Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Логачева, Классификация невырожденных положений равновесия и вырожденных одномерных орбит интегрируемой системы Ковалевской–Яхьи, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 1, 31–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7824>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:25:59

УДК 517.938.5

Н. С. Логачева

Классификация невырожденных положений равновесия и вырожденных одномерных орбит интегрируемой системы Ковалевской–Яхьи

Работа посвящена топологическому анализу интегрируемого случая Ковалевской–Яхьи в динамике твердого тела. Доказана боттовость интеграла на изоэнергетических поверхностях системы, а также описана топология слоения Лиувилля в окрестности вырожденных одномерных орбит и положений равновесия (точек ранга 0). В частности, для вырожденных одномерных орбит построены круговые молекулы с метками, а для невырожденных особенностей ранга 0 найдено представление в виде почти прямого произведения.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: отображение момента, слоение Лиувилля, невырожденные положения равновесия, вырожденные одномерные орбиты, круговые молекулы.

§ 1. Введение

Случай интегрируемости Ковалевской–Яхьи – это обобщение классического волчка Ковалевской на задачу о движении тяжелого гиристора. В разное время исследованием классического случая Ковалевской занимались многие выдающиеся математики и физики-теоретики. Х. М. Яхья (см. [1], [2]) показал, что интеграл Ковалевской может быть обобщен на гиристор, распределение масс которого подчинено условиям Ковалевской, а гиристатический момент направлен по оси динамической симметрии.

Рассматриваемая динамическая система является гамильтоновой на совместных поверхностях уровня M_g^4 геометрического интеграла и интеграла площадей (где g – постоянная площадей). Гамильтониан и интеграл Ковалевской–Яхьи определяют слоение Лиувилля на каждой поверхности M_g^4 , топология которого существенно зависит от параметров g и λ (где λ – величина гиристатического момента). П. Е. Рябов и М. П. Харламов (см. [3]) построили кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$, разделяющие области с качественно различными видами бифуркационных диаграмм для отображения момента $M_g^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k)$, определяемого гамильтонианом и интегралом.

Топология классического случая Ковалевской ($\lambda = 0$) была исследована в работах М. П. Харламова [4] и [5] (см. также [6]). Более подробное исследование слоения Лиувилля для этого случая (в частности, вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга для изоэнергетических поверхностей и особых точек бифуркационной диаграммы) было проведено в работе А. В. Болсинова, П. Х. Рихтера, А. Т. Фоменко [7]. Аналогичное исследование для случая $g = 0$ дано П. В. Морозовым в [8].

Бифуркационные диаграммы и инварианты Фоменко (молекулы без меток) для случая Ковалевской–Яхьи с произвольными g и λ вычислены в работах И. Н. Гашененко, П. Е. Рябова и М. П. Харламова (см. [3], [9], [10]). Кроме того, в работах [3], [10] описаны бифуркационные диаграммы интегралов энергии и площадей для этого случая, а в работе [11] найдены критические точки рангов 0 и 1, а также указан способ определения их типов.

В настоящей работе дано описание слоения Лиувилля в окрестностях вырожденных одномерных орбит и невырожденных положений равновесия волчка Ковалевской–Яхьи при всех некритических значениях параметров в условиях полулокальности, т.е. не в малой окрестности особой точки, а в окрестности особого слоя. Такое исследование особенностей системы – ключевой и наиболее трудоемкий шаг на пути вычисления инвариантов Фоменко–Цишанга (инвариантов тонкой эквивалентности по Лиувиллю). В работе доказана боттовость (теорема 3) дополнительного интеграла на изоэнергетической поверхности, описана топология слоения Лиувилля в окрестности невырожденных положений равновесия (теоремы 9, 10) и вырожденных одномерных орбит (теорема 13).

Автор благодарит за помощь и поддержку научного руководителя А. Т. Фоменко, А. А. Ошемкова, а также П. Е. Рябова, П. В. Морозова и П. П. Андреянова за постоянное внимание к работе. Автор выражает отдельную благодарность М. П. Харламову за ценные замечания и советы.

§ 2. Интегрируемый случай Ковалевской–Яхьи

Случай интегрируемости Ковалевской–Яхьи является обобщением классического волчка Ковалевской на задачу о движении тяжелого гиростата. Приведем конкретный вид уравнений и первых интегралов этой системы.

Рассмотрим алгебру Ли $e(3)$ группы Ли $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства. На линейном сопряженном пространстве $e(3)^*$ определена скобка Ли–Пуассона двух произвольных гладких функций f и g :

$$\{f, g\}(x) = x([d_x f, d_x g]),$$

где $x \in e(3)^*$, а $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор в алгебре Ли $e(3)$.

В естественных координатах $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ на линейном пространстве $e(3)^*$ эта скобка записывается следующим образом:

$$\{s_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} s_k, \quad \{r_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} r_k, \quad \{r_i, r_j\} = 0,$$

где ε_{ijk} – знак перестановки $(123) \rightarrow (ijk)$.

Матрица $\Omega_{(s,r)}$ скобки Ли–Пуассона выглядит так:

$$\Omega_{(s,r)} = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 & 0 & r_3 & -r_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 & -r_3 & 0 & r_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 & r_2 & -r_1 & 0 \\ 0 & r_3 & -r_2 & 0 & 0 & 0 \\ -r_3 & 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 \\ r_2 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть на $e(3)^*$ задана некоторая функция Гамильтона $H(s, r)$. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{s}_i = \{s_i, H\}, \quad \dot{r}_i = \{r_i, H\}. \quad (1)$$

Функции $f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ и $f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3$ лежат в ядре скобки Ли–Пуассона (функции Казимира) и поэтому являются первыми интегралами уравнений (1). Ограничение системы (1) на совместные четырехмерные поверхности уровня функций f_1 и f_2

$$M_g^4 = \{f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3 = g\}$$

представляет собой гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Поверхности M_g^4 являются неособыми гладкими симплектическими подмногообразиями в $e(3)^*$, диффеоморфными TS^2 , т.е. кокасательному расслоению сферы S^2 . Симплектическая структура на M_g^4 задается ограничением скобки Ли–Пуассона из объемлющего пространства $e(3)^*$. Система будет интегрируемой на поверхности M_g^4 , если на ней существует функционально независимая с H гладкая функция $K(s, r)$ такая, что $\{H, K\} = 0$. Если такая функция существует глобально на всем $e(3)^*$, то на каждом M_g^4 возникает интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы. Параметр g имеет физический смысл постоянной площадей.

Гамильтониан случая Ковалевской–Яхьи имеет следующий вид (при $\lambda = 0$ получаем классический случай Ковалевской):

$$H = \frac{s_1^2}{2A} + \frac{s_2^2}{2A} + \frac{(s_3 + \lambda)^2}{A} + a_1 r_1 + a_2 r_2.$$

Как впервые указал Х. М. Яхья (см. [1], [2]), для него существует дополнительный интеграл четвертой степени

$$K = \left(\frac{s_1^2 - s_2^2}{2A} + a_2 r_2 - a_1 r_1 \right)^2 + \left(\frac{s_1 s_2}{A} - a_1 r_2 - a_2 r_1 \right)^2 - \frac{2\lambda}{A^2} (s_3 + 2\lambda)(s_1^2 + s_2^2) + \frac{4\lambda r_3}{A} (a_1 s_1 + a_2 s_2).$$

Линейной заменой координат на $e(3)^*$ (и параметра λ)

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\frac{A}{2\zeta}}(-a_1 \tilde{s}_1 + a_2 \tilde{s}_2), & s_2 &= \sqrt{\frac{A}{2\zeta}}(-a_2 \tilde{s}_1 - a_1 \tilde{s}_2), & s_3 &= \sqrt{\frac{A}{2\zeta}} \tilde{s}_3, \\ r_1 &= -\frac{a_1}{\zeta} \tilde{r}_1 + \frac{a_2}{\zeta} \tilde{r}_2, & r_2 &= -\frac{a_2}{\zeta} \tilde{r}_1 - \frac{a_1}{\zeta} \tilde{r}_2, & r_3 &= \tilde{r}_3, & \lambda &= \sqrt{\frac{A\zeta}{2}} \tilde{\lambda}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\zeta = a_1^2 + a_2^2$, можно добиться исключения параметров A, a_1, a_2 . В новых переменных $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3)$ скобка Ли–Пуассона будет пропорциональна исходной:

$$\Omega_{(\tilde{s}, \tilde{r})} = \sqrt{\frac{2\zeta}{A}} \Omega_{(s, r)}.$$

Интегралы f_1, f_2 останутся точно такими же, а гамильтониан и дополнительный интеграл K упростятся:

$$H = \frac{\tilde{s}_1^2}{4} + \frac{\tilde{s}_2^2}{4} + \frac{(\tilde{s}_3 + \tilde{\lambda})^2}{2} - \tilde{r}_1,$$

$$K = \left(\frac{\tilde{s}_1^2 - \tilde{s}_2^2}{4} + \tilde{r}_1 \right)^2 + \left(\frac{\tilde{s}_1 \tilde{s}_2}{2} + \tilde{r} \right)^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{2} (\tilde{s}_3 + 2\tilde{\lambda}) (\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2) - 2\tilde{\lambda} \tilde{r}_3 \tilde{s}_1.$$

Уравнения движения (1) в новых координатах записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{s}}_1 &= -\frac{\tilde{s}_2}{2} (\tilde{s}_3 + 2\tilde{\lambda}), & \dot{\tilde{r}}_1 &= \frac{\tilde{s}_2 \tilde{r}_3}{2} - \tilde{r}_2 (\tilde{s}_3 + \tilde{\lambda}), \\ \dot{\tilde{s}}_2 &= \frac{\tilde{s}_1}{2} (\tilde{s}_3 + 2\tilde{\lambda}) + \tilde{r}_3, & \dot{\tilde{r}}_2 &= -\frac{\tilde{s}_1 \tilde{r}_3}{2} + \tilde{r}_1 (\tilde{s}_3 + \tilde{\lambda}), \\ \dot{\tilde{s}}_3 &= -\tilde{r}_2, & \dot{\tilde{r}}_3 &= \frac{\tilde{s}_1 \tilde{r}_2}{2} - \frac{\tilde{s}_2 \tilde{r}_1}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Наряду с координатами (s, r) будем использовать координаты (ω, ν) , в которых уравнения движения Эйлера–Пуассона произвольного твердого тела с закрепленной точкой имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{A}\dot{\omega} = (\mathbf{A}\omega + \boldsymbol{\lambda}) \times \omega - \mathbf{a} \times \nu, \\ \dot{\nu} = \nu \times \omega. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь ω – вектор угловой скорости тела-носителя, ν – единичный вертикальный вектор, $\mathbf{A}$ – диагональная матрица тензора инерции, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ – вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс (его длина равна произведению веса тела – гиристата – на расстояние от его центра масс до неподвижной точки), $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиристатический момент.

В нашем случае гиристат подчинен следующим условиям: главные моменты инерции удовлетворяют соотношениям $A_1 = A_2 = 2A_3 := 2A$, а гиристатический момент постоянен и направлен по оси динамической симметрии волчка $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda := \lambda_3 \neq 0$; параметры a_1 и a_2 задают положение точки подвеса волчка в экваториальной плоскости эллипсоида инерции; центр масс находится также в этой плоскости.

Связь между системами (1) и (4) в координатах (s, r) и (ω, ν) устанавливает следующая лемма.

ЛЕММА (А. А. Ошемков; см. [12]). *Отображение $\varphi: \mathbb{R}^6(s, r) \rightarrow \mathbb{R}^6(\omega, \nu)$ задаваемое формулами*

$$s_i = -(A_i \omega_i + \lambda_i), \quad r_i = \nu_i, \quad (5)$$

устанавливает изоморфизм системы (1) и системы (4), т.е. при замене переменных (5) уравнения (1) переходят в уравнения (4).

Гамильтониан и функции f_1 и f_2 в координатах (ω, ν) примут соответственно вид

$$H = A\omega_1^2 + A\omega_2^2 + \frac{A\omega_3^2}{2} + a_1\nu_1 + a_2\nu_2,$$

$$f_1 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2, \quad f_2 = 2A\omega_1\nu_1 + 2A\omega_2\nu_2 + (A\omega_3 + \lambda)\nu_3.$$

Чтобы избавиться от параметров A, a_1, a_2 , применяем замену

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\frac{A}{2\zeta}}(-a_1\tilde{\omega}_1 + a_2\tilde{\omega}_2), & \omega_2 &= \sqrt{\frac{A}{2\zeta}}(-a_2\tilde{\omega}_1 - a_1\tilde{\omega}_2), & \omega_3 &= \sqrt{\frac{A}{2\zeta}}\tilde{\omega}_3, \\ \nu_1 &= -\frac{a_1}{\zeta}\tilde{\nu}_1 + \frac{a_2}{\zeta}\tilde{\nu}_2, & \nu_2 &= -\frac{a_2}{\zeta}\tilde{\nu}_1 - \frac{a_1}{\zeta}\tilde{\nu}_2, & \nu_3 &= \tilde{\nu}_3, \\ \lambda &= \sqrt{\frac{A\zeta}{2}}\tilde{\lambda},\end{aligned}\quad (6)$$

где $\zeta = a_1^2 + a_2^2$. После замены (6) первые интегралы системы примут вид

$$\begin{aligned}f_1 &= \tilde{\nu}_1^2 + \tilde{\nu}_2^2 + \tilde{\nu}_3^2, & f_2 &= \tilde{\omega}_1\tilde{\nu}_1 + \tilde{\omega}_2\tilde{\nu}_2 + \frac{(\tilde{\omega}_3 + \tilde{\lambda})\tilde{\nu}_3}{2}, \\ H &= \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \frac{\tilde{\omega}_3^2}{2} - \tilde{\nu}_1, \\ K &= (\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\nu}_1)^2 + (2\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2 + \tilde{\nu}_2)^2 + 2\tilde{\lambda}(\tilde{\omega}_3 - \tilde{\lambda})(\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2) + 4\tilde{\lambda}\tilde{\omega}_1\tilde{\nu}_3.\end{aligned}$$

Пользуясь заменой (5), получаем связь между координатами $(\tilde{s}, \tilde{r})$ и $(\tilde{\omega}, \tilde{\nu})$

$$\begin{aligned}\tilde{s}_1 &= -2\tilde{\omega}_1, & \tilde{s}_2 &= -2\tilde{\omega}_2, & \tilde{s}_3 &= -\tilde{\omega}_3 - \tilde{\lambda}, \\ \tilde{r}_1 &= \tilde{\nu}_1, & \tilde{r}_2 &= \tilde{\nu}_2, & \tilde{r}_3 &= \tilde{\nu}_3.\end{aligned}\quad (7)$$

Связь между системами координат описывает следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}(s, r) & \xrightarrow{(5)} & (\omega, \nu) \\ \downarrow (2) & & \downarrow (6) \\ (\tilde{s}, \tilde{r}) & \xrightarrow{(7)} & (\tilde{\omega}, \tilde{\nu})\end{array}$$

Всюду в дальнейшем мы будем использовать только координаты $(\tilde{s}, \tilde{r})$ и $(\tilde{\omega}, \tilde{\nu})$, но будем обозначать их (s, r) и (ω, ν) соответственно.

§ 3. Бифуркационные диаграммы

Рассмотрим гладкое симплектическое многообразие M^{2n} . Пусть $v = \text{sgrad } H$ есть гамильтонова система на нем, интегрируемая по Лиувиллю. Это значит, что интегралы $H = f_1, f_2, \dots, f_n$ почти всюду на M функционально независимы и находятся в инволюции, а соответствующие поля $\text{sgrad } f_i$ полны на M .

Рассмотрим отображение момента $\mu: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое формулой

$$\mu(x) = (H(x), f_2(x), \dots, f_n(x)).$$

Так как система v интегрируема по Лиувиллю, то определено гладкое симплектическое действие абелевой группы $\mathbb{R}^n$, порожденное полями $\text{sgrad } f_i$. По теореме Лиувилля связные регулярные компактные орбиты этого действия диффеоморфны n -мерному тору T^n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Слоение на многообразии M , слоями которого являются связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов $f_1, \dots, f_n$, называется *слоением Лиувилля*.

Таким образом, слоение Лиувилля состоит из регулярных слоев (невыврожденных орбит, т.е. торов Лиувилля) и сингулярных слоев (которые, вообще говоря, могут состоять из нескольких орбит).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Бифуркационным комплексом C^n данной интегрируемой системы называется топологическое пространство, точками которого являются слои соответствующего слоения Лиувилля.

Бифуркационный комплекс обладает следующим свойством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (А. Т. Фоменко; см. [13], [14]). Пусть интегрируемая гамильтонова система нерезонансна. Тогда бифуркационный комплекс C^n не зависит от выбора образующих группы $\mathbb{R}^n$. В частности, если гамильтониан H фиксирован, то C^n не зависит от выбора дополнительных интегралов $f_2, \dots, f_n$.

Итак, бифуркационный комплекс C^n совпадает с пространством компонент связности прообразов отображения момента μ и не зависит (в нерезонансном случае) от выбора дополнительных интегралов. При этом отображение момента, вообще говоря, зависит от этого выбора.

Рассмотрим отображение момента для нашей задачи

$$\mu = H \times K: M_g^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k). \quad (8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Точка x из M_g^4 называется критической точкой отображения момента μ , если ранг $d\mu(x)$ меньше 2. Ее образ $\mu(x)$ в $\mathbb{R}^2(h, k)$ называется *критическим значением*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Образ всех критических точек при отображении момента называется *бифуркационной диаграммой* Σ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Бифуркационная диаграмма – это образ множества точек двумерного бифуркационного комплекса C^2 , соответствующих сингулярным слоям слоения Лиувилля, при проекции на плоскость $\mathbb{R}^2(h, k)$, заданной отображением момента.

Обычно бифуркационная диаграмма представляет собой набор гладких кривых, имеющих точки пересечения, касания и возврата.

В случае Ковалевской–Яхьи бифуркационная диаграмма $\Sigma = \Sigma(g, \lambda)$ будет зависеть от параметров g, λ . В [10] указаны кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$, разделяющие области с различными типами бифуркационных диаграмм, а также найден явный вид бифуркационных кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$.

Обозначим через $\Theta(g, \lambda)$ множество, которое состоит из тех значений $(g, \lambda) \in \mathbb{R}^2(g, \lambda)$, при переходе через которые меняется вид диаграммы $\Sigma(g, \lambda)$ (такие значения (g, λ) будем называть *бифуркационными*). Это множество устроено следующим образом.

ТЕОРЕМА 1 (П. Е. Рябов; см. [10]). Множество $\Theta(g, \lambda)$ является объединением кривых Γ_i , $i = 1, \dots, 5$, где

$$\Gamma_1 = \{(g, \lambda) \mid 1 - 4\lambda g = 0\},$$

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &= \left\{ \left(-2t^3, \sqrt{-\frac{4t^4-1}{4t^2}} \right) \mid t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right] \right\}, \\ \Gamma_3 &= \left\{ \left(\sqrt{\frac{t^2-1}{4t}}, \sqrt{-t^3} \right) \mid t \in [-1, 0) \right\}, \\ \Gamma_4 &= \left\{ \left(\sqrt{-\frac{(3t^2-1)^2}{4t^3}}, \sqrt{\frac{(t^2-1)^3}{t^3}} \right) \mid t \in (-\infty, +\infty) \right\}, \\ \Gamma_5 &= \left\{ \left(\sqrt{\frac{(t^2-1)^3}{2t^3}}, \sqrt{-\frac{(3t^2-1)^2}{2t^3}} \right) \mid t \in [-1, 0) \right\}.\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. П. Е. Рябов в [10] доказал, что при переходе через кривые Γ_i меняется тип бифуркационной диаграммы. Таким образом, плоскость $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$ разбивается на 18 камер (рис. 1). П. П. Андреянов (см. [15]) усилил это утверждение, доказав, что при изменении значений параметров g, λ строго внутри каждой камеры тип бифуркационной диаграммы не меняется, т.е. внутри камер диаграммы гомеоморфны.

Рис. 1

ТЕОРЕМА 2 (П. Е. Рябов; см. [10]). Все критические значения отображения момента (8) в задаче Ковалевской–Яхьи принадлежат объединению кривых $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, т.е. $\Sigma \subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, где

$$\begin{aligned}\Sigma_1: \quad & \begin{cases} k = 1, \\ h \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} k = 1 + \left(h - \frac{\lambda^2}{2} \right)^2, \\ h \geq \frac{\lambda^2}{2} \end{cases}, \quad \text{при } g = 0 \\ & u \begin{cases} h = \omega_1^2 + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{g}{\omega_1}, \\ k = 1 + \omega_1^4 + 2g\omega_1 \end{cases}, \quad \text{при } g \neq 0,\end{aligned}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} h = 2g^2 - \frac{\lambda^2}{2} - s + \frac{\lambda^2}{2s^2}, \\ k = -4\lambda^2 g^2 + (s + \lambda^2)^2 - \frac{\lambda^2(\lambda^2 + 2s^2)}{s^2} \end{cases} \quad \text{при } \lambda \neq 0$$

$$u \begin{cases} h \geq 0, \\ k = 0 \end{cases} \quad \text{при } \lambda = 0.$$

Рябов также показал, что включение, указанное в теореме 2, строгое, т.е. бифуркационная диаграмма Σ (в общем случае) не совпадает с $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Таким образом, при ненулевых значениях параметров g и λ следует различать 18 типов диаграмм (рис. 2, 3).

Рис. 2

Рис. 3

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для случая $\lambda = 0$ бифуркационные диаграммы и перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента были найдены в работах М. П. Харламова [4], [5]. Аналогичные результаты для $g = 0$ были получены П. Е. Рябовым в [10]. Инварианты Фоменко-Цишанга для случаев $\lambda = 0$ и $g = 0$ были вычислены в работах А. В. Болсинова, П. Х. Рихтера, А. Т. Фоменко [7] и П. В. Морозова [8] соответственно.

При движении вдоль оси g (при $\lambda = 0$), т.е. проходя по нижней границе камер 1, 2, 6 и 7 (см. рис. 1), получаем четыре типа бифуркационных диаграмм случая Ковалевской (рис. 4). При движении вдоль оси λ (при $g = 0$), т.е. проходя по левой боковой границе камер 1, 2', 6', 7', также получаем четыре типа бифуркационных диаграмм (рис. 5).

Рис. 5

§ 4. Семейства торов и их перестройки внутри камер 1, 2, 2', 6, 6', 7, 7'

В камерах 1, 2, 2', 6, 6', 7, 7' на рис. 4, 5 гладкие дуги бифуркационных диаграмм обозначены малыми греческими буквами с индексами. В теоремах 6, 7 далее полностью опишем перестройки и семейства торов на границах этих камер. В предположении боттовости можно осуществить переход внутрь камер и, таким образом, продолжить перестройки.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В интегрируемом случае Ковалевской–Яхьи доказательство боттовости представляет аналитическую сложность, и на настоящий момент боттовость аналитически не доказана. Как правило, в наиболее сложных случаях интегрируемости боттовость проверяется с помощью современных компьютерных методов.

ТЕОРЕМА 3. *В интегрируемом случае Ковалевской–Яхьи в прообразах всех гладких дуг бифуркационных диаграмм, за исключением конечного числа точек на них, лежат боттовские перестройки торов Лиувилля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка боттовости сводится к проверке невырожденности гессиана d^2K . Дополнительный интеграл и функции, которые задают бифуркационные кривые Σ_i на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$, являются аналитическими. Определитель матрицы d^2K задается многочленом. Таким образом, проверка невырожденности сводится к проверке того, что многочлен не равен нулю. Следует отметить, что на конце каждой дуги диаграммы лежит точка, прообраз которой содержит положение равновесия. Этот факт, а также утверждение о невырожденности положений равновесия будут доказаны в § 5 (теорема 9). Это означает, что в окрестности таких точек перестройки боттовские. Более того, боттовость должна сохраняться на участках, удаленных от положений равновесия, за исключением, быть может, конечного числа точек на этих участках. Если предположить, что боттовость нарушается на каком-то участке (на целой дуге), то гессиан дополнительного интеграла, который задается многочленом, должен равняться нулю, чего не может быть, так как если аналитическая функция равна нулю на отрезке, то она – тождественный нуль. Получаем противоречие с тем, что положения равновесия невырождены. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4 (М. П. Харламов, П. Е. Рябов; см. [3]). *При $g = 0$ в прообразах всех гладких дуг бифуркационных диаграмм лежат перестройки торов Лиувилля, которые описываются 3-атомами следующим образом:*

Дуги бифуркационных диаграмм	Тип 3-атома
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}$	A
$\alpha_3, \alpha_7, \alpha_8$	$2A$
$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6$	B
β_4	$2B$
γ	C_2

Регулярные точки отображения момента на $\mathbb{R}^2(h, k)$ являются образами некоторого количества торов Лиувилля. Эти торы естественным образом

группируются в семейства (они обозначены римскими цифрами I–VII; см. рис. 5). Число торов в каждом семействе указано в следующей таблице:

Семейство	Число торов Лиувилля
I	1
II	2
III	1
IV	1
V	1
VI	1
VII	2

ТЕОРЕМА 5 (А. В. Болсинов, П. Х. Рихтер, А. Т. Фоменко; см. [7]). При $\lambda = 0$ в прообразах всех гладких дуг бифуркационных диаграмм лежат боттовские перестройки торов Лиувилля, которые описываются 3-атомами следующим образом:

Дуги бифуркационных диаграмм	Тип 3-атома
$\alpha'_1, \gamma'_1, \gamma'_4$	A
$\delta'_1, \delta'_2, \alpha'_2, \gamma'_7$	2A
γ'_2	2A*
$\beta'_1, \gamma'_3, \gamma'_5$	B
β'_3, γ'_6	2B
β'_2	C ₂

Число торов Лиувилля в каждом семействе (1)–(5) (см. рис. 4) указано в следующей таблице:

Семейство	Число торов Лиувилля
(1)	1
(2)	2
(3)	2
(4)	1
(5)	2

Используя теоремы 4, 5, можно описать перестройки торов в камерах, близких к осям. Это сделано в следующих двух теоремах.

ТЕОРЕМА 6. В случае Ковалевской–Яхьи в камерах 1, 2', 6', 7' (см. рис. 5) в прообразе всех гладких дуг бифуркационных диаграмм лежат боттовские перестройки следующих типов:

Дуги бифуркационных диаграмм	Тип 3-атома
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \gamma'_1, \gamma'_4, \alpha_{81}, \alpha_{82}, \sigma$	A
$2\alpha_7$	$2A$
δ_1, δ_2	A^*
$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6, \gamma'_5$	B
β_4	$2B$
γ	C_2

В прообразах регулярных точек отображения момента лежит некоторое число торов Лиувилля, которые группируются в семейства. Число торов в каждом семействе указано в следующей таблице:

Семейство	Число торов Лиувилля
I	1
II	2
III	1
IV	1
V	1
VI	1
VII	2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вертикальная левая граница камер 1, 2', 6', 7' соответствует случаю $g = 0$, а нижняя граница камеры 1 соответствует случаю $\lambda = 0$. На границах известны перестройки и количество торов (см. теоремы 4, 5). В предположении боттовости можно осуществить переход с оси $g = 0$ (границы камер) внутрь камер 1, 2', 6', 7' и таким образом продолжить перестройки и семейства торов (см. рис. 5). Для определения неизвестных перестроек можно также осуществить переход с нижней границы камеры 1, т.е. с оси $\lambda = 0$ (см. рис. 4).

Камеры 1 и 2'. При переходе с границы внутрь камер 1 и 2' дуга α_3 , которой соответствовала перестройка $2A$, распадается на две дуги с перестройками A . Обозначим эти дуги γ'_1 и γ'_4 . Точка z_1 переходит в точку возврата v_2 . Появляется новая точка касания k_2 , справа от которой отсекается часть кривой Σ_2 (теоремы 2, 3), а на кривой Σ_1 появляется новая перестройка. Обозначим дугу с новой перестройкой γ'_5 . Остальная часть диаграммы не меняется при данном переходе, поэтому все перестройки переносятся с сохранением обозначений дуг диаграмм. Для определения перестройки, соответствующей дуге γ'_5 , нужно осуществить переход с нижней границы камеры 1. При таком переходе дуга δ'_1 с перестройкой $2A$ распадается на две дуги α_1 и α_4 с перестройками A , точка e_1 переходит в точку возврата v_1 и появляется новая точка касания k_1 . Перестройки входящих и выходящих из нее дуг известны вследствие перехода с оси $g = 0$. Остальная часть диаграммы не меняется при данном переходе, поэтому остальные перестройки переносятся. Таким образом, становится известна перестройка на дуге γ'_5 (см. рис. 4).

Камера $6'$. При переходе с границы внутрь камеры $6'$ дуга α_3 с перестройкой $2A$ распадается на дуги γ'_1 и γ'_4 с перестройками A , дуга α_8 с перестройкой $2A$ – на дуги α_{81} и α_{82} с перестройками A , точка z_1 переходит в точку возврата v_2 , появляются две новые дуги G_1D_1 и G_2D_2 . На дуге G_1D_1 перестройка та же, что и на дуге β_3 . Обозначим дугу G_2D_2 через σ . Перестройка на этой дуге определяется с помощью теоремы 10, которая будет сформулирована и доказана далее. Для полноты изложения воспользуемся результатами этой теоремы. В ней будет доказано, что точки G_2, D_2 являются невырожденными положениями равновесия, определен их тип и представление их окрестностей в виде почти прямого произведения. Точка D_2 имеет тип центр-центр. Круговая молекула этой точки изображена на рис. 6, 7. При переходе через дугу σ рождается новый тор, а значит, на дуге σ возникает перестройка типа A .

Камера $7'$. При переходе с границы внутрь камеры $7'$ дуга α_3 с перестройкой $2A$ распадается на дуги γ'_1 и γ'_4 с перестройками A , дуга α_8 – на дуги α_{81} и α_{82} , точка z_6 переходит в точку возврата v_4 , возникает дуга G_2D_2 . Как было определено выше, соответствующая этой дуге перестройка имеет тип A .

При таких переходах семейства торов переносятся очевидным образом и новых семейств не возникает (см. рис. 5).

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7. В случае Ковалевской–Яхьи в камерах 1, 2, 6, 7 (см. рис. 4) в прообразе гладких дуг бифуркационных диаграмм лежат боттовские перестройки следующих типов:

Дуги бифуркационных диаграмм	Тип 3-атома
$\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \gamma'_1, \gamma'_4, \delta'_{21}, \delta'_{22}, \sigma'$	A
γ'_7	$2A$
γ'_2	A^*
$\beta'_1, \gamma'_3, \gamma'_5, \beta_3$	B
β'_3, γ'_6	$2B$
β'_2	C_2

В прообразах регулярных точек отображения момента лежит некоторое число торов Лиувилля, которые группируются в семейства. Число торов в каждом семействе указано в следующей таблице:

Семейство	Число торов Лиувилля
(1)	1
(2)	2
(3)	2
(4)	1
(5)	2
(6)	1
(7)	1

F	$A_{(\alpha_1)} \xrightarrow[r=0]{I} A_{(\gamma'_1)}$	C_1	$A_{(\sigma')} \xrightarrow[r=0]{3} A_{(\delta'_{21})}$
N_1		N_2	
N_3		D_2	$A_{(\alpha_{82})} \xrightarrow[r=0]{III} A_{(\sigma)}$
C_2		D_1	
E_1	$A_{(\gamma'_7)} \xrightarrow[r=0]{5} A_{(\delta'_{22})}$	G_2	$A_{(\alpha_7)} \xrightarrow[r=0]{VII} A_{(\alpha_{81})}$
E_2		G_1	

Рис. 6

Рис. 7

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нижняя граница камер 1, 2, 6, 7 лежит на оси g ($\lambda = 0$). В предположении боттовости можно осуществить переход с оси $\lambda = 0$ (границы камер) внутрь камер 1, 2, 6, 7 и таким образом продолжить перестройки и семейства торов (см. рис. 4). При таком переходе возникают новые дуги бифуркационных диаграмм. Для определения соответствующих им типов перестроек нужно осуществить переход с левой боковой границы камеры 1, т.е. с оси $g = 0$ (см. рис. 5).

Камеры 1 и 2. При переходе с границы внутрь камер 1 и 2 дуга δ'_1 с перестройкой $2A$ распадается на две дуги с перестройками A . Обозначим эти дуги α_1 и α_4 . Точка e_1 переходит в точку возврата v_1 . Появляются новая точка касания k_1 и две дуги, идущие от этой точки, с неизвестными перестройками. Остальная часть диаграммы не меняется при таком переходе, поэтому переносим все перестройки с сохранением обозначений дуг диаграмм. Для определения неизвестных перестроек на новых дугах нужно осуществить переход с левой боковой границы камеры 1 (см. рис. 5). При таком переходе (он описан в теореме 6) нужная часть диаграммы не меняется, поэтому переносим перестройки, сохраняя обозначения.

Камера 6. При переходе с границы внутрь камеры 6 дуга δ'_1 с перестройкой $2A$ распадается на дуги α_1 и α_4 с перестройками A , дуга δ'_2 с перестройкой $2A$ – на дуги δ'_{21} и δ'_{22} с перестройками A , точка e_1 переходит в точку возврата v_1 , появляются две новые дуги E_1C_1 и E_2C_2 . На дуге E_2C_2 перестройка та же, что и на дуге γ'_5 . Обозначим дугу E_1C_1 через σ' . Перестройка на этой дуге

определяется с помощью теоремы 10, которая будет сформулирована и доказана далее. Для полноты изложения воспользуемся результатами этой теоремы. В ней будет доказано, что точки E_1 , C_1 являются невырожденными положениями равновесия, определен их тип и представление их окрестностей в виде почти прямого произведения. Точка C_1 имеет тип центр-центр. Круговая молекула этой точки изображена на рис. 6, 7. При переходе через дугу σ' рождается новый тор, а значит, на дуге σ' возникает перестройка типа A .

Камера 7. При переходе с границы внутрь камеры 7 дуга δ'_1 с перестройкой $2A$ распадается на дуги α_1 и α_4 с перестройками A , дуга δ'_2 – на дуги δ'_{21} и δ'_{22} , точка e_2 переходит в точку возврата v_6 , возникает ребро E_1C_1 . Как было определено выше, соответствующая ему перестройка имеет тип A .

При таких переходах семейства торов переносятся очевидным образом. Но из-за появления новой точки касания k_1 возникает новая область $\beta_3\alpha_5\alpha_6$ (см. рис. 4). Из теоремы 6 известно, что в этой области имеются два тора семейств III и IV. Для единства с ранее введенными обозначениями в данной теореме обозначим эти семейства (6) и (7).

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В камере 1 (см. рис. 4, 5) возникли разные обозначения одних и тех же дуг диаграммы и семейств торов (см. теоремы 6, 7). Это произошло из-за того, что внутрь этой камеры можно попасть с нижней границы ($\lambda = 0$) и с левой боковой границы ($g = 0$). А на этих границах обозначения не согласованы (см. теоремы 4, 5). Покажем, как можно записать разные обозначения одних и тех же дуг бифуркационной диаграммы и семейств торов на границах камеры 1:

Параметр $\lambda = 0$	Параметр $g = 0$
γ'_2	δ_1, δ_2
β'_2	γ
γ'_3	β_1
β'_1	β_2
(1)	I
(2)	I, VI
(1), (4)	II
(3)	V, IV
(6), (7)	III, IV

§ 5. Классификация невырожденных положений равновесия

Итак,

$$M_g^4 = \{f_1 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, f_2 = 2(\omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2) + (\omega_3 + \lambda)\nu_3 = 2g\},$$

где f_1 и f_2 – функции, лежащие в ядре скобки Ли–Пуассона и являющиеся первыми интегралами уравнений

$$\dot{\omega}_i = \{\omega_i, H\}, \quad \dot{\nu}_i = \{\nu_i, H\}.$$

Рассмотрим ограничения гамильтониана H и интеграла K на M_g^4 , обозначив их $H_{g\lambda}$ и $K_{g\lambda}$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Точка $x \in M_g^4$ называется *точкой ранга 0* (или *положением равновесия*), если $dH_{g\lambda}(x) = dK_{g\lambda}(x) = 0$.

Координаты точек ранга 0 указаны в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 8. В случае Ковалевской–Яхьи положения равновесия на фазовом пространстве системы имеют следующие координаты:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \pm \sqrt{z^2 - 1} \frac{2gz - \lambda}{2z^2 - 1}, & \omega_2 &= 0, & \omega_3 &= \frac{2gz - \lambda}{2z^2 - 1}, \\ \nu_1 &= \pm \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{z}, & \nu_2 &= 0, & \nu_3 &= \frac{1}{z}, \end{aligned}$$

где z – любой действительный корень уравнения

$$z \frac{(2gz - \lambda)^2}{(2z^2 - 1)^2} - \lambda z \frac{2gz - \lambda}{2z^2 - 1} \pm \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} = 0. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Координаты положений равновесия на фазовом пространстве системы будем искать из условия $\text{sg} \text{grad } H(x) = 0$, т.е. приравняв к нулю правые части уравнений (3) и используя соотношения (7):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} (\omega_3 - \lambda)\omega_2 = 0, \\ (\omega_3 - \lambda)\omega_1 + \nu_3 = 0, \\ \nu_2 = 0, \\ \nu_2\omega_3 - \nu_3\omega_2 = 0, \\ \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3 = 0, \\ \nu_1\omega_2 - \nu_2\omega_1 = 0 \end{array} \right. & \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\omega_3 - \lambda)\omega_2 = 0, \\ (\omega_3 - \lambda)\omega_1 + \nu_3 = 0, \\ \nu_2 = 0, \\ \nu_3\omega_2 = 0, \\ \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3 = 0, \\ \nu_1\omega_2 = 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nu_2 = 0, \\ \omega_2 = 0, \\ (\omega_3 - \lambda)\omega_1 + \nu_3 = 0, \\ \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3 = 0, \\ \nu_1^2 + \nu_3^2 = 1, \\ 2\omega_1\nu_1 + (\omega_3 + \lambda)\nu_3 = 2g. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (10)$$

Последний переход сделан в предположении $\nu_2 = \omega_2 = 0$. Если же $\omega_2 \neq 0$, то

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\omega_3 - \lambda)\omega_2 = 0, & \nu_2 = 0, \\ (\omega_3 - \lambda)\omega_1 + \nu_3 = 0, & \nu_3 = 0, \\ \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3 = 0, & \nu_1 = 0. \end{array} \right.$$

Этот вариант невозможен в силу соотношения $\Gamma = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$.

Если в (10) $\nu_3 = 0$, то

$$\begin{aligned} \begin{cases} (\omega_3 - \lambda)\omega_1 = 0, \\ -\nu_1\omega_3 = 0, \\ \nu_1^2 = 1, \\ 2\omega_1\nu_1 = 2g \end{cases} &\iff \begin{cases} (\omega_3 - \lambda)\omega_1 = 0, \\ \nu_1\omega_3 = 0, \\ \nu_1 = \pm 1, \\ 2\omega_1\nu_1 = 2g \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (\omega_3 - \lambda)\omega_1 = 0, \\ \omega_3 = 0, \\ \nu_1 = \pm 1, \\ \omega_1 = \pm g \end{cases} \iff \begin{cases} \omega_3 - \lambda = 0, \\ \omega_3 = 0, \\ \nu_1 = \pm 1, \\ \omega_1 = \pm g. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, если $\nu_3 = 0$, то $\lambda = 0$. И положения равновесия имеют следующие координаты на M^4 :

$$\omega_1 = \pm g, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0, \quad \nu_1 = \pm 1, \quad \nu_2 = 0, \quad \nu_3 = 0.$$

Пусть теперь $\nu_3 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \begin{cases} (\omega_3 - \lambda)\omega_1 + \nu_3 = 0, & | \cdot \nu_1, \\ \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3 = 0, & | \cdot \omega_1, \\ \nu_1^2 + \nu_3^2 = 1, & | : \nu_3^2 \quad (\text{где } \nu_3 \neq 0), \\ 2\omega_1\nu_1 + (\omega_3 + \lambda)\nu_3 = 2g, & | : \nu_3 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \omega_3\omega_1\nu_1 - \lambda\omega_1\nu_1 + \nu_3\nu_1 = 0, \\ \nu_3\omega_1^2 - \nu_1\omega_3\omega_1 = 0, \\ \left(\frac{\nu_1}{\nu_3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\nu_3^2}, \\ 2\omega_1\frac{\nu_1}{\nu_3} + \omega_3 + \lambda = \frac{2g}{\nu_3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных. Пусть $1/\nu_3 = z$, $\nu_1/\nu_3 = s$. Заметим, что $z \neq \pm 1$. Так как если $z = \pm 1$, то $\nu_3 = \pm 1$ и из третьего уравнения системы следовало бы, что $\nu_1 = 0$, а система имела бы вид

$$\begin{cases} (\omega_3 - \lambda)\omega_1 \pm 1 = 0, & \omega_1 = 0, \\ (\omega_3 + \lambda) = \pm 2g, & \nu_3 = \pm 1 \end{cases} \iff \emptyset$$

(так как несовместны первые два уравнения системы).

Итак, вернемся к замене. Сложим первые два уравнения системы. Получим

$$\begin{cases} \nu_3\omega_1^2 - \lambda\omega_1\nu_1 + \nu_3\nu_1 = 0, & | : \nu_3^2, \\ \nu_3\omega_1 = \nu_1\omega_3, & | : \nu_3, \\ s^2 + 1 = z^2, \\ 2\omega_1s + \omega_3 + \lambda = 2gz \end{cases} \iff \begin{cases} z\omega_1^2 - \lambda\omega_1sz + s = 0, \\ \omega_1 = s\omega_3, \\ s^2 + 1 = z^2, \\ 2\omega_1s + \omega_3 + \lambda = 2gz \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z\omega_1^2 - \lambda\omega_1 sz + s = 0, \\ \omega_1 = s\omega_3, \\ s^2 + 1 = z^2, \\ 2s^2\omega_3 + \omega_3 + \lambda = 2gz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\omega_1^2 - \lambda\omega_1 sz + s = 0, \\ \omega_1 = s\omega_3, \\ s^2 + 1 = z^2, \\ \omega_3 = \frac{2gz - \lambda}{2s^2 + 1} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z\omega_1^2 - \lambda\omega_1 sz + s = 0, \\ \omega_1 = s \frac{2gz - \lambda}{2s^2 + 1}, \\ s = \pm \sqrt{z^2 - 1}, \\ \omega_3 = \frac{2gz - \lambda}{2s^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\omega_1^2 - \lambda\omega_1 sz + s = 0, \\ \omega_1 = \pm \sqrt{z^2 - 1} \frac{2gz - \lambda}{2z^2 - 1}, \\ s = \pm \sqrt{z^2 - 1}, \\ \omega_3 = \frac{2gz - \lambda}{2z^2 - 1}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Подставим в первое уравнение системы $s(z)$ и $\omega_1(z)$:

$$z \frac{(2gz - \lambda)^2}{(2z^2 - 1)^2} - \lambda z \frac{2gz - \lambda}{2z^2 - 1} \pm \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} = 0.$$

Легко проверить, что для точек, найденных из условия $\text{sgrad } H = 0$, условие $\text{sgrad } K = 0$ также выполнено.

Теорема доказана.

Особые точки бифуркационной диаграммы Σ – это точки пересечения, касания, излома гладких дуг диаграммы или же изолированные точки, которые этим дугам вообще не принадлежат. Другими словами, это те точки, в которых Σ не является гладкой кривой (см. [16; т. 1, гл. 9]).

В случае Ковалевской–Яхьи особые точки бифуркационной диаграммы – это точки пересечения, касания и возврата. Изолированных точек нет вообще (см. [10]). Из результатов работы [10] также вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. При изменении значений параметров g, λ внутри каждой из 18 камер (см. рис. 1) количество особых точек не меняется. При переходе из одной камеры в другую их число может измениться.

При переходе из камеры в камеру изменяется тип бифуркационной диаграммы, поэтому может измениться и количество особых точек (см. рис. 2, 3). Например, в камере 2 две точки пересечения, две точки возврата и два касания. А в камере 3 четыре точки пересечения, две точки возврата и два касания.

Следующие два утверждения были проверены при помощи пакета символьных вычислений Wolfram Mathematica 6.0.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При фиксированных значениях параметров g, λ внутри каждой из 18 камер количество точек пересечения дуг диаграммы совпадает с количеством корней уравнения (9).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. В случае Ковалевской–Яхьи для каждого небифуркационного значения параметров g, λ все положения равновесия отображаются в особые точки бифуркационной диаграммы, а именно в точки трансверсального пересечения гладких дуг диаграммы. Причем разным положениям равновесия соответствуют разные точки пересечения, а количество положений равновесия совпадает с числом точек пересечения гладких дуг диаграммы.

Пусть на (M^4, ω) задана система с гамильтонианом H и дополнительным интегралом K . Пусть точка $x \in M^4$ – точка ранга 0. Тогда на $T_x M$ корректно определены два симплектических оператора $A_H = \Omega^{-1} d^2 H$ и $A_K = \Omega^{-1} d^2 K$, порождающих в алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ некоторую коммутативную подалгебру $\mathfrak{h}(H, K)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Положение равновесия x называется *невыврожденным*, если подалгебра $\mathfrak{h}(H, K)$ является картановской подалгеброй в алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$.

Напомним, что коммутативная подалгебра в $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ является картановской, если и только если она двумерна и среди ее элементов найдется линейный оператор с попарно различными собственными значениями. Таким образом, чтобы проверить невырожденность найденных положений равновесия, нужно проверить картановость подалгебры $\mathfrak{h}(H, K)$. Для начала заметим, что операторы A_H и A_K совпадают с линейаризациями векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ соответственно, что позволяет легко вычислять матрицы, которыми они задаются в локальных координатах. Итак, сначала нужно убедиться, что операторы A_H и A_K линейно независимы, и затем проверить, что некоторая линейная комбинация $\lambda A_H + \mu A_K$ имеет попарно различные собственные значения.

Невырожденные положения равновесия обладают многими замечательными свойствами. В частности, их окрестности в M^4 представимы в виде почти прямого произведения 2-атомов (см. [16; т. 1, гл. 9]).

Напомним, как определяется структура почти прямого произведения в случае двух степеней свободы.

Пусть V_1 и V_2 – два атома со своими симплектическими структурами и функциями Морса f_1 и f_2 . Пусть на каждом атоме симплектически действует одна и та же конечная группа G , сохраняющая функции f_1 и f_2 . Тогда на прямом произведении $V_1 \times V_2$ определена симплектическая структура как сумма двух структур атомов. Определена также структура лиувиллева слоения, задаваемая парой коммутирующих функций f_1, f_2 . Определено действие группы G , задаваемое формулой $\varphi(g)(x_1, x_2) = (\varphi_1(g)(x_1), \varphi_2(g)(x_2))$, где φ_i – действие G на атоме V_i . Действие φ симплектическое и сохраняет структуру слоения Лиувилля. Можно рассмотреть фактормногообразие $(V_1 \times V_2)/G$. Оно симплектическое, имеет естественную структуру слоения Лиувилля и является четырехмерной окрестностью связного особого слоя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Описанная выше четырехмерная особенность называется *особенностью типа почти прямого произведения*.

Это, а также другие важные свойства невырожденных особенностей подробно обсуждаются в [16; т. 1, гл. 9].

ТЕОРЕМА 9. В случае Ковалевской–Яхьи при небифуркационных значениях параметров g и λ все положения равновесия невырождены, причем в прообразе каждой точки пересечения бифуркационных кривых лежит ровно одна критическая точка ранга 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство теоремы в координатах (s, r) , так как в этих координатах скобка Ли–Пуассона записывается проще, чем в координатах (ω, ν) .

Покажем, что при $\lambda = 1$, $\mu = 0$ линейная комбинация будет иметь попарно различные собственные значения.

Рассмотрим линеаризацию векторного потока (1) на $e(3)^*$. Дифференцируя правые части уравнений (3), получаем матрицу оператора $2A_H$:

$$2A_H = \begin{pmatrix} 0 & -(s_3 + 2\lambda) & -s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2\lambda + s_3 & 0 & s_1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & r_3 & -2r_2 & 0 & -2(s_3 + \lambda) & s_2 \\ -r_3 & 0 & 2r_1 & 2(s_3 + \lambda) & 0 & -s_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 & -s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что выше мы обозначали через A_H оператор линеаризации гамильтонова векторного поля в особой точке на симплектическом многообразии, т.е. для невырожденной скобки Пуассона. Аналогичным образом можно действовать и для вырожденной скобки Пуассона (в окрестности точки, где ранг скобки локально постоянен), учитывая, что все операторы линеаризации в этом случае будут иметь одно и то же ядро, размерность которого равна корангу скобки.

Рассматриваемая скобка Ли–Пуассона на $e(3)^*$ почти всюду имеет ранг 4, в силу чего оператор линеаризации A_H гамильтонова векторного поля $\text{sgrad } H$ в особой точке всегда имеет два нулевых собственных значения.

В положении равновесия $r_2 = s_2 = 0$. Будем искать собственные значения матрицы $2A_H$:

$$2A_H - tE = \begin{pmatrix} -t & -(s_3 + 2\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\lambda + s_3 & -t & s_1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -t & 0 & -2 & 0 \\ 0 & r_3 & 0 & -t & -2(s_3 + \lambda) & 0 \\ -r_3 & 0 & 2r_1 & 2(s_3 + \lambda) & -t & -s_1 \\ 0 & -r_1 & 0 & 0 & s_1 & -t \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен имеет вид

$$\chi_{A_H}(t) = \det(2A_H - tE) = t^2[t^4 + (s_1^2 + 4(s_3 + \lambda)^2 + 6r_1 + (s_3 + 2\lambda)^2)t^2 + (s_1^2 + 4(s_3 + \lambda)^2 + 4r_1)(2r_1 + (s_3 + 2\lambda)^2)].$$

Пусть

$$a = s_1^2 + 4(s_3 + \lambda)^2 + 4r_1, \quad b = 2r_1 + (s_3 + 2\lambda)^2. \quad (11)$$

Тогда

$$\chi_{A_H}(t) = t^2[t^4 + (a + b)t^2 + ab].$$

Два собственных значения нулевые, а четыре остальных имеют вид $\pm\sqrt{a}$, $\pm\sqrt{b}$.

Невырожденность особой точки ранга 0 эквивалентна тому, что $a \neq b$ и $ab \neq 0$. При этом возникают следующие возможности:

- если $a < 0$, $b < 0$, то получим четыре действительных корня, поэтому тип точки седло-седло;

- если $ab < 0$, то возникает одна пара действительных и одна пара мнимых корней, поэтому тип точки центр-седло;
- если $a > 0$, $b > 0$, то получим четыре чисто мнимых корня, поэтому тип точки центр-центр.

Для всех небифуркационных значений параметров g и λ , т.е. для каждой из 18 камер, проверка условий $a \neq b$ и $ab \neq 0$, а также определение знаков a и b могут быть выполнены с помощью компьютера (см. замечание 6, а также теорему 10).

Теперь проверим, что для небифуркационных значений g и λ в каждой точке ранга 0 операторы A_H и A_K линейно независимы. Из-за того что интеграл K является сложным полиномом четвертой степени, сделать это нелегко. Поэтому будем вычислять лишь часть коэффициентов матрицы

$$A_K = (\text{grad}(\Omega \cdot \text{grad } K))^T.$$

Рассмотрим положение равновесия x и вектор

$$v = (0, 1, 0, 0, 0, 0) \in T_x M^4.$$

Под действием оператора A_H этот вектор перейдет в вектор

$$(-2\lambda - s_3, 0, 0, r_3, 0, -r_1),$$

а под действием оператора A_K – в вектор

$$(*, 0, a_{32}, *, 0, *),$$

где

$$a_{32}(x) = \frac{\partial(\text{sgrad } K)^3}{\partial s_2}(x).$$

Для доказательства независимости достаточно проверить, что $a_{32} \neq 0$:

$$dK = \begin{pmatrix} s_1^3 - \frac{s_1 s_2^2}{2} + 4r_1 s_1 + s_2 r_2 - \lambda s_1 (s_3 + 2\lambda) - 2\lambda r_3 \\ s_2^3 - \frac{s_1^2 s_2}{2} - 4s_2 r_1 + s_1 r_2 - \lambda s_2 (s_3 + 2\lambda) \\ \frac{\lambda}{2}(s_1^2 + s_2^2) \\ \frac{s_1^2 - s_2^2}{2} + 2r_1 \\ s_1 s_2 + 2r_2 \\ -2\lambda s_1 \end{pmatrix},$$

$$(\text{sgrad } K)^3 = s_2 \left(s_1^3 - \frac{s_1 s_2^2}{2} + 4r_1 s_1 + s_2 r_2 - \lambda s_1 (s_3 + 2\lambda) - 2\lambda r_3 \right) \\ - s_1 \left(s_2^3 - \frac{s_1^2 s_2}{2} - 4s_2 r_1 + s_1 r_2 - \lambda s_2 (s_3 + 2\lambda) \right) \\ + r_2 \left(\frac{s_1^2 - s_2^2}{2} + 2r_1 \right) - r_1 (s_1 s_2 + 2r_2),$$

$$a_{32}(x) = s_1^3 - \frac{s_1 s_2^2}{2} + 4r_1 s_1 + s_2 r_2 - \lambda s_1 (s_3 + 2\lambda) - 2\lambda r_3 - s_1 \left(-s_1^2 - 4r_1 + \frac{s_1^2}{2} - \lambda(s_3 + 2\lambda) \right) = 1.5s_1^3 + 7r_1 s_1 - 2\lambda r_3.$$

В силу теоремы 1 бифуркационные диаграммы внутри каждой из 18 камер гомеоморфны, а значит, мы можем взять такие значения параметров g и λ внутри каждой камеры, чтобы найденные координаты положений равновесия удовлетворяли соотношению $a_{32}(x) \neq 0$.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Отметим, что результаты, аналогичные теоремам 8 и 9, получены также в недавней работе П. Е. Рябова [11], где описаны критические точки ранга 0 и указан способ определения их типов. Однако для того чтобы определить тип точки ранга 0, координаты которой найдены по теореме 8, для каждой из 18 камер при фиксированных значениях параметров g , λ надо проверить знаки выражений (11). Эту проверку мы провели для каждой камеры при помощи символьного пакета Wolfram Mathematica 6.0, а также получили представления всех невырожденных особенностей ранга 0 в виде почти прямых произведений. Результат представлен в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 10. *В прообразе точек F , N_1 , N_2 , N_3 , E_1 , E_2 , C_1 , C_2 , D_1 , D_2 , G_1 , G_2 лежат невырожденные положения равновесия, имеющие тип почти прямого произведения. Их типы и представления в виде почти прямого произведения имеют следующий вид:*

Точка	Тип	Почти прямое произведение
F	центр-центр	$A \times A$
E_1	центр-центр	$A \times A$
C_1	центр-центр	$A \times A$
G_2	центр-центр	$A \times A$
D_2	центр-центр	$A \times A$
E_2	центр-седло	$A \times B$
C_2	центр-седло	$A \times B$
G_1	центр-седло	$A \times B$
D_1	центр-седло	$A \times B$
N_1	седло-седло	$(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$
N_2	седло-седло	$B \times B$
N_3	седло-седло	$B \times B$

Круговые молекулы с r -метками невырожденных особенностей и соответствующие им бифуркационные комплексы приведены на рис. 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 9.3 из [16; т. 1, гл. 9] особенность типа центр-центр имеет вид прямого произведения атома A на атом A . Точками такого типа являются точки F , E_1 , C_1 , G_2 , D_2 . При этом окрестности точек C_1 и D_2 представляют собой несвязное объединение двух особенностей типа центр-центр,

а окрестности точек E_1 и G_2 – несвязное объединение трех особенностей типа центр-центр. Эти несвязные особенности проецируются в одну точку бифуркационной диаграммы отображением момента.

По теореме 9.2 из [16; т. 1, гл. 9] любая особенность типа центр-седло лиу-виллево эквивалентна канонической особенности вида $A \times V$ для некоторого подходящего седлового атома, который можно определить, построив круговую молекулу особенности. В случае Ковалевской–Яхьи точки E_2, C_2, G_1, D_1 являются невырожденными особенностями типа центр-седло. В качестве седлового атома V нужно взять атом B .

Теорема 9.6 из [16; т. 1, гл. 9] утверждает, что круговые молекулы особенности типа седло-седло с ровно одной особой точкой на слое соответствуют одному из четырех случаев, которые указаны в теореме 9.6 из [16; т. 1, гл. 9]. Чтобы определить, какому именно случаю соответствует особенность, необходимо знать перестройки на дугах бифуркационных диаграмм, входящих в данную точку. В случае Ковалевской–Яхьи точки N_1, N_2, N_3 являются невырожденными особенностями типа седло-седло. Используя теоремы 6, 7, заключаем, что окрестности точек N_2, N_3 представимы в виде почти прямого произведения атомов B , а окрестность точки N_1 представима в виде почти прямого произведения $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. При построении круговых молекул точек E_2 и G_1 была использована программа по визуализации перестроек торов, написанная П. П. Андреевым на языке Wolfram Mathematica 6.0. Для наглядности построены бифуркационные комплексы в окрестности прообразов этих точек (см. рис. 6).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. На рис. 6 цифрами обозначены соответствующие семейства торов. В кругах рядом с перестройками греческими буквами с индексами обозначены дуги диаграмм, на которых данные перестройки происходят.

§ 6. Переход от общей задачи Ковалевской–Яхьи к ранее описанным частным случаям с использованием теорем 9, 10

Рассмотрим множество $\Theta(g, \lambda)$, указанное в теореме 1 (см. рис. 1). Оно состоит из тех значений $(g, \lambda) \in \mathbb{R}^2(g, \lambda)$, при переходе через которые меняется вид диаграммы $\Sigma(g, \lambda)$.

При движении вдоль оси g , т.е. проходя по нижней границе камер 1, 2, 6, 7, получаем четыре типа бифуркационных диаграмм случая Ковалевской (см. рис. 4). При движении вдоль оси λ , т.е. проходя по левой боковой границе камер 1, 2', 6', 7', получаем четыре типа бифуркационных диаграмм, исследованных П. В. Морозовым (см. рис. 5). Для обоих случаев положения равновесия полностью описаны и классифицированы в [7], [8].

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Из теорем 9 и 10 следуют также приведенные ниже теоремы 11 и 12, поскольку при их доказательстве не был использован факт, что значения параметров g и λ не нулевые.

ТЕОРЕМА 11 (П. В. Морозов; см. [8]). *В случае Ковалевской–Яхьи при $g = 0$ и небифуркационных значениях $\lambda^2 \neq 0, 1, \frac{8}{3\sqrt{3}}, 2$ точки бифуркационной диаграммы M, N, P, Q, R и L соответствуют невырожденным положениям*

равновесия. Их типы и представления в виде почти прямого произведения имеют следующий вид (других критических точек у гамильтониана нет):

Точка	Тип	Почти прямое произведение
M	центр-центр	$A \times A$
R	центр-центр	$2(A \times A)$
Q	седло-центр	$A \times B$
L	седло-центр	$2(A \times B)$
N	седло-седло	$(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$
P	седло-седло	$B \times B$

ТЕОРЕМА 12 (А. В. Болсинов, П. Х. Рихтер, А. Т. Фоменко; см. [7]). В случае Ковалевской точки бифуркационной диаграммы H , U_1 , U_2 , U_3 , M_1 и M_2 соответствуют невырожденным положениям равновесия. Их типы и представления в виде почти прямого произведения имеют следующий вид (других критических точек у гамильтониана нет):

Точка	Тип	Почти прямое произведение
H	центр-центр	$A \times A$
M_1	центр-центр	$2(A \times A)$
U_3	седло-центр	$A \times B$
M_2	седло-центр	$2(A \times B)$
U_1	седло-седло	$(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$
U_2	седло-седло	$B \times B$

Осуществим переход внутри камер 1, 2', 6', 7' к их боковым левым границам, т.е. к оси $g = 0$. Рассмотрим, что происходит с положениями равновесия при таком движении.

При переходе от общей задачи Ковалевской–Яхьи к частному случаю $g = 0$ происходит склейка двух дуг: дуги γ'_1 с перестройкой A и дуги γ'_4 также с перестройкой A . Так образуется вертикальная стенка (см. рис. 5). Точка возврата v_2 переходит в точку z_1 , лежащую на этой вертикальной стенке. Точки F , N_1 и N_3 не принадлежат дугам, которые подвергаются склейке. Они переходят соответственно в точки M , N и P , которые имеют такой же тип и представление в виде почти прямого произведения (теоремы 10, 11). Точки D_1 , D_2 , G_1 , G_2 (камеры 6' и 7') лежат на дугах, которые подвергаются склейке. При переходе на ось $g = 0$ точка G_1 склеивается с точкой D_1 (результат склейки – точка L), а точка G_2 склеивается с точкой D_2 (результат склейки – точка R), при этом исчезает область $G_1 D_1 G_2 D_2$. В прообразе точек G_1 , D_1 лежало ровно по одной точке ранга 0 типа центр-центр на слое (теоремы 9, 10). В прообразе точки L , полученной в результате их склейки, согласно теореме 11 лежат уже две точки ранга 0 типа центр-центр. В прообразе точек G_2 , D_2 лежало ровно по одной точке ранга 0 типа седло-центр на слое (теоремы 10, 11). В прообразе

точки R , полученной в результате их склейки, лежат уже две точки ранга 0 типа седло-центр (теорема 11).

Теперь рассмотрим переход из камер 1, 2, 6, 7 к их нижним границам, т.е. к оси $\lambda = 0$.

При переходе от общей задачи Ковалевской–Яхьи к частному случаю – задаче Ковалевской ($\lambda = 0$) – происходит склейка двух дуг: дуги α_1 с перестройкой A и дуги α_4 также с перестройкой A . Так образуется вертикальная стенка (см. рис. 4). Точка возврата v_1 переходит в точку e_1 , которая лежит на этой вертикальной стенке. Точки F , N_1 и N_2 не принадлежат дугам, которые подвергаются склейке. Они переходят соответственно в точки H , U_1 и U_2 , которые имеют такие же типы и представления в виде почти прямого произведения (теоремы 10, 12). Точки E_1 , E_2 , C_1 , C_2 (камеры 6 и 7) лежат на дугах, которые подвергаются склейке. При переходе на нижнюю ось $\lambda = 0$ точка C_1 склеивается с точкой E_1 (результат склейки – точка M_1), а точка C_2 склеивается с точкой E_2 (результат склейки – точка M_2), при этом исчезает область $C_1E_1E_2C_2$. В прообразах точек E_1 , C_1 лежало ровно по одной точке ранга 0 типа центр-центр на слое (теоремы 9, 10). В прообразе точки M_1 , полученной при склейке, лежат уже две точки ранга 0 типа центр-центр (теорема 12). В прообразах точек E_2 , C_2 лежало ровно по одной точке ранга 0 типа седло-центр на слое. В прообразе точки M_2 , полученной в результате их склейки, согласно теореме 12 лежат уже две точки ранга 0 типа седло-центр.

§ 7. Круговые молекулы вырожденных одномерных орбит

Теперь будем рассматривать на бифуркационной диаграмме точки возврата v_i , $i = 1, \dots, 4$, и касания k_j , $j = 1, \dots, 3$. В прообразах этих точек лежат одномерные вырожденные орбиты, поскольку бифуркационная диаграмма для невырожденной одномерной орбиты выглядит как дуга гладкой кривой (это следует из теоремы Элиассона; см. [16], [17]).

Для вычисления круговых молекул вырожденных одномерных орбит воспользуемся следующими двумя свойствами, доказанными П. В. Морозовым в [8].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (П. В. Морозов; см. [8]). *На ребрах, соединяющих два седловых атома круговой молекулы вырожденной одномерной орбиты, r -метки равны ∞ . На ребрах, соединяющих атом A с седловым, r -метки конечны. В обоих случаях метки ε равны $+1$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 (П. В. Морозов; см. [8]). *Пусть бифуркационная диаграмма представляет собой кривую с точкой возврата v , причем 3-атомы, соответствующие двум дугам, примыкающим к точке v , имеют типы B и A . Тогда на ребрах круговой молекулы B – A r -метки равны 0.*

Далее будем через $r[x-y]$ обозначать r -метку на ребре молекулы, которое соединяет атомы, соответствующие бифуркациям x и y . Напомним правило сложения меток (см. [16; т. 2]): пусть для ребер, относящихся к некоторому семейству торов, известны метки $r[x-y] = r_0$ и $r[y-z] = \infty$; тогда $r[x-z] = r_0$ в том же семействе.

Дадим описание вырожденных одномерных орбит случая Ковалевской–Яхьи в камерах 1, 2, 2', 6, 6', 7, 7'.

ТЕОРЕМА 13. *Круговые молекулы с r - и ε -метками для точек бифуркационной диаграммы $v_1, \dots, v_6$, прообразы которых содержат вырожденные одномерные орбиты, приведены на рис. 7.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для точек v_1, v_2 на ребре $B-A$ r -метка равна 0 в силу предложения 5. С учетом предложения 4 нам остается вычислить r -метки на ребрах, ведущих в атомы A .

Рассмотрим ребро круговой молекулы точки v_3 , относящееся к семейству VII. Оно соединяет бифуркации β_4 и α_7 . Из описания круговых молекул точек G_2 и G_1 имеем $r[\alpha_7 - \alpha_{81}] = 0$ и $r[\alpha_{81} - \beta_4] = \infty$. Следовательно, по правилу сложения меток $r[\beta_4 - \alpha_7] = 0$.

Рассмотрим ребро круговой молекулы точки v_4 , относящееся к семейству II. Оно соединяет бифуркации β_6 и γ'_4 . Из круговых молекул точек N_3 и G_1 имеем $r[\beta_6 - \beta_4] = 0$ и $r[\beta_4 - \gamma'_4] = \infty$. Следовательно, $r[\beta_6 - \gamma'_4] = 0$. Аналогично рассмотрим остальные ребра, относящиеся к семействам III, IV, VII:

$$\begin{aligned} \text{для семейства III} \quad & r[\beta_3 - \beta_5] = 0, \quad r[\beta_3 - \gamma'_4] = \infty \implies r[\beta_5 - \gamma'_4] = 0; \\ \text{для семейства IV} \quad & r[\beta_3 - \beta_6] = 0, \quad r[\beta_3 - \alpha_{81}] = \infty \implies r[\beta_6 - \alpha_{81}] = 0; \\ \text{для семейства VII} \quad & r[\beta_5 - \beta_4] = 0, \quad r[\beta_4 - \alpha_{81}] = \infty \implies r[\beta_5 - \alpha_{81}] = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим ребро круговой молекулы точки v_5 , относящееся к семейству (5). Оно соединяет бифуркации γ'_6 и γ'_7 . Из круговых молекул точек E_1 и E_2 имеем $r[\gamma'_7 - \delta'_{22}] = 0$ и $r[\delta'_{22} - \gamma'_6] = \infty$. Следовательно, по правилу сложения меток $r[\gamma'_6 - \gamma'_7] = 0$.

Рассмотрим ребро круговой молекулы точки v_6 , относящееся к семейству (2). Оно соединяет бифуркации β'_3 и α_4 . Из круговых молекул точек N_2 и G_1 имеем $r[\beta_6 - \beta_4] = 0$ и $r[\beta_4 - \gamma'_4] = \infty$. Следовательно, $r[\beta_6 - \gamma'_4] = 0$. Аналогично рассмотрим остальные ребра, относящиеся к семействам III, IV, VII:

$$\begin{aligned} \text{для семейства III} \quad & r[\beta_3 - \beta_5] = 0, \quad r[\beta_3 - \gamma'_4] = \infty \implies r[\beta_5 - \gamma'_4] = 0; \\ \text{для семейства IV} \quad & r[\beta_3 - \beta_6] = 0, \quad r[\beta_3 - \alpha_{81}] = \infty \implies r[\beta_6 - \alpha_{81}] = 0; \\ \text{для семейства VII} \quad & r[\beta_5 - \beta_4] = 0, \quad r[\beta_4 - \alpha_{81}] = \infty \implies r[\beta_5 - \alpha_{81}] = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] Н. Yehia, "New integrable cases in the dynamics of rigid bodies", *Mech. Res. Comm.*, **13:3** (1986), 169–172.
- [2] Х. М. Яхья, "Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **4** (1987), 88–90.
- [3] П. Е. Рябов, М. П. Харламов, "Бифуркации первых интегралов в случае Ковалевской-Яхьи", *Регулярная и хаотическая динамика*, **2:2** (1997), 25–40.
- [4] М. П. Харламов, "Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской", *ПММ*, **47:6** (1983), 922–930; англ. пер.: М. Р. Kharlamov, "Bifurcation of common levels of first integrals of the Kovalevskaya problem", *J. Appl. Math. Mech.*, **47:6** (1983), 737–743.

- [5] М. П. Харламов, “Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела”, *Докл. АН СССР*, **273**:6 (1983), 1322–1325; англ. пер.: М. Р. Kharlamov, “Topological analysis of classical integrable systems in the dynamics of the rigid body”, *Soviet Math. Dokl.*, **28**:3 (1983), 802–805.
- [6] М. П. Харламов, *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела*, Изд-во ЛГУ, Л., 1988.
- [7] А. В. Болсинов, П. Х. Рихтер, А. Т. Фоменко, “Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской”, *Матем. сб.*, **191**:2 (2000), 3–42; англ. пер.: A. V. Bolsinov, P. H. Richter, A. T. Fomenko, “The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top”, *Sb. Math.*, **191**:2 (2000), 151–188.
- [8] П. В. Морозов, “Вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга в интегрируемом случае Ковалевской–Яхьи”, *Матем. сб.*, **198**:8 (2007), 59–82; англ. пер.: P. V. Morozov, “Calculation of the Fomenko–Zieschang invariants in the Kovalevskaya–Yehia integrable case”, *Sb. Math.*, **198**:8 (2007), 1119–1143.
- [9] И. Н. Гашененко, “Интегральные многообразия и топологические инварианты одного случая движения гиростата”, *Механика твердого тела*, **29** (1997), 1–7.
- [10] П. Е. Рябов, *Бифуркационное множество задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской–Яхьи*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, М., МГУ, 1997.
- [11] П. Е. Рябов, “Аналитическая классификация особенностей интегрируемого случая Ковалевской–Яхьи”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем., мех., компьютер. науки*, **4** (2010), 25–30.
- [12] А. А. Ошемков, “Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела”, *Тр. сем. по вект. и тенз. анализу*, **25**:2 (1993), 23–109.
- [13] А. Т. Фоменко, “The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom”, *Topological classification of integrable systems*, Adv. Soviet Math., **6**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 1–27.
- [14] А. Т. Фоменко, “Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:4 (1988), 38–51; англ. пер.: A. T. Fomenko, “Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:4 (1988), 286–296.
- [15] П. П. Андреянов, К. Е. Душин, “Бифуркационные множества в задаче Ковалевской–Яхьи”, *Матем. сб.* (в печати).
- [16] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, Изд-во УдГУ, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, v. 1, 2, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2004.
- [17] А. А. Ошемков, “Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **201**:8 (2010), 63–102; англ. пер.: A. A. Oshemkov, “Classification of hyperbolic singularities of rank zero of integrable Hamiltonian systems”, *Sb. Math.*, **201**:8 (2010), 1153–1191.

Н. С. Логачева (N. S. Logacheva)

Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: Logacheva_NS@list.ru

Поступила в редакцию
 24.11.2010 и 30.08.2011