A$, – его слоями.

Поскольку любой N -коцикл содержится в единственном максимальном N -коцикле, для задания слоения $(M, \mathcal{F})$ достаточно задать какой-либо N -коцикл, обладающий свойствами 1)–4).

2.2. Конформные и римановы слоения. Напомним, что диффеоморфизм $f: N_1 \rightarrow N_2$ римановых многообразий (N_1, g_1) и (N_2, g_2) называется *конформным*, если существует такая гладкая функция λ на N_1 , что $f^*g_2 = e^\lambda g_1$.

Гладкое слоение $(M, \mathcal{F})$ коразмерности q называется *конформным*, если оно определяется N -коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in J}\}$ и многообразие N снабжено такой римановой метрикой g_N , что все $\{\gamma_{ij}\}$ являются локальными конформными диффеоморфизмами соответствующих открытых подмножеств. Если все γ_{ij} – изометрии, то $(M, \mathcal{F})$ – *риманово* слоение.

2.3. Связность Эресмана для слоения. Понятие связности Эресмана для слоений введено Блюменталем и Хебдой (см. [10]).

Пусть $(M, \mathcal{F})$ – слоение произвольной коразмерности q . Распределение $\mathfrak{M}$ на многообразии M называется *трансверсальным* к слоению $\mathcal{F}$, если для любого $x \in M$ выполняется равенство $T_x M = T_x \mathcal{F} \oplus \mathfrak{M}_x$, где $\oplus$ – символ прямой суммы векторных пространств. Векторы из $\mathfrak{M}_x$, $x \in M$, называются горизонтальными. Кусочно гладкая кривая σ называется горизонтальной, если все ее касательные векторы горизонтальны. Другими словами, кусочно гладкая кривая является горизонтальной (или $\mathfrak{M}$ -горизонтальной), если каждый ее гладкий кусок – интегральная кривая распределения $\mathfrak{M}$. Распределение $T\mathcal{F}$, касательное к слоям слоения $\mathcal{F}$, называется вертикальным. Говорят, что кривая h вертикальна, если h лежит в одном слое слоения $\mathcal{F}$.

Вертикально-горизонтальная гомотопия (кратко в.г.г.) – это такое кусочно гладкое отображение $H: I_1 \times I_2 \rightarrow M$, где $I_1 = I_2 = [0, 1]$, что для любых $(s, t) \in I_1 \times I_2$ кривая $H|_{I_1 \times \{t\}}$ горизонтальна, а кривая $H|_{\{s\} \times I_2}$ вертикальна. Пара кривых $(H|_{I_1 \times \{0\}}, H|_{\{0\} \times I_2})$ называется *базой в.г.г.* H . Два пути σ, h с общим началом $\sigma(0) = h(0)$, где σ – горизонтальный путь, а h – вертикальный, называются *допустимой парой путей*.

Распределение $\mathfrak{M}$, трансверсальное слоению $\mathcal{F}$, называется *связностью Эресмана для $\mathcal{F}$* , если для любой допустимой пары путей σ, h существует в.г.г. с базой (σ, h) .

Пусть $\mathfrak{M}$ – связность Эресмана для слоения $(M, \mathcal{F})$. Тогда для любой допустимой пары путей σ, h существует единственная в.г.г. H с базой (σ, h) . Мы будем говорить, что $\tilde{\sigma} := H|_{I_1 \times \{1\}}$ является результатом переноса пути σ вдоль h относительно связности Эресмана $\mathfrak{M}$, и использовать обозначение $\sigma \xrightarrow{h} \tilde{\sigma}$.

2.4. $\mathfrak{M}$ -адаптированная трансверсально проектируемая риманова метрика. Напомним, что субмерсия $f: U \rightarrow V$ римановых многообразий (U, g) и (V, h) называется *римановой*, если для любой точки $x \in U$ сужение дифференциала $f_{*x}: \mathfrak{M}_x \rightarrow T_{f(x)}V$ на нормальное векторное подпространство $\mathfrak{M}_x$ к слою этой субмерсии есть изоморфизм евклидовых векторных пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – риманово слоение со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$, заданное N -коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, и $\mathfrak{M}$ – распределение на M , трансверсальное слоению $(M, \mathcal{F})$. Тогда существуют такие римановы метрики g на M и g_N на N , для которых:

- (i) распределение $\mathfrak{M}$ ортогонально слоению $(M, \mathcal{F})$, причем каждая субмерсия $f_i: U_i \rightarrow V_i = f_i(U_i)$, $i \in J$, риманова;
- (ii) любая геодезическая γ риманова многообразия (M, g) , касательная к $\mathfrak{M}$ в одной точке, остается касательной к $\mathfrak{M}$ в каждой своей точке;
- (iii) для любой допустимой пары путей вида (σ, h) , где σ есть $\mathfrak{M}$ -горизонтальная геодезическая, результат $\tilde{\sigma}$ переноса $\sigma \xrightarrow{h} \tilde{\sigma}$ также является $\mathfrak{M}$ -горизонтальной геодезической той же самой длины, что и σ , т.е. $l(\tilde{\sigma}) = l(\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению риманова слоения существует такая риманова метрика g_N на N , что каждый элемент γ_{ij} есть локальная изометрия

риманова многообразия (N, g_N) . Согласно условию $\mathfrak{M}$ – связность Эресмана для слоения $(M, \mathcal{F})$. Следовательно,

$$T_x M = T_x \mathcal{F} \oplus \mathfrak{M}_x \quad \forall x \in M.$$

Поэтому каждое векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ можно представить в виде $X = X_{\mathcal{F}} + X_{\mathfrak{M}}$, где $X_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}_{\mathcal{F}}(M)$, $X_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$. Пусть g_0 – произвольная риманова метрика на M . Положим

$$g(X, Y) := g_0(X_{\mathcal{F}}, Y_{\mathcal{F}}) + g_N(f_{i*}X, f_{i*}Y)$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ на U_i , $i \in J$. В случае $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ выполняется равенство $f_j = \gamma_{ji} \circ f_i$, где γ_{ji} – локальная изометрия (N, g_N) . Поэтому g – корректно определенная риманова метрика на M , трансверсально проектируемая относительно слоения $(M, \mathcal{F})$.

Утверждение (i) вытекает из определения g .

Известные свойства римановых субмерсий (см. [11]) и трансверсально проектируемых римановых метрик (см. [1]) влекут выполнение утверждений (ii) и (iii).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Риманова метрика, введенная при доказательстве предложения 1, называется *$\mathfrak{M}$ -адаптированной трансверсально проектируемой метрикой* относительно риманова слоения $(M, \mathcal{F})$ со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$.

Любая $\mathfrak{M}$ -горизонтальная геодезическая называется нами $\mathfrak{M}$ -геодезической. Мы предполагаем, что рассматриваемые геодезические параметризованы длиной дуги.

2.5. Псевдогруппа голономии слоения. Напомним основные понятия (см. [2], [12]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть N – гладкое q -мерное многообразие, вообще говоря несвязное. Гладкой псевдогруппой локальных преобразований $\mathcal{H}$ на N называется множество диффеоморфизмов $h: D(h) \rightarrow R(h)$ между открытыми подмножествами многообразия N , удовлетворяющее следующим аксиомам.

1. Пусть $g, h \in \mathcal{H}$ и $R(h) \subset D(g)$; тогда $g \circ h \in \mathcal{H}$.
2. Если $h \in \mathcal{H}$, то $h^{-1} \in \mathcal{H}$.
3. $\text{id}_N \in \mathcal{H}$.
4. Пусть $h \in \mathcal{H}$ и $W \subset D(h)$ – открытое подмножество; тогда $h|_W \in \mathcal{H}$.
5. Пусть $h: D(h) \rightarrow R(h)$ – диффеоморфизм между открытыми подмножествами в N , причем для любого $w \in D(h)$ существует окрестность W в $D(h)$ такая, что $h|_W \in \mathcal{H}$; тогда $h \in \mathcal{H}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть A – семейство локальных диффеоморфизмов N , содержащее id_N . Псевдогруппа, полученная добавлением h^{-1} для каждого h из A , а также добавлением ограничений локальных диффеоморфизмов на открытые подмножества, композиций и объединений элементов из A , называется *псевдогруппой, порожденной A* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть N -коцикл $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$ определяет слоение $(M, \mathcal{F})$. Псевдогруппа, порожденная локальными диффеоморфизмами γ_{ij} многообразия N , называется *псевдогруппой голономии* этого слоения и обозначается через $\mathcal{H} = \mathcal{H}(M, \mathcal{F})$.

Напомним, что псевдогруппа $\mathcal{H}$ локальных диффеоморфизмов многообразия N называется *квазианалитической*, если существование открытого подмножества V в N такого, что $g|_V = \text{id}_V$ для элемента $g \in \mathcal{H}$, влечет $g = \text{id}_{D'(g)}$, где $D'(g)$ – компонента связности области определения $D(g)$ элемента g , содержащая V .

Например, всякая псевдогруппа локальных изометрий так же, как и псевдогруппа локальных конформных преобразований, является квазианалитической.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Квазианалитическая псевдогруппа $\mathcal{H}$ локальных диффеоморфизмов многообразия N называется *полной*, когда для произвольной пары точек x и x' из N существуют открытые окрестности U и U' , обладающие свойством:

если $y \in U$ и $y' = \varphi(y) \in U'$ для некоторого $\varphi \in \mathcal{H}$, то существует продолжение $\psi \in \mathcal{H}$ локального диффеоморфизма φ на всю окрестность U .

2.6. Достаточное условие для полноты псевдогруппы голономии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если риманово слоение допускает связность Эресмана, то его псевдогруппа голономии является полной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g – некоторая $\mathfrak{M}$ -адаптированная трансверсально проектируемая риманова метрика на многообразии M относительно риманова слоения $(M, \mathcal{F})$ со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$.

Пусть x и x' – любые две точки из N . Рассмотрим произвольные субмерсии $f_i: U_i \rightarrow V$ и $f_j: U_j \rightarrow V'$ из N -коцикла, задающего слоение $(M, \mathcal{F})$, такие, что $x \in V$, $x' \in V'$. Возьмем $a \in f_i^{-1}(x)$ и $a' \in f_j^{-1}(x')$. Существуют такое число $\varepsilon > 0$ и такие геодезически выпуклые шары B_ε с центром в a и B'_ε с центром в a' радиуса ε , что $B_\varepsilon \subset U_i$, $B'_\varepsilon \subset U_j$. Для $\delta = \varepsilon/3$ обозначим через $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}'$ геодезически выпуклые шары с центрами в x и x' соответственно радиуса δ . Пусть S_δ и S'_δ – подмножества в M , образованные точками $\mathfrak{M}$ -геодезических длины $< \delta$ с началом в a и a' соответственно. Покажем, что для любых точек $y \in \mathcal{V}$ и $y' = \varphi(y) \in \mathcal{V}'$, где $\varphi \in \mathcal{H}$, существует продолжение $\psi \in \mathcal{H}$ локальной изометрии φ на все множество $\mathcal{V}$.

Для произвольной точки $z \in \mathcal{V}$ существует единственная геодезическая γ в $\mathcal{V}$, соединяющая $y = \gamma(0)$ с $z = \gamma(s_0)$, длины $s_0 < 2\delta$. Возьмем $b \in f_i^{-1}(y) \cap S_\delta$ и $b' \in f_j^{-1}(y') \cap S'_\delta$. Сначала докажем существование $\mathfrak{M}$ -лифта геодезической γ в точку b в U_i . Согласно утверждению (i) предложения 1 f_i – риманова субмерсия. Поскольку $\mathfrak{M}$ -лифт локально существует, найдется такое число $s_1 > 0$, что определен $\mathfrak{M}$ -лифт σ кривой $\gamma|_{[0, s_1]}$ в точку b . Возьмем $c \in f_i^{-1}(\gamma(s_1)) \in U_i$. Для точки c существуют ε_0 , $0 < \varepsilon_0 < s_1$, и локальный лифт τ геодезической $(\gamma|_{[s_1 - \varepsilon_0, s_1]})^{-1}$ в точку c . Так как точки $\tau(\varepsilon_0)$ и $\sigma(s_1 - \varepsilon_0)$ лежат в одном и том же слое $f_i^{-1}(\gamma(s_1 - \varepsilon_0))$ субмерсии f_i со связными слоями, то найдется гладкий путь h в этом слое, соединяющий $h(0) = \tau(\varepsilon_0)$ с $h(1) = \sigma(s_1 - \varepsilon_0)$.

Для допустимой пары путей (τ^{-1}, h) существует перенос $\tau^{-1} \xrightarrow{h} \tilde{\sigma}$ относительно связности Эресмана $\mathfrak{M}$. По свойству римановой субмерсии τ является $\mathfrak{M}$ -геодезической. Согласно предложению 1 $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(s)$, $s \in [0, \varepsilon_0]$, также является $\mathfrak{M}$ -геодезической. В силу единственности имеет место равенство $\mathfrak{M}$ -лифтов $\tilde{\sigma}(s) = \sigma(s_1 - \varepsilon_0 + s) \forall s \in [0, \varepsilon_0]$ кривой $\gamma|_{[s_1 - \varepsilon_0, s_1]}$ в точку $\sigma(s_1 - \varepsilon_0)$, следовательно, определена точка $\sigma(s_1) := \tilde{\sigma}(\varepsilon_0)$. Таким образом, подмножество A точек t отрезка $[0, s_0]$ такое, что $\mathfrak{M}$ -лифт $\sigma(s)$ определен при всех $s \in [0, t]$, должно быть открыто-замкнутым подмножеством в $[0, s_0]$. Связность отрезка $[0, s_0]$ влечет равенство $A = [0, s_0]$. Благодаря свойствам римановой субмерсии f_i мы имеем $l(\sigma) = l(\gamma) = s_0 < 2\delta$.

Пусть f – такой путь в слое $L(b)$, соединяющий $b = f(0)$ с $b' = f(1)$, что росток голономного диффеоморфизма вдоль f соответствует посредством f_i и f_j ростку φ в точке y . Тогда определен перенос $\sigma \xrightarrow{f} \sigma'$ относительно связности Эресмана $\mathfrak{M}$. Согласно предложению 1 σ' есть $\mathfrak{M}$ -геодезическая длины s_0 с началом в точке $b' = \sigma'(0)$. Обозначим через d функцию расстояния в римановом многообразии (M, g) ; тогда $d(a', \sigma'(s)) \leq d(a', b') + l(\sigma'(s)) < 3\delta = \varepsilon \forall s \in [0, s_0]$. Таким образом, $\sigma'(s) \in B'_\varepsilon \subset U_j \forall s \in [0, s_0]$. Следовательно, определена кривая $\gamma' := f_j \circ \sigma'$, причем γ' – геодезическая длины s_0 с началом в y' . Нетрудно проверить, что равенство $\tilde{\varphi}(z) := \gamma'(s_0)$ определяет отображение $\tilde{\varphi}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ в $\mathcal{U} := f_j(B_\varepsilon)$, причем $\tilde{\varphi}$ является продолжением φ на $\mathcal{V}$. Так как $\rho(y, z) = l(\gamma) = l(\gamma') = \rho(\tilde{\varphi}(y), \tilde{\varphi}(z))$, то $\tilde{\varphi}$ – изометрия. В каждой точке из $\mathcal{V}$ росток изометрии $\tilde{\varphi}$ совпадает с ростком элемента из $\mathcal{H}$, поэтому $\tilde{\varphi} \in \mathcal{H}$.

2.7. Доказательство теоремы 1. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – риманово слоение со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$. Согласно предложению 2 псевдогруппа голономии $\mathcal{H} := \mathcal{H}(M, \mathcal{F})$ является полной псевдогруппой локальных изометрий. Следовательно, применимы результаты Салем [2].

Согласно [2; предложение 2.3] для полной псевдогруппы локальных изометрий $\mathcal{H}$ риманова многообразия (N, g_N) существует полная псевдогруппа $\overline{\mathcal{H}}$ локальных изометрий (N, g_N) такая, что орбиты $\overline{\mathcal{H}}$ представляют собой замыкания орбит псевдогруппы $\mathcal{H}$. Более того (см. [2; следствие 3.2]), орбиты псевдогруппы $\overline{\mathcal{H}}$ являются замкнутыми вложенными подмногообразиями многообразия N , причем орбита относительно $\mathcal{H}$ любой точки из $\overline{\mathcal{H}} \cdot x$, $x \in N$, всюду плотна в $\overline{\mathcal{H}} \cdot x$. Другими словами, для каждого $x \in N$ мы имеем $\overline{\mathcal{H}} \cdot x = \overline{\mathcal{H} \cdot x}$ и для любого $y \in \overline{\mathcal{H}} \cdot x$ выполняются равенства $\overline{\mathcal{H}} \cdot y = \overline{\mathcal{H} \cdot y} = \overline{\mathcal{H}} \cdot x$. Пусть L – произвольный слой слоения $(M, \mathcal{F})$ и $a \in U_i \cap L$ для некоторой окрестности U_i из N -коцикла, задающего это слоение. Напомним, что замыкание $\overline{L}$ слоя L соответствует замыканию орбиты $\mathcal{H} \cdot x$ точки $x = f_i(a)$ относительно псевдогруппы голономии $\mathcal{H}$. Следовательно, замыкание $\overline{L}$ слоя L является замкнутым вложенным подмногообразием в M , причем каждый слой $L' \subset \overline{L}$ всюду плотен в $\overline{L}$. Это означает, что $\overline{L}$ – минимальное множество слоения $(M, \mathcal{F})$. Слоение, образованное замыканиями слоев слоения $(M, \mathcal{F})$, является римановым слоением с особенностями.

Если $(M, \mathcal{F})$ – собственное слоение, то все орбиты псевдогруппы голономии – дискретные подмножества в N . Как известно (см. [2]), пространство орбит полной псевдогруппы локальных изометрий, все орбиты которой дискретны,

представляет собой q -мерный орбифолд. Поскольку пространство слоев $M/\mathcal{F}$ слоения $(M, \mathcal{F})$ гомеоморфно пространству орбит полной псевдогруппы локальных изометрий $\mathcal{H}(M, \mathcal{F})$, то $M/\mathcal{F}$ – также q -мерный орбифолд.

ПРИМЕР 1. Пусть $(T^2, \mathcal{F}_\alpha)$ – слоение Кронеккера на двумерном локально евклидовом торе T^2 , соответствующее иррациональному числу $\alpha > 0$. Возьмем две различные точки a и b из одного слоя $L \in \mathcal{F}_\alpha$. Пусть $M := T^2 \setminus \{a, b\}$ и $\mathcal{F} := \mathcal{F}_\alpha|_M$. Тогда $(M, \mathcal{F})$ – риманово слоение. Слой L содержит слои L' , L'' и L''' индуцированного слоения $(M, \mathcal{F})$. Один из этих трех слоев замкнут в M . Пусть это будет слой L' . Риманово слоение $(M, \mathcal{F})$ имеет единственное минимальное множество – слой L' . Согласно теореме 1 слоение $(M, \mathcal{F})$ не допускает связности Эресмана. Псевдогруппа голономии этого слоения не является полной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – собственное риманово слоение коразмерности q , допускающее связность Эресмана, причем группа голономии каждого слоя этого слоения тривиальна. Тогда пространство слоев $B := M/\mathcal{F}$ – q -мерное многообразие и слоение $(M, \mathcal{F})$ образовано слоями локально тривиального расслоения $\tau: M \rightarrow B$. Для односвязного M база B также односвязна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1 пространство слоев слоения $(M, \mathcal{F})$ есть q -мерный орбифолд. Так как по условию все группы голономии слоения $(M, \mathcal{F})$ тривиальны, то тривиальны все стационарные псевдогруппы голономии. Следовательно, этот орбифолд является гладким q -мерным многообразием, а слоение $(M, \mathcal{F})$ образовано слоями субмерсии $f: M \rightarrow B = M/\mathcal{F}$. При этом связность Эресмана для слоения $(M, \mathcal{F})$ является связностью Эресмана для субмерсии f . Как известно, субмерсия со связностью Эресмана образует локально тривиальное расслоение, поэтому слоение $(M, \mathcal{F})$ образовано слоями локально тривиального расслоения $f: M \rightarrow B$. Из точной гомотопической последовательности этого расслоения в случае односвязности многообразия M благодаря связности слоев расслоения вытекает односвязность базы B .

§ 3. (G, N) -слоения со связностями Эресмана

3.1. (G, N) -слоения и (G, N) -многообразия. Пусть N – связное многообразие, G – некоторая группа диффеоморфизмов в N . Говорят, что группа G действует квазианалитически на N , если из существования открытого подмножества U в N и элемента $g \in G$ таких, что $g|_U = \text{id}_U$, вытекает $g = e$, где e – тождественное преобразование N .

Далее в этом параграфе мы предполагаем, что группа G диффеоморфизмов многообразия N действует квазианалитически.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Слоение $(M, \mathcal{F})$, заданное N -коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, называется (G, N) -слоением, если при $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $i, j \in J$, для γ_{ij} существует такой элемент $g \in G$, что $\gamma_{ij} = g|_{f_j(U_i \cap U_j)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Многообразие M называется (G, N) -многообразием, если оно имеет атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i,j \in J}$, обладающий свойствами:

- 1) $\varphi_i(U_i) \subset N$;

2) если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то возникающий диффеоморфизм $\gamma_{ij}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ является сужением некоторого преобразования $g \in G$.

Другими словами, многообразие M называется (G, N) -многообразием, если его нульмерное слоение является (G, N) -слоением.

3.2. Доказательство теоремы 2. Зафиксируем точку $x_0 \in M$. Пусть x – любая точка из M и $h(t)$, $t \in I = [0, 1]$, – кусочно гладкий путь, соединяющий $x_0 = h(0)$ с $x = h(1)$. Покроем $h(I)$ конечной цепочкой окрестностей $U_1, \dots, U_s$ из N -коцикла $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, задающего слоение $(M, \mathcal{F})$. Зафиксируем окрестности $U_0 \ni x_0$ и $U \ni x_1$ из N -коцикла и будем рассматривать цепочки вида $U_0, U_1, \dots, U_s, U_{s+1} := U$. Поскольку $U_k \cap U_{k+1} \neq \emptyset$, $k = 0, \dots, s$, то определен локальный диффеоморфизм $\gamma_{(k+1)k}: f_k(U_k \cap U_{k+1}) \rightarrow f_{k+1}(U_k \cap U_{k+1})$, удовлетворяющий равенству $f_{k+1} = \gamma_{(k+1)k} \circ f_k$, где $f_{s+1} = f: U \rightarrow V$. Из определения (G, N) -слоения $(M, \mathcal{F})$ и квазианалитичности действия группы Ли G на N вытекает существование единственного элемента $g_{(k+1)k} \in G$, обладающего свойством $g_{(k+1)k}|_{f_k(U_k \cap U_{k+1})} = \gamma_{(k+1)k}$. Следовательно, определен элемент

$$g := g_{(s+1)s} \circ g_{s(s-1)} \circ \dots \circ g_{21} \circ g_{10} \quad (*)$$

из группы G . Стандартным образом проверяется, что g не зависит как от выбора цепочки окрестностей $U_1, \dots, U_s$, покрывающей $h(I)$, так и от выбора пути из гомотопического класса $[h]$ путей в M с фиксированными концами x_0 и x . Как известно, множество классов гомотопных путей с началом в $x_0 \in M$ образует универсальное накрывающее пространство $\widetilde{M}$ для M , а проекция $p: \widetilde{M} \rightarrow M: [h] \mapsto h(1)$ есть универсальное накрывающее отображение.

Мы определяем отображение $D: \widetilde{M} \rightarrow N$, полагая $D([h]) = g^{-1}(f_{s+1}(h(1)))$, где элемент $g \in G$ определен равенством $(*)$. Заметим, что $D = D(U_0)$ зависит только от выбора окрестности U_0 . Так как f_k и g_k – субмерсии, то $D: \widetilde{M} \rightarrow N$ – также субмерсия $\widetilde{M}$ в N . Поскольку любая субмерсия является открытым отображением, $D(\widetilde{M})$ – открытое подмножество в N . Субмерсия $D: \widetilde{M} \rightarrow N$ называется разлагающим отображением.

Пусть $\widetilde{\mathcal{F}} := p^*\mathcal{F}$ – индуцированное слоение на $\widetilde{M}$. Мы замечаем, что любой слой $\widetilde{L}$ слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$ лежит в некотором слое $D^{-1}(b)$, $b \in D(\widetilde{M})$, субмерсии $D: \widetilde{M} \rightarrow N$. Поскольку размерность слоев субмерсии D равна $n - p = \dim(\widetilde{\mathcal{F}})$, то $\widetilde{L}$ – открытое подмножество в $D^{-1}(b)$. Так как $D^{-1}(b) \setminus \widetilde{L}$ представляет собой объединение некоторых слоев слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$, то $D^{-1}(b) \setminus \widetilde{L}$ – также открытое подмножество в $D^{-1}(b)$, а $\widetilde{L}$ открыто и замкнуто в $D^{-1}(b)$ одновременно. Следовательно, слоение $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$ образовано компонентами связности слоев субмерсии D . Слой $\widetilde{L}$ замкнут в замкнутом подпространстве $D^{-1}(b)$ пространства $\widetilde{M}$, поэтому $\widetilde{L}$ замкнут в $\widetilde{M}$. Таким образом, все слои слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$ – замкнутые подмножества в $\widetilde{M}$. По условию слоение $(M, \mathcal{F})$ допускает связность Эресмана $\mathfrak{M}$. Нетрудно проверить, что $\widetilde{\mathfrak{M}} := p^*\mathfrak{M}$ – связность Эресмана для слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$. Пусть k – риманова метрика на открытом подмногообразии $B = D(\widetilde{M})$ в N ; тогда

$$\widetilde{g}|_{\widetilde{\mathfrak{M}}}(X, Y) := k(D_*(X), D_*(Y)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{M}}}(\widetilde{M})$$

– риманова метрика на трансверсальном расслоении $\widetilde{TM}/T\widetilde{\mathcal{F}}$, отождествленном с $\widetilde{\mathcal{M}}$, проектируемая относительно слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$.

Таким образом, $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$ – риманово слоение со связностью Эресмана, все слои которого – замкнутые подмножества в $\widetilde{M}$, а все группы голономии тривиальны. Как известно, любой замкнутый слой слоения является собственным, поэтому $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$ – собственное слоение. Согласно предложению 3 слои этого слоения образованы слоями локально тривиального расслоения $\tilde{r}: \widetilde{M} \rightarrow B$ над односвязным многообразием B . Так как $(M, \mathcal{F})$ – (G, N) -слоение, то $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$ также является (G, N) -слоением, а B – (G, N) -многообразием.

Пусть Φ – группа накрывающих преобразований универсального накрытия $p: \widetilde{M} \rightarrow M$; тогда определен изоморфизм групп $\beta: \pi_1(M, x) \rightarrow \Phi$. Поскольку каждое преобразование $\phi \in \Phi$ является автоморфизмом расслоения $\tilde{r}: \widetilde{M} \rightarrow B$, то ϕ индуцирует преобразование $\psi = \psi(\phi)$ многообразия B , являющееся автоморфизмом (G, N) -многообразия B и удовлетворяющее равенству $\tilde{r} \circ \phi = \psi(\phi) \circ \tilde{r}$. Множество всех таких преобразований образует группу $\Psi = \{\psi(\phi) \mid \phi \in \Phi\}$, а отображение $\mu: \Phi \rightarrow \Psi: \phi \mapsto \psi(\phi)$ является эпиморфизмом групп. Так как $\hat{\Phi} := \text{Ker } \mu$ – нормальная подгруппа группы Φ , действующая на $\widetilde{M}$ свободно и собственноразрывно, то определено фактормногообразие $\widehat{M} := \widetilde{M}/\hat{\Phi}$ и свободное собственное разрывное действие факторгруппы $\widehat{\Phi} := \Phi/\hat{\Phi}$ на $\widehat{M}$, причем $M \cong \widehat{M}/\widehat{\Phi}$, а факторотображение $\widehat{p}: \widehat{M} \rightarrow M = \widehat{M}/\widehat{\Phi}$ удовлетворяет равенству $p = \widehat{p} \circ \tilde{p}$, где $\widehat{p}: \widehat{M} \rightarrow M = \widehat{M}/\widehat{\Phi}$ – проекция на пространство орбит группы $\widehat{\Phi}$. Заметим, что $\widehat{p}: \widehat{M} \rightarrow M$ – регулярное накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований $\widehat{\Phi}$. Из определения $\widehat{M}$ вытекает, что слоение $\widehat{F} := \widehat{p}^*F$ образовано слоями локально тривиального расслоения $r: \widehat{M} \rightarrow B$, причем $r \circ \tilde{p} = \tilde{r}$, а естественный эпиморфизм групп $\widehat{\mu}: \widehat{\Phi} \rightarrow \Psi$ является изоморфизмом. Следовательно, утверждения 1) и 2) теоремы 2 доказаны.

Утверждение 3) выполняется очевидным образом в силу квазианалитичности действия группы Ψ .

§ 4. Критерий римановости конформного слоения

4.1. Слоенные расслоения и слоенные редукции. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – произвольное гладкое слоение коразмерности q . Локально тривиальное расслоение $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$, наделенное слоением $(\mathcal{R}, F)$, называется *слоеным расслоением*, если выполняются следующие условия:

- 1) если $\mathfrak{N}$ – распределение, касательное к слоям субмерсии $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$, то $\mathfrak{N}_u \cap T_u F = \{0\} \ \forall u \in \mathcal{R}$;
- 2) проекция $\pi: (\mathcal{R}, F) \rightarrow (M, \mathcal{F})$ – морфизм слоений.

Будем обозначать слоенное расслоение через $(\mathcal{R}, \pi, M, F)$. Если, кроме того, $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$ – главное H -расслоение, причем слоение $(\mathcal{R}, F)$ является H -инвариантным, то говорят, что задано *слоенное H -расслоение* над $(M, \mathcal{F})$. Слоенное H -расслоение мы обозначаем через $(\mathcal{R}(M, H), F)$.

Пусть $(\mathcal{R}'(M', H'), F')$ и $(\mathcal{R}(M, H), F)$ – два главных слоенных расслоения с проекциями $\pi': \mathcal{R}' \rightarrow M'$ и $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$ соответственно. Пара $(f, \widehat{f})$, где

$f: \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$ – морфизм слоения $(\mathcal{R}', F')$ в слоение $(\mathcal{R}, F)$, а $\widehat{f}: H' \rightarrow H$ – гомоморфизм групп Ли, называется *морфизмом в категории главных слоеных расслоений*, если $f(u'a') = f(u')\widehat{f}(a')$ для всех $u' \in \mathcal{R}'$ и $a' \in H'$. Морфизм $(f, \widehat{f}): (\mathcal{R}'(M', H'), F') \rightarrow (\mathcal{R}(M, H), F)$ определяет проекцию $f': M' \rightarrow M$, удовлетворяющую равенству $\pi \circ f = f' \circ \pi'$.

Пусть $(f, \widehat{f}): (\mathcal{R}'(M, H'), F') \rightarrow (\mathcal{R}(M, H), F)$ – морфизм главных слоеных расслоений, причем $f: \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$ есть вложение с проекцией $f' = \text{id}_M$, образ $f(\mathcal{R}')$ является F -насыщенным подмногообразием в $\mathcal{R}$, а $\widehat{f}: H' \rightarrow H$ – иммерсия групп Ли. отождествим $\mathcal{R}'$ с $f(\mathcal{R}')$, группу H' – с подгруппой Ли $\widehat{f}(H')$ группы H , а слоение F' – со слоением $F|_{f(\mathcal{R}')}$. В этом случае слоеное расслоение $(\mathcal{R}'(M, H'), F|_{f(\mathcal{R}')})$ называется *редуцированным слоеным расслоением* и обозначается через $(\mathcal{R}'(M, H'), F')$, а отображение $\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$ называется *редукцией главного слоеного расслоения $(\mathcal{R}(M, H), F)$ к подгруппе H'* .

4.2. Слоеные сечения. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – произвольное слоение, U – открытое подмножество многообразия M . Будем обозначать через F_U индуцированное слоение на U , слои которого образованы компонентами связности пересечений $L_\alpha \cap U$ слоев L_α слоения $\mathcal{F}$ с U . Пусть (E, π, M, F) – некоторое слоеное расслоение со стандартным слоем Y над $(M, \mathcal{F})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть U – открытое подмножество в M , A – произвольное подмножество в U . Сечение $\sigma: A \rightarrow E$ расслоения $\pi: E \rightarrow M$ называется *$\mathcal{F}_U$ -сечением*, если для любых двух точек x, y , принадлежащих $A \cap L$, где $L \in \mathcal{F}_U$, существует такой слой $\mathcal{L} \in F_{\pi^{-1}(U)}$, что $\sigma(x), \sigma(y) \in \sigma(A) \cap \mathcal{L}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. $\mathcal{F}_U$ -сечение $\tilde{\sigma}: B \rightarrow E$ называется *$\mathcal{F}_U$ -продолжением $\mathcal{F}_U$ -сечения $\sigma: A \rightarrow E$* , если $A \subset B \subset U$ и $\tilde{\sigma}|_A = \sigma$. Пусть $U = M$; тогда $\mathcal{F}_U$ -сечение называется *$\mathcal{F}$ -сечением*, а $\mathcal{F}_U$ -продолжение называется *$\mathcal{F}$ -продолжением*.

ЛЕММА 1. Пусть (E, π, M, F) – слоеное расслоение со стандартным слоем $\mathbb{R}^m$ над слоением $(M, \mathcal{F})$. Пусть a – любая точка из M и (U, φ) – расслоенная карта с центром в точке a . Тогда для любого компактного подмножества A в U каждое $\mathcal{F}_U$ -сечение $\sigma: A \rightarrow E$ имеет $\mathcal{F}_U$ -продолжение на U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r: U \rightarrow U/\mathcal{F}_U = \mathbb{R}^q$ – проекция на пространство слоев слоения $(U, \mathcal{F}_U)$, отождествленное с $\mathbb{R}^q$, где $q = \text{codim } \mathcal{F}$. Поскольку окрестность U стягиваемая, пространство R^m -расслоения $\pi^{-1}(U)$ можно отождествить с $U \times \mathbb{R}^m$. При этом слоение $F_{\pi^{-1}(U)}$ отождествляется с тривиальным слоением $F_{st} := \{L \times r(L) \times v \mid L \in \mathcal{F}_U, v \in \mathbb{R}^m\}$, а $\mathcal{F}_U$ -сечение σ записывается в виде $\sigma(x) = (x, \tilde{\sigma} \circ r(x)) \in U \times \mathbb{R}^m$, $x \in A$, где $\tilde{\sigma}: \tilde{A} := r(A) \rightarrow \mathbb{R}^m$ – индуцированное гладкое отображение, удовлетворяющее равенству $\tilde{\sigma} \circ r = \text{pr}_2 \circ \sigma$, а $\text{pr}_2: U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – проекция на второй сомножитель.

Отображение $\tilde{\sigma}: \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}^m$ может быть отождествлено с набором из m гладких функций $h_1, \dots, h_m: \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}$. Согласно условию множество A компактно, поэтому компактно и $\tilde{A}$, следовательно, $\tilde{A}$ – замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^q$. Известно, что каждая гладкая функция, заданная на замкнутом подмножестве в $\mathbb{R}^q$,

имеет гладкое продолжение на все пространство $\mathbb{R}^q$. Отсюда вытекает, что существует гладкое продолжение $\tilde{\delta}: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m$ отображения $\tilde{\sigma}: \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Следовательно, равенство $\delta(x) := (x, \tilde{\delta} \circ r(x)) \forall x \in U$ определяет гладкое $\mathcal{F}_U$ -сечение δ , являющееся продолжением сечения σ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Лемма 1, играющая ключевую роль для данного параграфа, вообще говоря, не верна для замкнутых подмножеств A , поскольку проекция на пространство слоев слоения не является замкнутым отображением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть (E, π, M, F) – слоеное расслоение со стандартным слоем $\mathbb{R}^m$ над слоением $(M, \mathcal{F})$, причем $\pi|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \rightarrow L \forall \mathcal{L} \in F$ – диффеоморфизм. Тогда для любого замкнутого подмножества A в M каждое $\mathcal{F}$ -сечение $\sigma: A \rightarrow E$, определенное на A , имеет продолжение до $\mathcal{F}$ -сечения, определенно-го на M . В частности, для любых точек $x \in M$, $u \in \pi^{-1}(x) \subset E$ существует $\mathcal{F}$ -сечение $\sigma: M \rightarrow E$ такое, что $\sigma(x) = u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу паракомпактности M существуют покрытие $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ пространства M расслоенными окрестностями и локально конечное открытое покрытие $\{V_j \mid j \in J\}$ многообразия M , обладающие свойством:

для любого V_j найдется U_i такое, что замыкание $\bar{V}_j$ компактно и $\bar{V}_j \subset U_i$

(см., например, [12]). Для произвольного подмножества индексов $Y \subset J$ положим $B_Y := \bigcup_{j \in Y} \bar{V}_j$.

Покажем, что B_Y замкнуто в M . Если $x \in \bar{B}_Y$, то существует последовательность $\{x_n\} \subset B_Y$, сходящаяся к x . В силу локальной конечности покрытия $\{V_j \mid j \in J\}$ найдется окрестность точки x , пересекающая лишь конечное семейство подмножеств из этого покрытия. Поэтому имеется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, принадлежащая одному V_{j_0} , $j_0 \in Y$, следовательно, $x \in \bar{V}_{j_0} \subset B_Y$ и B_Y замкнуто в M .

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество троек (δ, Y, U) , где $Y \subset J$, U – открытая окрестность B_Y , $\delta: B_Y \rightarrow E$ есть $\mathcal{F}_U$ -сечение, совпадающее на $A \cap B_Y$ с $\sigma_{A \cap B_Y}$.

Предположим, что $A \neq \emptyset$; тогда $V_j \cap A \neq \emptyset$ для некоторого $j \in J$. Множество $A_j = \bar{V}_j \cap A$ компактно как замкнутое подмножество компактного $\bar{V}_j$. Пусть $\bar{V}_j \subset U_i$. Покажем, что $\sigma_j := \sigma|_{A_j}: A_j \rightarrow E$ есть $\mathcal{F}_{U_i}$ -сечение. Возьмем любые две точки x, y из произвольного слоя $L_0 \in \mathcal{F}_{U_i}$, принадлежащие A_j ; тогда x, y принадлежат одному слою L слоения $\mathcal{F}$, содержащему L_0 . Так как по условию $\sigma: A \rightarrow E$ является $\mathcal{F}$ -сечением, то точки $\sigma(x)$ и $\sigma(y)$ принадлежат одному слою $\mathcal{L}$ поднятого слоения (E, F) , причем $\pi(\mathcal{L}) = L$. Кроме того, согласно условию сужение $\pi|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \rightarrow L$ – диффеоморфизм, следовательно, пересечение $\pi^{-1}(L_0)$ с $\mathcal{L}$ линейно связно, поэтому $\sigma(x), \sigma(y)$ – точки одного слоя слоения $F_{\pi^{-1}(U_i)}$. Это означает, что σ_j является $\mathcal{F}_{U_i}$ -сечением. Согласно лемме 1 существует $\mathcal{F}_{U_i}$ -продолжение δ сечения σ_j на U_i . Таким образом, $\bar{\delta}_j := \delta|_{\bar{V}_j}: \bar{V}_j \rightarrow E$ есть F_{U_i} -сечение, причем $\bar{\delta}_j|_{\bar{V}_j \cap A} = \sigma|_{\bar{V}_j \cap A}$, следовательно $(\bar{\delta}_j, j, U_i) \in \mathcal{P}$ и $\mathcal{P} \neq \emptyset$.

Введем отношение частичного порядка в $\mathcal{P}$, полагая $(\delta_1, Y_1, U_1) \preceq (\delta_2, Y_2, U_2)$, если $Y_1 \subset Y_2$, $U_1 \subset U_2$ и $\delta_2|_{B_{Y_1}} = \delta_1$. Те же аргументы, что и при доказательстве теоремы 3.4.1 в [13], показывают, что любое линейно упорядоченное

подмножество в $\mathcal{P}$ ограничено сверху. Поэтому согласно лемме Цорна $(\mathcal{P}, \preceq)$ имеет максимальный элемент (δ_0, Y_0, U_0) .

Предположим, что $Y_0 \neq J$ и $s \in J \setminus Y_0$. Положим $C = (A \cup B_{Y_0}) \cap \bar{V}_s \subset \bar{V}_s$. Найдется U_k , $k \in \mathbb{N}$, содержащее $\bar{V}_s$. При этом корректно определено сечение $\varepsilon: C \rightarrow E$, совпадающее с σ на $A \cap \bar{V}_s$ и совпадающее с δ_0 на $B_{Y_0} \cap \bar{V}_s$. Так же, как и выше, проверяется, что ε является $\mathcal{F}_{U_k}$ -сечением. Кроме того, C компактно как след замкнутого множества $A \cup B_{Y_0}$ на компактном $\bar{V}_s$. Таким образом, выполняются условия леммы 1, из которой вытекает существование F_{U_k} -продолжения $\bar{\varepsilon}: \bar{V}_s \rightarrow E$ сечения ε , совпадающее с σ на $A \cap \bar{V}_s$. Поэтому $(\bar{\varepsilon}, s, U_k) \in \mathcal{P}$. Пусть $U' := U_0 \cup U_k$ и $Y_1 := Y_0 \cup \{s\}$; тогда $B_{Y_1} = B_{Y_0} \cup \bar{V}_s$. Определим сечение $\tau: B_{Y_1} \rightarrow E$, полагая $\tau|_{B_{Y_0}} := \delta_0$, $\tau|_{\bar{V}_s} = \bar{\varepsilon}$. Из равенств $\bar{\varepsilon}|_{B_{Y_0} \cap \bar{V}_s} = \delta_0$ и $\bar{\varepsilon}|_{A \cap \bar{V}_s} = \delta_0|_{A \cap \bar{V}_s} = \sigma|_{A \cap \bar{V}_s}$ вытекает корректность определения сечения τ и то, что τ есть $\mathcal{F}_{U'}$ -сечение, причем $\tau|_{B_{Y_0}} = \delta_0$. Следовательно, $(\tau, Y_1, U') \in \mathcal{P}$ и $(\delta_0, Y_0, U_0) \preceq (\tau, Y_1, U')$, что противоречит максимальнойности элемента (δ_0, Y_0, U_0) в $\mathcal{P}$. Таким образом, $Y_0 = J$ и δ_0 является $\mathcal{F}$ -продолжением сечения σ на все многообразие M .

Теперь зафиксируем произвольные точки $x \in M$, $u \in \pi^{-1}(x) \subset E$. Пусть $A = \{x\}$ – одноточечное множество и $\sigma_0: A \rightarrow E: x \rightarrow u$; тогда σ_0 есть $\mathcal{F}$ -сечение. По доказанному существует продолжение σ_0 до $\mathcal{F}$ -сечения $\sigma: M \rightarrow E$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\mathcal{F}$ – нульмерное слоение многообразия M , то из предложения 4 вытекает теорема 5.7 из [9; гл. I].

4.3. Картановы слоения и их группы голономии. Задание картанова слоения $(M, \mathcal{F})$ типа (G, H) (или $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$) эквивалентно заданию следующих объектов:

- 1) группы Ли G и ее замкнутой подгруппы Ли H с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно;
- 2) главного H -расслоения $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$;
- 3) H -инвариантного слоения $(\mathcal{R}, F)$, для которого π является морфизмом слоения $(\mathcal{R}, F)$ в $(M, \mathcal{F})$;
- 4) $\mathfrak{g}$ -значной H -эквивариантной 1-формы ω на $\mathcal{R}$, обладающей свойствами:
 - (i) $\omega(A^*) = A$ для любого $A \in \mathfrak{h}$, где A^* – фундаментальное векторное поле, соответствующее A ;
 - (ii) для каждой точки $u \in \mathcal{R}$ отображение $\omega_u: T_u \mathcal{R} \rightarrow \mathfrak{g}$ сюръективно, причем $\text{Ker } \omega = TF$ – распределение, касательное к слоению $(\mathcal{R}, F)$;
 - (iii) производная Ли $L_X \omega$ равна нулю для любого векторного поля X из $\mathfrak{X}_F(\mathcal{R})$.

Указанное H -расслоение $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$ называется *слоеным расслоением* для $(M, \mathcal{F})$, а $(\mathcal{R}, F)$ называется *поднятым слоением*. Как известно, $(\mathcal{R}, F)$ – трансверсально параллелизуемое слоение, или e -слоение.

Везде далее мы будем предполагать, что группа G левыми сдвигами действует на факторпространстве G/H эффективно. При этом определения картанова слоения Блюменталя (см. [14]) и автора (см. [3]) эквивалентны.

Следующее предложение доказывается аналогично теореме 4 из работы автора [15] и не использует полноты слоения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – картаново слоение, заданное N -коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, $(\mathcal{R}(M, H), F)$ – слоеное расслоение над $(M, \mathcal{F})$ с проекцией $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$. Пусть $L = L(x)$, $x \in M$, – любой слой слоения $(M, \mathcal{F})$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u)$, $u \in \pi^{-1}(x)$, – слой поднятого слоения $(\mathcal{R}, F)$. Тогда ростковая группа голономии $\Gamma(L, x)$ слоя L изоморфна каждой из следующих групп:

- 1) подгруппе $H(\mathcal{L}) := \{a \in H \mid R_a(\mathcal{L}) = \mathcal{L}\}$ группы H ;
- 2) группе накрывающих преобразований регулярного накрывающего отображения $\pi|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \rightarrow L$;
- 3) группе $\mathcal{H}_v$, где $v = f_i(x)$, $x \in U_i$, образованной ростками локальных диффеоморфизмов из псевдогруппы голономии $\mathcal{H} = \mathcal{H}(M, \mathcal{F})$, оставляющих точку v на месте.

Перейдем к другой точке $u' \in \pi^{-1}(x)$; пусть $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(u')$. Тогда подгруппа $H(\mathcal{L})$ заменяется сопряженной подгруппой $H(\mathcal{L}')$ в группе Ли H . Поэтому корректно

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Группа голономии слоя L называется *несущественной*, если изоморфная ей (согласно предложению 5) подгруппа $H(\mathcal{L})$ группы Ли H имеет компактное замыкание в H . В противном случае группа голономии слоя L называется *существенной*.

4.4. Конформные слоения как картановы. Пусть $G = \text{Conf}(S^q)$ – группа Ли всех конформных преобразований q -мерной сферы S^q , где $q \geq 3$. Обозначим через H стационарную подгруппу Ли группы G в некоторой точке $x_0 \in S^q$. Тогда H может интерпретироваться как группа Ли всех конформных преобразований q -мерного евклидова пространства $\mathbb{E}^q$. Следовательно, $H = \text{Sim}(\mathbb{E}^q) = CO(q) \ltimes \mathbb{R}^q$ – группа Ли всех подобий пространства $\mathbb{E}^q$.

Будем рассматривать произвольное конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ коразмерности $q \geq 3$ как картаново слоение, моделируемое на эффективной трансверсальной картановой геометрии $\eta = (P(H, N), \alpha)$ типа (G, H) , где G и H – указанные выше группы Ли, N – конформное многообразие (возможно, несвязное), $P(H, N)$ – главное H -расслоение над N с нормальной конформной связностью α в смысле [16]. Пусть $(\mathcal{R}, F)$ – поднятое слоение для конформного $(M, \mathcal{F})$, а $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$ – проекция слоеного расслоения на M .

4.5. Конформные преобразования евклидова пространства. Будем обозначать элемент группы $H = \text{Sim}(\mathbb{E}^q) = \mathbb{R}^+ \cdot O(q) \ltimes \mathbb{R}^q$ парой $\langle \lambda \cdot A, a \rangle$, где $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $A \in O(q)$, $a \in \mathbb{R}^q$. При этом композиция отображений записывается в виде

$$\langle \lambda \cdot A, a \rangle \langle \mu \cdot B, b \rangle = \langle \lambda \mu \cdot AB, \lambda \cdot Ab + a \rangle,$$

где $\langle \lambda \cdot A, a \rangle, \langle \mu \cdot B, b \rangle \in H$. Положим $H^0 := \mathbb{R}^+ \cdot E \ltimes \mathbb{R}^q$.

ЛЕММА 2. Группа H^0 – нормальная подгруппа в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых элементов $\langle C, c \rangle \in H$ и $\langle \lambda \cdot E, a \rangle \in H^0$ существует элемент $\langle \lambda \cdot E, d \rangle = \langle \lambda \cdot E, Ca + (1 - \lambda)c \rangle \in H^0$, удовлетворяющий равенству $\langle C, c \rangle \langle \lambda \cdot E, a \rangle = \langle \lambda \cdot E, d \rangle \langle C, c \rangle$

ЛЕММА 3. Для каждой максимальной компактной подгруппы K в H пересечение $K \cap H^0$ равно единице группы H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $O(q)$ – максимальная компактная подгруппа в H , любая другая максимальная компактная подгруппа K в H сопряжена подгруппе $O(q)$. Заметим, что $H^0 = \{\langle \lambda \cdot E, a \rangle \mid \lambda \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^q\}$. Если $K = \langle \mu \cdot B, b \rangle O(q) \langle \mu \cdot B, b \rangle^{-1}$, где $\langle \mu \cdot B, b \rangle \in H$, $\mu \in \mathbb{R}^+$, $B \in O(q)$ и $b \in \mathbb{R}^q$, то

$$K = \{\langle A, (E - A)b \rangle \mid A \in O(q), b \in \mathbb{R}^q\}.$$

Следовательно, $K \cap H^0 = \langle E, 0 \rangle$, где $\langle E, 0 \rangle$ – единица группы H .

4.6. Доказательство теоремы 3. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – конформное слоение коразмерности $q \geq 3$, рассматриваемое как картаново слоение, моделируемое на картановой геометрии $(P(N, H), \omega)$, где $G = \text{Conf}(S^q)$, $H = CO(q) \ltimes \mathbb{R}^q$ и ω – нормальная конформная связность. Обозначим через $(\mathcal{R}(M, H), F)$ слоеное H -расслоение над $(M, \mathcal{F})$.

Предположим, что все группы голономии $H(u)$, $u \in \mathcal{R}$, относительно компактны.

Так как на $\mathcal{R}$ определено свободное собственное действие группы Ли H , то на $\mathcal{R}$ определено свободное собственное действие нормальной подгруппы $H^0 := \mathbb{R}^+ \cdot E \ltimes \mathbb{R}^q$ группы H . Поэтому пространство орбит $\widehat{\mathcal{R}} := \mathcal{R}/H^0$ – гладкое многообразие, а естественная проекция $r: \mathcal{R} \rightarrow \widehat{\mathcal{R}}$ на пространство орбит образует главное H^0 -расслоение. В этом случае на многообразии орбит $\widehat{\mathcal{R}} := \mathcal{R}/H^0$ определено свободное действие факторгруппы $H/H^0 = O(q)$, заданное по формуле $(uH^0)a = uaH^0$ для любых $uH^0 \in \widehat{\mathcal{R}}$ и $a \in O(q)$, причем пространство орбит $\widehat{\mathcal{R}}/O(q)$ совпадает с M , а проекция $\widehat{\pi}: \widehat{\mathcal{R}} \rightarrow M$ удовлетворяет равенству $\widehat{\pi} \circ r = \pi$. H -инвариантность слоения $(\mathcal{R}, F)$ влечет H^0 -инвариантность этого слоения, поэтому на $\widehat{\mathcal{R}}$ индуцировано слоение $\widehat{F}$, слои которого являются образами слоев слоения F при отображении r . Таким образом, $(\mathcal{R}(\widehat{\mathcal{R}}, H^0), F)$ – слоеное главное H^0 -расслоение со стандартным слоем $\mathbb{R}^{q+1}$, диффеоморфным H^0 , и проекцией $r: \mathcal{R} \rightarrow \widehat{\mathcal{R}}$ над слоением $(\widehat{\mathcal{R}}, \widehat{F})$.

Для любой точки $u \in \mathcal{R}$ и слоя $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u)$ сужение $r|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}$ – регулярное накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе $H^0(u) := \{b \in H^0 \mid R_b(\mathcal{L}) = \mathcal{L}\}$, на слой $\widehat{\mathcal{L}}$ слоения $(\widehat{\mathcal{R}}, \widehat{F})$. Заметим, что $H^0(u) = H(u) \cap H^0$, где $H(u) = \{a \in H \mid R_a(\mathcal{L}) = \mathcal{L}\}$. В силу предположения группа $H(u)$ относительно компактна. В этом случае замыкание группы $H(u)$, а следовательно, и сама группа $H(u)$ принадлежат некоторой максимальной компактной подгруппе K в H , сопряженной $O(q)$, поэтому $H^0(u) \subseteq K \cap H^0$. Согласно лемме 3 $K \cap H^0 = \{e\}$, где e – единица группы H . Таким образом, $H^0(u) = \{e\}$ и $r|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}$ – диффеоморфизм; следовательно, выполняются условия предложения 4, согласно которому существует слоеное сечение $\sigma: \widehat{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{R}$ слоеного главного H^0 -расслоения $(\mathcal{R}(\widehat{\mathcal{R}}, H^0), F)$. Сечение σ определяет тривиализацию этого расслоения по формуле

$$f: \mathcal{R} \rightarrow \widehat{\mathcal{R}} \times H^0: \sigma(u) \cdot h \mapsto (u, h) \quad \forall u \in \widehat{\mathcal{R}}, \quad \forall h \in H^0.$$

При этом $f(\sigma(u)) = (u, e)$ и $\sigma(ua) = \sigma(u) \cdot a \quad \forall a \in O(q)$. Равенства $\widehat{\pi} \circ r = \pi$ и $r \circ \sigma = \text{id}_{\widehat{\mathcal{R}}}$ влекут $\widehat{\pi} = \pi \circ \sigma$.

Итак, отождествляя $\widehat{\mathcal{R}}$ с $\sigma(\widehat{\mathcal{R}})$, мы получаем слоеную редукцию расслоения $(\mathcal{R}(M, H), F)$ к ортогональной подгруппе $O(q)$. Аналогично [17; п. 2.2.2] проверяется, что $(M, \mathcal{F})$ – картаново слоение типа $(\widehat{G}, O(q))$, где $\widehat{G} = O(q) \ltimes \mathbb{R}^q$ –

группа Ли всех изометрий евклидова пространства $\mathbb{E}^q$, а $(\widehat{R}(M, O(q)), \widehat{F})$ – его слоеное расслоение. Это означает, что слоение $(M, \mathcal{F})$ риманово. Кроме того, если картанова геометрия $\xi = (P(N, H), \omega)$, на которой моделируется слоение $(M, \mathcal{F})$, соответствует конформной геометрии $(N, [g])$, то указанная редукция слоеного расслоения $(\mathcal{R}(M, H), F)$ к компактной подгруппе $O(q)$ влечет редукцию H -расслоения $P(N, H)$ к подгруппе $O(q)$. Это означает существование такой римановой метрики $d \in [g]$ на N , что $(M, \mathcal{F})$ – риманово слоение, моделируемое на римановом многообразии (N, d) .

Обратно. Пусть существует риманова метрика $d \in [g]$ на N такая, что конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ является римановым, моделируемым на римановом многообразии (N, d) . Тогда существует редукция H -расслоения $P(N, H)$ к замкнутой подгруппе $O(q)$. Эта редукция индуцирует соответствующую слоеную редукцию слоеного расслоения $(\mathcal{R}(M, H), F)$ к подгруппе $O(q)$. В силу компактности группы $O(q)$ согласно предложению 5 все группы голономии исходного слоения $(M, \mathcal{F})$ относительно компактны.

§ 5. Полное нериманово конформное слоение трансверсально плоское

5.1. Полнота конформных слоений. Пусть $(\mathcal{R}, F)$ – поднятое слоение для конформного $(M, \mathcal{F})$, а $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$ – проекция слоеного расслоения на M . Как известно, $(\mathcal{R}, F)$ – трансверсально параллелизуемое слоение, или e -слоение.

Напомним (см. [4]), что e -слоение $(\mathcal{R}, F)$ называется *полным* (или $\mathfrak{N}$ -*полным*), если существует такое трансверсальное к $(\mathcal{R}, F)$ распределение $\mathfrak{N}$ на $\mathcal{R}$, что любое векторное поле на $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{N}}(\mathcal{R})$, для которого $\omega(X) = \text{const}$, является полным. Конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ называется *полным* (или $\mathfrak{M}$ -*полным*), если существует такое трансверсальное к $(M, \mathcal{F})$ распределение $\mathfrak{M}$, что поднятое e -слоение $(\mathcal{R}, F)$ является $\mathfrak{N}$ -полным, где $\mathfrak{N} = \pi^*\mathfrak{M}$. Другими словами, конформное слоение называется *полным*, если оно является полным картановым слоением в смысле [3].

ЛЕММА 4. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – конформное слоение коразмерности $q \geq 3$ со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$, накрытое расслоением $r: \widetilde{M} \rightarrow S^q$, где $f: \widetilde{M} \rightarrow M$ – некоторое накрывающее отображение для M . Тогда $(M, \mathcal{F})$ является $\mathfrak{M}$ -полным конформным слоением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $(M, \mathcal{F})$ есть $(\text{Conf}(S^q), S^q)$ -слоение, моделируемое на картановой геометрии $\eta_0 = (G(S^q, H), \omega_G)$, где $G = \text{Conf}(S^q)$, $H = CO(q) \ltimes \mathbb{R}^q$, ω_G – форма Маурера–Картана на группе G . Обозначим через $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$ слоеное H -расслоение для $(M, \mathcal{F})$. Рассмотрим

$$\widetilde{\mathcal{R}} = f^*\mathcal{R} = \{(u, x) \in \mathcal{R} \times \widetilde{M} \mid \pi(u) = f(x)\}$$

– прообраз H -расслоения $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$ при отображении $f: \widetilde{M} \rightarrow M$. Тогда $\widetilde{\pi}: \widetilde{\mathcal{R}} \rightarrow \widetilde{M}: (u, x) \mapsto x$ – главное H -расслоение, а $\widetilde{f}: \widetilde{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{R}: (u, x) \mapsto u$ – накрывающее отображение, причем $f \circ \widetilde{\pi} = \pi \circ \widetilde{f}$. Так как $r: \widetilde{M} \rightarrow S^q$ – субмерсия со связностью Эресмана $\mathfrak{M} = f^*\mathfrak{M}$, то определена сюръективная

субмерсия $\tilde{r}: \tilde{\mathcal{H}} \rightarrow G$ со связностью Эресмана $\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\pi}^* \mathfrak{M}$. На $\tilde{\mathcal{H}}$ индуцирована $\mathfrak{g}$ -значная 1-форма $\tilde{\omega}$ такая, что $\tilde{\omega} = \omega \circ \tilde{f}_*$, обладающая свойствами (i)–(iii) (см. 4.3) относительно слоения $(\tilde{M}, \tilde{F})$, где $\tilde{F} = \tilde{f}^* F$. Поскольку любое векторное поле $Y \in \mathfrak{X}_{\tilde{\mathcal{H}}}(\tilde{\mathcal{H}})$, для которого $\tilde{\omega}(Y) = \text{const} \in \mathfrak{g}$, проектируется в левоинвариантное векторное поле $Z := \tilde{r}_* Y$ на группе Ли G , для которого $\omega_G(Z) = \tilde{\omega}(Y) = \text{const} \in \mathfrak{g}$, то Y является полным векторным полем. Это означает, что $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}}) - \tilde{\mathfrak{M}}$ -полное конформное слоение. Отсюда следует, что $(M, \mathcal{F})$ есть $\mathfrak{M}$ -полное конформное слоение.

5.2. Окрестность слоя с существенной группой голономии. Следующая лемма доказана без предположения полноты конформного слоения.

ЛЕММА 5. *Для любого слоя L с существенной группой голономии конформного слоения $(M, \mathcal{F})$ существует такая открытая насыщенная окрестность $\mathcal{U}$, что $(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}})$ есть $(\text{Conf}(S^q), S^q)$ -слоение, причем замыкание $\bar{L}_{\alpha}$ любого слоя L_{α} из $\mathcal{U}$ содержит L .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N -коцикл $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$ задает конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ коразмерности $q \geq 3$. Так как это слоение не является римановым, то согласно теореме 3 существует слой L с существенной группой голономии. Из предложения 5 вытекает, что группа $H(\mathcal{L})$ содержит элемент вида $\langle \lambda \cdot A, a \rangle \in H$, где $\lambda \cdot A \in CO(q)$, $a \in \mathbb{R}^q$, удовлетворяющий по крайней мере одному из условий: 1) $\lambda \neq 1$; 2) $a \neq 0$. Точно так же, как в доказательстве теоремы 7 из [7], мы показываем, что локальный конформный диффеоморфизм γ риманова многообразия (N, g_N) из псевдогруппы голономии $\mathcal{H}$, соответствующий элементу $\langle \lambda \cdot A, a \rangle$, удовлетворяет в точке $v = f_i(x)$, $x \in L$, следующим условиям: $\gamma(v) = v$, $\gamma_{*v} = \lambda \cdot A$ и $a = db|_v$, где $\gamma^* g_N = e^b g_N$. Поэтому в терминологии работы [8] γ – существенное конформное преобразование в точке v . Если $\lambda \neq 1$, то можно считать, что $\lambda \in (0, 1)$. При этом существует такая окрестность $\mathcal{V}$ точки v , что $\gamma^n(z) \rightarrow v$ при $n \rightarrow +\infty$ для любого $z \in \mathcal{V}$. Если $\lambda = 1$, то, как доказано в [8], существует такая открытая окрестность $\mathcal{V} \subset V_i = f_i(U_i)$ точки v в N , что в любой точке y из $\mathcal{V}$ определена по крайней мере одна из последовательностей $\gamma^k(y)$, $\gamma^{-k}(y)$, где k – любое натуральное число, причем эта последовательность сходится к v при $k \rightarrow +\infty$.

Обозначим через U прообраз $\mathcal{V}$ при отображении f_i , т.е. $U = f_i^{-1}(\mathcal{V})$. Тогда $\mathcal{U} := \bigcup_{\alpha} L_{\alpha}$, где $L_{\alpha} \cap U \neq \emptyset$, $L_{\alpha} \in \mathcal{F}$, – связное открытое насыщенное подмножество в M . В силу свойства окрестности $\mathcal{V}$ для любого слоя L_{α} из $\mathcal{U}$ выполняется включение $L \subset \bar{L}_{\alpha}$.

Поскольку тензор Вейля W конформной кривизны риманова многообразия $(\mathcal{V}, g_N)$ инвариантен относительно конформных преобразований, то W не зависит от выбора точки $y \in \mathcal{V}$, следовательно $\|W\| = \text{const}$. Непосредственная проверка показывает, что при $\|W\| \neq 0$ любое локальное конформное преобразование риманова многообразия $(\mathcal{V}, g_N)$ является локальной изометрией риманова многообразия $(\mathcal{V}, h)$, где $h = \|W\| g_N$, следовательно $(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}})$ – риманово слоение. Противоречие с теоремой 3 показывает, что $W \equiv 0$ на $\mathcal{V}$. Если $q = \dim \mathcal{V} = 3$, то $W \equiv 0$, и вместо тензора Вейля нужно взять другой конформный инвариант – тензор Схоутена V . Аналогично проверяется, что $V \equiv 0$

на $\mathcal{V}$. Согласно теореме Вейля–Схоутена (см. [18]) тождества $W \equiv 0$ при $q \geq 4$ и $V \equiv 0$ при $q = 3$ означают, что q -мерное риманово многообразие $(\mathcal{V}, g_N)$ локально конформно плоское при любом $q \geq 3$. Отсюда вытекает, что $(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}})$ есть $(\text{Conf}(S^q), S^q)$ -слоение.

5.3. Неримановы конформные слоения. Напомним, что окрестность U_k из N -коцикла η , задающего слоение $(M, \mathcal{F})$, называется *отмеченной*, если существует другая связная окрестность U_m из η такая, что замыкание $\bar{U}_k$ включено в U_m и $f_k = f_m|_{U_k}$. При этом говорят, что U_k подчинена окрестности U_m . Заметим, что в любой точке из M существует отмеченная окрестность.

ЛЕММА 6. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – нериманово конформное слоение коразмерности $q \geq 3$, допускающее связность Эресмана $\mathfrak{M}$. Тогда $(M, \mathcal{F})$ – $\mathfrak{M}$ -полное трансверсально плоское конформное слоение, накрытое расслоением $r: \widehat{M} \rightarrow B$, где $f: \widehat{M} \rightarrow M$ – регулярное накрывающее отображение, удовлетворяющее теореме 2, а B равно либо $\mathbb{E}^q$, либо S^q . Более того, $B = \mathbb{E}^q$ тогда и только тогда, когда $(M, \mathcal{F})$ – трансверсально подобное слоение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $(M, \mathcal{F})$ – нериманово конформное слоение коразмерности $q \geq 3$, поэтому применима теорема 3, согласно которой существует слой L с существенной группой голономии. Согласно лемме 5 существует такая открытая насыщенная окрестность $\mathcal{U}$ слоя L , что $(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}})$ есть $(\text{Conf}(S^q), S^q)$ -слоение, не являющееся римановым. Так как $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ – связность Эресмана для $(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}})$, то по теореме 2 существует регулярное накрывающее отображение $f: \widehat{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$ такое, что слоение $(\widehat{\mathcal{U}}, \widehat{\mathcal{F}})$, где $\widehat{\mathcal{F}} := f^* \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$, образовано слоями локального тривиального расслоения $r: \widehat{\mathcal{U}} \rightarrow B$, где $B = (\text{Conf}(S^q), S^q)$ -многообразие. Поэтому на B существует такая риманова метрика g_B , относительно которой глобальная группа голономии Ψ слоения $(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}})$ является группой конформных преобразований риманова многообразия (B, g_B) . Так как группа голономии слоя L изоморфна стационарной подгруппе Ψ_z , где $z \in r(f^{-1}(L))$, то Ψ_z – существенная группа конформных преобразований (B, g_B) . Поэтому найдется существенное преобразование $\psi \in \Psi_z$. Тогда согласно лемме 5 из [7] в точке z существует такая открытая окрестность U , что подмножество $P = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \psi^n(U)$ риманова многообразия (B, g_B) конформно либо стандартной сфере S^q , либо евклидову пространству $\mathbb{E}^q$.

Случай 1. Пусть $B = S^q$; тогда согласно лемме 4 $(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}})$ является $\mathfrak{M}$ -полным конформным слоением. Отсюда вытекает, что $\mathcal{U}$ – замкнутое подмножество в M . Поэтому в силу связности M необходимо, чтобы $\mathcal{U} = M$. Таким образом, $(M, \mathcal{F})$ – $\mathfrak{M}$ -полное слоение, накрытое расслоением $r: \widehat{M} \rightarrow S^q$.

Случай 2. Пусть $B = \mathbb{E}^q$ и $\mathcal{U} = M$. Тогда аналогично лемме 4 получаем, что $(M, \mathcal{F})$ – $\mathfrak{M}$ -полное $(\text{Sim } \mathbb{E}^q, \mathbb{E}^q)$ -слоение, т.е. $(M, \mathcal{F})$ – полное трансверсально подобное слоение.

Случай 3. Предположим, что $B = \mathbb{E}^q$ и $\mathcal{U} \neq M$. Пусть $x \in U_i \cap L$, где U_i – окрестность из N -коцикла $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in J}\}$, задающего слоение, и $v = f_i(x)$. Можно считать, что $U_i \subset \mathcal{U}$. Поскольку $(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}})$ есть $(\text{Conf}(S^q), S^q)$ -слоение, его псевдогруппа голономии $\mathcal{H}$ является полной. Поэтому для существенно-локального конформного преобразования $\gamma \in \mathcal{H}$ в точке v найдется такая

открытая окрестность $V \subset f_i(U_i)$, что γ^n определено на V для любого целого числа n . Те же аргументы, что и при доказательстве леммы 5 работы [7], показывают, что подмножество $P = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n(V)$ риманова многообразия N конформно либо стандартной сфере S^q , либо евклидову пространству $\mathbb{E}^q$. В первом случае $B = S^q$, что противоречит предположению.

Таким образом, $P \cong \mathbb{E}^q \cong S^q \setminus \{a\}$. В силу $\mathfrak{M}$ -полноты конформного слоения $(M, \mathcal{F})$ любые два слоя этого слоения можно соединить $\mathfrak{M}$ -кривой. Так как $M \setminus \mathcal{U} \neq \emptyset$, то найдется $\mathfrak{M}$ -кривая $\sigma: [0, 1] \rightarrow M$, обладающая свойствами

$$\sigma([0, \epsilon)) \subset U_i \subset \mathcal{U}, \quad x = \sigma(0), \quad y = \sigma(\epsilon) \in M \setminus \mathcal{U}.$$

Можно считать, что U_i – отмеченная окрестность и $\sigma(0, \epsilon) \subset U_i \cap U_j$, где $y \in U_j$.

Поскольку $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, определен такой локальный конформный диффеоморфизм

$$\gamma_{ij}: V' \rightarrow V'', \quad V' = f_j(U_i \cap U_j), \quad V'' = f_i(U_i \cap U_j),$$

что $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ на $U_i \cap U_j$. Пусть $S_{(1)}^q$ и $S_{(2)}^q$ – два экземпляра стандартной сферы. Из того, что $(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}})$ есть $(\text{Conf}(S^q), S^q)$ -слоение, вытекает существование конформных вложений $\delta_{(1)}: V' \rightarrow S_{(1)}^q$, $\delta_{(2)}: V'' \rightarrow S_{(2)}^q$ и конформного диффеоморфизма $\Gamma: S_{(1)}^q \rightarrow S_{(2)}^q$, удовлетворяющих равенству

$$\delta_{(2)} \circ \gamma_{ij} = \Gamma \circ \delta_{(1)}.$$

Обозначим через N_v компоненту связности многообразия N , содержащую v . Так как U_i – отмеченная окрестность, то существует связная окрестность U_m , которой она подчинена, т.е. $\bar{U}_i \subset U_m$, поэтому $f_m(y) \in N_v$. Из определения $\mathcal{U}$ и включения $U_i \subset \mathcal{U}$ вытекает, что $f_m(y) = a$ и $\gamma_{mj}(a) = v'$, где $v' = f_j(y)$. Отсюда следует, что $P \cup a \cong S^q$ – компактное q -мерное подмногообразие в N , поэтому $P \cup a \cong S^q$ – замкнутое подмножество в N . В силу равенства размерностей объединение $P \cup a$ открыто в N . Таким образом, $N_v = S^q$.

При этом $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup L(y)$ – открытое насыщенное подмножество в M , а $(\mathcal{U}', \mathcal{F}_{\mathcal{U}'})$ – конформное слоение со связностью Эресмана, накрытое локально тривиальным расслоением $r: \widehat{\mathcal{U}'} \rightarrow S^q$. Таким образом, для слоения $(\mathcal{U}', \mathcal{F}_{\mathcal{U}'})$ имеет место случай 1, следовательно, $M = \mathcal{U}'$ и слоение $(M, \mathcal{F})$ накрыто расслоением $\widehat{M} \rightarrow S^q$.

Из доказанного следует, что слоение $(M, \mathcal{F})$ накрыто расслоением $\widehat{M} \rightarrow \mathbb{E}^q$ тогда и только тогда, когда реализуется случай 2, т.е. когда $(M, \mathcal{F})$ – трансверсально подобное слоение.

§ 6. Доказательство теорем 4–6

6.1. Доказательство теоремы 4. Предположим, что выполняется (i) и $\mathfrak{M}$ – связность Эресмана для $(M, \mathcal{F})$. Тогда в силу леммы 6 $(M, \mathcal{F})$ есть полное конформное слоение, т.е. (i) $\implies$ (ii).

Обратно, пусть $(M, \mathcal{F})$ – полное конформное слоение коразмерности $q \geq 3$. Это означает существование такого q -мерного трансверсального распределения $\mathfrak{M}$ на M , что $(M, \mathcal{F})$ является $\mathfrak{M}$ -полным картановым слоением. Поэтому

из предложения 3, доказанного автором в [3], вытекает, что $\mathfrak{M}$ – связность Эресмана для слоения $(M, \mathcal{F})$. Таким образом, (ii) $\implies$ (i).

6.2. Глобальный аттрактор глобальной группы голономии. Пусть Ψ – группа гомеоморфизмов топологического пространства B . Непустое замкнутое инвариантное (относительно Ψ) подмножество $\mathcal{M} \subset B$ называется *аттрактором* группы Ψ , если существует такое открытое инвариантное подмножество $W \subset B$, что замыкание орбиты $\text{Cl}(\Psi \cdot z)$ любой точки $z \in W$ содержит $\mathcal{M}$. Аттрактор W группы Ψ называется *глобальным*, если $W = B$.

Напомним, что *минимальным множеством* группы гомеоморфизмов Ψ топологического пространства B называется непустое замкнутое инвариантное подмножество $\mathcal{K}$ в B , не имеющее собственных подмножеств, обладающих этим свойством. Конечное минимальное множество называется *тривиальным*.

Заметим, что предельное множество $\Lambda(\Psi)$ произвольной подгруппы Ψ группы $\text{Conf}(S^q)$ равно пересечению замыканий всех неодноточечных орбит этой группы, т.е. $\Lambda(\Psi) = \bigcap \text{Cl}(\Psi \cdot z)$, где $z \in S^q$ и $\Psi \cdot z \neq z$. Если предельное множество $\Lambda(\Psi)$ конечно, то оно либо пустое, либо состоит из одной или двух точек, при этом группа Ψ называется *элементарной*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть Ψ – произвольная счетная существенная подгруппа группы $\text{Conf}(S^q)$. Тогда группа Ψ имеет глобальный аттрактор, представляющий собой либо одну или две неподвижные точки, либо нетривиальное минимальное множество, совпадающее с предельным множеством $\Lambda(\Psi)$ группы Ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму Цорна, нетрудно показать, что любая группа гомеоморфизмов компактного многообразия имеет минимальное множество.

Предположим, что группа Ψ имеет неподвижную точку a . Тогда $\mathcal{K} = \{a\}$ – минимальное множество группы Ψ . Так как $\Psi_a = \Psi$ – существенная группа, то из доказательства леммы 6 вытекает: либо a – единственная неподвижная точка группы Ψ , либо существует еще одна неподвижная точка b , причем $\Lambda(\Psi) = \{a\}$ или $\Lambda(\Psi) = \{a, b\}$ соответственно.

Предположим теперь, что группа Ψ не имеет неподвижных точек. По условию найдется преобразование $\gamma \in \Psi$, существенное в некоторой точке $v \in S^q$. Как показано при доказательстве леммы 6, существует такая окрестность V точки v , что множество $P = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n(V)$ совпадает либо со стандартной сферой S^q , либо с $S^q \setminus \{a\}$, где $a \in S^q$. Кроме того, окрестность V обладает тем свойством, что замыкание $\text{Cl}(\Psi \cdot z)$ орбиты $\Psi \cdot z$ любой точки $z \in V$ содержит v . Следовательно, это свойство выполняется для всех $z \in P$. Поскольку группа Ψ не имеет неподвижных точек, если $P = S^q \setminus \{a\}$, то орбита $\Psi \cdot a$ содержит точку из P . Это влечет включение

$$\Psi \cdot v \subset \text{Cl}(\Psi \cdot z) \quad \forall z \in S^q.$$

При этом возможно, что орбита $\Psi \cdot v$ состоит из двух точек v, a ; тогда $\Psi \cdot v$ – тривиальное минимальное множество, являющееся глобальным аттрактором. В противном случае $\mathcal{M} = \text{Cl}(\Psi \cdot v)$ – нетривиальное минимальное множество,

являющееся глобальным аттрактором, и $\mathcal{M} = \Lambda(\Psi)$. Так как v – произвольная точка с существенной стационарной подгруппой, то отсюда вытекает доказываемое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В предложении 6 не исключается случай, когда $\Lambda(\Psi) = S^q$.

6.3. Доказательство теоремы 5. Если $(M, \mathcal{F})$ – полное риманово слоение, то (см., например, [3; следствие 8]) замыкание каждого слоя образует минимальное множество, т.е. выполняется 1).

Если $(M, \mathcal{F})$ – полное трансверсально подобное слоение, то утверждение 2) вытекает из результатов работы автора [3].

Предположим теперь, что $(M, \mathcal{F})$ – полное конформное слоение, не являющееся трансверсально подобным. Тогда из теоремы 4, леммы 6 и теоремы 2 вытекает существование такого регулярного покрывающего отображения $f: \widehat{M} \rightarrow M$, что индуцированное слоение $\widehat{\mathcal{F}} = f^*\mathcal{F}$ образовано слоями локально тривиального расслоения $r: \widehat{M} \rightarrow S^q$. Кроме того, определен изоморфизм $\rho: \Phi(f) \rightarrow \Psi$ группы покрывающих преобразований $\Phi(f)$ на глобальную группу голономии $\Psi \subset \text{Conf}(S^q)$ слоения $(M, \mathcal{F})$, причем Ψ – существенная группа конформных преобразований.

1. Пусть группа Ψ является элементарной. Тогда утверждение (i) в п. 3) следует из предложения 6.

2. Если группа Ψ неэлементарная, то из предложения 6 вытекает, что слоение $(M, \mathcal{F})$ имеет глобальный аттрактор $\mathcal{M} := f(r^{-1}(\Lambda(\Psi)))$, представляющий собой нетривиальное минимальное множество этого слоения, причем $\mathcal{M}$ равно замыканию любого слоя L с существенной группой голономии, как и в случае 2). Таким образом, утверждение (ii) из п. 3) доказано.

В случаях 2) и 3) $M_0 := M \setminus f(r^{-1}(\Lambda(\Psi)))$ – открытое подмногообразие в M , не содержащее слоев с существенными группами голономии. Согласно теореме 3 отсюда следует, что $(M_0, \mathcal{F}_{M_0})$ – риманово слоение со связностью Эресмана $\mathfrak{M}_{M_0}$. Из теоремы 1 вытекает, что замыкание слоев риманова слоения $(M_0, \mathcal{F}_{M_0})$ образует риманово слоение с особенностями $(M_0, \mathcal{F}_0)$. Поэтому замыкание $\mathcal{L}$ в M_0 произвольного слоя L из M_0 является вложенным подмногообразием в M_0 и в M . Таким образом, для замыкания $\bar{L}$ в M любого слоя L из M_0 выполняется равенство $\bar{L} = \mathcal{L} \cup \mathcal{M}$.

6.4. Доказательство теоремы 6. Как известно (см. [12]), минимальное множество любого слоения либо является замкнутым слоем, либо представляет собой замыкание несобственного слоя. Поэтому если собственное слоение имеет минимальное множество $\mathcal{M}$, то $\mathcal{M}$ – замкнутый слой. Утверждения 1) и 2) следуют из утверждений 1) и 2) теоремы 5. Предположим теперь, что $(M, \mathcal{F})$ не является трансверсально подобным слоением. Так как слоение $(M, \mathcal{F})$ собственное, то его глобальная группа голономии Ψ является дискретной подгруппой группы $\text{Conf}(S^q)$. Таким образом, Ψ – элементарная клейнова группа. Поэтому реализуется случай 3), (i) из теоремы 5. Следовательно, объединение M_0 незамкнутых слоев – связное открытое всюду плотное подмногообразие в M . Кроме того, $(M_0, \mathcal{F}_{M_0})$ – риманово слоение, все слои которого замкнуты. Поскольку $\mathfrak{M}_{M_0}$ – связность Эресмана для этого слоения, то согласно теореме 1 пространство его слоев $M_0/\mathcal{F}_{M_0}$ – связный гладкий q -мерный

орбиifold. Следовательно, замыкание $\bar{L}_\alpha$ в M произвольного слоя L_α из M_0 равно $L_\alpha \cup \mathcal{M}$. Аналогичное утверждение верно и для трансверсально подобного слоения.

§ 7. Надстроечные слоения и их применение

7.1. Надстроечные слоения. Конструкция надстроечного слоения принадлежит Хефлигеру (Haefliger) и состоит в следующем. Пусть B и T – гладкие связные многообразия, $\rho: \pi_1(B, b) \rightarrow \text{Diff}(T)$ – гомоморфизм групп. Пусть $G := \pi_1(B, b)$ и $\Psi := \rho(G)$. Рассмотрим универсальное накрывающее отображение $\hat{p}: \hat{B} \rightarrow B$. Зададим правое действие группы G на произведении многообразий $\hat{B} \times T$:

$$\Theta: \hat{B} \times T \times G \rightarrow \hat{B} \times T: (x, t, g) \rightarrow (x \cdot g, \rho(g^{-1})(t)),$$

где $\hat{B} \rightarrow \hat{B}: x \rightarrow x \cdot g$ – накрывающее преобразование накрытия $\hat{p}$, индуцированное элементом $g \in G$, действующим на $\hat{B}$ справа.

Отображение $p: M := (\hat{B} \times T)/G \rightarrow B = \hat{B}/G$ определяет локально тривиальное расслоение над B со стандартным слоем T , ассоциированное с главным расслоением $\hat{p}: \hat{B} \rightarrow B$ со структурной группой G . Пусть $\Theta_g := \Theta|_{\hat{B} \times \{t\} \times \{g\}}$. Так как

$$\Theta_g(\hat{B} \times \{t\}) = \hat{B} \times \rho(g^{-1})(t) \quad \forall t \in T,$$

то действие дискретной группы G сохраняет тривиальное слоение $F := \{\hat{B} \times \{t\} \mid t \in T\}$ произведения $\hat{B} \times T$. Поэтому факторотображение

$$f_0: \hat{B} \times T \rightarrow (\hat{B} \times T)/G = M$$

индуцирует на M гладкое слоение $\mathcal{F}$, слои которого трансверсальны слоям расслоения $p: M \rightarrow B$. Пара $(M, \mathcal{F})$ называется *надстроечным слоением* и обозначается через $\text{Sus}(T, B, \rho)$. Группа диффеоморфизмов $\Psi := \rho(G)$ многообразия T называется *глобальной группой голономии* надстроечного слоения $(M, \mathcal{F})$.

7.2. Доказательство теоремы 7. Пусть Ψ – произвольная существенная подгруппа конформной группы $\text{Conf}(S^q)$, $q \geq 3$, с конечным семейством образующих $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$.

Обозначим через S_m^2 двумерную сферу с m ручками. Фундаментальная группа S_m^2 равна $\langle a_i, b_i, i = 1, \dots, m \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_m b_m a_m^{-1} b_m^{-1} \rangle$. Положим $B = S_m^2$, $T := S^q$ и определим гомоморфизм групп $\rho: \pi_1(B, b) \rightarrow \text{Conf}(S^q)$, задав его на образующих: $\rho(a_i) := \psi_i$, $i = 1, \dots, m$, $\rho(b_i) := \text{Id}_{S_m^2}$ – единица группы Ψ . Тогда надстроечное слоение $(M, \mathcal{F}) := \text{Sus}(S^q, S_m^2, \rho)$ является двумерным неримановым конформным слоением коразмерности $q \geq 3$. Оно накрыто тривиальным расслоением $\mathbb{R}^2 \times S^q \rightarrow S^q$ и имеет глобальную группу голономии Ψ . По свойству надстроечного слоения $(q+2)$ -многообразие M является пространством локально тривиального расслоения со стандартным слоем S^q над базой S_m^2 . Компактность S^q и S_m^2 влечет компактность M .

Предположим теперь, что $\Psi \subset \text{Conf}(S^q)$ имеет счетное семейство образующих $\{\psi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Пусть $B := \mathbb{R}^2 \setminus A$ – плоскость без дискретного подмножества $A = \{(i, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid i \in \mathbb{N}\}$ и $b = (1, 1) \in B$. Тогда $G = \pi_1(B, b) = \langle g_i, i \in \mathbb{N} \rangle$ – свободная группа со счетным семейством образующих. Равенства $\rho_\infty(g_i) := \psi_i$, где $i \in \mathbb{N}$, определяют гомоморфизм групп $\rho_\infty: \pi_1(B, b) \rightarrow \text{Conf}(S^q)$. Надстроечное слоение $(M, \mathcal{F}) := \text{Sus}(S^q, B, \rho_\infty)$ является конформным слоением коразмерности $q \geq 3$ с глобальной группой голономии Ψ .

Заметим, что $(M, \mathcal{F})$ – риманово слоение тогда и только тогда, когда Ψ – несущественная группа конформных преобразований сферы S^q . При этом, как известно, на S^q существует риманова метрика, конформно эквивалентная канонической, относительно которой Ψ – группа изометрий. В силу компактности S^q эта риманова метрика полная, следовательно, надстроечное риманово слоение $(M, \mathcal{F})$ также полное.

Если Ψ – существенная группа конформных преобразований сферы S^q , то $(M, \mathcal{F})$ – нериманово конформное слоение, допускающее связность Эресмана, образованную касательными пространствами к трансверсальному расслоению $p: M \rightarrow B$. Согласно теореме 4 конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ полное.

7.3. Исключительные и экзотические минимальные множества групп диффеоморфизмов. Пусть $\mathcal{K}$ – минимальное множество группы гомеоморфизмов Ψ многообразия B . Минимальное множество $\mathcal{K}$ с пустой внутренностью называется *исключительным*, если $\mathcal{K}$ есть канторово множество, и *экзотическим*, если $\mathcal{K}$ не является вполне несвязным топологическим подпространством в B .

Утверждение следствия 3 вытекает из равенства $\mathcal{M} = f(r^{-1}(\Lambda(\Psi)))$, полученного в теореме 5.

Пусть B_k – гладкое замкнутое 3-многообразие, гомеоморфное связной сумме $\#_{i=1}^k S^1 \times S^2$ k экземпляров произведения $S^1 \times S^2$. Тогда $\pi_1(B_k, b) = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ есть свободная группа ранга k .

ПРИМЕР 2. Пусть задано конечное множество непересекающихся замкнутых шаров $\mathcal{B}_1^+, \dots, \mathcal{B}_k^+, \mathcal{B}_1^-, \dots, \mathcal{B}_k^-$ в сфере S^q и такое конформное преобразование $\psi_i \in \text{Conf}(S^q)$, что $\psi_i(\text{int}(\mathcal{B}_i^+)) = \text{ext}(\mathcal{B}_i^-)$. Предполагается, что для любых $\mathcal{B}_i^+$ и $\mathcal{B}_i^-$ существует диффеоморфизм сферы S^q , переводящий эти шары в круглые шары. Группа Ψ с образующими $\psi_1, \dots, \psi_k$ называется *группой Шоттки*. Как известно (см., например, [19]), группа Шоттки Ψ является свободной группой ранга k , т.е. $\Psi = \langle \psi_1, \dots, \psi_k \rangle$, и имеет минимальное множество $\Lambda(\Psi)$, гомеоморфное канторову подмножеству отрезка $[0, 1]$. Следовательно, топологическая размерность $\Lambda(\Psi)$ равна нулю.

Определим изоморфизм групп $\rho_k: \pi_1(B_k, b) \rightarrow \Psi$, полагая $\rho_k(g_i) = \psi_i$, $i = 1, \dots, k$. Надстроечное слоение $(M_k, \mathcal{F}_k) := \text{Sus}(S^q, B_k, \rho_k)$ является полным конформным слоением с глобальной группой голономии Ψ . Поэтому согласно следствию 3 слоение $(M_k, \mathcal{F}_k)$ имеет глобальный аттрактор, представляющий собой исключительное минимальное множество.

ПРИМЕР 3. Напомним сначала определение кривой Менгера. Пусть $S = I \times I$ – единичный квадрат. Разобьем его на девять квадратов размером $1/3 \times 1/3$, затем удалим из S открытый квадрат $(1/3, 2/3) \times (1/3, 2/3)$. Повторим

эту процедуру с каждым из оставшихся восьми квадратов, затем продолжим по индукции. В результате из S будет удалено счетное семейство открытых квадратов и мы получим компактное подмножество $\mathcal{S}$, называемое ковром Серпинского. Пусть $Q = I \times I \times I$ – единичный куб, причем каждая его грань P_j , $j = 1, \dots, 6$, содержит копию $\mathcal{S}_j$ ковра Серпинского. Пусть $p_j: Q \rightarrow P_j$ – ортогональная проекция. Тогда множество $\mathcal{M} := \bigcap p_j^{-1}(\mathcal{S}_j)$ называется кривой Менгера. Топологическая размерность кривой Менгера $\mathcal{M}$ равна 1.

Бурдоном доказано (см. [20]), что для любого четного натурального числа $k \geq 6$ существует изоморфизм χ_k группы

$$\Gamma_k := \langle s_i, i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \mid s_i^3, [s_i, s_{i+1}] \rangle$$

на некоторую клейнову подгруппу $\Psi \subset \text{Conf}(S^4)$, предельное множество $\Lambda(\Psi)$ которой гомеоморфно кривой Менгера. Следовательно, $\Lambda(\Psi)$ – экзотическое минимальное множество группы Ψ в S^4 .

Пусть гомоморфизм групп $\rho_k: \pi_1(B_k, b) \rightarrow \Psi$ задан на образующих равенствами $\rho_k(g_i) := \chi_k(s_i)$, $i = 1, \dots, k$. Тогда определено надстроечное слоение

$$(M_k, \mathcal{F}_k) := \text{Sus}(S^4, B_k, \rho_k)$$

с глобальной группой голономии Ψ . Пусть $f_k: \widehat{M}_k \rightarrow M_k$ – регулярное накрывающее отображение, удовлетворяющее теореме 2; тогда слоение $(M_k, \mathcal{F}_k)$ накрыто расслоением $r_k: \widehat{M}_k \rightarrow S^4$. Согласно следствию 3 $\mathcal{M}_k = f_k(r_k^{-1}(\Lambda(\Psi)))$ – глобальный аттрактор слоения $(M_k, \mathcal{F}_k)$, являющийся экзотическим минимальным множеством.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть $(M_k, \mathcal{F}_k)$ – любое слоение коразмерности q , построенное в примерах 2 или 3. При этом $q \geq 2$ для слоения $(M_k, \mathcal{F}_k)$ из примера 2 и $q = 4$ для $(M_k, \mathcal{F}_k)$ из примера 3. Если $f_k: \widehat{M}_k \rightarrow M_k$ – регулярное накрывающее отображение, удовлетворяющее теореме 2, то индуцированное слоение $\widehat{\mathcal{F}}_k = f_k^* \mathcal{F}_k$ образовано слоями локально тривиального расслоения $r_k: \widehat{M}_k \rightarrow S^q$, причем M_k , как указано выше, является фактормногообразием $\widehat{M}_k/G$, где $G \cong \pi_1(B_k, b)$ – свободная группа ранга k . Поскольку группа Ψ действует собственноразрывно на открытом всюду плотном подмножестве $S^q \setminus \Lambda(\Psi)$ в S^q , то $M_k^0 := f_k(r_k^{-1}(S^q \setminus \Lambda(\Psi)))$ – открытое насыщенное всюду плотное подмножество в компактном многообразии M_k , а индуцированное слоение $(M_k^0, \mathcal{F}_{M_k^0})$ риманово и пространство его слоев есть гладкий q -мерный орбиформ $(S^q \setminus \Lambda(\Psi))/\Psi$.

Список литературы

- [1] P. Molino, *Riemannian foliations*, Progr. Math., **263**, Birkhäuser, Boston, MA, 1988.
- [2] E. Salem, “Riemannian foliations and pseudogroups of isometries”, Application D in: P. Molino, *Riemannian foliations*, Progr. Math., **263**, Birkhäuser, Boston, MA, 1988.
- [3] Н. И. Жукова, “Минимальные множества картановых слоений”, *Динамические системы и оптимизация*, Тр. МИАН, **256**, Наука, М., 2007, 115–147; англ. пер.: N. I. Zhukova, “Minimal sets of Cartan foliations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **256:1** (2007), 105–135.

- [4] L. Conlon, “Transversally parallelizable foliations of codimension two”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **194** (1974), 79–102.
- [5] I. Vaisman, “Conformal foliations”, *Kodai Math. J.*, **2**:1 (1979), 26–37.
- [6] R. W. Sharpe, *Differential geometry. Cartan’s generalization of Klein’s Erlangen program*, Grad. Texts in Math., **166**, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [7] Д. В. Алексеевский, “Группы конформных преобразований римановых пространств”, *Матем. сб.*, **89(131)**:2(10) (1972), 280–296; англ. пер.: D. V. Alekseevskii, “Groups of conformal transformations of Riemannian spaces”, *Math. USSR-Sb.*, **18**:2 (1972), 285–301.
- [8] J. Ferrand, “Sur un lemme d’Alekseevskii relatif aux transformations conformes”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **284**:2 (1977), 121–123.
- [9] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 1, Наука, М., 1981; пер. с англ.: Sh. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, v. 1, Interscience Publ., New York–London–Sydney, 1963.
- [10] R. A. Blumenthal, J. J. Hebda, “Ehresmann connections for foliations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **33**:4 (1984), 597–611.
- [11] А. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, Мир, М., 1990; пер. с англ.: A. L. Besse, *Einstein manifolds*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **10**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [12] A. Candel, L. Conlon, *Foliations*, v. I, Grad. Stud. Math., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [13] Р. Годаман, *Алгебраическая топология и теория пучков*, ИЛ, М., 1961; пер. с фр.: R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.
- [14] R. A. Blumenthal, “Cartan submersions and Cartan foliations”, *Illinois J. Math.*, **31**:2 (1987), 327–343.
- [15] N. I. Zhukova, “Complete foliations with transversal rigid geometries and their basic automorphisms”, *Вестн. РУДН. Сер. матем.*, 2009, № 2, 14–35.
- [16] Ш. Кобаяси, *Группы преобразований в дифференциальной геометрии*, Наука, М., 1986; пер. с англ.: Sh. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1972.
- [17] C. Frances, “Essential conformal structures in Riemannian and Lorentzian geometry”, *Recent developments in pseudo-Riemannian geometry*, ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008, 231–260.
- [18] U. Hertrich-Jeromin, *Introduction to Möbius differential geometry*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 300, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [19] М. Капович, “Kleinian groups in higher dimensions”, *Geometry and dynamics of groups and spaces*, *Progr. Math.*, **265**, Birkhäuser, Basel, 2007, 487–564.
- [20] M. Bourdon, “Sur la dimension de Hausdorff de l’ensemble limite d’une famille de sous-groupes convexes co-compacts”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **325**:10 (1997), 1097–1100.

Н. И. Жукова (N. I. Zhukova)

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

E-mail: n.i.zhukova@rambler.ru

Поступила в редакцию

18.11.2010 и 12.05.2011