Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Гущин, О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с граничной функцией из L_p , *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 1, 3–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7825>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:06:59

УДК 517.956.223

А. К. Гуцин

О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с граничной функцией из L_p

Рассматривается задача Дирихле, в которой граничное значение решения понимается как предел в L_p , $p > 1$, его следов на “параллельных” границе поверхностей. Предлагается постановка этой задачи, которая (в отличие от понятия решения из $W_{p,\text{loc}}^1$) позволяет исследовать ее разрешимость без условий гладкости коэффициентов внутри области. В частности, для уравнения в самосопряженной форме без младших членов при тех же, что и в случае $p = 2$, условиях доказывается однозначная разрешимость и устанавливается оценка аналога интеграла площадей.

Библиография: 37 названий.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, задача Дирихле, граничное значение.

Введение

Хорошо известно, что понятие обобщенного решения из соболевского пространства W_p^1 задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка не является в полном смысле обобщением понятия классического решения. Естественным их обобщением является определение решения, в котором граничное значение понимается как предел в L_p следов решения на “параллельных” границе поверхностей. В “гильбертовом” случае $p = 2$ такая постановка задачи Дирихле была предложена В. П. Михайловым в работе [1]. Этот случай достаточно подробно изучен. Ослабление условий на принятие граничного значения приводит к необходимости более жестких условий на границу рассматриваемой области и на гладкость коэффициентов на границе; но внутри области условия те же, что и в случае решения из W_2^1 (см. [2]). Настоящая работа посвящена исследованию разрешимости задачи Дирихле в общем случае $p > 1$. При $p \neq 2$ условие непрерывности коэффициентов в замыкании области возникает даже при исследовании разрешимости задачи в W_p^1 ; еще более жесткие требования налагались при изучении решения из $W_{p,\text{loc}}^1$. В настоящей работе предлагается другой подход к постановке задачи с граничной функцией из L_p , который позволяет исследовать разрешимость задачи Дирихле без условий внутренней гладкости коэффициентов. При тех же, что и в случае $p = 2$, условиях доказывается однозначная разрешимость изучаемой задачи

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00178-а) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-7675.2010.1).

для уравнения в самосопряженной форме без младших членов и устанавливается свойство решения уравнения, характеризующее его поведение вблизи границы.

Мы ограничимся рассмотрением задачи Дирихле для однородного уравнения в самосопряженной форме без младших членов

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \quad x \in Q, \quad (1)$$

$$u|_{\partial Q} = u_0 \quad (2)$$

с граничной функцией u_0 из $L_p(\partial Q)$, $1 < p < \infty$; Q – ограниченная область n -мерного пространства $\mathbb{R}^n$, а коэффициенты $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $x \in Q$, уравнения (1) являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяющими с некоторой положительной постоянной γ условию

$$\gamma \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \gamma^{-1} \quad (3)$$

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$, и п.в. $x \in Q$.

Далее симметрическую матрицу $a_{ij}(x)$ будем для краткости обозначать через $A(x)$.

Случай $p = 2$, как отмечалось выше, достаточно подробно изучен. Доказана однозначная разрешимость рассматриваемой задачи (с $u_0 \in L_2(Q)$) и установлен ряд тонких свойств ее решений (см. [1]–[11], а также [12], [13]). В отличие от обобщенного решения из соболевского пространства $W_2^1(Q)$, для которого теорема об однозначной разрешимости справедлива без дополнительных условий на ограниченную область и коэффициенты уравнения, для решения из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ такие условия приходится требовать. Более слабое определение принятия граничного значения приводит к более жестким условиям на границу рассматриваемой области и на гладкость коэффициентов на границе. Наиболее полный результат в этом направлении получен в работе [2]. Для справедливости теоремы об однозначной разрешимости достаточно потребовать, чтобы граница области принадлежала классу C^1 , нормаль ν к ней (единичная и внутренняя) была непрерывной по Дини:

$$|\nu(x) - \nu(y)| \leq \omega(|x - y|), \quad x \in \partial Q, \quad y \in \partial Q, \quad (4)$$

а коэффициенты уравнения были непрерывны по Дини на границе:

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x - y|), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad x \in \partial Q, \quad y \in Q \quad (5)$$

(значения функций $a_{ij}(x)$, $x \in \overline{Q}$, можно так изменить на множестве нулевой меры, что будет выполнено (5)). Здесь ω – такая монотонная функция, что

$$\int_0 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty.$$

Внутри области Q коэффициенты уравнения, как и в случае решения из $W_2^1(Q)$, измеримы и ограничены. Отказаться от дополнительного условия на коэффициенты нельзя – нарушается единственность решения (соответствующий пример приведен в [2]). Далее мы всегда будем предполагать, не оговаривая этого особо, условия (4), (5), как и условие (3), выполненными.

Целью настоящей работы является исследование разрешимости рассматриваемой задачи в общем случае $p > 1$. При каких условиях на коэффициенты уравнения и границу области справедлива теорема об однозначной разрешимости? Интерес к этому вопросу возник в связи с желанием понять, при каких условиях на коэффициенты уравнения и границу области для эллиптического уравнения второго порядка при всех $p > 1$ справедлива теорема карлесоновского типа об оценках в L_p по мерам решения задачи Дирихле для уравнения (1). Теорема Карлесона (см. [14], [15]) дает условие на меру, необходимое и достаточное для справедливости для любой аналитической в круге функции оценки интеграла от модуля решения в степени p (здесь $p > 0$) по этой мере через интеграл от p -й степени модуля ее граничного значения. Для гармонических функций n переменных в области с дважды гладкой границей такое утверждение (с $p > 1$) было установлено Л. Хермандером (см. [16]).

В работе [4] (см. также [17]) обсуждаемая теорема была доказана для уравнения (1) в случае $p = 2$. При этом предполагались выполненными те же условия на a_{ij} и ∂Q , при которых установлена однозначная разрешимость задачи Дирихле. Обсуждаемая теорема оказалась весьма удобным инструментом для получения тонких свойств решений задачи Дирихле и для исследования разрешимости нелокальных задач, в которых значения искомого решения на границе рассматриваемой области выражаются через его значения во внутренних точках области и других точках границы. Ее использование позволило существенно расширить класс поддающихся изучению нелокальных задач (см. [4], [18]–[22]). В частности, установлена фредгольмовость ряда нелокальных задач, которые в классической постановке не являются даже нётеровыми (подробнее см. [4]).

В интересующем нас случае $p \neq 2$ ситуация более сложная. Дополнительные условия на коэффициенты уравнения и границу области необходимы уже для однозначной разрешимости задачи в $W_p^1(Q)$. Наиболее полный результат для $p \neq 2$ доказан в работе [23]: для однозначной разрешимости задачи Дирихле в $W_p^1(Q)$ достаточно потребовать выпуклость области Q и непрерывность коэффициентов в $\overline{Q}$. И эти дополнительные условия существенны. Как хорошо известно, ни при каком $p > 2$ без дополнительных условий нельзя гарантировать существование решения из $W_p^1(Q)$ (и даже из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$). В [23] приведены примеры, показывающие существенность этих условий и в случае $p < 2$: без условия выпуклости области (конечно, если не требовать гладкость ее границы) и без требования непрерывности коэффициентов на границе не справедлива теорема о единственности решения. Можно показать, что нельзя отказаться и от требования непрерывности коэффициентов внутри области; соответствующий пример приведен в конце работы.

В силу сказанного выше естественно ожидать, что при $p \neq 2$ для разрешимости задачи Дирихле в более слабой постановке (с принятием граничного значения в L_p и с граничной функцией из $L_p(\partial Q)$) нужны более жесткие, чем в случае $p = 2$, условия. В частности, естественно ожидать, что потребуются условия гладкости коэффициентов уравнения и внутри области. И это действительно так, если следовать традиционному определению решения.

Для определения принятия решением граничных значений в L_p необходима принадлежность решения пространству L_p на лежащих в Q “параллельных” границе поверхностях. Обычно (см. [24]–[26]) для обеспечения этого свойства рассматриваются решения из пространства $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$. Но это предположение, как уже отмечалось выше, приводит к необходимости требовать выполнение дополнительных условий на коэффициенты уравнения. Без дополнительных условий при $p > 2$ нельзя гарантировать существование решения, а при $1 < p < 2$ – его единственность. Однако от этих условий можно освободиться, если в определении решения отказаться от согласованного с принятием граничного значения требования принадлежности решения пространству $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$.

Под решением уравнения (1) мы будем понимать функцию $u \in W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, удовлетворяющую уравнению в смысле равенства обобщенных функций, т.е. интегральное тождество

$$\int_Q (\nabla \eta(x), A(x) \nabla u(x)) dx = 0$$

выполняется для всех бесконечно дифференцируемых и финитных в Q пробных функций η (а следовательно, и для всех финитных функций η из $W_2^1(Q)$). Хорошо известно, что решение уравнения (1) непрерывно (и даже непрерывно по Гёльдеру; см. [27]–[29], а также [30]–[32]) внутри области Q . Поэтому на любой лежащей в Q гладкой поверхности оно принадлежит пространству L_p . В случае неоднородного уравнения выполнения этого свойства можно добиться с помощью не слишком ограничительных условий на правую часть.

Определим выполнение граничного условия (2) следующим образом. Из гладкости границы следует существование таких (достаточно малых) положительных чисел r_0 и δ_0 , что для любой точки $x^0 \in \partial Q$ и любого числа $\delta \in (0, \delta_0)$ сдвиг

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = x' + \delta \nu(x^0), x' \in V_{x^0}(r_0)\}$$

куска границы $V_{x^0}(r_0) = \partial Q \cap B_{x^0}(r_0)$ на расстояние δ вдоль внутренней (единичной) нормали $\nu(x^0)$ к ∂Q в точке x^0 лежит внутри области Q ; здесь и всюду далее

$$B_y(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \rho\}$$

– шар радиуса ρ с центром в точке y . При этом будем также считать, что для точек из $V_{x^0}(r_0)$ угол между нормальными в них достаточно мал (например, тангенс этого угла меньше $\frac{1}{2}$).

Будем говорить, что решение u уравнения (1) удовлетворяет граничному условию (2), если

$$\int_{V_{x^0}(\rho_0)} |u(x + \delta\nu(x^0)) - u_0(x)|^p dS \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0 \quad (2')$$

для всех $x^0 \in \partial Q$.

На самом деле решение задачи Дирихле (как и в случае $p = 2$; см. [2]) обладает аналогичным непрерывности по совокупности переменных свойством $(n-1)$ -мерной непрерывности, а граничное значение принимается в существенно более сильном смысле. В частности, выбор направления сдвига (вдоль нормали в точке x^0) в фигурирующих в (2') отображениях $x \rightarrow x + \delta\nu(x^0)$, $\delta > 0$, куса $V_{x^0}(\rho_0)$ границы в область Q и взаимная однозначность этого отображения (на образ) не являются существенными. Можно взять любое отображение, при котором “не слишком много” точек границы переходят в одну точку и “не слишком много” точек сдвигаются на расстояние, большее δ . Точнее, решение принадлежит пространству $(n-1)$ -непрерывных функций $C_{r^{n-1},p}(\bar{Q})$. Определение этого пространства и свойства его элементов можно найти в [2]. В настоящей работе мы не будем обсуждать свойство $(n-1)$ -мерной непрерывности решения и его усиление – упоминавшуюся выше теорему карлесоновского типа. Статья содержит необходимый для этих утверждений подготовительный материал.

Основным результатом настоящей работы является теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой задачи и о принадлежности функции $|u|^{p/2}$ весовому пространству W_2^1 с равным расстоянию до границы весом. Напомним, что мы предполагаем условия (4), (5), как и условие (3), выполненными.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой граничной функции u_0 из $L_p(\partial Q)$ существует решение задачи Дирихле (1), (2). Это решение единственно и для него справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \sup_{\xi > 0} \left(\frac{1}{\xi} \int_{\{x \in Q: \xi < r(x) < 2\xi\}} |u(x)|^p dx \right) + \int_Q r(x) |u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx \\ & \leq \text{const} \cdot \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS, \end{aligned} \quad (6)$$

в которой $r(x)$ – расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q , а постоянная зависит только от размерности пространства n постоянной эллиптичности γ из (3) области Q , функции ω из условий (4), (5) и показателя p .

Условия гладкости границы области и коэффициентов на границе (условия (4) и (5)), по-видимому, можно ослабить. Но совсем отказаться от них нельзя. В [2] приведен пример, показывающий, что без условий на коэффициенты не справедлива теорема о единственности решения в случае $p = 2$. Нетрудно показать, что не гарантирует единственность и более сильное условие (2') с $p > 2$. Как следует из приведенного в работе [23] примера, нельзя отказаться и от условий на границу области.

Отметим, что оценка (6) теоремы 1 является в следующем смысле точной. Для решений уравнения с гладкими коэффициентами и области с достаточно гладкой границей сходимость стоящего в левой части (6) интеграла

$$\int_Q r(x)|u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx \quad (6')$$

эквивалентна условию ограниченности норм в L_p по “параллельным” границе поверхностям. И каждое из этих условий является необходимыми и достаточными для существования у решения уравнения (1) граничного значения в L_p (см. [33], [24]–[26]). В случае $p = 2$ такой результат получен и при сделанных выше предположениях о гладкости коэффициентов уравнения и границы области (см. [34]); при этом условие ограниченности норм в L_2 по “параллельным” границе поверхностям следует заменить на условие ограниченности (по параметру δ) семейства деленных на δ интегралов от $|u|^2$ по множествам $\{x \in Q : \delta < r(x) < 2\delta\}$ (конечность первого слагаемого в левой части (6) с $p = 2$). Принятие граничного значения понимается в смысле (2') (с $p = 2$), или, что в данном случае эквивалентно, в смысле $(n - 1)$ -мерной непрерывности. Первое из составляющих обсуждаемый результат утверждений справедливо при тех же условиях (4), (5) для всех $p > 1$. Сходимость интеграла (6') при условии конечности первого слагаемого в левой части (6) утверждается в теореме 2. Из доказательства этой теоремы будет видно, как обосновать справедливость и обратного утверждения. По-видимому, и второе утверждение (о существовании граничного значения) верно при тех же условиях для всех $p > 1$.

§ 1. Вспомогательные утверждения

Доказательство теоремы 1 основывается на покрытии прилегающей к границе части области достаточно малыми подобластями и на оценках решения в этих подобластях. Глобальные оценки устанавливаются их суммированием. Получающийся таким образом результат, естественно, является грубым. Чтобы доказать с его помощью единственность решения и неравенство (6), следует “отодвинуться” от спектра, рассмотреть уравнение

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \lambda u = -f(x) \quad (1')$$

с неотрицательным постоянным коэффициентом λ . В этом параграфе содержатся необходимые для доказательства теоремы 1 “грубые” вспомогательные утверждения, не требующие условий гладкости (4) и (5); условие эллиптичности (3), конечно, предполагается выполненным. Эти утверждения, как легко видеть, справедливы и в случае переменного коэффициента λ . Однако нам такое обобщение не понадобится и мы на нем останавливаться не будем.

ЛЕММА 1. Для любого решения u однородного уравнения

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \lambda u = 0 \quad (1'_0)$$

(с $\lambda \geq 0$) в шаре $B_{x^0}(R_0)$ и для любого $R \in (0, \frac{R_0}{2})$ справедливы оценки

$$\max_{B_{x^0}(R)} |u(x)|^p \leq CR^{-n} \int_{B_{x^0}(2R)} |u(x)|^p dx, \quad (7_1)$$

$$\int_{B_{x^0}(R)} |\nabla u(x)|^2 dx \leq CR^{n-2-2n/p} \left[\int_{B_{x^0}(2R)} |u(x)|^p dx \right]^{2/p}, \quad (7_2)$$

$$\int_{B_{x^0}(R)} |u(x)|^{p-1} |\nabla u(x)| dx \leq CR^{-1} \int_{B_{x^0}(2R)} |u(x)|^p dx, \quad (7_3)$$

в которых постоянная $C = C(n, \gamma)$ зависит только от размерности пространства n и постоянной эллиптичности γ из условия (3).

Здесь и далее через $C = C(n, \gamma, \dots)$ обозначаются, вообще говоря, разные постоянные, зависящие от n , γ и т. д.

Первая из доказываемых в этом пункте оценок по-существу известна (см., например, [31]), остальные получаются из нее стандартными методами. Тем не менее мы приведем доказательство сформулированного утверждения, поскольку для дальнейших рассуждений будет существенно, что постоянная в этих оценках не зависит от коэффициента λ (она не зависит и от показателя p).

Прежде всего докажем справедливость оценки (7₁). При этом ограничимся случаем $p \in (1, 2)$; для $p > 2$ ее доказательство тривиально. Как обычно (см. [29], а также [32]), устанавливается справедливость для любых r и ρ , $0 < r < \rho$, оценки

$$\max_{B_{x^0}(r)} u^2(x) \leq C(n, \gamma)(\rho - r)^{-n} \int_{B_{x^0}(\rho)} u^2(x) dx;$$

независимость постоянной C от коэффициента λ обеспечивается его знаком. Возьмем

$$r_0 = R, \quad r_k = r_{k-1} + R2^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и обозначим $\max_{B_{x^0}(r_k)} u^2(x)$ через M_k , а интеграл от $|u|^p$ по $B_{x^0}(r_k)$ через I_k . Тогда из последнего неравенства следует оценка

$$M_k \leq C2^{n(k+1)} R^{-n} M_{k+1}^{(2-p)/2} I_{k+1}, \quad C = C(n, \gamma),$$

откуда, обозначив $\frac{2-p}{2}$ через $\varkappa$, $\varkappa \in (0, 1)$, получаем

$$\begin{aligned} \max_{B_{x^0}(R)} u^2(x) = M_0 &\leq C2^n R^{-n} M_1^\varkappa I_1 \leq C^{1+\varkappa+\varkappa^2+\dots+\varkappa^k} 2^{n(1+2\varkappa+3\varkappa^2+\dots+(k+1)\varkappa^k)} \\ &\times R^{-n(1+\varkappa+\varkappa^2+\dots+\varkappa^k)} M_{k+1}^{\varkappa^{k+1}} I_{k+1}^{1+\varkappa+\varkappa^2+\dots+\varkappa^k}. \end{aligned}$$

Устремляя k к бесконечности, получим неравенство

$$\max_{B_{x^0}(R)} u^2(x) \leq C^{2/p} 2^{4n/p^2} R^{-2n/p} \left[\int_{B_{x^0}(2R)} |u(x)|^p dx \right]^{2/p},$$

из которого следует оценка (7₁).

Доказательство (7₂) в случае $p > 2$ следует из оценки интеграла Дирихле от решения через квадрат его нормы в L_2 по более широкому множеству и неравенства Гёльдера. В случае $p < 2$ нужно, кроме того, использовать оценку (7₁):

$$\begin{aligned} \int_{B_{x^0}(R)} |\nabla u(x)|^2 dx &\leq C(n, \gamma) R^{-2} \int_{B_{x^0}(3R/2)} |u(x)|^2 dx \\ &\leq C(n, \gamma) R^{-2} \int_{B_{x^0}(3R/2)} |u(x)|^p dx \left[\max_{B_{x^0}(3R/2)} |u(x)| \right]^{2-p} \\ &\leq C(n, \gamma) R^{n-2-2n/p} \left[\int_{B_{x^0}(2R)} |u(x)|^p dx \right]^{2/p}. \end{aligned}$$

Последняя из доказываемых оценок в случае $p > 2$ вытекает из (7₁) и (7₂):

$$\begin{aligned} \int_{B_{x^0}(R)} |u(x)|^{p-1} |\nabla u(x)| dx &\leq \left[\int_{B_{x^0}(R)} |u(x)|^p dx \right]^{1/2} \left[\max_{B_{x^0}(R)} |u(x)| \right]^{(p-2)/2} \left[\int_{B_{x^0}(R)} |\nabla u(x)|^2 dx \right]^{1/2} \\ &\leq C R^{-1} \int_{B_{x^0}(2R)} |u(x)|^p dx. \end{aligned}$$

При $p \in (1, 2)$ вместо (7₁) используется неравенство Гёльдера.

Из доказанных оценок вытекают оценки нормы решения в $W_2^1(Q')$, $Q' \Subset Q$, через его норму в $L_p(Q)$. Кроме того, отметим еще одно простое следствие оценки (7₁).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть u – решение в Q однородного уравнения (1'₀), а $\Gamma = \bar{\Gamma}$ – лежащая в Q гладкая гиперповерхность. Тогда для любого положительного числа $\tau < \text{dist}\{\Gamma, \partial Q\}$ справедлива оценка

$$\int_{\Gamma} |u(x)|^p dS \leq \text{const} \cdot \tau^{-1} \iint_{\{x \in Q: \text{dist}\{x, \Gamma\} < \tau\}} |u(x)|^p dx$$

с зависящей от n , γ и поверхности Γ постоянной.

Отметим, что если рассмотреть семейство поверхностей, получающихся из одной поверхности сдвигом, то постоянная в последнем неравенстве будет общей для всего семейства. В этом легко убедиться, если считать, что сдвигается аргумент решения, а поверхность неподвижна.

ЛЕММА 2. Если $p > 2$, то для любой правой части $f \in L_p(Q)$ решение u из $\dot{W}_2^1(Q)$ задачи Дирихле для неоднородного уравнения (1') с однородным граничным условием

$$u|_{\partial Q} = 0 \tag{2_0}$$

обладает следующим свойством: функция $|u|^{p/2}$ принадлежит $\mathring{W}_2^1(Q)$ и справедлива оценка

$$\int_Q |u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx \leq C \int_Q |f(x)|^p dx \quad (8)$$

с зависящей от γ , Q и p постоянной C .

Если $p \in (1, 2)$, то для любой правой части $f \in L_p(Q) \cap L_{2,\text{loc}}(Q)$ существует решение задачи Дирихле (1'), (2₀), для которого $|u|^{p/2} \in \mathring{W}_2^1(Q)$ и справедлива оценка (8).

Решение задачи Дирихле (1'), (2₀), о котором говорится во втором утверждении леммы 2, принимает нулевое граничное значение в L_p (в смысле (2')); далее будет доказано (см. замечание 4), что такое решение единственно. Отметим, что и в первом утверждении, как это немедленно следует из принадлежности функции $|u|^{p/2}$ пространству $\mathring{W}_2^1(Q)$, нормы решения в L_p по сдвинутым кускам границы стремятся к нулю при приближении этих кусков к границе (выполняется (2') с $u_0 = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Рассмотрим сначала случай $p > 2$. Возьмем произвольное положительное число M и рассмотрим срезку $u^{(M)}$ функции u :

$$u^{(M)}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{при } |u(x)| \leq M, \\ M & \text{при } u(x) > M, \\ -M & \text{при } u(x) < -M. \end{cases}$$

Функция $\eta = u^{(M)}|u^{(M)}|^{p-2}$, очевидно, принадлежит $\mathring{W}_2^1(Q)$. Подставляя ее в определяющее решения рассматриваемого уравнения интегральное тождество, получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_Q (p-1) [|u^{(M)}(x)|^{p-2} (\nabla u^{(M)}(x), A(x) \nabla u(x)) + \lambda u(x) u^{(M)}(x) |u^{(M)}(x)|^{p-2}] dx \\ & = \int_Q f(x) u^{(M)}(x) |u^{(M)}(x)|^{p-2} dx \leq \|f\|_{L_p(Q)} \|u^{(M)}\|_{L_p(Q)}^{p-1}, \end{aligned}$$

из которого вытекает оценка функции $v^{(M)}(x) = |u^{(M)}(x)|^{p/2} \in \mathring{W}_2^1(Q)$

$$\begin{aligned} \|v^{(M)}\|_{\mathring{W}_2^1(Q)}^2 & = \int_Q |\nabla v^{(M)}(x)|^2 dx \leq \frac{p^2}{4(p-1)\gamma} \|f\|_{L_p(Q)} \|v^{(M)}\|_{L_2(Q)}^{2(1-1/p)} \\ & \leq C(Q)^{(p-1)/p} \frac{p^2}{4(p-1)\gamma} \|f\|_{L_p(Q)} \|\nabla v^{(M)}\|_{L_2(Q)}^{2(p-1)/p}; \end{aligned}$$

здесь $C(Q)$ – постоянная из оценки квадрата нормы в $L_2(Q)$ функции из $\mathring{W}_2^1(Q)$ через ее интеграл Дирихле. Следовательно, для любого положительного числа M справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\|v^{(M)}\|_{\mathring{W}_2^1(Q)}^2 &= \int_Q |\nabla v^{(M)}(x)|^2 dx \leq C(Q)^{(p-1)} \left(\frac{p^2}{4(p-1)\gamma} \right)^p \|f\|_{L_p(Q)}^p, \\ \|v^{(M)}\|_{L_2(Q)}^2 &= \int_Q |v^{(M)}(x)|^2 dx \leq C(Q)^p \left(\frac{p^2}{4(p-1)\gamma} \right)^p \|f\|_{L_p(Q)}^p,\end{aligned}$$

откуда в силу теоремы Леви получаем сходимость интегралов от предельных функций $|u|^p$ и $\left(\frac{\partial(|u|^{p/2})}{\partial x_i}\right)^2$, $i = 1, \dots, n$, а вместе с этим сходимость при $M \rightarrow \infty$ семейства функций $\{v^{(M)}\}$ к $|u|^{p/2}$ в $W_2^1(Q)$ и оценку (8).

Рассмотрим теперь более сложный случай $1 < p < 2$. Пусть сначала $f \in L_2(Q)$, а u – решение из $\mathring{W}_2^1(Q)$. Возьмем произвольное положительное число δ и пробную функцию

$$\eta = u(|u| + \delta)^{p-2} \in \mathring{W}_2^1(Q).$$

Из интегрального тождества получаем

$$\begin{aligned}& \int_Q \left(\frac{(p-1)|u(x)| + \delta}{(|u(x)| + \delta)^{3-p}} (\nabla u(x), A(x) \nabla u(x)) + \lambda \frac{u^2(x)}{(|u(x)| + \delta)^{2-p}} \right) dx \\ &= \int_Q f(x) \frac{u(x)}{(|u(x)| + \delta)^{2-p}} dx \leq \|f\|_{L_p(Q)} \left(\int_Q (|u(x)| + \delta)^p dx \right)^{(p-1)/p} \\ &= \|f\|_{L_p(Q)} \| |u| + \delta \|_{L_p(Q)}^{p-1}.\end{aligned}\tag{9}$$

Рассмотрим функцию

$$v_\delta = (|u| + \delta)^{p/2} - \delta^{p/2} \in L_2(Q), \quad \nabla v_\delta = \frac{p}{2} \frac{\nabla |u|}{(|u| + \delta)^{(2-p)/2}} \in L_2(Q).$$

Очевидно, что ее след на ∂Q равен нулю. Тем самым, $v_\delta \in \mathring{W}_2^1(Q)$. Так как

$$\begin{aligned}\int_Q (|u(x)| + \delta)^p dx &= \int_Q (v_\delta(x) + \delta^{p/2})^2 dx \leq 2 \int_Q v_\delta^2(x) dx + 2\delta^p \text{mes } Q \\ &\leq 2C(Q) \int_Q |\nabla v_\delta(x)|^2 dx + 2\delta^p \text{mes } Q,\end{aligned}\tag{10}$$

а

$$\int_Q (\nabla u(x), A(x) \nabla u(x)) \frac{(p-1)|u(x)| + \delta}{(|u(x)| + \delta)^{3-p}} dx \geq (p-1)\gamma \int_Q \frac{|\nabla u(x)|^2}{(|u(x)| + \delta)^{2-p}} dx,$$

то из (9) получаем оценку (напомним, что $\lambda \geq 0$)

$$\begin{aligned}\int_Q |\nabla v_\delta(x)|^2 dx &= \frac{p^2}{4} \int_Q \frac{|\nabla u(x)|^2}{(|u(x)| + \delta)^{2-p}} dx \leq \frac{p^2 \|f\|_{L_p(Q)} \| |u| + \delta \|_{L_p(Q)}^{p-1}}{4\gamma(p-1)} \\ &\leq \frac{p^2 \|f\|_{L_p(Q)}}{2\gamma(p-1)} \left[C \int_Q |\nabla v_\delta(x)|^2 dx + \delta^p \text{mes } Q \right]^{(p-1)/p},\end{aligned}$$

где $C = C(Q)$, т.е.

$$\begin{aligned} & \|f\|_{L_p(Q)}^{-p} \int_Q |\nabla v_\delta(x)|^2 dx \\ & \leq \frac{p^2}{2\gamma(p-1)} \left[C \|f\|_{L_p(Q)}^{-p} \int_Q |\nabla v_\delta(x)|^2 dx + \left(\frac{\delta}{\|f\|_{L_p(Q)}} \right)^p \text{mes } Q \right]^{(p-1)/p}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_Q |\nabla v_\delta(x)|^2 dx & \leq \|f\|_{L_p(Q)}^p \left[C^{p-1} \left(\frac{p^2}{\gamma(p-1)} \right)^p + \frac{1}{C} \left(\frac{\delta}{\|f\|_{L_p(Q)}} \right)^p \text{mes } Q \right] \\ & = C(\gamma, Q, p) \|f\|_{L_p(Q)}^p + C(Q) \delta^p. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и (10) следует ограниченность интегралов по Q от монотонных (по δ) семейств функций $(|u| + \delta)^p$ и $|\nabla v_\delta|^2$, $\delta \in (0, 1)$. Поэтому сходятся и интегралы от их пределов (п.в.) при $\delta \rightarrow 0$ – функций $|u|^p$ и $|w|^2$, где

$$w(x) = \begin{cases} \frac{p}{2} |u(x)|^{p/2-1} \nabla |u(x)| & \text{при } u(x) \neq 0, \\ 0 & \text{при } u(x) = 0. \end{cases}$$

Но тогда в силу теоремы Лебега семейство функций $(|u| + \delta)^{p/2}$, а следовательно, и семейство v_δ сходятся при $\delta \rightarrow 0$ в $L_2(Q)$ к функции $|u|^{p/2}$. По той же причине и $\nabla v_\delta \rightarrow w$ в $[L_2(Q)]^n$. Таким образом, мы доказали, что

$$|u|^{p/2} \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q), \quad \nabla(|u|^{p/2}) = w;$$

далее для краткости будем писать

$$\nabla(|u|^{p/2}) = \frac{p}{2} |u(x)|^{p/2-1} \nabla |u(x)|,$$

считая, что если числитель дроби равен нулю ($\nabla|u| = 0$ п.в. на множестве тех точек, в которых $u = 0$), то и частное равно нулю. При этом справедлива оценка

$$\| |u|^{p/2} \|_{\overset{\circ}{W}_2^1(Q)} \leq C(\gamma, Q, p) \|f\|_{L_p(Q)}. \quad (8')$$

В частности,

$$\|u\|_{L_p(Q)} \leq C(\gamma, Q, p) \|f\|_{L_p(Q)}. \quad (8'')$$

Тем самым, для случая $f \in L_2(Q)$ второе утверждение леммы 2 доказано.

Пусть теперь $f \in L_p(Q) \cap L_{2,\text{loc}}(Q)$. Возьмем произвольное число $\sigma \in (0, 1)$ и обозначим через f_σ функцию, значения которой совпадают со значениями функции f , если расстояние $r(x)$ от аргумента x до границы области Q не меньше, чем σ , и равны нулю, если $r(x) < \sigma$; $f_\sigma \in L_2(Q)$ и $\|f_\sigma\|_{L_p(Q)} \leq \|f\|_{L_p(Q)}$. Решение задачи Дирихле (1), (2₀) с правой частью f_σ будем обозначать символом u_σ ($u_\sigma \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q)$), а

$$|u_\sigma|^{p/2} = v_\sigma.$$

По доказанному $v_\sigma \in \mathring{W}_2^1(Q)$. Для u_σ справедливы оценки (8') и, в частности, (8''); из последней следует сходимость семейства u_σ в $L_p(Q)$ при $\sigma \rightarrow 0$. Обозначим предел этого семейства через u ; для него также справедливо неравенство (8''). Покажем, что эта функция является решением задачи (1'), (2_0), существование которого утверждает лемма 2.

Применяя к $u_{\sigma_1} - u_{\sigma_2}$ с малыми σ_1 и σ_2 вытекающую из леммы 1 оценку нормы в L_2 в подобласти $\{x : r(x) > \max(\sigma_1, \sigma_2)\}$ (в ней $f_{\sigma_1}(x) - f_{\sigma_2}(x) = 0$) через норму в $L_p(Q)$, получаем равномерную сходимость (очевидно, к u) рассматриваемого семейства решений на любой компактно принадлежащей Q подобласти Q' . Тогда и семейство $u_\sigma^{p/2} = v_\sigma$ сходится к функции $v = |u|^{p/2}$ в Q' . В силу вытекающей из леммы 1 оценки нормы в $W_2^1(Q')$ семейство $\{u_\sigma\}$ сходится и в $W_2^1(Q')$. Тем самым, u принадлежит $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ и является решением уравнения (1) в Q .

В силу (8') семейство v_σ ограничено, а следовательно, слабо компактно в $\mathring{W}_2^1(Q)$. Поэтому $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$ и справедлива оценка (8'). Легко видеть, что

$$\nabla v = \frac{p}{2} \frac{|\nabla u(x)|}{|u(x)|^{1-p/2}}$$

(как и выше, считаем, что это отношение равно нулю п.в. на множестве тех точек x , в которых $u(x) = 0$). Чтобы убедиться в последнем, достаточно рассмотреть семейство функций $(|u| + \delta)^{p/2}$, $\delta > 0$, и перейти в определяющих обобщенные производные интегральных тождествах к пределу при $\delta \rightarrow 0$. Таким образом, справедлива оценка (8). Выполнение граничного условия (2_0) (условия (2') с $u_0 = 0$) вытекает из принадлежности $v = |u|^{p/2}$ пространству $\mathring{W}_2^1(Q)$. Лемма 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим еще по-существу известную оценку нормы в пространстве $W_2^1(Q')$, $Q' \Subset Q$, функции $v(x) = |u|^{p/2}$, где u – решение однородного уравнения (1'_0), через ее норму в L_2 в окружающей эту подобласть Q' слое: *существует такая постоянная $C = C(\gamma, p)$, что для любого решения u уравнения (1'_0) (с $\lambda \geq 0$) в области Q и любых подобластях Q' и Q'' , $Q' \Subset Q'' \subset Q$, справедлива оценка*

$$\int_{Q'} |u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx + \lambda \int_{Q'} |u(x)|^p dx \leq \frac{C}{(\text{dist}(Q', \partial Q''))^2} \int_{Q'' \setminus Q'} |u(x)|^p dx. \quad (8_0)$$

Для $p \geq 2$ это утверждение очевидно, поскольку в этом случае функция $v = |u|^{p/2}$ является субрешением. Кратко остановимся на его доказательстве в случае $1 < p < 2$. Подставляя в определяющее решение уравнения (1'_0) интегральное тождество функцию

$$\eta = \zeta^2 u(|u| + \delta)^{p-2}, \quad \delta > 0,$$

где $\zeta \in C_0^\infty(Q'')$, $\zeta(x) \geq 0$ при $x \in Q''$ и $\zeta(x) = 1$ при $x \in Q'$ (считаем $\zeta(x) = 0$ при $x \in Q \setminus Q''$), и переходя в полученном равенстве к пределу при $\delta \rightarrow +0$

(как и в доказательстве леммы 2), получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_Q (\nabla[\zeta(x)v(x)], A(x)\nabla[\zeta(x)v(x)]) dx + \lambda \frac{p^2}{4(p-1)} \int_Q \zeta^2(x)v^2(x) dx \\ &= -\frac{2-p}{p-1} \int_Q v(x)(\nabla\zeta(x), A(x)\nabla[\zeta(x)v(x)]) dx \\ & \quad + \frac{2p-1}{p-1} \int_Q v^2(x)(\nabla\zeta(x), A(x)\nabla\zeta(x)) dx. \end{aligned}$$

Из него следует оценка (8₀).

§ 2. Доказательство теоремы 2

Возьмем, как и в [2], покрытие $\{B_{x^0}(\rho), x^0 \in \partial Q\}$ границы ∂Q шарами достаточно малого радиуса $\rho < r_0$, $\rho < \delta_0$. Пересечение области Q с каждым из шаров $B_{x^0}(\rho)$ в местной системе координат (x', x_n) (точка x^0 является началом координат, а ось x_n направлена по нормали $\nu(x^0)$) имеет вид

$$\begin{aligned} & B_{x^0} \cap \{(x', x_n) : x_n > \varphi(x')\}, \\ & \varphi = \varphi_{x^0} \in C^1(\mathbb{R}^{n-1}), \quad \varphi(0) = 0, \quad \nabla\varphi(0) = 0. \end{aligned}$$

Считаем, что для всех x'

$$|\nabla\varphi(x')| < \frac{1}{2},$$

а следовательно, для $x \in B_{x^0}(\frac{\rho}{2})$

$$x_n - \varphi(x') < \frac{4}{3}r(x)$$

(конечно, $x_n - \varphi(x') \geq r(x)$). Из покрытия

$$\left\{ B_{x^0}\left(\frac{\rho}{2^5}\right), x_0 \in \partial Q \right\}$$

выберем такое конечное подпокрытие

$$\left\{ B_{x^k}\left(\frac{\rho}{2^5}\right), k = 1, 2, \dots, k_0 \right\},$$

что каждая точка пространства принадлежит не более чем $M = M(n)$ шарам $\{B_{x^k}(\rho)\}$ (шары $B_{x^k}(\frac{\rho}{2^7})$ не пересекаются; см. [35], [36]).

В этом параграфе мы будем рассматривать решение уравнения (1'₀) в произвольно взятом элементе выбранного подпокрытия $B_{x^k}(\rho_k)$. Координаты точки будем брать в местной системе координат, а зависимость от номера k отмечать не будем: $\rho_k = \rho$, $B_{x^k}(\rho_k) = B(\rho)$. Как и в [2], распрямим границу области с помощью отображения $y' = x'$, $y_n = x_n - \varphi(x')$. В новых координатах уравнение (1'₀) имеет такой же вид, его постоянная эллиптичности оценивается снизу (с абсолютной положительной постоянной) через постоянную

эллиптичности γ , а коэффициенты уравнения в новых координатах удовлетворяют условию (5), в котором функцию $\omega(t)$ следует заменить на $C(n, \gamma)\omega(\sqrt{2}t)$, $C(n, \gamma) \geq 1$ (см. [2]); далее эту новую функцию будем также обозначать через ω . Новые координаты, коэффициенты уравнения в них, постоянную эллиптичности этого уравнения и решение будем обозначать теми же буквами $x = (x', x_n)$, a_{ij} , γ и u .

Далее, как и в [2], нам понадобятся функции a_{ij}^0 , $i, j = 1, \dots, n$, определенные равенствами

$$\begin{aligned} a_{ij}^0(x) &= a_{ij}(x) \quad \text{при } i < n, \quad j < n, \\ a_{in}^0(x) &= a_{ni}^0(x) = a_{ni}^0(x', x_n) = \frac{1}{\text{mes}_{n-1}\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |\xi| < x_n\}} \\ &\times \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |\xi - x'| < x_n\}} a_{in}(\xi, 0) d\xi \quad \text{при } i = 1, \dots, n-1, \\ a_{nn}^0(x) &= a_{nn}(x', 0); \end{aligned}$$

матрицу (a_{ij}^0) будем обозначать через A_0 . Из условия (5) следует, что

$$\begin{aligned} |a_{in}^0(x) - a_{in}(x)| &\leq \omega(\sqrt{2}x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \left| \frac{\partial a_{in}^0(x)}{\partial x_i} \right| &\leq \frac{n-1}{x_n} \omega(2x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Договоримся и функцию $n\omega(2t)$ также обозначать через $\omega(t)$. Тогда

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_{in}(x) - a_{in}^0(x))^2 \right]^{1/2} \leq \omega(x_n), \quad \left| \frac{\partial a_{in}^0(x)}{\partial x_i} \right| \leq \frac{\omega(x_n)}{x_n}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (11)$$

Обозначим через Π цилиндр

$$\begin{aligned} \{x = (x', x_n) : |x'| < h', 0 < x_n < h_n\}, \quad h' = \frac{\rho}{2^4}, \quad h_n \leq \frac{\rho}{2^4}, \\ c\Pi = \{x = (x', x_n) : |x'| < ch', 0 < x_n < ch_n\}, \quad c > 0. \end{aligned}$$

Заметим, что прообразы (при распрямляющем границу отображении) цилиндров $\frac{1}{2}\Pi$ покрывают границу ∂Q рассматриваемой области Q . Высоту цилиндра h_n выберем так, чтобы прообраз цилиндра 4Π содержался в соответствующем шаре $B_{x^k}(\frac{\rho}{2})$ (на самом деле и h_n можно взять равной $\frac{\rho}{2^4}$). Тогда координата x_n каждой из лежащих в 4Π точек оценивается снизу и сверху через расстояние (оно обозначалось через $r(x)$) от ее прообраза до границы (с постоянными 1 и $\frac{4}{3}$ соответственно). Отметим также, что прообразы цилиндров Π покрывают приграничную полосу $\{x \in Q : 0 < r(x) < \text{const} \cdot \rho\}$ с некоторой абсолютной постоянной.

Возьмем произвольные числа $t \in (0, h_n)$ и $\tau \in (0, t)$ и определим функцию $\varrho(x_n) = \varrho(x_n; t, \tau)$, $x_n \geq 0$, следующим образом:

$$\varrho(x_n) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x_n \leq \tau, \\ x_n - \tau & \text{при } \tau \leq x_n \leq t, \\ t - \tau & \text{при } x_n \geq t. \end{cases}$$

Кроме того, пусть $\psi(x')$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, и $\psi_n(x_n)$, $x_n \geq 0$, – бесконечно дифференцируемые срезающие функции, принимающие значения в отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} \psi(x') &= 1 \quad \text{при } |x'| \leq h', \\ \psi(x') &= 0 \quad \text{при } |x'| \geq 2h', \\ \psi_n(x_n) &= 1 \quad \text{при } x_n \in [0, h_n], \\ \psi_n(x_n) &= 0 \quad \text{при } x_n \geq 2h_n; \\ |\nabla \psi(x')| &\leq \frac{C}{h'}, \quad |\psi'_n(x_n)| \leq \frac{C}{h_n} \end{aligned}$$

с абсолютной постоянной C . Функцию $|u(x)|^{p/2}$ будем далее обозначать через $v(x)$.

ЛЕММА 3. Пусть u – решение уравнения $(1'_0)$ (с $\lambda \geq 0$) в цилиндре 4Π . Тогда для любых $t \in (0, h_n)$ и $\tau \in (0, t)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} &4 \frac{p-1}{p} \iint_{2\Pi} \varrho(x_n; t, \tau) \psi(x') \psi_n(x_n) (\nabla v(x), A(x) \nabla v(x)) dx \\ &+ \int_{\{x' \in \mathbb{R}^{n-1}: |x'| < 2h'\}} \psi(x') a_{nn}(x', 0) v^2(x', t) dx' \\ &- \int_{\{x' \in \mathbb{R}^{n-1}: |x'| < 2h'\}} \psi(x') a_{nn}(x', 0) v^2(x', \tau) dx' \\ &+ p\lambda \iint_{2\Pi} \varrho(x_n; t, \tau) \psi(x') \psi_n(x_n) v^2(x) dx \\ &+ 2 \iint_{\{x \in 2\Pi: h' < |x'| < 2h'\}} \psi_n \varrho v (\nabla \psi, A \nabla v) dx \\ &+ 2 \iint_{\{x \in 2\Pi: h_n < x_n < 2h_n\}} (t - \tau) \psi v \psi'_n(e_n, A \nabla v) dx \\ &+ 2 \iint_{\{x \in 2\Pi: \tau < x_n < t\}} \psi v(e_n, (A - A_0) \nabla v) dx \\ &- \sum_{i=1}^{n-1} \iint_{\{x \in 2\Pi: \tau < x_n < t\}} \left(a_{in}^0 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \psi \frac{\partial a_{in}^0}{\partial x_i} \right) v^2 dx = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

здесь e_n – направляющий вектор оси x_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $p \geq 2$ доказываемое утверждение очевидно. Оно немедленно получается, если подставить функцию

$$\eta(x) = \psi(x') \psi_n(x_n) \varrho(x_n; t, \tau) u(x) |u(x)|^{p-2}$$

в определяющее решение уравнения $(1'_0)$ интегральное тождество; эта функция финитна, а ее принадлежность пространству $W_2^1(4\Pi)$ следует из ограниченности решения на $\text{supp } \eta \Subset 4\Pi$. При этом в слагаемом, получающемся при дифференцировании множителя ϱ , следует матрицу коэффициентов A разбить на два

слагаемых, A_0 и $A - A_0$, а интеграл, в который входит A_0 , проинтегрировать по частям.

Пусть $p \in (1, 2)$. Возьмем пробную функцию

$$\eta(x) = \psi(x')\psi_n(x_n)\varrho(x_n; t, \tau)(u^+(x) + \delta)^{p-1},$$

где $u^+ = \frac{|u|+u}{2}$ – положительная часть решения u , а δ – произвольное положительное число. Очевидно, что функция η принадлежит пространству $W_2^1(4\Pi)$ и финитна. Легко видеть, что при $\delta \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} \lambda \iint_{4\Pi} \psi\psi_n\varrho(u^+ + \delta)^{p-1}u \, dx &\rightarrow \lambda \iint_{\{x \in 2\Pi: u(x) > 0\}} \psi\psi_n\varrho(u^+)^p \, dx, \\ \iint_{4\Pi} \psi_n\varrho(u^+ + \delta)^{p-1}(\nabla\psi, A\nabla u) \, dx &\rightarrow \iint_{\{x \in 2\Pi: u(x) > 0\}} \psi_n\varrho(u^+)^{p-1}(\nabla\psi, A\nabla u) \, dx, \\ \iint_{4\Pi} \psi\varrho(u^+ + \delta)^{p-1}\psi'_n(e_n, A\nabla u) \, dx \\ &\rightarrow \iint_{\{x \in 2\Pi: h_n < x_n < 2h_n, u(x) > 0\}} \psi\varrho(u^+)^{p-1}\psi'_n(e_n, A\nabla u) \, dx, \\ \iint_{4\Pi} \psi\psi_n(u^+ + \delta)^{p-1}(\nabla\varrho, (A - A_0)\nabla u) \, dx \\ &\rightarrow \iint_{\{x \in 2\Pi: \tau < x_n < t, u(x) > 0\}} \psi(u^+)^{p-1}(e_n, (A - A_0)\nabla u) \, dx, \\ \iint_{4\Pi} \psi\psi_n(u^+ + \delta)^{p-1}(\nabla\varrho, A_0\nabla u) \, dx \\ &\rightarrow \iint_{\{x \in 2\Pi: \tau < x_n < t, u(x) > 0\}} \psi(u^+)^{p-1}(e_n, A_0\nabla u) \, dx. \end{aligned}$$

В силу интегрального тождества оставшееся слагаемое ограничено (как функция параметра $\delta > 0$) и по теореме Леви

$$\begin{aligned} (p-1) \iint_{4\Pi} \psi\psi_n\varrho(u^+ + \delta)^{p-2}(\nabla u^+, A\nabla u) \, dx \\ \rightarrow \frac{4(p-1)}{p^2} \iint_{\{x \in 2\Pi: \tau < x_n, u(x) > 0\}} \psi\psi_n\varrho(\nabla v^+, A\nabla v^+) \, dx; \end{aligned}$$

здесь $v^+ = (u^+)^{p/2}$; нетрудно проверить, что

$$v^+ \in W_2^1(\{x \in 2\Pi : \tau < x_n\}), \quad \nabla v^+ = \frac{p}{2}(u^+)^{p/2-1}\nabla u^+.$$

Напомним, что в силу интегрального тождества сумма полученных пределов равна нулю. Аналогично, заменяя u^+ на $u^- = (-u)^+$, получаем такое же равенство для u^- . Складывая их и интегрируя по частям слагаемое, содержащее A_0 :

$$\iint_{\{x \in 2\Pi: \tau < x_n < t\}} \psi|u|^{p-1}(e_n, A_0\nabla|u|) \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p} \int_{\{x' \in \mathbb{R}^{n-1}; |x'| < 2h'\}} \psi(x') a_{nn}(x', 0) v^2(x', t) dx' \\
&\quad - \frac{1}{p} \int_{\{x' \in \mathbb{R}^{n-1}; |x'| < 2h'\}} \psi(x') a_{nn}(x', 0) v^2(x', \tau) dx' \\
&\quad - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n-1} \iint_{\{x \in 2\Pi; \tau < x_n < t\}} \left(a_{in}^0 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \psi \frac{\partial a_{in}^0}{\partial x_i} \right) v^2 dx,
\end{aligned}$$

$v = v^+ + v^- = |u|^{p/2}$, получаем (12).

В следующем утверждении мы зафиксируем число t ; например, можно считать, что $t = \frac{h_n}{2}$.

ЛЕММА 4. Пусть u – решение уравнения $(1'_0)$ (с $\lambda \geq 0$) в цилиндре 4Π . Тогда для любых $\tau \in (0, \frac{t}{2})$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\iint_{\{x \in \Pi; x_n > 2\tau\}} x_n |\nabla v(x)|^2 dx \leq \varepsilon \iint_{\{x \in 2\Pi; x_n > 3\tau\}} x_n |\nabla v(x)|^2 dx \\
&\quad + \frac{C}{\varepsilon} \max_{\tau/2 < \xi < h_n} \left(\frac{1}{\xi} \iint_{\{x \in 3\Pi; \xi < x_n < 2\xi\}} v^2(x) dx \right), \tag{13}
\end{aligned}$$

в которой постоянная C зависит от n, γ, p, ω и размеров (h', h_n) цилиндра Π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим еще одну весовую функцию

$$\tilde{\varrho}(x_n; \tau) = \frac{1}{\tau} \int_{\tau}^{2\tau} \varrho(x_n; t, \xi) d\xi, \quad x_n \geq 0, \quad 0 < \tau < \frac{t}{2};$$

легко видеть, что

$$\tilde{\varrho} = \begin{cases} 0 & \text{при } x_n < \tau, \\ \frac{(x_n - \tau)^2}{2\tau} & \text{при } \tau \leq x_n \leq 2\tau, \\ x_n - \frac{3}{2}\tau & \text{при } 2\tau \leq x_n \leq t, \\ t - \frac{3}{2}\tau & \text{при } x_n > t. \end{cases}$$

Отметим, что

$$\tilde{\varrho}(x_n, \tau) > \frac{x_n}{4} \quad \text{при } 2\tau \leq x_n \leq t.$$

Применяя ко всем слагаемым из (12) такой же оператор усреднения (по параметру τ), отбрасывая слагаемые (второе и четвертое) того же знака, что и первое, и оценивая (с помощью (11)) оставшиеся, получим неравенство

$$\begin{aligned}
&\iint_{\{x \in \Pi; x_n > 2\tau\}} x_n |\nabla v(x)|^2 dx \\
&\leq C(t, \gamma) \iint_{2\Pi} \tilde{\varrho}(x_n; \tau) \psi(x') \psi_n(x_n) (\nabla v(x), A(x) \nabla v(x)) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \text{const} \cdot \left[\tau^{-1} \iint_{\{x \in 2\Pi: \tau < x_n < 2\tau\}} v^2(x', x_n) dx \right. \\
&\quad + \iint_{\{x \in 2\Pi: \tau < x_n < 3\tau\}} |v(x)| |\nabla v(x)| dx \\
&\quad + \left(\iint_{\{x \in 2\Pi: x_n > 3\tau\}} v^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\iint_{\{x \in 2\Pi: x_n > 3\tau\}} x_n |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\iint_{\{x \in 2\Pi: 3\tau < x_n < t\}} \frac{\omega(x_n)}{x_n} v^2(x) dx \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\iint_{\{x \in 2\Pi: 3\tau < x_n < t\}} x_n |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\quad \left. + \iint_{\{x \in 2\Pi: \tau < x_n < t\}} \left(1 + \frac{\omega(x_n)}{x_n} \right) v^2(x) dx \right],
\end{aligned}$$

в котором постоянные (как и в формулировке леммы 4) зависят от n , γ , p , ω и размеров цилиндра Π . Интеграл

$$\iint_{\{x \in 2\Pi: \tau < x_n < 3\tau\}} |v(x)| |\nabla v(x)| dx$$

оценивается с помощью неравенства (73) из леммы 1; для этого следует выбрать покрытие конечной кратности множества $\{x \in 2\Pi : \tau < x_n < 3\tau\}$ шарами радиуса $\frac{\tau}{2}$ (с лежащими на этом множестве центрами). Интегралы, содержащие множитель $\frac{\omega(x_n)}{x_n}$, оцениваются с помощью неравенства из следствия 1. Как отмечалось выше, постоянная в этом неравенстве не зависит от x_n .

ТЕОРЕМА 2. Пусть u является решением в области Q уравнения (1'6) с $\lambda \geq 0$. Тогда из ограниченности функции

$$\frac{1}{\delta} \iint_{\{x \in Q: \delta < r(x) < 2\delta\}} |u(x)|^p dx, \quad \delta > 0, \quad (14)$$

следует сходимость интеграла

$$\int_Q r(x) |u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx. \quad (15)$$

В частности, интеграл (15) сходится для решений задачи Дирихле (1'6), (2) с $u_0 \in L_p(\partial Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4 для каждого элемента выбранного в начале § 2 покрытия границы области Q справедлива оценка (13). Суммируя их и учитывая отмечавшиеся в начале § 2 оценки координаты x_n для каждой из точек цилиндра 4Π (в полученной после распрямления границы системе координат) через расстояние $r(x)$ от прообраза этой точки до границы, получим оценку интеграла от $r(x) |u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2$ по “полосе”

$$\left\{ x \in Q : \frac{8}{3} \tau < r(x) < ch_n \right\}$$

(здесь c – некоторая абсолютная постоянная, $c \in (0, 1)$). А именно, для всех $\tau \in (0, \frac{ch_n}{4})$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\{x \in Q: 2\tau < r(x) < ch_n\}} r(x) |\nabla v(x)|^2 dx \\ & \leq M\varepsilon \iint_{\{x \in Q: 9\tau/4 < r(x) < 2h_n\}} r(x) |\nabla v(x)|^2 dx \\ & \quad + \frac{CM}{\varepsilon} \max_{3\tau/8 < \xi < h_n} \left(\frac{1}{\xi} \iint_{\{x \in Q: \xi < r(x) < 2\xi\}} v^2(x) dx \right), \end{aligned} \quad (16')$$

в которой M – кратность покрытия, а постоянная C зависит от n , γ , p , ω и области Q . Напомним, что размеры цилиндров $h' = h'(Q)$ и $h_n = h_n(Q)$ мы выбрали и зафиксировали.

Интеграл по внутренней части области ($r(x) > ch_n$) оценивается с помощью неравенства (8₀) из замечания 1:

$$\int_{\{x \in Q: r(x) > ch_n\}} |\nabla v(x)|^2 dx \leq \frac{C(\gamma, p)}{h_n^2} \int_{\{x \in Q: ch_n/2 < r(x) < ch_n\}} |v(x)|^2 dx. \quad (16_0)$$

Складывая оценки (16') и (16₀) и выбирая число ε достаточно малым, получаем справедливость для всех $\tau \in (0, \frac{ch_n}{4})$ неравенства

$$\begin{aligned} & \iint_{\{x \in Q: 2\tau < r(x)\}} r(x) |\nabla v(x)|^2 dx \\ & \leq \text{const} \cdot \max_{3\tau/8 < \xi < h_n} \left(\frac{1}{\xi} \iint_{\{x \in Q: \xi < r(x) < 2\xi\}} v^2(x) dx \right), \end{aligned}$$

в котором постоянная зависит от n , γ , p , ω и области Q . Из последней оценки немедленно вытекает доказываемое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На самом деле доказано более сильное утверждение: для любого решения уравнения (1'₀) с ограниченной функцией (14) и, в частности, для решения задачи Дирихле справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \int_Q r(x) |\nabla v(x)|^2 dx \leq \text{const} \cdot \left[\sup_{0 < \xi < h_n/2} \left(\frac{1}{\xi} \int_{\{x \in Q: \xi < r(x) < 2\xi\}} v^2(x) dx \right) \right. \\ & \quad \left. + \int_{\{x \in Q: h_n < r(x) < 2h_n\}} v^2(x) dx \right] \end{aligned} \quad (16)$$

с зависящей только от n , γ , p , ω и области Q постоянной.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогичными рассуждениями можно показать, что условие ограниченности функции (14) является не только достаточным, но и необходимым для сходимости интеграла (15). Далее нам утверждение о необходимости не понадобится. Поэтому мы не будем останавливаться на его доказательстве.

§ 3. Доказательство основной оценки

В этом параграфе мы докажем справедливость оценки (6) для решения задачи Дирихле (1'_0), (2) с достаточно большим коэффициентом λ .

ЛЕММА 5. Для любого решения u задачи (1'_0), (2) с $\lambda \geq 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_Q r(x)|u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx + \sup_{0 < \xi < h_n/2} \left(\frac{1}{\xi} \int_{\{x \in Q: \xi < r(x) < 2\xi\}} |u(x)|^p dx \right) \\ & \leq C \left(\int_Q |u(x)|^p dx + \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS \right) \end{aligned} \quad (17)$$

с зависящей от n, γ, p, ω и области Q постоянной C .

Кроме того, существует такая постоянная λ_0 , зависящая также от n, γ, p, ω и области Q , что для всех $\lambda \geq \lambda_0$ задача (1'_0), (2) не может иметь более одного решения. При этом решение этой задачи удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} & \int_Q r(x)|u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx + \sup_{0 < \xi < h_n/2} \left(\frac{1}{\xi} \int_{\{x \in Q: \xi < r(x) < 2\xi\}} |u(x)|^p dx \right) \\ & + \int_Q |u(x)|^p dx \leq C(n, \gamma, p, \omega, Q) \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS. \end{aligned} \quad (17')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем опять произвольный элемент покрытия границы Π , как и в § 2, распрямим границу. Далее будем использовать те же, что и в леммах 3 и 4, обозначения.

Пусть u является решением рассматриваемой задачи Дирихле. Согласно теореме 2 в равенстве (12) из леммы 3 можно перейти к пределу при $\tau \rightarrow +0$; сходимость всех входящих в предельное равенство интегралов (с $\tau = 0$) следует из ограниченности функции (14) и сходимости интеграла (15). Получим, что для всех $t \in (0, h_n)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & 4 \frac{p-1}{p} \int_{2\Pi} \min\{x_n, t\} \psi(x') \psi_n(x_n) (\nabla v(x), A(x) \nabla v(x)) dx \\ & + \int_{\{x' \in \mathbb{R}^{n-1}: |x'| < 2h'\}} \psi(x') a_{nn}(x', 0) v^2(x', t) dx' \\ & + p\lambda \int_{2\Pi} \min\{x_n, t\} \psi(x') \psi_n(x_n) v^2(x) dx \\ & = \int_{\{x' \in \mathbb{R}^{n-1}: |x'| < 2h'\}} \psi(x') a_{nn}(x', 0) |u_0(x')|^p dx' \\ & - 2 \int_{\{x \in 2\Pi: h' < |x'| < 2h'\}} \min\{x_n, t\} \psi_n(x_n) v(x) (\nabla \psi(x'), A(x) \nabla v(x)) dx \\ & - 2 \int_{\{x \in 2\Pi: h_n < x_n < 2h_n\}} t \psi(x') v(x) \psi'_n(x_n) (e_n, A(x) \nabla v(x)) dx \\ & - 2 \int_{\{x \in 2\Pi: 0 < x_n < t\}} \psi(x') v(x) (e_n, (A - A_0) \nabla v(x)) dx \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\{x \in 2\Pi: 0 < x_n < t\}} \left(a_{in}^0(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x') + \psi(x') \frac{\partial a_{in}^0}{\partial x_i}(x) \right) v^2(x) dx; \quad (12_0)$$

напомним, что $v = |u|^{p/2}$, а e_n — направляющий вектор оси x_n .

Оценивая (аналогично тому, как это делалось в доказательстве леммы 4) слагаемые из правой части (12₀), получаем справедливость для всех $t \in (0, \frac{h_n}{2})$ неравенства

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} \min\{x_n, t\} |\nabla v(x)|^2 dx + \sup_{\xi \in (0, t/2)} \frac{1}{\xi} \int_{\xi}^{2\xi} \left(\int_{\{x' \in \mathbb{R}^{n-1}: |x'| < h'\}} v^2(x', x_n) dx' \right) dx_n \\ & + \lambda \int_{\Pi} \min\{x_n, t\} v^2(x) dx \\ & \leq C(n, \gamma, p, h', h_n) \left(\int_{\{x' \in \mathbb{R}^{n-1}: |x'| < 2h'\}} |u_0(x')|^p dx' \right. \\ & \quad \left. + \int_{2\Pi} \min\{x_n, t\} v(x) |\nabla v(x)| dx \right) \\ & + C(n, \gamma, p, h', h_n) \left(\int_{\{x \in 2\Pi: 0 < x_n < t\}} \omega(x_n) v(x) |\nabla v(x)| dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{\{x \in 2\Pi: 0 < x_n < t\}} \left[1 + \frac{\omega(x_n)}{x_n} \right] v^2(x) dx \right). \end{aligned}$$

Суммируя эти неравенства по всем выбранным элементам покрытия границы, получаем оценку в приграничной полосе

$$\begin{aligned} & \int_{\{x \in Q: r(x) < ch_n\}} \min\{r(x), t\} |\nabla v(x)|^2 dx \\ & + \sup_{\xi \in (0, 3t/8)} \frac{1}{\xi} \int_{\xi}^{2\xi} \int_{\{x \in Q: \xi < r(x) < 2\xi\}} v^2(x) dx \\ & + \lambda \int_{\{x \in Q: r(x) < ch_n\}} \min\{r(x), t\} v^2(x) dx \\ & \leq C(n, \gamma, p, Q, \omega) \left(\int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS + \int_{\{x \in Q: r(x) < ch_n\}} \min\{r(x), t\} v^2(x) dx \right) \\ & + C(n, \gamma, p, Q, \omega) \int_{\{x \in Q: ch_n < r(x) < 2h_n\}} \min\{r(x), t\} (v^2(x) + |\nabla v(x)|^2) dx \\ & + C(n, \gamma, p, Q, \omega) \int_{\{x \in Q: r(x) < t/4\}} \left[1 + \frac{\omega(r(x))}{r(x)} \right] v^2(x) dx \\ & + C(n, \gamma, p, Q, \omega) \int_{\{x \in Q: t/4 < r(x) < t\}} \left[1 + \frac{\omega(x_n)}{x_n} \right] v^2(x) dx; \end{aligned}$$

здесь c — положительное число, $c < 1$, а $t \in (0, \frac{ch_n}{2})$ (напомним, что высота цилиндра h_n уже выбрана и зафиксирована). Предпоследнее слагаемое в правой части, как нетрудно видеть, не превосходит величины

$$C(n, \gamma, p, Q, \omega) \left(t + \int_0^t \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau \right) \sup_{\xi \in (0, 3t/8)} \frac{1}{\xi} \int_{\xi}^{2\xi} \int_{\{x \in Q: \xi < r(x) < 2\xi\}} v^2(x) dx$$

и может быть оценено через второе слагаемое в левой части, если выбрать число t достаточно малым: $t = t_0 = t_0(\gamma, p, Q, \omega)$. Добавляя к полученной оценке в приграничной полосе оценку (8₀) с

$$Q' = \{x \in Q : r(x) > ch_n\}, \quad Q'' = \left\{x \in Q : r(x) > \frac{ch_n}{2}\right\},$$

получаем неравенство (17). Далее, выбирая (по уже выбранному t_0) коэффициент λ настолько большим, чтобы оставшиеся (конечно, кроме первого) слагаемые из правой части оценивались стоящим в левой части интегралом

$$\lambda \int_{\{x \in Q : r(x) < ch_n\}} \min\{r(x), t\} v^2(x) dx,$$

получаем и неравенство (17'). Утверждение о единственности решения немедленно следует из доказанной оценки (17').

Из оценки (17') следует и существование решения рассматриваемой в этом параграфе задачи.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $\lambda \geq \lambda_0$ существует решение задачи Дирихле (1'₀), (2) для любой граничной функции u_0 из $L_p(\partial Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную $u_0 \in L_p(\partial Q)$ и приблизим ее в $L_p(\partial Q)$ последовательностью гладких (из $C^1(\overline{Q}')$) функций $u_0^{(k)}$. Обозначим через $u^{(k)}$ решение (из $W_2^1(Q)$) рассматриваемой задачи с граничной функцией $u_0^{(k)}$. В силу леммы 5 эта последовательность решений сходится в $L_p(Q)$, а согласно лемме 1 она сходится и в W_2^1 в любой компактно принадлежащей Q подобласти. Поэтому предельная функция является решением уравнения (1'₀) в Q . Принятие предельной функцией граничного значения u_0 следует из вытекающей из (17) и следствия 1 (из леммы 1) равномерной сходимости следов $u^{(k)}$ на параллельных границе поверхностях.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Прежде всего докажем единственность решения задачи (1), (2). Пусть u – решение однородной задачи (1), (2₀). Из определения решения немедленно следует, что $u \in L_p(Q) \cap L_{2,\text{loc}}(Q)$. Функцию u можно рассматривать как решение задачи Дирихле для уравнения (1') с $\lambda = \lambda_0$ и

$$f(x) = \lambda_0 u(x), \quad f \in L_p(Q) \cap L_{2,\text{loc}}(Q).$$

Отметим, что в силу леммы 5 других решений у этой задачи нет. По лемме 2 функция $v = |u|^{p/2}$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$. Следовательно, согласно теореме вложения $v \in L_{2n/(n-2)}(Q)$ (при $n > 2$; при $n = 2$ она принадлежит $L_q(Q)$ с произвольным q). Но тогда u , а вместе с ней и f принадлежат пространству $L_{pn/(n-2)}$. Применяя опять лемму 2, получим, что u (и f) принадлежит $L_{pn^2/(n-2)^2}$. За конечное число шагов мы получим, что $f \in L_2(Q)$. Но тогда $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q)$, а следовательно, $u \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Легко видеть, что приведенное выше рассуждение, приводящее к утверждению о принадлежности решения пространству $\mathring{W}_2^1(Q)$, проходит и в случае уравнения (1') с коэффициентом λ произвольного знака (и переменным коэффициентом λ из L_∞). Это означает, что все собственные функции соответствующего рассматриваемой постановке оператора принадлежат $\mathring{W}_2^1(Q)$ и, в частности, не зависят от показателя суммируемости p .

Докажем теперь справедливость оценки (17') для рассматриваемого случая $\lambda = 0$. Утверждение о существовании решения получается из (17') точно так же, как в доказательстве следствия 2.

Пусть u – произвольное решение задачи (1), (2). Наряду с ним рассмотрим решение w задачи (1'), (2) с $\lambda = \lambda_0$ (из леммы 5):

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) - \lambda_0 w = 0, \quad x \in Q,$$

$$w|_{\partial Q} = u_0.$$

По следствию 2 решение этой задачи существует, а по лемме 5 оно единственно и удовлетворяет оценке (17'). В частности,

$$\int_Q |w(x)|^p dx \leq C \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS. \quad (17'')$$

Разность $z = u - w$ удовлетворяет однородному граничному условию (2₀) и является решением неоднородного уравнения (1') с $\lambda = 0$ и $f = \lambda_0 w$:

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) = -\lambda_0 w(x), \quad x \in Q,$$

$$z|_{\partial Q} = 0. \quad (2_0)$$

Как мы доказали в начале этого параграфа, решение этой задачи единственно. В силу леммы 2 функция $|z|^{p/2}$ принадлежит пространству $\mathring{W}_2^1(Q)$, и для ее нормы в этом пространстве справедлива оценка (8). Но тогда

$$\int_Q |z(x)|^p dx = \| |z|^{p/2} \|_{L_2(Q)}^2 \leq C(Q) \| |z|^{p/2} \|_{\mathring{W}_2^1(Q)}^2 \leq C(n, \gamma, p, Q) \lambda_0^p \|w\|_{L_p(Q)}^p.$$

Из (17'') получаем оценку нормы z , а вместе с ней и нормы u в $L_p(Q)$ через норму граничной функции. Имеем

$$\int_Q |u(x)|^p dx \leq C \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dx.$$

Доказываемое неравенство (17') (в частности, и неравенство (6) из теоремы 1) теперь следует из оценки (17).

§ 5. Пример

Как отмечалось в начале работы, при $p > 2$ решение задачи (1), (2), существование и единственность которого утверждает теорема 1, не обязательно принадлежит пространству $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$. Покажем, что и при $p \in (1, 2)$ в определении решения условие $u \in W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ нельзя заменить на (в этом случае более слабое) условие $u \in W_{p,\text{loc}}^1(Q)$. Более того, даже условие $u \in W_p^1(Q)$ не обеспечивает единственность решения.

ПРИМЕР. Пусть $n = 2$, а область Q – круг $\{x = (x_1, x_2) : |x| < 1\}$. Рассмотрим уравнение вида (1) с матрицей

$$A(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 + \sigma \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} & \sigma \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ \sigma \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & 1 + \sigma \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты уравнения (элементы матрицы A) являются гладкими функциями всюду, кроме центра круга. Поэтому условие (5) выполнено. Конечно, выполнено и условие (4). При значениях параметра $\sigma > -1$ матрица A равномерно по x положительно определена. Отметим, что вектор $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ является ее собственным вектором, соответствующим собственному значению $(1 + \sigma)$; второе собственное значение равно 1. Легко проверить, что функция

$$u_1(x) = r^{-\vartheta} \cos \varphi, \quad \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma}},$$

является решением этого уравнения в $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$; здесь (r, φ) – полярные координаты. При $\vartheta \in (0, \frac{2-p}{p})$ функция u_1 принадлежит пространству $W_p^1(Q)$; напомним, что $p \in (1, 2)$. Покажем, что она является решением рассматриваемого уравнения во всем круге Q .

Возьмем произвольную функцию $\eta \in C_0^\infty(Q)$, любое $\delta \in (0, 1)$ и рассмотрим интеграл

$$\iint_{\{(r, \varphi) : \delta < r < 1\}} (\nabla \eta, A \nabla u_1) dx = \int_{\{r=\delta\}} \eta(\nu, A \nabla u_1) ds;$$

здесь ν – единичный вектор (внешней) нормали к внутренней окружности. Так как он является собственным вектором матрицы A , то

$$\begin{aligned} \iint_{\{(r, \varphi) : \delta < r < 1\}} (\nabla \eta, A \nabla u_1) dx &= \delta(1 + \sigma) \int_0^{2\pi} \eta(\delta, \varphi) \frac{\partial u_1}{\partial r}(\delta, \varphi) d\varphi \\ &= (1 + \sigma)(-\vartheta) \delta^{-\vartheta} \int_0^{2\pi} \eta_0(\delta, \varphi) \cos \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

где

$$\eta_0(\delta, \varphi) = \eta(\delta, \varphi) - \eta(0, 0) = O(\delta), \quad \delta \rightarrow +0.$$

Следовательно, рассматриваемый интеграл стремится к нулю при $\delta \rightarrow +0$ ($\vartheta < 1$). Таким образом, функция u_1 является решением задачи Дирихле с граничной функцией $\cos \varphi$ и принадлежит пространству $W_p^1(Q)$ (конечно, она не

принадлежит $W_2^1(Q)$). Но эта задача имеет и другое решение

$$u_2(r, \varphi) = r^{\vartheta} \cos \varphi.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Утверждение теоремы 1 остается справедливым и для уравнения $(1'_0)$ с переменным неотрицательным коэффициентом λ из $L_\infty(Q)$, причем доказательство проходит без каких либо изменений. Несложно распространить его и на неоднородные уравнения с жесткими ограничениями на правую часть (см., например, лемму 2). Но эти условия будут очень грубыми. При $p = 2$ близкие к точным условия на правую часть и коэффициенты уравнения известны. Условия на правую часть для уравнения без младших членов были получены в работе [34]. Случай общего эллиптического уравнения второго порядка исследован в работе [37].

Список литературы

- [1] В. П. Михайлов, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, *Дифференц. уравнения*, **12**:10 (1976), 1877–1891; англ. пер.: V. P. Mikhailov, “Dirichlet’s problem for a second-order elliptic equation”, *Differential Equations*, **12**:10 (1977), 1320–1329.
- [2] А. К. Гушин, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, *Матем. сб.*, **137(179)**:1(9) (1988), 19–64; англ. пер.: A. K. Gushchin, “On the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation”, *Math. USSR-Sb.*, **65**:1 (1990), 19–66.
- [3] А. К. Гушин, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, *Докл. АН СССР*, **302**:5 (1988), 1044–1048; англ. пер.: A. K. Gushchin, “On the Dirichlet problem for a second order elliptic equation”, *Soviet Math. Dokl.*, **38**:2 (1989), 372–376.
- [4] А. К. Гушин, В. П. Михайлов, “О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка”, *Матем. сб.*, **185**:1 (1994), 121–160; англ. пер.: A. K. Gushchin, V. P. Mikhailov, “On solvability of nonlocal problems for a second-order elliptic equation”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **81**:1 (1995), 101–136.
- [5] А. К. Гушин, “О внутренней гладкости решений эллиптических уравнений второго порядка”, *Сиб. матем. журн.*, **46**:5 (2005), 1036–1052; англ. пер.: A. K. Gushchin, “On the interior smoothness of solutions to second-order elliptic equations”, *Siberian Math. J.*, **46**:5 (2005), 826–840.
- [6] А. К. Гушин, “О внутренней гладкости решений эллиптического уравнения второго порядка”, *Докл. РАН*, **404**:1 (2005), 14–17; англ. пер.: A. K. Gushchin, “On the interior smoothness of solutions to second-order elliptic equations”, *Dokl. Math.*, **72**:2 (2005), 665–668.
- [7] А. К. Гушин, “Внутренние оценки слабого решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, *Докл. РАН*, **358**:6 (1998), 731–733; англ. пер.: A. K. Gushchin, “Interior estimates for the weak solution to the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation”, *Dokl. Math.*, **57**:1 (1998), 121–123.
- [8] А. К. Гушин, “Некоторые свойства решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, *Матем. сб.*, **189**:7 (1998), 53–90; англ. пер.: A. K. Gushchin, “Some properties of the solutions of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation”, *Sb. Math.*, **189**:7 (1998), 1009–1045.

- [9] А. К. Гушин, “Оценки карлесоновского типа решений эллиптического уравнения второго порядка”, *Докл. РАН*, **396**:1 (2004), 15–18; англ. пер.: А. К. Gushchin, “Carleson-type estimates for solutions to second-order elliptic equations”, *Dokl. Math.*, **69**:3 (2004), 329–331.
- [10] А. К. Гушин, “О гладкости решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с квадратично суммируемой граничной функцией”, *Докл. РАН*, **415**:1 (2007), 10–13; англ. пер.: А. К. Gushchin, “Smoothness of solutions to the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation with a square integrable boundary function”, *Dokl. Math.*, **76**:1 (2007), 486–489.
- [11] А. К. Гушин, “Некоторое усиление свойства внутренней непрерывности по Гёльдеру решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, *ТМФ*, **157**:3 (2008), 345–363; англ. пер.: А. К. Gushchin, “A strengthening of the interior Hölder continuity property for solutions of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation”, *Theoret. and Math. Phys.*, **157**:3 (2008), 1655–1670.
- [12] А. К. Гушин, В. П. Михайлов, “О граничных значениях решений эллиптических уравнений”, *Обобщенные функции и их применения в математической физике*, Тр. междунар. конференции, ВЦ АН СССР, М., 1981, 189–205.
- [13] О. И. Богоявленский, В. С. Владимиров, И. В. Волович, А. К. Гушин, Ю. Н. Дроzhzhinov, В. В. Жаринов, В. П. Михайлов, “Краевые задачи математической физики”, *Теоретическая и математическая физика*, Тр. МИАН СССР, **175**, Наука, М., 1986, 63–102; англ. пер.: О. I. Bogoyavlenskij, V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, A. K. Gushchin, Yu. N. Drozhzhinov, V. V. Zharinov, V. P. Mikhajlov, “Boundary value problems of mathematical physics”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **175** (1988), 65–105.
- [14] L. Carleson, “An interpolation problem for bounded analytic functions”, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 921–930.
- [15] L. Carleson, “Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem”, *Ann. of Math.* (2), **76** (1962), 547–559.
- [16] L. Hörmander, “ L^p estimates for (pluri-) subharmonic functions”, *Math. Scand.*, **20** (1967), 65–78.
- [17] А. К. Гушин, В. П. Михайлов, “Внутренние оценки обобщенных решений эллиптического уравнения второго порядка”, *Вестн. Самарского гос. ун-та*, 2008, № 8/1(67), 76–94.
- [18] А. К. Гушин, В. П. Михайлов, “Условия фредгольмовости одного класса нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка”, *Докл. РАН*, **333**:3 (1993), 290–292; англ. пер.: А. К. Gushchin, V. P. Mikhailov, “A condition that a class of nonlocal problems for a second-order elliptic equation be Fredholm”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **48**:3 (1994), 510–514.
- [19] А. К. Гушин, В. П. Михайлов, “О непрерывности решений одного класса нелокальных задач для эллиптического уравнения”, *Матем. сб.*, **186**:2 (1995), 37–58; англ. пер.: А. К. Gushchin, V. P. Mikhailov, “On the continuity of the solutions of a class of non-local problems for an elliptic equation”, *Sb. Math.*, **186**:2 (1995), 197–219.
- [20] А. К. Гушин, В. П. Михайлов, “Об однозначной разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения”, *Докл. РАН*, **351**:1 (1996), 7–8; англ. пер.: А. К. Gushchin, V. P. Mikhailov, “On the univalent solvability of nonlocal problems for an elliptic equation”, *Dokl. Math.*, **54**:3 (1996), 815–816.
- [21] А. К. Гушин, “Условие полной непрерывности операторов, возникающих в нелокальных задачах для эллиптических уравнений”, *Докл. РАН*, **373**:2 (2000), 161–163; англ. пер.: А. К. Gushchin, “A condition for the complete continuity of operators arising in nonlocal problems for elliptic equations”, *Dokl. Math.*, **62**:1 (2000), 32–34.

- [22] А. К. Гущин, “Условие компактности одного класса операторов и его применение к исследованию разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений”, *Матем. сб.*, **193**:5 (2002), 17–36; англ. пер.: A. K. Gushchin, “A condition for the compactness of operators in a certain class and its application to the analysis of the solubility of non-local problems for elliptic equations”, *Sb. Math.*, **193**:5 (2002), 649–668.
- [23] Ю. А. Алхутов, В. А. Кондратьев, “Разрешимость задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в выпуклой области”, *Дифференц. уравнения*, **28**:5 (1992), 806–818; англ. пер.: Yu. A. Alukhutov, V. A. Kondrat’ev, “Solvability of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations in a convex region”, *Differential Equations*, **28**:5 (1992), 650–662.
- [24] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, “О граничных значениях в L_p , $p > 1$, решений эллиптических уравнений”, *Матем. сб.*, **108(150)**:1 (1979), 3–21; англ. пер.: A. K. Gushchin, V. P. Mihailov, “On boundary values in L_p , $p > 1$, of solutions of elliptic equations”, *Math. USSR-Sb.*, **36**:1 (1980), 1–19.
- [25] И. М. Петрушко, “О граничных значениях в $\mathcal{L}_p$, $p > 1$, решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей”, *Матем. сб.*, **120(162)**:4 (1983), 569–588; англ. пер.: I. M. Petrushko, “On boundary values in $\mathcal{L}_p$, $p > 1$, of solutions of elliptic equations in domains with a Lyapunov boundary”, *Math. USSR-Sb.*, **48**:2 (1984), 565–585.
- [26] Ю. А. Михайлов, “О граничных значениях в L_p , $p > 1$, решений эллиптического уравнения второго порядка”, *Дифференц. уравнения*, **19**:2 (1983), 318–337; англ. пер.: Yu. A. Mikhajlov, “Boundary values in L_p , $p > 1$, of solutions of second-order linear elliptic equations”, *Differential Equations*, **19**:2 (1983), 243–258.
- [27] E. De Giorgi, “Sulla differenziabilità e l’analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari”, *Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (3), **3** (1957), 25–43.
- [28] J. Nash, “Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations”, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 931–954.
- [29] J. Moser, “A new proof of De Giorgi’s theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **13**:3 (1960), 457–468.
- [30] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралыцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, 2-е изд., Наука, М., 1973; англ. пер. 1-го изд.: O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural’tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Math. Sci. Engrg., **46**, Academic Press, New York–London, 1968.
- [31] Д. Гилбарг, Н. С. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren Math. Wiss., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [32] В. П. Михайлов, А. К. Гущин, *Дополнительные главы курса “Уравнения математической физики”*, Лекц. курсы НОЦ, **7**, МИАН, М., 2007.
- [33] В. Г. Мазья, “О вырождающейся задаче с косой производной”, *Матем. сб.*, **87(129)**:3 (1972), 417–454; англ. пер.: V. G. Maz’ja, “On a degenerating problem with directional derivative”, *Math. USSR-Sb.*, **16**:3 (1972), 429–469.
- [34] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, “О существовании граничных значений решений эллиптического уравнения”, *Матем. сб.*, **182**:6 (1991), 787–810; англ. пер.: A. K. Gushchin, V. P. Mihailov, “On the existence of boundary values of solutions of an elliptic equation”, *Math. USSR-Sb.*, **73**:1 (1992), 171–194.
- [35] A. P. Morse, “A theory of covering and differentiation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55** (1944), 205–235.
- [36] В. Г. Мазья, *Пространства Соболева*, Изд-во ЛГУ, Л., 1985; англ. пер.: V. G. Maz’ya, *Sobolev spaces*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1985.

- [37] В. Ж. Думанян, “О разрешимости задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка”, *Матем. сб.*, **202**:7 (2011), 75–94; англ. пер.: V. Zh. Dumanyan, “Solvability of the Dirichlet problem for a general second-order elliptic equation”, *Sb. Math.*, **202**:7 (2011), 1001–1020.

А. К. Гущин (А. К. Gushchin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: akg@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

25.11.2010 и 07.04.2011