Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Новиков, Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $e(3)$, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 5, 127–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7823>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 10:59:23

УДК 517.938.5

Д. В. Новиков

Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $e(3)$

Изучается интегрируемый случай В. В. Соколова на $e(3)^*$. Это гамильтонова система с двумя степенями свободы, где гамильтониан и дополнительный интеграл являются однородными многочленами степеней 2 и 4 соответственно. Данная система интересна тем, что, как оказывается, связанные совместные поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла являются некомпактными поверхностями. Найдены критические точки отображения момента, их индексы, построена бифуркационная диаграмма, найдено слоение Лиувилля системы, доказана полнота гамильтоновых векторных полей, порожденных гамильтонианом и дополнительным интегралом.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: интегрируемые гамильтоновы системы, полнота векторных полей, бифуркационная диаграмма, отображение момента, некомпактные особенности.

§ 1. Введение

Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная алгебра Ли с базисом $e_1, \dots, e_n$, а $\mathfrak{g}^*$ – соответствующая коалгебра с дуальным базисом $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$, т.е. $\epsilon^i(e_j) = \delta_j^i$. Пусть $x_1, \dots, x_n$ – аффинные координаты на $\mathfrak{g}^*$, соответствующие базису $e_1, \dots, e_n$, а c_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$: $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Скобка Пуассона–Ли* на пространстве $\mathfrak{g}^*$ задается следующей формулой:

$$\{f, g\}(x) = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

где f и g – гладкие функции на $\mathfrak{g}^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Уравнения

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\},$$

задающие динамическую систему на $\mathfrak{g}^*$, где H – гладкая функция (гамильтониан) на $\mathfrak{g}^*$, называются *уравнениями Эйлера* на коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00748-а), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3224.2010.1), Программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № 2.1.1.3704) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы.

Эти уравнения часто встречаются в механике и физике. Например, различные задачи о движении твердого тела задаются уравнениями Эйлера на коалгебре Ли $e(3)^*$. Соответствующее векторное поле называется *косым градиентом* и обозначается $\text{sgrad } H$.

Рассмотрим следующее семейство скобок Пуассона–Ли на пространстве $\mathbb{R}^6$:

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, R_j\} = \varepsilon_{ijk} R_k, \quad \{R_i, R_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} S_k,$$

где S_i и R_i – компоненты трехмерных векторов S и R , ε_{ijk} – знак перестановки $(123) \rightarrow (ijk)$, а $\varkappa$ – произвольное действительное число. При $\varkappa > 0$ ($\varkappa = 1$) получаем, что скобка соответствует алгебре Ли $\text{so}(4)$, при $\varkappa = 0$ – алгебре Ли $e(3)$, а при $\varkappa < 0$ ($\varkappa = -1$) – алгебре Ли $\text{so}(3, 1)$. Функции Казимира:

$$f_1 = \varkappa S^2 + R^2, \quad f_2 = \langle S, R \rangle.$$

Классические интегрируемые случаи на этом семействе алгебр Ли включают:

случай Эйлера

$$H = \langle AS, S \rangle, \quad K = \langle S, S \rangle;$$

случай Лагранжа

$$H = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + \beta S_3^2) + \alpha R_3, \quad K = S_3;$$

случай Ковалевской

$$H = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + 2S_3^2) + \alpha R_1, \\ K = \left(\frac{S_1^2 - S_2^2}{2} - \alpha R_1 \right)^2 + \varkappa \alpha^2 \left(\frac{S_1^2 - S_2^2}{2} - \alpha R_1 \right) + (S_1 S_2 - \alpha R_2)^2.$$

Здесь A – постоянная симметричная матрица, α, β – произвольные действительные параметры.

Рассмотрим гамильтонианы вида

$$H = \langle AS, S \rangle + \langle b, S \times R \rangle,$$

где A – постоянная симметричная матрица, $b \neq 0$ – постоянный вектор, $\times$ – векторное произведение. Подобные гамильтонианы могут представлять интерес, например, в рамках модели Пуанкаре–Жуковского, описывающей движение твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной вихревой жидкостью (см. [1]). Другие возможные приложения квадратичных гамильтонианов обсуждаются в книге [2].

Новые интегрируемые случаи уравнений Эйлера с квадратичным гамильтонианом и интегралом четвертой степени на этом семействе алгебр Ли были найдены в работах [3]–[5]. Случай Соколова:

$$H_1 = -\frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 + \alpha S_2^2 + S_1 R_2 - S_2 R_1, \\ K_1 = Q_3(\varkappa S^2 - R^2) - \alpha Q_1^2 + \frac{\varkappa}{\alpha} Q_2^2 + \left(\frac{\varkappa}{\alpha} - \alpha \right) Q_3^2, \quad \text{где } Q = S \times R.$$

Случай Борисова–Мамаева:

$$H_2 = \left(\alpha - \frac{\varkappa}{4\alpha} \right) S_1^2 + 2\alpha S_2^2 + \alpha S_3^2 + S_1 R_2 - S_2 R_1, \\ K_2 = 4\alpha^2 S_2^2 S^2 + 4\alpha S_2 (S_2 Q_3 - S_3 Q_2) + Q_2^2 + Q_3^2 - S_1^2 R^2, \quad \text{где } Q = S \times R.$$

Можно считать, что $\varkappa$ равно 1, -1 или 0. Действительно, замена

$$R' = \frac{1}{\sqrt{|\varkappa|}} R, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{\sqrt{|\varkappa|}}$$

при $\varkappa \neq 0$ приводит к этому случаю.

Как известно (см., например, [6]), ограничение скобки Пуассона–Ли на орбиты общего положения коприсоединенного представления соответствующей группы Ли задает гамильтонову систему на

$$M_{c,g}^4 = \{(S, R) \mid f_1(S, R) = c, f_2(S, R) = g\}, \quad c \neq 0.$$

В нашем случае можно считать, что $c = \pm 1$. Действительно, замена

$$S = \sqrt{|c|} S', \quad R = \sqrt{|c|} R'$$

приводит к этому случаю, при этом векторное поле $\text{sgrad } H$ просто умножается на $\sqrt{|c|}^3$. Здесь существенно, что гамильтониан является однородным. Поэтому в настоящей работе мы считаем, что $c = 1$.

Кроме того, следуя работе [7], без ограничения общности можно полагать, что $g \geq 0$, поскольку при замене

$$(S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3) \rightarrow (-S_1, S_2, S_3, R_1, -R_2, -R_3)$$

f_1, H, K сохраняются, f_2 меняет знак.

Далее, можно считать, что $\alpha > 0$, так как замена $S_1 \rightarrow -S_1, R_1 \rightarrow -R_1, \alpha \rightarrow -\alpha$ приводит к этому случаю.

Как и в работе [7], при $\varkappa > 0$ можно исследовать только случай $0 < \alpha \leq \sqrt{\varkappa}$, так как при замене $S_1 \leftrightarrow S_2, R_1 \leftrightarrow R_2, \alpha \rightarrow \frac{\varkappa}{\alpha}$ инварианты f_1, f_2 сохраняются, а гамильтониан и дополнительный интеграл меняют знаки (что не влияет на топологию).

Под изучением системы мы понимаем исследование слоения Лиувилля, слоями которого являются связные компоненты поверхностей уровня гамильтониана и дополнительного интеграла. Слоение Лиувилля случая Борисова–Мамаева на $e(3)$ исследовано в работе [8], где указанный случай назван случаем Соколова. Лиувиллево слоение интегрируемой системы Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$ описано в работах [7], а также в работах [9] и [10]. В настоящей работе мы будем изучать строение интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $e(3)$. Интересно посмотреть, что происходит при ретракции с $\mathfrak{so}(4)$ на $e(3)$. В настоящей работе исследовано, что происходит при указанной ретракции с бифуркационной диаграммой для отображения, заданного гамильтонианом (см. §3), и для отображения момента (см. §5). Оказывается, что в этих двух случаях

настоящие бифуркационные диаграммы являются пересечением бифуркационной диаграммы, полученной при помощи предельного перехода, с образом соответствующего отображения.

В этой работе мы исследуем слоение Лиувилля. Оказывается, что в исследуемом случае связанные совместные поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла могут быть торами или цилиндрами. Мы опишем топологию изоэнергетической поверхности гамильтониана (см. теорему 1), бифуркационные диаграммы отображения, заданного гамильтонианом (см. утверждение 3), и отображения момента (см. теорему 4), индексы критических точек (см. утверждение 4), а также совместные поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла (см. теорему 5) для случая Соколова на $e(3)$. Отметим также, что нам удалось доказать полноту полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$, что является важным условием в теореме Лиувилля (см. § 7).

Изучаемый случай характерен тем, что, в отличие от большинства известных случаев, на бифуркационной диаграмме кроме критических значений будут и некритические бифуркационные значения. Кроме того, большой интерес представляет и анализ перестроек случая Соколова, который мы тоже проводим (см. § 9).

Как известно, основы теории топологической классификации были заложены в работах [11]–[13] и других. Указанный новый подход в изучении интегрируемых систем, предложенный А. Т. Фоменко, был затем продолжен А. Т. Фоменко и Х. Цишангом (см., например, работу [14]). Ими был открыт топологический инвариант интегрируемых систем (именуемый инвариантом Фоменко–Цишанга). Это граф с числовыми метками, являющийся полным инвариантом таких систем: две системы лиувиллево эквивалентны, если и только если графы Фоменко–Цишанга совпадают. Далее школа А. Т. Фоменко разработала методы вычисления меченых молекул (см., например, работу [15]). Бифуркационные диаграммы многих важных интегрируемых систем были вычислены в книге [16]. В работах [17], [18], [8] и других были найдены классифицирующие инварианты для многих конкретных физических и механических интегрируемых систем. Результаты теории топологической классификации, полученные школой А. Т. Фоменко, подробно изложены в книге [19].

Сама общая задача – определить и классифицировать некомпактные перестройки (по аналогии с компактной классификацией), – в рамках которой в настоящей статье проводится исследование случая Соколова, поставлена А. Т. Фоменко.

Автор выражает глубокую благодарность А. Т. Фоменко и А. А. Ошемкову за постановку задачи, постоянное внимание и помощь. Без их участия, консультирования по всем вопросам, поддержки эта статья никогда бы не была написана.

§ 2. Бифуркационные значения

Дадим ряд нужных определений применительно к нашей ситуации. Мы следуем изложению из книги [16].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $F: X \rightarrow Y$ – дифференцируемое отображение многообразий. Отображение называется *локально тривиальным* над точкой

$y_0 \in Y$, если существует такая окрестность U точки y_0 в Y , что $F^{-1}(U)$ диффеоморфно $F^{-1}(y_0) \times U$, и этот диффеоморфизм φ замыкает диаграмму (p_2 – проекция на второй сомножитель)

$$\begin{array}{ccc} F^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & F^{-1}(y_0) \times U \\ \downarrow F & \swarrow p_2 & \\ U & & \end{array}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Бифуркационным множеством (или бифуркационной диаграммой) Σ отображения F называется множество бифуркационных значений, т.е. тех точек $y \in Y$, над которыми F не является локально тривиальным.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Точка $x \in X$ называется *критической* для отображения F , если ранг дифференциала отображения F в точке x не максимален. *Критическими значениями* называют образы критических точек при отображении F .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Критические значения принадлежат бифуркационной диаграмме.

Действительно, если точка $x \in X$ критическая для отображения F , то по определению ранг дифференциала отображения F в точке x не максимален. С другой стороны, если отображение F локально тривиально над точкой $y = F(x)$, то F равно $p_2 \circ \varphi$ в некой окрестности точки x . Но $p_2 \circ \varphi$ – отображение постоянного ранга, равного размерности Y . В критической же точке x ранг F меньше чем размерность Y .

Мы будем искать бифуркационную диаграмму для отображения момента $H \times K: M_{1,g}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k)$ и для отображения, заданного гамильтонианом $H: M_{1,g}^4 \rightarrow \mathbb{R}(h)$.

§ 3. Бифуркационные значения гамильтониана

Бифуркационные значения гамильтониана – значения, являющиеся бифуркационными для отображения $H: M_{1,g}^4 \rightarrow \mathbb{R}(h)$. Критическими точками гамильтониана являются те точки, где косой градиент гамильтониана равен нулю.

Выпишем явно поле $\text{sgrad } H$:

$$\begin{aligned} \{S_1, H\} &= 2\alpha S_2 S_3 + S_1 R_3 - R_1 S_3, & \{R_1, H\} &= 2\alpha S_2 R_3 + \varkappa S_1 S_3 - R_1 R_3, \\ \{S_2, H\} &= \frac{2\varkappa}{\alpha} S_1 S_3 + S_2 R_3 - R_2 S_3, & \{R_2, H\} &= \frac{2\varkappa}{\alpha} S_1 R_3 + \varkappa S_2 S_3 - R_2 R_3, \\ \{S_3, H\} &= -2\left(\alpha + \frac{\varkappa}{\alpha}\right) S_1 S_2, \\ \{R_3, H\} &= -2\left(\alpha R_1 S_2 + \frac{\varkappa}{\alpha} S_1 R_2\right) + R_1^2 + R_2^2 - \varkappa S_1^2 - \varkappa S_2^2. \end{aligned}$$

Можно убедиться, что при $\varkappa = 1$ (случай $\text{so}(4)^*$) мы получим в точности формулы (5) из работы [7].

Приравняв нулю $\text{sgrad } H$, получаем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для произвольного $\varkappa \neq -\alpha^2$ критические точки гамильтониана образуют следующие двупараметрические семейства (при этом $\text{sgrad } K$ в этих точках тоже равен нулю):

- 1) $(0, 0, S_3, 0, 0, R_3)$;
- 2) $(0, S_2, 0, R_1, R_2, 0)$, где $R_1^2 + R_2^2 - \varkappa S_2^2 - 2\alpha R_1 S_2 = 0$;
- 3) $(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, \pm\sqrt{\varkappa}S_2, \pm\sqrt{\varkappa}S_3)$ при $\varkappa \geq 0$;
- 4) $(S_1, 0, 0, R_1, R_2, 0)$, где $R_1^2 + R_2^2 - \varkappa S_1^2 - \frac{2\varkappa}{\alpha} R_2 S_1 = 0$;
- 5) $(S_1, 0, S_3, \pm\sqrt{\varkappa}S_1, \frac{2\varkappa}{\alpha}S_1, \pm\sqrt{\varkappa}S_3)$ при $\varkappa \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждение 1 – это обобщение предложения 1 из статьи [7].

Выпишем отдельно приведенные выше семейства для случая $e(3)^*$ ($\varkappa = 0$):

- 1) $(0, 0, S_3, 0, 0, R_3)$;
- 2) $(0, S_2, 0, R_1, R_2, 0)$, где $R_1^2 + R_2^2 - 2\alpha R_1 S_2 = 0$;
- 3) $(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, 0, 0)$;
- 4) $(S_1, 0, S_3, 0, 0, 0)$.

Мы изучаем систему на $M_{1,g}^4$, поэтому надо добавить еще условия $f_1 = 1$, $f_2 = g$.

Рассмотрим, что будет происходить при ретракции $\text{so}(4)^*$ к $e(3)^*$, т.е. при переходе к пределу при $\varkappa \rightarrow +0$. Нам понадобится переформулировать предложение 2 из работы [7] для случая произвольного $\varkappa > 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для любого $\varkappa > 0$ критические точки гамильтониана на $M_{1,g}^4$ перечислены ниже:

- 1) при всех $0 \leq g \leq \frac{1}{2\sqrt{\varkappa}}$ имеются четыре точки вида

$$(0, 0, S_3, 0, 0, R_3), \quad \text{где } \varkappa S_3^2 + R_3^2 = 1, \quad S_3 R_3 = g,$$

при этом $h = k = 0$;

- 2) при всех $0 \leq g \leq \frac{1}{2\sqrt{\varkappa}}$ имеются четыре точки вида

$$\left(0, S_2, 0, \frac{1}{2\alpha S_2} - \frac{\varkappa}{\alpha} S_2, \frac{g}{S_2}, 0\right), \quad \text{где } S_2^2 = \frac{1}{2\varkappa} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2(1 - 4\varkappa g^2)}{4\varkappa^2(\alpha^2 + \varkappa)}},$$

при этом

$$h = \frac{\alpha \pm \sqrt{(\varkappa + \alpha^2)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}, \quad k = \frac{1}{4\alpha}(1 - 4\varkappa g^2);$$

- 3) при всех $g > \frac{\sqrt{\varkappa}}{2\varkappa + 4\alpha^2}$ имеются четыре точки вида

$$(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, \sqrt{\varkappa}S_2, \sqrt{\varkappa}S_3),$$

где

$$S_2^2 = \frac{1 - 2\sqrt{\varkappa}g}{4\alpha^2}, \quad S_3^2 = \frac{g(2\varkappa + 4\alpha^2) - \sqrt{\varkappa}}{4\sqrt{\varkappa}\alpha^2},$$

при этом

$$h = -\frac{1}{4\alpha}(1 - 2\sqrt{\varkappa}g), \quad k = \frac{1}{4\alpha}(1 - 4\varkappa g^2);$$

4) при всех $0 \leq g \leq \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}$ имеются четыре точки вида

$$\left(S_1, 0, 0, \frac{g}{S_1}, \frac{\alpha}{2\kappa S_1} - \alpha S_1, 0 \right), \quad \text{где } S_1^2 = \frac{1}{2\kappa} \pm \sqrt{\frac{1 - 4\kappa g^2}{4\kappa(\kappa + \alpha^2)}},$$

при этом

$$h = \frac{-\sqrt{\kappa} \mp \sqrt{(\kappa + \alpha^2)(1 - 4\kappa g^2)}}{2\sqrt{\kappa}\alpha}, \quad k = -\frac{\alpha}{4\kappa}(1 - 4\kappa g^2);$$

5) при $g > \frac{\alpha^2}{2\sqrt{\kappa}(\alpha^2 + 2\kappa)}$ имеются четыре точки вида

$$\left(S_1, 0, S_3, \sqrt{\kappa}S_1, \frac{2\kappa}{\alpha}S_1, \sqrt{\kappa}S_3 \right),$$

где

$$S_1^2 = \frac{\alpha^2(1 - 2\kappa g)}{4\kappa^2}, \quad S_3^2 = \frac{g\sqrt{\kappa}(2\alpha^2 + 4\kappa) - \alpha^2}{4\kappa^2},$$

при этом

$$h = \frac{\alpha}{4\kappa}(1 - 2\sqrt{\kappa}g), \quad k = -\frac{\alpha}{4\kappa}(1 - 4\kappa g^2).$$

Посмотрим теперь, что происходит с этими точками при предельном переходе $\kappa \rightarrow +0$:

1) эта серия критических точек сохраняется, $\lim_{\kappa \rightarrow +0} \frac{1}{2\kappa} = +\infty$, поэтому для любого $g \geq 0$ получаем две критических точки вида $(0, 0, \pm g, 0, 0, \pm 1)$, при этом $h = k = 0$;

2) поскольку выполнено

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa \rightarrow +0} \frac{1}{2\kappa} + \sqrt{\frac{\alpha^2(1 - 4\kappa g^2)}{4\kappa^2(\alpha^2 + \kappa)}} &= +\infty, & \lim_{\kappa \rightarrow +0} \frac{1}{2\kappa} - \sqrt{\frac{\alpha^2(1 - 4\kappa g^2)}{4\kappa^2(\alpha^2 + \kappa)}} &= \frac{4\alpha^2 g^2 + 1}{4\alpha^2}, \\ \lim_{\kappa \rightarrow +0} \frac{\alpha + \sqrt{(\kappa + \alpha^2)(1 - 4\kappa g^2)}}{2\kappa} &= +\infty, \\ \lim_{\kappa \rightarrow +0} \frac{\alpha - \sqrt{(\kappa + \alpha^2)(1 - 4\kappa g^2)}}{2\kappa} &= \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}, \end{aligned}$$

то для любого $g \geq 0$ будут две критических точки вида

$$\left(0, S_2, 0, \frac{1}{2\alpha S_2}, \frac{g}{S_2}, 0 \right), \quad \text{где } S_2^2 = \frac{4\alpha^2 g^2 + 1}{4\alpha^2},$$

при этом

$$h = \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}, \quad k = \frac{1}{4\alpha};$$

3) поскольку выполнено

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\kappa}}{2\kappa + 4\alpha^2} &= 0, & \lim_{\kappa \rightarrow +0} \frac{1 - 2\sqrt{\kappa}g}{4\alpha^2} &= \frac{1}{4\alpha^2}, \\ \lim_{\kappa \rightarrow +0} \frac{g(2\kappa + 4\alpha^2) - \sqrt{\kappa}}{4\sqrt{\kappa}\alpha^2} &= +\infty, \end{aligned}$$

то при $g > 0$ мы получаем некритические бифуркационные значения

$$h = -\frac{1}{4\alpha}, \quad k = \frac{1}{4\alpha};$$

4) поскольку выполнено

$$\lim_{\varkappa \rightarrow +0} \frac{-\sqrt{\varkappa} \mp \sqrt{(\varkappa + \alpha^2)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\sqrt{\varkappa}\alpha} = \mp\infty, \quad \lim_{\varkappa \rightarrow +0} \frac{\alpha}{4\varkappa}(1 - 4\varkappa g^2) = -\infty,$$

то здесь нет точек бифуркации;

5) поскольку выполнено

$$\lim_{\varkappa \rightarrow +0} \frac{\alpha}{4\varkappa}(1 - 2\sqrt{\varkappa}g) = +\infty, \quad \lim_{\varkappa \rightarrow +0} \frac{\alpha}{4\varkappa}(1 - 4\varkappa g^2) = -\infty,$$

то здесь тоже нет точек бифуркации.

Итак, на основании предельного перехода мы получили некий список значений, подозрительных на бифуркационные. Оказывается, что полученные значения действительно являются бифуркационными и других бифуркационных значений нет, как показывает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Бифуркационные значения гамильтониана случая Соколова на $e(3)$ (при $\varkappa = 0$) являются следующими кривыми на плоскости (g, h) :*

1) $h = 0, g \in \mathbb{R}$;

2) $h = \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}, g \in \mathbb{R}$;

3) $h = -\frac{1}{4\alpha}, g \in \mathbb{R}$;

причем точки вида 1), 2) являются критическими значениями, а точки вида 3) – некритическими бифуркационными значениями.

Рис. 1. Бифуркационные значения гамильтониана

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, докажем, что критические точки имеют указанный выше вид. Из $\{S_3, H\} = -2\alpha S_1 S_2 = 0$ следует, что $S_1 = 0$ или $S_2 = 0$. Рассматривая два этих случая и приравнявая $\text{sgrad } H$ нулю, мы и получаем

приведенные выше четыре серии. Добавляя условия $f_1 = 1$, $f_2 = g$, получаем серии 1) и 2) из утверждения 2.

То, что точки вида 3) являются бифуркационными значениями, следует из теоремы 1, где показано, что при переходе через точки вида 3) меняется топологический тип изоэнергетической поверхности.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Бифуркационная диаграмма отображения, заданного гамильтонианом H и интегралом площадей f_2 , совпадает с пересечением бифуркационной диаграммы, полученной с помощью ретракции с $so(4)$, с образом отображения, заданного гамильтонианом и интегралом площадей.

На рис. 1 представлены бифуркационные значения гамильтониана (сплошными линиями показаны критические значения, штриховыми – некритические бифуркационные значения).

§ 4. Топология изоэнергетической поверхности

Будем теперь искать топологию изоэнергетической поверхности

$$Q_{g,h}^3 = \{(S, R) \mid f_1(S, R) = 1, f_2(S, R) = g, H(S, R) = h\}$$

для случая Соколова при регулярных значениях (g, h) , т.е. при (g, h) , не принадлежащих бифуркационной диаграмме. Фиксируем значение вектора $S = (S_1, S_2, S_3)$ и рассмотрим относительно R систему

$$\begin{cases} S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3 = g, \\ S_2 R_1 - S_1 R_2 = -\frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 + \alpha S_2^2 - h. \end{cases} \quad (4.1)$$

Эта система задает прямую l в пространстве $\mathbb{R}^3(R)$, если векторы (S_1, S_2, S_3) и $(S_2, -S_1, 0)$ линейно независимы. А они зависимы, только если $S_1 = S_2 = 0$. В этом случае $h = 0$. Но прямая $h = 0$ всегда принадлежит бифуркационной диаграмме. Прямая l пересекает сферу $R^2 = 1 - \varkappa S^2$ не более чем в двух точках. Множество точек S , для которых существует пересечение, есть образ поверхности $Q_{g,h}^3$ при проекции. Обозначим его через $P_{g,h}^3$. Прямая l пересекает сферу тогда и только тогда, когда

$$(\rho(0, l))^2 \leq 1 - \varkappa S^2, \quad (4.2)$$

$$(\rho(0, l))^2 = \frac{g^2}{S^2} + \frac{(\alpha S_2^2 - \frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 - h)^2}{S_1^2 + S_2^2} \leq 1 - \varkappa S^2, \quad (4.3)$$

где $\rho(0, l)$ – расстояние от прямой l до начала координат, причем равенство соответствует случаю, когда прямая пересекается со сферой по одной точке, а строгое неравенство – по двум.

Следовательно, множество $P_{g,h}^3$ задается неравенством

$$S^2 \left(\alpha S_2^2 - \frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 - h \right)^2 + (\varkappa S^4 - S^2 + g^2)(S_1^2 + S_2^2) \leq 0. \quad (4.4)$$

Обозначим

$$v = \alpha S_2^2 - \frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 - h, \quad u = S_1^2 + S_2^2, \quad z = S_3^2.$$

В новых переменных неравенство (4.4) перепишется в виде

$$\kappa uz^2 + (2\kappa u^2 - u + v^2)z + u(v^2 + g^2 + \kappa u^2 - u) \leq 0. \quad (4.5)$$

Теперь подставляем $\kappa = 0$.

Неравенство (4.5) превращается в следующее:

$$(v^2 - u)z + u(v^2 - u + g^2) \leq 0. \quad (4.6)$$

Если $v^2 - u > 0$, то $z = u = 0$, откуда $S = 0$.

Посмотрим, что будет, когда $v^2 - u = 0$. В этом случае получаем $ug^2 = 0$. Если $g \neq 0$, то получаем $u = v = 0$, откуда $S_1 = S_2 = 0$ и $h = 0$. Мы уже знаем, что прямая $h = 0$ принадлежит бифуркационной диаграмме, но оказывается, что эта прямая не влияет на топологию $Q_{g,h}^3$, т.е. при проходе на плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$ через прямую $h = 0$, не пересекая параболу $h = \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$, топологический тип $Q_{g,h}^3$ не меняется. Дальше считаем, что $v^2 - u < 0$. Поскольку $z, u \geq 0$, то проекция множества точек (v, u, z) , удовлетворяющих (4.6), на плоскость (v, u) задается следующим неравенством:

$$v^2 - u < 0. \quad (4.7)$$

При этом если $v^2 - u + g^2 \leq 0$, то $z \geq 0$, если $v^2 - u + g^2 > 0$, то $z \geq -\frac{u(v^2 - u + g^2)}{v^2 - u}$.

Вернемся теперь к переменным S_1, S_2 и посмотрим, как неравенство (4.7) перепишется в них:

$$S_1^2 + S_2^2 > (\alpha S_2^2 - h)^2, \quad (4.8)$$

т.е. проекция $\pi_{S_1, S_2}(P_{g,h}^3)$ множества $P_{g,h}^3$ на плоскость (S_1, S_2) задается неравенством

$$S_1^2 > (\alpha S_2^2 - h)^2 - S_2^2. \quad (4.9)$$

Заметим, что если (S_1, S_2) – решение системы неравенств (4.9), то $(-S_1, S_2)$, $(S_1, -S_2)$, $(-S_1, -S_2)$ – тоже решения. Поэтому достаточно рассматривать $S_1, S_2 \geq 0$.

Обозначим $x = S_2^2$, $y = S_1^2$. Тогда в координатах (x, y) область, заданная неравенством (4.9), ограничена графиком функции $y = (\alpha x - h)^2 - x$. Причем если $y \geq (\alpha x - h)^2 - x + g^2$, то $z \geq 0$, а если $(\alpha x - h)^2 - x < y < (\alpha x - h)^2 - x + g^2$, то $z \geq -\frac{u(v^2 - u + g^2)}{v^2 - u}$.

Дискриминант трехчлена $y_1 = (\alpha x - h)^2 - x$ равен $4\alpha h + 1$. Дискриминант трехчлена $y_2 = (\alpha x - h)^2 - x + g^2$ равен $4\alpha h + 1 - 4g^2$. Мы получили уже известные нам бифуркационные значения. Произведение корней первого трехчлена положительно, сумма корней равна $2\alpha h + 1$.

Возможны следующие три существенно различных расположения графиков (и соответственно разные типы $Q_{g,h}^3$).

1) $h < -\frac{1}{4\alpha}$. Оба дискриминанта отрицательны. Проекция $P_{g,h}^3$ на плоскость (S_2, S_1) представлена на рис. 2. При этом над областью, закрашенной светлым, находятся два луча $|S_3| \geq \sqrt{-\frac{u(v^2 - u + g^2)}{v^2 - u}}$, над областью, закрашенной темным, находится прямая $S_3 \in \mathbb{R}$, над незакрашенной областью находится пустое множество.

 Рис. 2. Проекция $P^3_{g,h}$ на плоскость (S_2, S_1) при $h < -\frac{1}{4\alpha}$

Образ проекции $P^3_{g,h}$ диффеоморфен несвязному объединению двух полупространств. Для получения $Q^3_{g,h}$ нам нужно склеить два экземпляра $P^3_{g,h}$ по их границе. При склеивании двух полупространств по границе получается $\mathbb{R}^3$, поэтому $Q^3_{g,h}$ диффеоморфно $2\mathbb{R}^3$.

2) $-\frac{1}{4\alpha} < h < \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$, $h \neq 0$. Дискриминант трехчлена y_1 положителен, а трехчлена y_2 – отрицателен. Проекция $P^3_{g,h}$ на плоскость (S_2, S_1) представлена на рис. 3. При этом над областью, закрашенной светлым, находятся два луча $|S_3| \geq \sqrt{-\frac{u(v^2 - u + g^2)}{v^2 - u}}$, над областью, закрашенной темным, находится прямая $S_3 \in \mathbb{R}$, над незакрашенной областью находится пустое множество.

 Рис. 3. Проекция $P^3_{g,h}$ на плоскость (S_2, S_1) при $-\frac{1}{4\alpha} < h < \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$, $h \neq 0$

Можно убедиться, что образ проекции $P^3_{g,h}$ в данном случае диффеоморфен $\mathbb{R}^3(S_1, S_2, S_3)$ с выброшенной трубчатой окрестностью координатного креста $0S_2S_3$. При склейке двух экземпляров $P^3_{g,h}$ мы получим двумерный диск с тремя дырками, умноженный на $\mathbb{R}$. Чтобы понять это, надо разбить $P^3_{g,h}$ на части, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси $0S_2$. Сначала это будет

плоскость без диска, затем две полуплоскости, после этого опять плоскость без диска. При склейке двух плоскостей без диска получается тоже плоскость без диска, которую можно рассматривать как цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$. При склейке двух полуплоскостей получаются две плоскости, которые можно рассматривать как цилиндр без двух прямых, параллельных оси. В итоге мы получаем цилиндр, умноженный на интервал, из которого выкинули две прямые, параллельные оси цилиндра, или открытый диск с тремя дырками, умноженный на $\mathbb{R}$.

3) $h > \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$. Проекция $P_{g,h}^3$ на плоскость (S_2, S_1) представлена на рис. 4. При этом над областью, закрашенной светлым, находятся два луча $|S_3| \geq \sqrt{-\frac{u(v^2 - u + g^2)}{v^2 - u}}$, над областью, закрашенной темным, находится прямая $S_3 \in \mathbb{R}$, над незакрашенной областью находится пустое множество.

Рис. 4. Проекция $P_{g,h}^3$ на плоскость (S_2, S_1) при $h > \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$

Диффеоморфизмом можно превратить $P_{g,h}^3$ в прямое произведение фигуры, изображенной на рис. 5, на $\mathbb{R}$. При склейке двух фигур, изображенных на рис. 5, по границе, обозначенной штриховой линией, получается двумерный тор T^2 с выколотыми двумя точками. Чтобы понять это, нужно начать склеивать две фигуры по радиусам, обозначенным штриховыми стрелками на рис. 5. При обходе окружности будут склеиваться отрезки по двум точкам и получатся окружности, кроме случая, когда радиусы являются вертикальными лучами, изображенными сплошными линиями. При склейке этих лучей по одной точке будет получаться прямая, т.е. окружность без точки. В итоге получаем тор с выколотыми двумя точками. Чтобы окончательно получить $Q_{g,h}^3$, нужно еще умножить полученный тор без двух точек на прямую. Покажем, что полученное многообразие диффеоморфно диску с тремя дырками, умноженному на $\mathbb{R}$, т.е. $Q_{g,h}^3$ из предыдущего пункта. Будем рассматривать тор как сферу с ручкой. Тор без одной точки – это сфера без точки с ручкой, или плоскость с ручкой. При утолщении плоскости с ручкой мы получим открытый диск с двумя замкнутыми дырками (полученное множество открытое). Но у нас утолщенный тор с двумя выброшенными точками, что то же самое, что и диск с тремя дырками, умноженный на $\mathbb{R}$.

Рис. 5. Фигура из прямого произведения

Итак, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Топология изоэнергетической поверхности уровня $Q_{g,h}^3$ при регулярных, т.е. не принадлежащих бифуркационным значениям гамильтониана H , значениях (g, h) имеет следующие типы:*

- 1) $2\mathbb{R}^3$ при $h < -\frac{1}{4\alpha}$;
- 2) двумерный диск с тремя дырками, умноженный на $\mathbb{R}$, при $h > -\frac{1}{4\alpha}$, $h \neq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$, $h \neq 0$.

§ 5. Бифуркационная диаграмма отображения момента

Рассмотрим теперь отображение момента для случая Соколова $H \times K$:

$$\{(S, R) \mid f_1(S, R) = 1, f_2(S, R) = g\} \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k),$$

заданное формулой $(H \times K)(S, R) = (H(S, R), K(S, R))$. Точка (S, R) будет критической тогда и только тогда, когда $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ будут линейно зависимыми. Удобно перейти от переменных S и R к переменным S и Q . Аналогично тому, как это сделано в работе [7], можно показать, что при $S \neq 0$ это будет диффеоморфизм $M_{1,g}^4$ на свой образ. Поэтому бифуркационную диаграмму можно искать в переменных (S, Q) . При этом скобка перепишется следующим образом:

$$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, Q_j\} = \epsilon_{ijk} Q_k, \quad \{Q_i, Q_j\} = q \epsilon_{ijk} S_k,$$

где $q = \varkappa S^2 - R^2 = 2\varkappa S^2 - 1$.

Мы также будем использовать следующее полезное тождество:

$$Q^2 = S^2 R^2 - g^2 = \frac{1 - q^2}{4\varkappa} - g^2, \quad \varkappa \neq 0.$$

При $\varkappa = 0$ это тождество выглядит так: $Q^2 = S^2 - g^2$.

Обозначим $2\alpha Q_3 - q$ через A , $q + 2\frac{\varkappa}{\alpha}Q_3$ через B .

Найдем координаты $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$:

$$\begin{aligned}\text{sgrad } H &= \left(2\alpha S_2 S_3 - Q_2, \frac{2\varkappa}{\alpha} S_1 S_3 + Q_1, \right. \\ &\quad \left. - 2\left(\frac{\varkappa}{\alpha} + \alpha\right) S_1 S_2, S_2 A, S_1 B, -2\left(\frac{\varkappa}{\alpha} S_1 Q_2 + \alpha S_2 Q_1\right) \right), \\ \{S_1, K\} &= Q_2 A, \quad \{S_2, K\} = Q_1 B, \quad \{S_3, K\} = -2\left(\frac{\varkappa}{\alpha} + \alpha\right) Q_1 Q_2, \\ \{Q_1, K\} &= \left[2\frac{\varkappa}{\alpha} (S_2 Q_3 - S_3 Q_2) + q S_2 \right] A, \\ \{Q_2, K\} &= [2\alpha (S_3 Q_1 - S_1 Q_3) + q S_1] B, \\ \{Q_3, K\} &= 4\varkappa Q_3 (S_1 Q_2 - S_2 Q_1) - 2q \left(\alpha S_2 Q_1 + \frac{\varkappa}{\alpha} S_1 Q_2 \right).\end{aligned}$$

Нам понадобится переформулировать теорему 2 и теорему 3 из работы [7] для произвольного $\varkappa > 0$.

ТЕОРЕМА 2. При $g = 0$ и $\varkappa > 0$ бифуркационная диаграмма состоит из частей двух парабол P_1 и P_2 (касającychся в начале координат) и двух горизонтальных отрезков U и L (касającychся соответствующих парабол в их вершинах):

$$\begin{aligned}P_1 &= \left\{ (h, k) \mid k = \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h; \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \varkappa}}{2\varkappa} \leq h \leq \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \varkappa}}{2\varkappa} \right\}, \\ P_2 &= \left\{ (h, k) \mid k = -\alpha h^2 - h; \frac{-\sqrt{\varkappa} - \sqrt{\alpha^2 + \varkappa}}{2\sqrt{\varkappa}\alpha} \leq h \leq \frac{-\sqrt{\varkappa} + \sqrt{\alpha^2 + \varkappa}}{2\sqrt{\varkappa}\alpha} \right\}, \\ U &= \left\{ (h, k) \mid k = \frac{1}{4\alpha}; -\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \varkappa}}{2\varkappa} \right\}, \\ L &= \left\{ (h, k) \mid k = -\frac{\alpha}{4\varkappa}; \frac{-\sqrt{\varkappa} - \sqrt{\alpha^2 + \varkappa}}{2\sqrt{\varkappa}\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha}{2\varkappa} \right\}.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. При $g > 0$, $\varkappa > 0$ и $\alpha \geq \sqrt{\varkappa}$ бифуркационная диаграмма состоит из следующих кусков:

$$\begin{aligned}P_1 &= \left\{ k = \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2; \right. \\ &\quad \left. \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa} \leq h \leq \frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa} \right\}, \\ P_2 &= \left\{ k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa g^2}{\alpha}; \right. \\ &\quad \left. \frac{-\sqrt{\varkappa} - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\sqrt{\varkappa}\alpha} \leq h \leq \frac{-\sqrt{\varkappa} + \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\sqrt{\varkappa}\alpha} \right\}, \\ U &= \left\{ k = \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}; -\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa} \right\},\end{aligned}$$

$$L = \left\{ k = -\frac{\alpha(1-4\kappa g^2)}{4\kappa}; \frac{-\sqrt{\kappa} - \sqrt{(\alpha^2 + \kappa)(1-4\kappa g^2)}}{2\sqrt{\kappa}\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha}{2\kappa} \right\},$$

$$E_1 = \left\{ k = -(1-2\sqrt{\kappa}g)h; -\frac{\sqrt{\kappa}g}{\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha g}{\sqrt{\kappa}} \right\},$$

$$E_2 = \{ k = -(1+2\sqrt{\kappa}g)h; h_1 \leq h \leq h_2 \},$$

где для h_1 и h_2 , задающих концы отрезка E_2 , возможны следующие три случая:

- (а) если $0 < g \leq \frac{\sqrt{\kappa}}{2\kappa + 4\alpha^2}$, то $h_1 = -\frac{\alpha}{\sqrt{\kappa}}g$ и $h_2 = \frac{\sqrt{\kappa}}{\alpha}g$;
- (б) если $\frac{\sqrt{\kappa}}{2\kappa + 4\alpha^2} \leq g \leq \frac{\alpha^2}{2\sqrt{\kappa}(\alpha^2 + 2\kappa)}$, то $h_1 = -\frac{1-2\sqrt{\kappa}g}{4\alpha}$ и $h_2 = \frac{\sqrt{\kappa}}{\alpha}g$;
- (с) если $\frac{\alpha^2}{2\sqrt{\kappa}(\alpha^2 + 2\kappa)} < g < \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}$, то $h_1 = -\frac{\alpha}{\sqrt{\kappa}}g$ и $h_2 = \frac{\alpha}{4\kappa}(1-2\sqrt{\kappa}g)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В работе [7] указанная теорема 3 сформулирована для $0 < \alpha \leq 1$ и $\kappa = 1$. При подстановке произвольного $\kappa > 0$ условие $0 < \alpha \leq 1$ перейдет в условие $0 < \alpha \leq \sqrt{\kappa}$. Однако при предельном переходе $\kappa \rightarrow +0$ условие $0 < \alpha \leq \sqrt{\kappa}$ нарушается, поэтому нам нужно было переформулировать эту теорему для $\alpha \geq \sqrt{\kappa}$, для этого нужно сделать замены $\alpha' = \frac{\kappa}{\alpha}$, $h' = -h$, $k' = -k$ и $g' = g$. При этом $P_1 \leftrightarrow P_2$, $U \leftrightarrow L$, $E_1 \leftrightarrow E_1$, а вид E_2 изменится.

На рис. 6 изображена бифуркационная диаграмма для случая Соколова на $so(4)$, соответствующая случаю (б) в теореме 3.

Рис. 6. Бифуркационная диаграмма отображения момента для случая $so(4)$, соответствующая случаю (б) теоремы 3

В пределе при $\kappa \rightarrow +0$ мы получаем при $g = 0$ следующее:

$$P_1 = \left\{ (h, k) \mid k = -h; h \geq -\frac{1}{4\alpha} \right\}, \quad P_2 = \{ (h, k) \mid k = -\alpha h^2 - h; h \in \mathbb{R} \},$$

$$U = \left\{ (h, k) \mid k = \frac{1}{4\alpha}; h \geq -\frac{1}{2\alpha} \right\}.$$

Отрезок L пропадает, так как уходит на бесконечность.

При $g > 0$, $\varkappa > 0$ и $\alpha \geq \sqrt{\varkappa}$ в пределе при $\varkappa \rightarrow +0$ имеем

$$P_1 = \left\{ (h, k) \mid k = -h + \alpha g^2; h \geq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha} \right\},$$

$$P_2 = \{ (h, k) \mid k = -\alpha h^2 - h; h \in \mathbb{R} \},$$

$$U = \left\{ (h, k) \mid k = \frac{1}{4\alpha}; h \geq -\frac{1}{2\alpha} \right\},$$

$$E_1 = \{ (h, k) \mid k = -h; h \geq 0 \}, \quad E_2 = \left\{ (h, k) \mid k = -h; -\frac{1}{4\alpha} \leq h \leq 0 \right\}.$$

Здесь отрезок L тоже ушел на бесконечность, а в E_2 при предельном переходе возникает случай (b).

Заметим, что E_1 и E_2 можно объединить в один луч

$$E = \left\{ (h, k) \mid k = -h; h \geq -\frac{1}{4\alpha} \right\}.$$

Основываясь на ретракции, мы ожидаем, что бифуркационная диаграмма будет состоять из множеств P_1 , P_2 , U , E (рис. 7).

Рис. 7. Бифуркационная диаграмма отображения момента, полученная при ретракции

Сначала мы перечислим случаи линейной зависимости $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ при $\varkappa = 0$, когда соответствующие куски бифуркационной диаграммы отображения момента являются частями кривых порядка не выше 2, причем то, что в этих случаях косые градиенты линейно зависимы, будет проверено непосредственно. Затем будет показано, что все возможности, когда косые градиенты линейно зависимы, сводятся к этим или же приводят к точке $(0, 0)$.

1) $S_1 = S_3 = 0$. Отсюда следует, что $Q_2 = S_3 R_1 - S_1 R_3 = 0$. При этом матрица, составленная из косых градиентов, приобретает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & Q_1 & 0 & S_2 A & 0 & -2\alpha S_2 Q_1 \\ 0 & Q_1 B & 0 & S_2 A B & 0 & -2\alpha S_2 Q_1 B \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ в этом случае линейно зависимы, так как они просто пропорциональны с коэффициентом пропорциональности, равным B .

Легко проверить, что зависимость h и k на данном куске бифуркационной диаграммы выражается следующим образом:

$$k = \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2. \quad (5.1)$$

Найдем теперь критические точки и область изменения h . Рассмотрим следующую систему, задающую критические точки:

$$\begin{cases} S_2 R_2 = g, \\ \alpha S_2^2 - S_2 R_1 = h, \\ \varkappa S_2^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1. \end{cases} \quad (5.2)$$

Она имеет решение при фиксированном S_2 в том и только том случае, когда

$$\frac{g^2}{S_2^2} + \frac{(h - \alpha S_2^2)^2}{S_2^2} \leq 1 - \varkappa S_2^2. \quad (5.3)$$

В случае строгого неравенства имеем две точки и одну точку в прообразе при проекции критических точек на (5.3) в случае равенства.

Обозначим S_2^2 через y . Тогда неравенство (5.3) перепишется следующим образом:

$$(\alpha^2 + \varkappa)y^2 - (2\alpha h + 1)y + g^2 + h^2 \leq 0. \quad (5.4)$$

Неравенство (5.4) имеет неотрицательные решения тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D = (2\alpha h + 1)^2 - 4(\alpha^2 + \varkappa)(g^2 + h^2) \geq 0, \\ 2\alpha h + 1 \geq 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Здесь мы учли, что $\alpha^2 + \varkappa > 0$ в нашем случае (при $\varkappa = 0$).

Из системы неравенств (5.5) следует, что область изменения h при $\varkappa = 0$ имеет вид

$$h \geq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}. \quad (5.6)$$

Заметим, что мы получили ровно то же, что и при ретракции с $\text{so}(4)^*$.

Таким образом, соответствующий кусок бифуркационной диаграммы задается системой (5.1), (5.6). Чтобы понять, что же представляют собой критические точки, заметим, что нужно склеить два экземпляра одномерных многообразий (5.3), отвечающих всевозможным S , по границе (там, где в неравенстве (5.3) имеет место равенство). Легко видеть, что в нашем случае множество точек из (5.3) является объединением двух отрезков. Поскольку при склейке двух отрезков по их границе (по двум точкам) получается окружность, мы получаем, что критические точки образуют две окружности (рис. 8).

2) $S_2 = S_3 = 0$. Отсюда следует, что $Q_1 = S_2 R_3 - S_3 R_2 = 0$. Матрица косых градиентов перепишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -Q_2 & 0 & 0 & 0 & S_1 B & -2\frac{\varkappa}{\alpha} S_1 Q_2 \\ Q_2 A & 0 & 0 & 0 & -S_1 B A & 2\frac{\varkappa}{\alpha} S_1 Q_2 A \end{pmatrix}.$$

Рис. 8. Склеивка двух отрезков

При этом k на этом куске бифуркационной диаграммы выражается через h следующим образом:

$$k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa}{\alpha} g^2. \quad (5.7)$$

Аналогично п. 1) получаем следующую систему:

$$\begin{cases} S_1 R_1 = g, \\ -\frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 + S_1 R_2 = h, \\ \varkappa S_1^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1. \end{cases} \quad (5.8)$$

Она имеет решение при фиксированном S_1 тогда и только тогда, когда

$$\frac{g^2}{S_1^2} + \frac{(h + \frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2)^2}{S_1^2} \leq 1 - \varkappa S_1^2. \quad (5.9)$$

Обозначим S_1^2 через x . Нужно, чтобы неравенство

$$-\varkappa \frac{\alpha^2 + \varkappa}{\alpha^2} x^2 + \left(1 - \frac{2\varkappa h}{\alpha}\right)x - (g^2 + h^2) \geq 0 \quad (5.10)$$

имело неотрицательные решения.

При $\varkappa = 0$ имеем

$$S_1^2 - (g^2 + h^2) \geq 0. \quad (5.11)$$

Это неравенство имеет решение при любом $h \in \mathbb{R}$. Это значит, что мы имеем две критические прямые.

Тот же результат был получен и при ретракции (при $\varkappa \rightarrow +0$).

3) $Q_1 = 0$, $A = 2\alpha Q_3 - q = 0$. В этом случае $\text{sgrad } K = 0$ и

$$k = \frac{1}{4\alpha}(1 - 4\varkappa g^2).$$

При $\varkappa = 0$ имеем $q = -1$, откуда $Q_3 = -\frac{1}{2\alpha}$. Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} Q_2^2 + Q_3^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - g^2, \\ S_2 Q_2 - \frac{1}{2\alpha} S_3 = 0. \end{cases}$$

Выясним, в каких пределах меняется h :

$$h = \alpha S_2^2 + Q_3 = \alpha S_2^2 - \frac{1}{2\alpha},$$

откуда $h \geq -\frac{1}{2\alpha}$.

Далее, $S_3 = 2\alpha S_2 Q_2$. Из первого уравнения получаем

$$Q_2^2 + \frac{1}{4\alpha^2} = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - g^2.$$

Отсюда

$$S_2^2 = \frac{Q_2^2 + \frac{1}{4\alpha^2} + g^2 - S_1^2}{1 + 4\alpha^2 Q_2^2} \leq \frac{Q_2^2 + \frac{1}{4\alpha^2} + g^2}{1 + 4\alpha^2 Q_2^2} = \frac{1}{4\alpha^2} \left(1 + \frac{4g^2 \alpha^2}{1 + 4\alpha^2 Q_2^2} \right) \leq \frac{1 + 4g^2 \alpha^2}{4\alpha^2}.$$

Очевидно, что эти значения достигаются так же, как и все промежуточные. Это значит, что $S_2^2 \in [0, \frac{1+4g^2\alpha^2}{4\alpha^2}]$. Отсюда

$$h \in \left[-\frac{1}{2\alpha}, \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha^2} \right].$$

Заметим, что это не совсем то, что получилось при ретракции. Там было $k = -h$, $h \geq -\frac{1}{2\alpha}$. Объясняется это следующим образом. Горизонтальный отрезок U в случае $so(4)$ шел от вершины параболы $k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa}{\alpha} g^2$, направленной ветвями вниз, до дальней точки пересечения с параболой $\frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2$, направленной ветвями вверх. При предельном переходе вторая парабола вырождается в луч $k = -h + \alpha g^2$. При этом дальняя точка пересечения горизонтального отрезка с ней уходит на бесконечность, а ближняя точка как раз стремится к $\frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$. Поэтому мы получили не луч $h \geq -\frac{1}{2\alpha}$, а отрезок $-\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$.

Выясним, какое многообразие образуют критические точки. При $h > -\frac{1}{2\alpha}$ можно выбрать S_2 двумя способами: со знаком плюс и со знаком минус. При выбранном S_2 для S_1 и Q_2 имеем следующее соотношение:

$$S_1^2 + (4\alpha^2 S_2^2 - 1)Q_2^2 = g^2 + \frac{1}{4\alpha^2} - S_2^2.$$

Мы получили $4\alpha^2 S_2^2 - 1 = 4\alpha h + 1$. Заметим, что правая часть всегда неотрицательна: $g^2 + \frac{1}{4\alpha^2} - S_2^2 = g^2 - \frac{4\alpha h + 1}{4\alpha^2} \geq 0$, так как $h \leq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$.

При $4\alpha h + 1 > 0$ это соотношение задает эллипс (топологически – окружность), а при $4\alpha h + 1 < 0$ – гиперболу (топологически – две прямые). С учетом возможности выбора S_2 двумя способами получаем, что критические точки при $h > -\frac{1}{4\alpha}$ образуют две окружности, а при $h < -\frac{1}{4\alpha}$ – четыре прямые.

4) $Q_2 = 0$, $B = q + 2\frac{\varkappa}{\alpha} Q_3 = 0$. В этом случае

$$k = -\frac{\alpha}{4\varkappa}(1 - 4\varkappa g^2).$$

Это решение не существует при $\varkappa = 0$.

5) $(2\alpha S_2 S_3 - Q_2)Q_1 = S_1 S_2 A$, $S_1 S_2 + Q_1 Q_2 = 0$, при этом $Q_1 Q_2 \neq 0$. Перепишем первое уравнение с учетом второго:

$$\begin{cases} 2\alpha(S_2 S_3 Q_1 - S_1 S_2 Q_3) = 0, \\ S_1 S_2 + Q_1 Q_2 = 0, \\ Q_1 Q_2 \neq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение можно поделить на S_2 , так как $S_2 \neq 0$ (иначе из второго уравнения получаем $Q_1 = 0$ или $Q_2 = 0$).

Окончательно получаем

$$\begin{cases} S_3 Q_1 - S_1 Q_3 = 0, \\ S_1 S_2 + Q_1 Q_2 = 0, \\ Q_1 Q_2 \neq 0. \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения S_3 , из второго — Q_2 и подставляя в тождество $\langle S, Q \rangle = 0$, получаем

$$S_2^2 = Q_1^2 + Q_3^2. \quad (5.12)$$

Отсюда $k = -h$ и $h \geq -\frac{1}{4\alpha}$.

Из первого уравнения получаем $S_1^2 S_2^2 = Q_1^2 Q_2^2$. Подставляем в него $S_2^2 = Q_1^2 + Q_3^2$:

$$S_1^2 (Q_1^2 + Q_3^2) = Q_1^2 Q_2^2. \quad (5.13)$$

Далее, из второго уравнения получаем $S_1^2 Q_3^2 = S_3^2 Q_1^2$. Подставляем это в (5.13):

$$Q_1^2 (S_1^2 + S_3^2 - Q_2^2) = 0. \quad (5.14)$$

По условию $Q_1 \neq 0$, значит,

$$Q_2^2 = S_1^2 + S_3^2. \quad (5.15)$$

Теперь воспользуемся тождеством $S^2 = Q^2 - g^2$. Подставляя в него (5.12) и (5.15), мы получим $g = 0$. При этом $k = -h$, $h \geq -\frac{1}{4\alpha}$. Ровно то же самое получается при подстановке $g = 0$ и случае 1), т.е. ничего нового этот случай нам не дает.

Теперь докажем, что мы перечислили все нетривиальные случаи, когда ко-сые градиенты H и K линейно зависимы. Остальные (тривиальные) случаи линейной зависимости приводят к точке $(0, 0)$. Обозначим через Δ_{ij} миноры 2×6 матрицы $\begin{pmatrix} \text{sgrad } H \\ \text{sgrad } K \end{pmatrix}$.

Приравняв миноры Δ_{13} и Δ_{23} к нулю, получаем следующее: из $\Delta_{13} = 0$ следует, что $Q_2[(2\alpha S_2 S_3 - Q_2)Q_1 - S_1 S_2 A] = 0$, а из $\Delta_{23} = 0$ получаем, что $Q_1(S_1 S_2 + Q_1 Q_2) = 0$.

Мы получили следующую альтернативу: либо Q_1 или Q_2 равно 0, либо выполнено 5). Разберемся теперь с тем, что происходит, когда Q_1 или Q_2 равно 0.

I. $Q_1 = 0$, $A \neq 0$ (случай $Q_1 = 0$, $A = 0$ разобран в 3)). Из Δ_{34} следует, что $S_1 S_2 = 0$. Рассмотрим различные случаи.

1) $S_1 = 0$, $S_3 \neq 0$ ($S_1 = S_3 = 0$ соответствует случаю 1) выше). В этом случае $Q_3 = -S_2 R_1$, $Q_2 = S_3 R_1$, а ненулевым может быть только минор

$$\begin{aligned} \Delta_{14} &= \begin{vmatrix} 2\alpha S_2 S_3 - Q_2 & S_2 A \\ \alpha Q_2 A & -S_2 A \end{vmatrix} = -S_2 A(2\alpha S_2 S_3 - Q_2 + Q_2 A) \\ &= -S_2 A(2\alpha S_2 S_3 - Q_2 + Q_2(2\alpha Q_3 + 1)) = -2\alpha S_2 A(S_2 S_3 + Q_2 Q_3). \end{aligned}$$

По условию $A \neq 0$, значит, либо $S_2 = 0$, либо $S_2 S_3 + Q_2 Q_3 = 0$.

(а) $S_2 = 0$, тогда $Q_3 = 0$ и $h = k = 0$.

(b) $S_2S_3 + Q_2Q_3 = 0$. Здесь удобнее вернуться к переменным (S, R) : $Q_3 = -S_2R_1$, $Q_2 = S_3R_1$, так как $S_1 = 0$; тогда $S_2S_3 + Q_2Q_3 = S_2S_3 - S_2S_3R_1^2 = S_2S_3(1 - R_1^2) = 0$. По условию $S_3 \neq 0$, случай $S_2 = 0$ разобран в п. (а), поэтому $R_1^2 = 1$, откуда $R_2 = R_3 = 0$. При этом $g = 0$ и $k = -h$, т.е. мы получаем случай 5).

2) $S_2 = 0$, $S_3 \neq 0$ ($S_2 = S_3 = 0$ соответствует случаю 2) выше).

Из тождества $S_1Q_1 + S_2Q_2 + S_3Q_3 = 0$ и условия $S_3 \neq 0$ следует, что $Q_3 = 0$. Получаем, что $h = k = 0$.

II. $Q_2 = 0$. Из $\Delta_{23} = 0$ получаем, что $S_1S_2Q_1 = 0$. Последовательно рассмотрим ряд случаев.

1) $Q_1 = 0$, $\Delta_{34} = 2\alpha S_1S_2^2A$. Но случаи $Q_1 = S_1 = 0$, $Q_1 = S_2 = 0$, $Q_1 = A = 0$ уже разобраны выше.

2) $S_2 = 0$, $\Delta_{25} = 2\alpha Q_1(S_1Q_3 - S_3Q_1)$. Но $Q_1 \neq 0$ (случай $Q_1 = S_2 = 0$ разобран выше), поэтому $S_1Q_3 - S_3Q_1 = 0$. Перейдем к переменным (S, R) : $Q_1 = -S_3R_2$, $Q_3 = S_1R_2$, так как $S_2 = 0$; $S_1Q_3 - S_3Q_1 = S_1^2R_2 + S_3^2R_2 = (S_1^2 + S_3^2)R_2 = 0$. Поэтому либо $R_2 = 0$, либо $S = 0$. В обоих случаях $h = k = 0$.

3) $S_1 = 0$, $\Delta_{12} = -2\alpha S_2S_3Q_1$ должен быть равен нулю. Но случай $S_1 = S_3 = 0$ соответствует 1), а случаи $Q_1 = S_1 = 0$ и $Q_2 = S_2 = 0$ были разобраны выше.

Случай бифуркационных некритических точек будет разобран ниже (в § 8).

Рис. 9. Бифуркационная диаграмма отображения момента

Итак, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 4. Рассмотрим $M_{1,g}^4$, $g \in \mathbb{R}$. Тогда при $\kappa = 0$ бифуркационная диаграмма отображения момента состоит из следующих кривых:

1) луча $k = -h + \alpha g^2$, $h \geq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$, при этом в прообразе получаются две критические окружности;

2) параболы $k = -\alpha h^2 - h$, $h \in \mathbb{R}$, при этом в прообразе две критические прямые;

3) отрезка $k = \frac{1}{4\alpha}$, $-\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$, при $h < -\frac{1}{4\alpha}$ в прообразе будут четыре критические прямые, а при $h > -\frac{1}{4\alpha}$ — две критические окружности;

4) луча $k = -h$, $h \geq -\frac{1}{4\alpha}$.

Причем типы 1)–3) являются критическими значениями, а тип 4) является некритическим бифуркационным значением.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $\varkappa = 0$ бифуркационная диаграмма отображения момента совпадает с пересечением бифуркационной диаграммы, полученной с помощью ретракции с $\mathrm{so}(4)$, с образом отображения момента.

На рис. 9 изображена бифуркационная диаграмма отображения момента. Сплошными линиями показаны критические значения, а штриховой линией – некритические бифуркационные значения.

§ 6. Индексы критических точек

Будем по-прежнему работать в координатах (S, Q) . В этих координатах $M_{1,g}^4$ является поверхностью уровня функций $f_1 = \langle S, Q \rangle = 0$, $f_2 = S^2 - Q^2 = g^2$. Векторы $\mathrm{grad} H$, $\mathrm{grad} f_1$, $\mathrm{grad} f_2$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathrm{grad} H &= (0, 2\alpha S_2, 0, 0, 0, 1), \\ \mathrm{grad} f_1 &= (Q_1, Q_2, Q_3, S_1, S_2, S_3), \\ \mathrm{grad} f_2 &= (2S_1, 2S_2, 2S_3, -2Q_1, -2Q_2, -2Q_3).\end{aligned}$$

Матрицы вторых частных производных G_K , G_H и G_{f_2} функций K , H и f_2 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}G_K &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}, & G_H &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ G_{f_2} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Для вычисления индексов критических точек делаем следующее.

1. Находим зависимость $\mathrm{grad} K$, $\mathrm{grad} H$, $\mathrm{grad} f_1$ и $\mathrm{grad} f_2$ в критической точке. Пусть $\mathrm{grad} K = A(S, Q) \mathrm{grad} H + B(S, Q) \mathrm{grad} f_1 + C(S, Q) \mathrm{grad} f_2$.
2. Составляем матрицу $G = G_K - A(S, Q)G_H - B(S, Q)G_{f_1} - C(S, Q)G_{f_2}$.
3. Находим базис e_1, e_2, e_3 в касательном пространстве в критической точке. Для этого нужно найти три линейно независимых вектора, ортогональных векторам $\mathrm{grad} H$, $\mathrm{grad} f_1$ и $\mathrm{grad} f_2$ в смысле скалярного произведения в объемлющем $\mathbb{R}^6$.
4. Вычисляем матрицу формы $\tilde{G}$ — ограничения формы G на пространство, натянутое на e_1, e_2, e_3 .

5. Одним из собственных значений матрицы $\tilde{G}$ будет 0, находим знаки двух других собственных значений матрицы $\tilde{G}$. Число ее отрицательных собственных значений и будет индексом критической точки.

Поскольку в нашем случае матрица $\tilde{G}$ будет (3×3) -матрицей, то уравнение на ее собственные числа будет иметь следующий вид:

$$\lambda^3 - \text{tr} \tilde{G} \lambda^2 + \Delta \lambda + \det \tilde{G},$$

где $\Delta = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}$ – сумма главных миноров матрицы $\tilde{G}$.

У нас одним из собственных чисел матрицы $\tilde{G}$ является 0, следовательно, $\det \tilde{G} = 0$, а значит, для определения оставшихся собственных чисел у нас есть следующее уравнение:

$$\lambda^2 - \text{tr} \tilde{G} \lambda + \Delta = 0.$$

Это означает, что для определения знаков собственных чисел достаточно определить знаки $\text{tr} \tilde{G}$ и Δ . Если $\Delta < 0$, то корни будут разных знаков и индекс будет равен 1; если $\Delta > 0$ и $\text{tr} \tilde{G} < 0$, то оба корня будут отрицательными, индекс равен 2; если $\Delta > 0$ и $\text{tr} \tilde{G} > 0$, то оба корня будут положительными, индекс равен 0.

1. Рассмотрим точки, находящиеся на параболе $k = -\alpha h^2 - h$. Это точки, где $S_2 = S_3 = Q_1 = 0$, а S_1, Q_2, Q_3 удовлетворяют условиям $h = Q_3, S_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2 = g^2$. Как мы уже выяснили, эти критические точки образуют две критические прямые. Имеем следующую зависимость между $\text{grad } K$ и $\text{grad } H$:

$$\text{grad } K = -(2\alpha h + 1) \text{grad } H = -(2\alpha Q_3 + 1) \text{grad } H.$$

Матрица $G = G_K + (2\alpha Q_3 + 1)G_H$ будет иметь следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha(2\alpha Q_3 + 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}.$$

Нужно найти знаки собственных чисел этой матрицы, ограниченной на касательную плоскость к $Q_{g,h}^3$ в критических точках.

Учитывая условия на критические точки, получаем

$$\text{grad } H = (0, 0, 0, 0, 0, 1),$$

$$\text{grad } f_1 = (0, Q_2, Q_3, S_1, 0, 0), \quad \text{grad } f_2 = (2S_1, 0, 0, 0, -2Q_2, -2Q_3).$$

В качестве базиса в касательной плоскости к критическим точкам можно взять векторы

$$e_1 = (0, Q_3, -Q_2, 0, 0, 0), \quad e_2 = (0, S_1, 0, -Q_2, 0, 0), \quad e_3 = (Q_2, 0, 0, 0, S_1, 0).$$

Матрица ограничения формы G на касательное пространство, порожденное векторами e_1, e_2 и e_3 , имеет вид

$$\tilde{G} = 2\alpha \begin{pmatrix} 2Q_3^2(2\alpha Q_3 + 1) & 2S_1Q_3(2\alpha Q_3 + 1) & 0 \\ 2S_1Q_3(2\alpha Q_3 + 1) & -2Q_2^2 + 2(1 + 2\alpha Q_3)S_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что 0 действительно является ее собственным числом. Вычислим след матрицы $\tilde{G}$:

$$\text{tr } \tilde{G} = 2\alpha(-Q_2^2 + (1 + 2\alpha Q_3)(Q_3^2 + S_1^2)), \quad \Delta \tilde{G} = -4\alpha^2 Q_2^2 Q_3^2 (1 + 2\alpha Q_3).$$

Если $2\alpha Q_3 + 1 > 0$, т.е. $h > -\frac{1}{2\alpha}$, то $\Delta < 0$, следовательно, индекс равен 1. Если же $2\alpha Q_3 + 1 < 0$, то $\text{tr } \tilde{G} < 0$ и $\Delta > 0$, следовательно, индекс равен 2.

2. Рассмотрим теперь точки на луче $k = -h + \alpha g^2$, $h \geq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$. Зависимость градиентов имеет следующий вид:

$$\text{grad } K = 2\alpha \text{grad } f_2 - \text{grad } H.$$

Матрица квадратичной формы $G = G_K + G_H - 2\alpha G_{f_2}$ будет следующей:

$$G = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Критические точки удовлетворяют условиям $S_1 = S_3 = Q_2 = 0$. Градиенты в критических точках имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{grad } H &= (0, 2\alpha S_2, 0, 0, 0, 1), \\ \text{grad } f_1 &= (Q_1, 0, Q_3, 0, S_2, 0), \quad \text{grad } f_2 = (0, 2S_2, 0, -2Q_1, 0, -2Q_3). \end{aligned}$$

Базис в касательном пространстве можно выбрать следующим образом:

$$\begin{aligned} e_1 &= (Q_3, 0, -Q_1, 0, 0, 0), \quad e_2 = (S_2, 0, 0, 0, -Q_1, 0), \\ e_3 &= (0, 0, S_2, 0, -Q_3, 0). \end{aligned}$$

Ограничение G на касательное пространство, порожденное векторами e_1, e_2, e_3 , имеет вид

$$\tilde{G} = 2\alpha \begin{pmatrix} -Q_1^2 - Q_3^2 & -S_2 Q_3 & S_2 Q_1 \\ -S_2 Q_3 & Q_1^2 - S_2^2 & Q_1 Q_3 \\ S_2 Q_1 & Q_1 Q_3 & Q_3^2 - S_2^2 \end{pmatrix}.$$

Можно убедиться, что матрица $\tilde{G}$ действительно вырожденная, т.е. одним из ее собственных чисел будет 0.

Найдем сумму главных миноров:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\alpha^2((Q_1^2 - S_2^2)(Q_3^2 - S_2^2) - Q_1^2 Q_3^2 \\ &\quad - (Q_1^2 + Q_3^2)(Q_3^2 - S_2^2) - S_2^2 Q_1^2 - (Q_1^2 + Q_3^2)(Q_1^2 - S_2^2) - S_2^2 Q_3^2) \\ &= 4\alpha^2((Q_1^2 + Q_3^2 + S_2^2)(S_2^2 - Q_1^2 - Q_3^2)) = 4\alpha^2 g^2 (Q_1^2 + Q_2^2 + S_1^2) > 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $\text{tr } \tilde{G} = -4\alpha S_2^2 < 0$. Это значит, что индекс равен 2.

3. Рассмотрим точки, лежащие на отрезке $k = \frac{1}{4\alpha}$, $-\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq -\frac{1}{4\alpha}$. На них $\text{grad } K = 0$. Эти точки удовлетворяют условиям $Q_1 = 0$, $Q_3 = -\frac{1}{2\alpha}$, $S_3 = 2\alpha S_2 Q_2$. С учетом этого градиенты имеют вид

$$\begin{aligned}\text{grad } H &= (0, 2\alpha S_2, 0, 0, 0, 1), \\ \text{grad } f_1 &= \left(0, Q_2, -\frac{1}{2\alpha}, S_1, S_2, 2\alpha S_2 Q_2\right), \\ \text{grad } f_2 &= \left(2S_1, 2S_2, 4\alpha S_2 Q_2, 0, -2Q_2, \frac{1}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

Поэтому в качестве базисных в касательном пространстве можно выбрать следующие векторы:

$$\begin{aligned}e_1 &= (Q_2, 0, 0, -S_2, S_1, 0), & e_2 &= (-4\alpha^2 S_2 Q_2, 0, 2\alpha S_1, 1, 0, 0), \\ e_3 &= (0, -S_1, 0, Q_2 - 4\alpha^2 S_2^2 Q_2, 0, 2\alpha S_1 S_2).\end{aligned}$$

Получаем, что матрица $\tilde{G}$ имеет следующий вид:

$$\tilde{G} = 2\alpha \begin{pmatrix} -S_2^2 & S_2 & S_2(Q_2 - 4\alpha^2 S_2^2 Q_2) \\ S_2 & -1 & -(Q_2 - 4\alpha^2 S_2^2 Q_2) \\ S_2(Q_2 - 4\alpha^2 S_2^2 Q_2) & -(Q_2 - 4\alpha^2 S_2^2 Q_2) & -4\alpha^2 S_1^2 S_2^2 - (Q_2 - 4\alpha^2 S_2^2 Q_2)^2 \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы справедливо

$$\begin{aligned}\text{tr } \tilde{G} &= 2\alpha(-1 - (1 + 4\alpha^2 S_1^2)S_2^2 - Q_2^2(1 - 4\alpha^2 S_2^2)^2) < 0, \\ \Delta &= 16\alpha^4 S_1^2 S_2^2(1 + S_2^2) > 0,\end{aligned}$$

это означает, что индекс равен 2.

Таким образом, мы доказали следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Индексы критических точек таковы:*

- 1) *прообразы кривой $k = -\alpha h^2 - h$, $h < -\frac{1}{2\alpha}$, имеют индекс 2;*
- 2) *прообразы кривой $k = -\alpha h^2 - h$, $h > -\frac{1}{2\alpha}$, имеют индекс 1;*
- 3) *прообразы кривой $k = -h + \alpha g^2$, $h > \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$, имеют индекс 2;*
- 4) *прообразы кривой $k = \frac{1}{4\alpha}$, $-\frac{1}{2\alpha} < h < \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$, имеют индекс 2.*

§ 7. Доказательство полноты векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$

Мы будем рассматривать векторные поля $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ в координатах (S, Q) .

Приведем координатное представление этих полей для случая $e(3)$ ($\varkappa = 0$):

$$\begin{aligned}\text{sgrad } H &= (2\alpha S_2 S_3 - Q_2, Q_1, -2\alpha S_1 S_2, (2\alpha Q_3 + 1)S_2, -S_1, -2\alpha S_2 Q_1), \\ \text{sgrad } K &= (Q_2(2\alpha Q_3 + 1), -Q_1, -2\alpha Q_1 Q_2, -(2\alpha Q_3 + 1)S_2, \\ &\quad -2\alpha(S_3 Q_1 - S_1 Q_3) + S_1, 2\alpha S_2 Q_1).\end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Непрерывная функция называется *собственной*, если прообраз любого компакта является компактом.

Для доказательства полноты векторного поля $\text{sgrad } H$ нам понадобится следующая

ЛЕММА (см. [20]). Пусть ξ – непрерывное векторное поле на гладком многообразии M . Тогда ξ полно, если на M существуют гладкая функция E , собственная непрерывная функция f и константы a, b такие, что для всех $x \in M$ выполнены следующие условия:

- 1) $|\xi(E(x))| \leq a|E(x)|$;
- 2) $|f(x)| \leq b|E(x)|$.

Для доказательства полноты $\text{sgrad } K$ нам понадобится следующее классическое

УТВЕРЖДЕНИЕ 5 (см., например, [21]). Пусть дана система $y'(x) = f(y, x)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}$. Если f непрерывна и при всех (x, y) удовлетворяет условию $|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x)$, где функции a и b непрерывны, то для любого начального условия (x_0, y_0) существует глобальное решение задачи Коши.

СЛЕДСТВИЕ. Если f непрерывна и линейна по y , то векторное поле $f(y, x)$ полно.

Возьмем $f = E = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2$. Очевидно, эта функция является собственной. Возьмем $\xi = \text{sgrad } H$. Докажем, что выполняется условие 1) леммы:

$$\begin{aligned} |\text{sgrad } H(f)| &= \left| (\text{sgrad } H)^1 \frac{\partial f}{\partial S_1} + (\text{sgrad } H)^2 \frac{\partial f}{\partial S_2} + (\text{sgrad } H)^3 \frac{\partial f}{\partial S_3} \right. \\ &\quad \left. + (\text{sgrad } H)^4 \frac{\partial f}{\partial Q_1} + (\text{sgrad } H)^5 \frac{\partial f}{\partial Q_2} + (\text{sgrad } H)^6 \frac{\partial f}{\partial Q_3} \right| \\ &= |(2\alpha S_2 S_3 - Q_2) \cdot 2S_1 + Q_1 \cdot 2S_2 - 2\alpha S_1 S_2 \cdot 2S_3 \\ &\quad + (2\alpha Q_3 + 1)S_2 \cdot 2Q_1 - S_1 \cdot 2Q_2 - 2\alpha S_2 Q_1 \cdot 2Q_3| \\ &= |2(\alpha S_1 S_2 S_3 - S_1 Q_2 + S_2 Q_1 - 2\alpha S_1 S_2 S_3 \\ &\quad + 2\alpha S_2 Q_1 Q_3 + S_2 Q_1 - S_1 Q_2 - 2\alpha S_2 Q_1 Q_3)| = 4|S_2 Q_1 - S_1 Q_2| \\ &\leq 2(S_1^2 + S_2^2 + Q_1^2 + Q_2^2) \leq 2(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) = 2f. \end{aligned}$$

Сначала мы докажем, что $S_2(t)$, $Q_1(t)$, $Q_3(t)$ являются непрерывными функциями времени, определенными для любого момента времени, а потом для оставшихся переменных S_1 , S_3 , Q_2 применим следствие.

Обозначим $2\alpha Q_3 + 1$ через $\tilde{Q}_3$, $2\alpha h + 1$ через $\tilde{h}$. Тогда

$$\dot{\tilde{Q}}_3 = 2\alpha \dot{Q}_3 = 4\alpha^2 S_2 Q_1, \quad h = \alpha S_2^2 + Q_3, \quad \tilde{h} = 2\alpha h + 1 = 2\alpha^2 S_2^2 + \tilde{Q}_3.$$

В новых координатах имеем

$$\begin{aligned} \text{sgrad } K &= (Q_2 \tilde{Q}_3, -Q_1, -2\alpha Q_1 Q_2, -S_2 \tilde{Q}_3, S_1 \tilde{Q}_3 - 2\alpha S_3 Q_1, 4\alpha^2 S_2 Q_1), \\ &\begin{cases} \dot{S}_2 = -Q_1, \\ \dot{Q}_1 = -S_2 \tilde{Q}_3, \\ \dot{\tilde{Q}}_3 = 4\alpha^2 S_2 Q_1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{S}_2 &= -\dot{Q}_1 = S_2 \tilde{Q}_3 = S_2(\tilde{h} - 2\alpha^2 S_2^2), & \ddot{S}_2 \dot{S}_2 &= S_2(\tilde{h} - 2\alpha^2 S_2^2) \dot{S}_2, \\ \frac{d}{dt} \frac{\dot{S}_2^2}{2} &= \frac{d}{dt} \int S_2(\tilde{h} - 2\alpha^2 S_2^2) dS_2, \\ \dot{S}_2 &= \pm \sqrt{2 \int S_2(\tilde{h} - 2\alpha^2 S_2^2) dS_2 + C_1} = \pm \sqrt{-\frac{(\tilde{h} - 2\alpha^2 S_2^2)^2}{4\alpha} + C}, \\ \int \frac{dS_2}{\sqrt{-\frac{(\tilde{h} - 2\alpha^2 S_2^2)^2}{4\alpha} + C}} &= \pm t + D.\end{aligned}$$

Мы видим, что в числителе последнего равенства стоит корень из многочлена четвертой степени, имеющего различные корни при $\tilde{h} \neq 0$ и $C \neq 0$. Как известно (см., например, книгу [22]), решение такого уравнения выражается через эллиптические функции. Оно существует для любого момента времени и является непрерывно дифференцируемым и периодическим.

Так как $Q_3(t) = h - \alpha S_2^2(t)$, то Q_3 тоже является непрерывной функцией, определенной для любого момента времени.

Поскольку $Q_1(t) = -\dot{S}_2(t)$, значит, Q_1 – непрерывная всюду определенная функция.

Функции S_1 , S_3 и Q_2 удовлетворяют следующей системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = \tilde{Q}_3 Q_2, \\ \dot{S}_3 = -2\alpha Q_1 Q_2, \\ \dot{Q}_2 = \tilde{Q}_3 S_1 - 2\alpha Q_1 S_3. \end{cases}$$

Правые части этих уравнений непрерывны по t , следовательно, S_1 , S_3 и Q_2 существуют при любом моменте времени. Это означает, что поле $\text{sgrad } K$ является полным.

§ 8. Топология совместной поверхности уровня H и K

При изучении топологии совместной поверхности уровня гамильтониана H и дополнительного интеграла K мы будем использовать теорему Лиувилля. Отметим, что полнота векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ является существенным условием в этой теореме. В случае двух степеней свободы и полноты указанных векторных полей теорема Лиувилля утверждает, что связные регулярные поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла диффеоморфны двумерному тору, цилиндру или плоскости.

ТЕОРЕМА 5. *При регулярных, т.е. не принадлежащих бифуркационной диаграмме для отображения момента, значениях (h, k) совместная поверхность уровня H и K имеет следующий тип (рис. 10):*

- 1) пустое множество в камере 1;
- 2) два цилиндра в камере 2 (под параболой);
- 3) четыре цилиндра в камерах 3 и 4 (над параболой, но под лучом $k = -h$);
- 4) два тора в камере 5 (над лучом $k = -h$, но под лучом $k = -h + \alpha g^2$).

Рис. 10. Расположение камер, отвечающих разным совместным поверхностям уровня H и K

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Покажем, что камере 1 соответствует пустое множество. Камера 1 ограничена кривыми $k = \frac{1}{4\alpha}$, $k = -h + \alpha g^2$ и $k = -\alpha h^2 - h$.

Докажем, что $k \leq \frac{1}{4\alpha}$:

$$\alpha k = -\alpha Q_3 - \alpha^2(Q_1^2 + Q_3^2) \leq -\alpha Q_3 - \alpha^2 Q_3^2 = -\left(\alpha Q_3 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}.$$

Докажем, что $k \leq -h + \alpha g^2$:

$$\begin{aligned} k + h - \alpha g^2 &= -Q_3 - \alpha(Q_1^2 + Q_3^2) + \alpha S_2^2 + Q_3 - \alpha g^2 = \alpha(S_2^2 - Q_1^2 - Q_3^2 - g^2) \\ &= \alpha(Q_2^2 - S_1^2 - S_3^2) = \alpha((S_3 R_1 - S_1 R_3)^2 - S_1^2 - S_3^2) \\ &= \alpha(S_3^2 R_1^2 - 2S_1 S_3 R_1 R_3 + S_1^2 R_3^2 - S_1^2 - S_3^2) \\ &= -\alpha((1 - R_3^2)S_1^2 + 2S_1 S_3 R_1 R_3 + (1 - R_1^2)S_3^2). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $Q^2 = S^2 R^2 - g$ и $R^2 = 1$.

Покажем, что

$$(1 - R_3^2)S_1^2 + 2S_1 S_3 R_1 R_3 + (1 - R_1^2)S_3^2$$

не меньше, чем

$$\left(\sqrt{1 - R_3^2}S_1 \pm \sqrt{1 - R_1^2}S_3\right)^2$$

(нужно выбрать знак, противоположный знаку $S_1 S_3$), и, значит, неотрицательно.

Пусть для определенности $S_1 S_3 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{1 - R_3^2}S_1 - \sqrt{1 - R_1^2}S_3\right)^2 \\ &= (1 - R_3^2)S_1^2 - 2\sqrt{(1 - R_1^2)(1 - R_3^2)}S_1 S_3 + (1 - R_1^2)S_3^2 \\ &= (1 - R_3^2)S_1^2 - 2\sqrt{1 - R_1^2 - R_3^2 + R_1^2 R_3^2}S_1 S_3 + (1 - R_1^2)S_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - R_3^2)S_1^2 - 2\sqrt{R_2^2 + R_1^2 R_3^2} S_1 S_3 + (1 - R_1^2)S_3^2 \\
&\leq (1 - R_3^2)S_1^2 + 2S_1 S_3 R_1 R_3 + (1 - R_1^2)S_3^2,
\end{aligned}$$

так как $-\sqrt{R_2^2 + R_1^2 R_3^2} \leq -|R_1 R_3| \leq R_1 R_3$.

Если же $S_1 S_3 < 0$, то

$$(1 - R_3^2)S_1^2 + 2S_1 S_3 R_1 R_3 + (1 - R_1^2)S_3^2 \geq \left(\sqrt{1 - R_3^2} S_1 + \sqrt{1 - R_1^2} S_3 \right)^2 \geq 0.$$

Покажем, что $k \leq -\alpha h^2 - h$ при $h \leq -\frac{1}{2\alpha}$:

$$k = -Q_3 - \alpha(Q_1^2 + Q_3^2) \leq -Q_3 - \alpha Q_3^2 \leq -h - \alpha h^2,$$

так как $Q_3 = h - \alpha S_2^2 \leq h \leq -\frac{1}{2\alpha}$, а функция $x - \alpha x^2$ возрастает при $x \leq -\frac{1}{2\alpha}$, $\alpha > 0$.

2) Мы имеем следующую систему, задающую $M_{h,k}^2$:

$$\begin{cases} h = \alpha S_2^2 + Q_3, \\ k = -Q_3 - \alpha(Q_1^2 + Q_3^2), \\ S_1 Q_1 + S_2 Q_2 + S_3 Q_3 = 0, \\ Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - g^2. \end{cases} \quad (8.1)$$

Из второго уравнения имеем

$$0 \leq \alpha Q_1^2 = -(Q_3 + \alpha Q_3^2 + k), \quad (8.2)$$

откуда

$$\alpha Q_3^2 + Q_3 + k \leq 0. \quad (8.3)$$

Если в формуле (8.3) неравенство строгое, то получаем два значения для Q_1 , отличающихся знаками, если же в формуле (8.3) равенство, то $Q_1 = 0$.

Выразив Q_3 из первого уравнения системы (8.1) и подставив в неравенство (8.3), получаем

$$(h - \alpha S_2^2) + \alpha(h - \alpha S_2^2)^2 + k \leq 0, \quad (8.4)$$

или

$$h - \alpha S_2^2 + \alpha h^2 - 2\alpha^2 h S_2^2 + \alpha^3 S_2^4 + k \leq 0. \quad (8.5)$$

Обозначим S_2^2 через x . Тогда неравенство (8.5) переписывается так:

$$\alpha^3 x^2 - \alpha(2\alpha h + 1)x + k + \alpha h^2 + h \leq 0. \quad (8.6)$$

Дискриминант уравнения

$$\alpha^3 x^2 - \alpha(2\alpha h + 1)x + k + \alpha h^2 + h = 0, \quad (8.7)$$

соответствующего неравенству (8.6), равный $\alpha^2(1 - 4\alpha k)$, неотрицателен.

Если $k + \alpha h^2 + h < 0$, то корни уравнения (8.7) имеют разные знаки. Это означает, что $|S_2| \leq C(h, k)$, причем, если $|S_2| < C(h, k)$, то для Q_1 имеем два значения, различающиеся знаками. Если же $|S_2| = C(h, k)$, то $Q_1 = 0$.

Это означает, что проекция совместной поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла на плоскость (S_2, Q_1) является окружностью.

Если $k + \alpha h^2 + h > 0$, то $0 < C_1(h, k) \leq |S_2| \leq C_2(h, k)$. Это означает, что проекция $M_{h,k}^2$ на плоскость (S_2, Q_1) является двумя окружностями.

Фиксируем $S_2, Q_1, S_2 \neq 0$ (заметим, что S_2 может равняться нулю только при $k < -\alpha h^2 - h$). Тогда система (8.1) перепишется так:

$$\begin{cases} Q_3 = h - \alpha S_2^2, \\ k = -Q_3 - \alpha(Q_1^2 + Q_3^2), \\ Q_2 = -\frac{S_1 Q_1 + S_3 Q_3}{S_2}, \\ Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - g^2. \end{cases} \quad (8.8)$$

Выразив из первого уравнения системы (8.8) Q_3 , затем из третьего уравнения Q_2 , мы получим одно уравнение на S_1 и S_3 . Оно задает слой над точкой (S_2, Q_1) . Подставим в четвертое уравнение системы (8.8) выражения для Q_2 и Q_3 :

$$\begin{aligned} Q_1^2 + \frac{(S_1 Q_1 + S_3 Q_3)^2}{S_2^2} + Q_3^2 &= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - g^2, \\ S_2^2 Q_1^2 + S_1^2 Q_1^2 + 2S_1 S_3 Q_1 Q_3 + S_3^2 Q_3^2 + S_2^2 Q_3^2 &= (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - g^2) S_2^2, \\ (Q_1^2 - S_2^2) S_1^2 + 2Q_1 Q_3 S_1 S_3 + (Q_3^2 - S_3^2) S_3^2 &= (S_2^2 - Q_1^2 - Q_3^2 - g^2) S_2^2. \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства равна $(\frac{h+k}{\alpha} - g^2) S_2^2 < 0$, так как $k < -h - \alpha g^2$ (это мы доказали в п. 1)).

Рассмотрим левую часть как квадратичную форму относительно переменных S_1 и S_3 . Матрица квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} Q_1^2 - S_2^2 & Q_1 Q_3 \\ Q_1 Q_3 & Q_3^2 - S_2^2 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен $S_2^2(S_2^2 - Q_1^2 - Q_3^2) = S_2^2(\frac{h+k}{\alpha})$. След матрицы квадратичной формы $Q_1^2 + Q_3^2 - 2S_2^2$ равен $-\frac{k+h}{\alpha} - S_2^2$.

Если $k > -h$, то определитель положителен, а след отрицателен, и уравнение задает эллипс, т.е. топологически – окружность. Если же $k < -h$, то уравнение задает гиперболу, т.е. топологически – две прямые.

При $S_2 = 0$ получаем систему

$$\begin{cases} h = Q_3, \\ k = -Q_3 - \alpha(Q_1^2 + Q_3^2), \\ S_1 Q_1 + S_3 Q_3 = 0, \\ Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = S_1^2 + S_3^2 - g^2. \end{cases} \quad (8.9)$$

Из первого и третьего уравнений получаем $S_3 = -\frac{S_1 Q_1}{h}$. Подставляя полученное выражение в четвертое уравнение, получаем

$$-\frac{k+h}{\alpha} + Q_2^2 = S_1^2 + \frac{S_1^2 Q_1^2}{h^2} - g^2.$$

Из второго уравнения имеем $Q_1^2 = -\frac{k+\alpha h^2+h}{\alpha}$. В итоге получаем

$$Q_2^2 + \frac{k+h}{\alpha h^2} S_1^2 = \frac{k+h-\alpha g^2}{\alpha}.$$

Правая часть меньше 0, так как $k < -h + \alpha g^2$.

Так как $k < -\alpha h^2 - h$ (S_2 может равняться нулю только при $k < -\alpha h^2 - h$), то $k + h < 0$.

Уравнение задает гиперболу, т.е. топологически – две прямые.

В итоге получаем следующее.

При $k < -\alpha h^2 - h$ мы имеем расслоение над окружностью со слоем две прямые. Учитывая, что совместная поверхность уровня является ориентированной, мы получаем, что это может быть либо цилиндр, либо два цилиндра. Но число связанных компонент в этом случае равно двум, так как совместная поверхность уровня на куске параболы $k = -\alpha h^2 - h$, $h < -\frac{1}{2\alpha}$, представляет собой две критические прямые индекса 2. Поэтому в этом случае $M_{h,k}^2$ диффеоморфно $2C^2$.

При $-\alpha h^2 - h < k < -h$ у нас расслоение над двумя окружностями со слоем две прямые. Учитывая ориентированность $M_{h,k}^2$, а также то, что при $k = \frac{1}{4\alpha}$, $-\frac{1}{2\alpha} \leq h < \frac{1}{4\alpha}$ совместная поверхность уровня является четырьмя критическими прямыми индекса 2, мы получаем, что $M_{h,k}^2$ диффеоморфно $4C^2$.

Наконец, при $k > -h$ мы имеем расслоение над двумя окружностями со слоем окружность. Из-за ориентируемости $M_{h,k}^2$ и того, что при $k = \frac{1}{4\alpha}$, $\frac{1}{4\alpha} < h \leq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$ совместная поверхность уровня является двумя критическими окружностями индекса 2, $M_{h,k}^2$ диффеоморфно $2T^2$.

Мы видим, что помимо критических значений бифуркационной диаграмме также принадлежит и луч $k = -h$ ($h \geq -\frac{1}{4\alpha}$), так как топология совместной поверхности уровня меняется при переходе через этот луч.

§ 9. Перестройки

Опишем перестройки торов и цилиндров Лиувилля изучаемого случая Соколова.

1. На границе бифуркационной диаграммы возникают перестройки вида $\emptyset \rightsquigarrow T^2$ или $\emptyset \rightsquigarrow C^2$ (рождение тора и цилиндра соответственно). Первая из них обозначается обычно A (см. [19]), вторая же получается из A заменой окружности на прямую (вместо тора $T^2 = S^1 \times S^1$ здесь будет цилиндр $C^2 = S^1 \times R^1$, вместо критической окружности – критическая прямая). Обозначим вторую перестройку $\check{A}$. Как это принято в компактной теории, число перед буквой, означающей перестройку, будет означать, что одновременно происходит несколько бифуркаций такого рода.

2. В изучаемой системе встречается еще один аналог хорошо известной перестройки B ($T^2 \rightsquigarrow 2T^2$). Перестройку B можно описать так (см. [19]): исходная окружность перетягивается, возникает перемычка, получается восьмерка, которая затем распадается на две окружности. Вся эта картинка умножается на окружность. У нас же картинка будет умножаться на прямую, а не на окружность. Мы получим новую перестройку $C^2 \rightsquigarrow 2C^2$, которую обозначим $\check{B}$.

3. В интегрируемом случае Соколова присутствует некомпактная перестройка, для которой нет компактного аналога. Это перестройка без критических точек. Тор перестраивается в два цилиндра. Перестройку можно описать следующим образом. Рассмотрим функцию f , заданную неявно в виде

$$(x + cy)^2 + (1 - c^2)y^2 = 1.$$

Легко видеть, что если $c^2 < 1$, то линией уровня f будет гипербола, т.е. топологически – две прямые. При $|c| = 1$ линией уровня будут две параллельные прямые. При $c^2 > 1$ линией уровня будет эллипс, т.е. топологически – окружность. Критических точек у функции f нет. Описанная перестройка (две прямые переходят в окружность) происходит без критических точек. Умножаем описанную перестройку “две прямые $\rightsquigarrow$ окружность” на окружность. В результате получаем перестройку $T^2 \rightsquigarrow 2C^2$, которую обозначим S .

Рис. 11. Перестройки торов и цилиндров Лиувилля

На рис. 11 представлены перестройки торов и цилиндров Лиувилля для случая Соколова.

Список литературы

- [1] Н. Poincaré, “Sur la précession des corps déformables”, *Bull. Astron.*, **27** (1910), 321–356.
- [2] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Динамика твердого тела*, РХД, Ижевск, 2001.
- [3] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, В. В. Соколов, “Новый интегрируемый случай на $so(4)$ ”, *Докл. РАН*, **381**:5 (2001), 614–615; англ. пер.: A. V. Borisov, I. S. Mamaev, V. V. Sokolov, “A new integrable case on $so(4)$ ”, *Dokl. Phys.*, **46**:12 (2001), 888–889.
- [4] В. В. Соколов, “Об одном классе квадратичных гамильтонианов на $so(4)$ ”, *Докл. РАН*, **394**:5 (2004), 602–605; англ. пер.: V. V. Sokolov, “One class of quadratic $so(4)$ Hamiltonians”, *Dokl. Math.*, **69**:1 (2004), 108–111.
- [5] В. В. Соколов, “Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа”, *ТМФ*, **129**:1 (2001), 31–37; англ. пер.: V. V. Sokolov, “A new integrable case for the Kirchhoff equation”, *Theoret. and Math. Phys.*, **129**:1 (2001), 1335–1340.
- [6] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений*, Факториал, М., 1995.

- [7] Г. Хагигатдуст, А. А. Ошемков, “Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(4)$ ”, *Матем. сб.*, **200**:6 (2009), 119–142; англ. пер.: G. Haghighatdoost, A. A. Oshemkov, “The topology of Liouville foliation for the Sokolov integrable case on the Lie algebra $so(4)$ ”, *Sb. Math.*, **200**:6 (2009), 899–921.
- [8] П. Е. Рябов, “Бифуркации первых интегралов в случае Соколова”, *ТМФ*, **134**:2 (2003), 207–226; англ. пер.: P. E. Ryabov, “Bifurcations of first integrals in the Sokolov case”, *Theoret. and Math. Phys.*, **134**:2 (2003), 181–197.
- [9] Г. Хагигатдуст, “Бифуркационная диаграмма некоторого класса гамильтонианов на алгебре $so(4)$ ”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 6, 3–10; англ. пер.: G. Haghighatdoost, “Bifurcation diagram of a class of Hamiltonians on algebra $so(4)$ ”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **60**:6 (2005), 1–8.
- [10] Г. Хагигатдуст, “Топология изоэнергетических поверхностей для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(4)$ ”, *Докл. РАН*, **401**:5 (2005), 599–602.
- [11] А. Т. Фоменко, “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *УМН*, **44**:1 (1989), 145–173; англ. пер.: A. T. Fomenko, “The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems”, *Russian Math. Surveys*, **44**:1 (1989), 181–219.
- [12] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Докл. АН СССР*, **287**:5 (1986), 1071–1075; англ. пер.: A. T. Fomenko, “Morse theory of integrable Hamiltonian systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **33**:2 (1986), 502–506.
- [13] А. Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:6 (1986), 1276–1307; англ. пер.: A. T. Fomenko, “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:3 (1987), 629–658.
- [14] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике”, *Докл. АН СССР*, **294**:2 (1986), 283–287; англ. пер.: A. T. Fomenko, “On the topology of the three-dimensional manifolds arising in Hamiltonian mechanics”, *Soviet Math. Dokl.*, **35**:2 (1987), 529–534.
- [15] А. В. Болсинов, П. Х. Рихтер, А. Т. Фоменко, “Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской”, *Матем. сб.*, **191**:2 (2000), 3–42; англ. пер.: A. V. Bolsinov, P. H. Richter, A. T. Fomenko, “The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top”, *Sb. Math.*, **191**:2 (2000), 151–188.
- [16] М. П. Харламов, *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела*, Изд-во ЛГУ, Л., 1988.
- [17] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Траекторная классификация геодезических потоков двумерных эллипсоидов. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела”, *Функц. анализ и его прил.*, **29**:3 (1995), 1–15; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, “Orbital classification of geodesic flows on two-dimensional ellipsoids. The Jacobi problem is orbitally equivalent to the integrable Euler case in rigid body dynamics”, *Funct. Anal. Appl.*, **29**:3 (1995), 149–160.
- [18] А. А. Ошемков, “Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела”, *Труды семинара по вект. и тенз. анализу*, **25** (1993), 23–109.
- [19] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, Изд-во УдГУ, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, v. 1, 2, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2004.
- [20] W. B. Gordon, “On the completeness of Hamiltonian vector fields”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **26**:2 (1970), 329–331.

- [21] А. Ф. Филиппов, *Введение в теорию дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2010.
- [22] А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*, Наука, М., 1968; пер. с нем.: A. Hurwitz, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1964.

Д. В. Новиков (D. V. Novikov)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: musixoid@gmail.com

Поступила в редакцию

23.11.2010