Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Илларионов, О статистических свойствах многогранников Клейна трехмерных целочисленных решеток, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 6, 23–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7826>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 17:04:20

УДК 511.36+511.9

А. А. Илларионов

О статистических свойствах многогранников Клейна трехмерных целочисленных решеток

Получены асимптотические формулы для средних значений количества граней фиксированного типа и вершин полиэдров Клейна трехмерных целочисленных решеток с заданным определителем.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: решетка, многогранник Клейна, многомерная непрерывная дробь, относительный минимум.

DOI: 10.4213/sm7826

Обозначения

$\#S$ – количество элементов конечного множества S ;

$\text{Conv } X$ – выпуклая оболочка множества X ;

если $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$, то $|x| = (x_1^2 + \dots + x_s^2)^{1/2}$;

$\zeta(s)$ – дзета-функция Римана;

$\mathcal{M}_s(X)$ – множество матриц размера $s \times s$ с элементами из X , где $X = \mathbb{R}$ или $X = \mathbb{Z}$;

$\text{GL}_s(\mathbb{R})$ – множество невырожденных матриц из $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$;

$\text{GL}_s(\mathbb{Z})$ – множество матриц из $\mathcal{M}_s(\mathbb{Z})$ с определителем ± 1 ;

если $a^{(1)}, \dots, a^{(s)} \in \mathbb{R}^s$, то

$$M(a^{(1)}, \dots, a^{(s)}) = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(s)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_s^{(1)} & \dots & a_s^{(s)} \end{pmatrix}$$

– матрица со столбцами $a^{(1)}, \dots, a^{(s)}$;

если $M \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$, $X \subset \mathbb{R}^s$, то $M \cdot X = \{M \cdot x : x \in X\} \subset \mathbb{R}^s$;

запись

$$f(x) \ll g(x) \quad (\text{либо } f(x) = O(g(x))) \quad \text{при } x \in X$$

означает, что существует такая постоянная $C > 0$, что $|f(x)| \leq C \cdot g(x)$ при всех $x \in X$. Если C зависит от параметра θ , то пишем $f(x) \ll_{\theta} g(x)$

(либо $f(x) = O_{\theta}(g(x))$). Запись $f \asymp g$ означает что $f \ll g \ll f$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00628-а), ДВО РАН (проект № 12-I-B-П19-01) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1922.2012.1).

Введение

Полной s -мерной решеткой называется множество вида

$$\Gamma = \{k_1 a^{(1)} + \dots + k_s a^{(s)} : k_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, s}\},$$

где $a^{(i)}$, $i = \overline{1, s}$, – линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^s$ (базис Γ). Матрицу $M = M(a^{(1)}, \dots, a^{(s)})$ будем называть *базисной* (столбцы M образуют базис Γ). Величина $\det \Gamma = |\det M|$ называется определителем решетки Γ .

Ненулевой узел $\gamma \in \Gamma$ называется *относительным минимумом* s -мерной решетки Γ , если не существует ненулевого узла $\gamma' \in \Gamma$, для которого

$$|\gamma'_i| \leq |\gamma_i|, \quad i = \overline{1, s}, \quad |\gamma| < |\gamma'|.$$

Многогранниками (полиэдрами) Клейна решетки Γ называются множества вида $\mathcal{K}_\theta(\Gamma)$, где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$, $\theta_i = \pm 1$, которые определяются как выпуклая оболочка ненулевых узлов Γ , содержащихся в s -гранном угле

$$\{x \in \mathbb{R}^s : x_i \theta_i \geq 0, i = \overline{1, s}\}.$$

Будем придерживаться следующих обозначений:

$\mathcal{L}_s(X)$ – множество s -мерных решеток из X^s , где $X = \mathbb{R}$ или $X = \mathbb{Z}$;

$\mathcal{L}_s(X; N)$ – множество решеток из $\mathcal{L}_s(X)$ с определителем N ;

$\mathfrak{M}(\Gamma)$ – множество относительных минимумов решетки Γ ;

$\mathcal{V}(\Gamma)$ – множество вершин многогранников Клейна решетки Γ .

Понятие относительного минимума появилось в конце 19 в. в работах Г. Ф. Вороного [1] и Г. Минковского [2], а многогранники Клейна – в работе Ф. Клейна [3] в связи с обобщением алгоритма непрерывных дробей на многомерный случай. Обе конструкции мотивированы теоремой Лагранжа о наилучших приближениях. Так, например, если $\alpha \in (0, 1/2)$, решетка Γ_α порождена векторами $(1, \alpha)$, $(0, 1)$, то

$$\mathfrak{M}(\Gamma_\alpha) = \mathcal{V}(\Gamma_\alpha) = \{\pm(Q_i, \alpha Q_i - P_i) : i = -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

где $Q_{-1} = 0$, $P_{-1} = 1$ и P_i/Q_i – i -я подходящая дробь к α ($i \geq 0$).

Отметим, что начиная с размерности $s = 3$ множества $\mathfrak{M}(\Gamma)$ и $\mathcal{V}(\Gamma)$ существенно отличаются, хотя известно, что [4]

$$\mathcal{V}(\Gamma) \subset \mathfrak{M}(\Gamma). \quad (0.1)$$

Относительные минимумы и многогранники Клейна возникают в самых различных областях математики (см., например, [5]–[13] и цитированную там литературу). В. И. Арнольдом был сформулирован ряд задач о геометрических и статистических свойствах многомерных непрерывных дробей [5]–[7]. За последние 20 лет появилось большое число работ, посвященных исследованию многогранников Клейна и относительных минимумов. Однако несмотря на значительный интерес, довольно мало известно о статистических свойствах полиэдров Клейна решеток размерности три и выше (в двумерном случае соответствующие результаты вытекают из теории непрерывных дробей). В [8] приведены

некоторые результаты о существовании статистик многогранников Клейна, в диссертации [9] некоторые из этих статистик приближенно вычислены. В [10] сформулированы гипотезы о вычислении вероятности появления многоугольников заданного типа в качестве грани многогранника Клейна. В [14] получены двусторонние оценки

$$\frac{1}{\#\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N)} \#\mathcal{V}(\Gamma) \underset{s}{\asymp} \ln^{s-1} N + 1$$

для среднего количества вершин многогранников Клейна целочисленных s -мерных решеток с определителем N .

В работах [15]–[17] были получены асимптотические формулы для среднего количества относительных минимумов многомерных целочисленных решеток. В настоящей статье с помощью методов, развитых в [15]–[17], выводятся формулы для средних значений количества вершин и граней фиксированного типа полиэдров Клейна трехмерных решеток. Чтобы сформулировать результаты, введем некоторые определения и обозначения.

Пусть F_1 и F_2 – многоугольники из $\mathbb{R}^3$ с вершинами в $\mathbb{Z}^3$. Напомним, что F_1 и F_2 принадлежат одному целочисленно-линейному типу, если существует отображение $L \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ такое, что $LF_1 = F_2$.

Возьмем любую компактную грань F многогранника Клейна решетки $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$. Здесь и далее под гранями понимаем двумерные грани (т.е. гипер-грани). Пусть $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ такое линейное преобразование, что

$$L\Gamma = \mathbb{Z}^3. \quad (0.2)$$

Нетрудно заметить, что целочисленно-линейный тип многоугольника LF не зависит от выбора L . Это позволяет следующим образом классифицировать грани полиэдров Клейна.

Пусть $\mathcal{T}$ – целочисленно-линейный тип многоугольников из $\mathbb{R}^3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Будем говорить, что грань F принадлежит типу $\mathcal{T}$, если LF принадлежит целочисленно-линейному типу $\mathcal{T}$ для любого линейного преобразования $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, удовлетворяющего (0.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 0.1. Любую трехмерную решетку Γ можно записать в виде $\Gamma = M \cdot \mathbb{Z}^3$, где M – базисная матрица Γ . Поэтому линейное преобразование L удовлетворяет (0.2) тогда и только тогда, когда $Lx = M^{-1} \cdot x$, где M – некоторая базисная матрица решетки Γ .

Пусть $\mathcal{F}(\Gamma; \mathcal{T})$ – множество граней типа $\mathcal{T}$ многогранников Клейна решетки Γ . Определим TF_3 – множество типов компактных граней, которые реализуются на решетках из $\mathcal{L}_3(\mathbb{R})$, т.е.

$$\forall \mathcal{T} \in TF_3 \quad \exists \Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R}) : \quad \mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{T}) \neq \emptyset.$$

Пусть

$$E_{\mathcal{T}}(N) = \frac{1}{\#\mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)} \#\mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{T})$$

– среднее количество граней типа $\mathcal{T}$ и

$$E_{\mathcal{V}}(N) = \frac{1}{\#\mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)} \#\mathcal{V}(\Gamma)$$

– среднее количество вершин многогранников Клейна трехмерных целочисленных решеток с определителем N .

Основным результатом настоящей работы являются следующие асимптотические формулы:

$$E_{\mathcal{T}}(N) = \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \cdot \ln^2 N + O_{\mathcal{T}}(\ln N \cdot \ln \ln N), \quad (0.3)$$

$$E_{\mathcal{V}}(N) = \mathcal{C}_{\mathcal{V}} \cdot \ln^2 N + O(\ln N \cdot \ln \ln N), \quad (0.4)$$

которые справедливы для всех натуральных $N > 2$ и $\mathcal{T} \in TF_3$. Здесь $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$ – абсолютная положительная постоянная, константа $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} > 0$ зависит только от типа $\mathcal{T}$. Аналитические выражения для них довольно громоздкие и приводятся ниже.

Доказательство основано на параметризации соответствующих множеств семействами целочисленных матриц с определителем N и применении результата из [17] (см. также [16]) о количестве целочисленных матриц с фиксированным определителем, лежащих в заданном множестве. Для подсчета вершин также используются вложение (0.1), результаты О. Н. Германа [18] о характеристизации относительных минимумов, не являющихся вершинами многогранников Клейна, и О. Н. Карпенкова [11] о классификации граней.

Результаты работы были частично анонсированы в [19].

Автор благодарен В. А. Быковскому за внимание к работе и полезные советы, а также рецензенту за указанные ошибки в первоначальной версии статьи.

§ 1. О количестве целочисленных матриц в заданной области

Конусом в $\mathbb{R}^s$ будем называть множество $V \subset \mathbb{R}^s$, удовлетворяющее условию $\lambda x \in V$ при $\lambda \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $x \in V$.

Гиперповерхность $S \subset \mathbb{R}^s$ называем *кусочно дифференцируемой*, если она состоит из фиксированного числа гиперповерхностей класса C^1 .

Элемент матрицы X , лежащий в i -й строке и j -м столбце, обозначаем через x_{ij} .

Пусть множество $\Omega \subset GL_s(\mathbb{R})$ удовлетворяет следующим условиям:

- (А) $\Omega = \{X : (x_{i1}, \dots, x_{is}) \in V_i, i = \overline{1, s}\}$, где $V_1, \dots, V_s$ – конусы из $\mathbb{R}^s$ с кусочно дифференцируемыми границами;
 (Б) существует такая постоянная $C > 0$, что для любой $X \in \Omega$

$$\prod_{i=1}^s \max_{1 \leq j \leq s} |x_{ij}| \leq C \cdot \det X.$$

Из условия (А), в частности, следует, что множество Ω инвариантно относительно левого действия группы $\mathcal{D}_s(\mathbb{R}_+)$, состоящей из диагональных матриц $X \in GL_s(\mathbb{R})$ с положительными элементами на главной диагонали.

Рассмотрим $(s^2 - s)$ -мерное многообразие $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_s(\mathbb{R}_+) \setminus \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ – проективизация группы $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ относительно левого действия группы $\mathcal{D}_s(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $\mathcal{P}(\Omega)$ – образ множества $\Omega \subset \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ при проективизации $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PGL}_s(\mathbb{R})$. Для любой перестановки $k = (k_1, \dots, k_s)$ из $\{1, \dots, s\}$ и набора $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$, $\theta_i = \pm 1$, определим множества

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta) &= \{X \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}) : x_{ik_i} = \theta_i, i = \overline{1, s}\}, \\ \mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, k, \theta) &= \mathcal{P}(\mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)).\end{aligned}$$

Тогда $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R})$ содержится в объединении всех $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$, причем каждый элемент из $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$ имеет единственный прообраз при проектировании

$$\mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta) \rightarrow \mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, k, \theta). \quad (1.1)$$

Значит, множество всех $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$ образует атлас многообразия $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R})$, а матрицы из $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$ являются координатами соответствующих элементов $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$.

Определим меру $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_{k, \theta}$ на $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$ следующим образом:

$$\tilde{\mu}(W) = \int_W \frac{dX}{|\det X|^s} \quad \text{при } W \subset \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta),$$

где dX – дифференциал $(s^2 - s)$ -мерной меры Лебега поверхности $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$ в точке X . Она естественным образом порождает меру μ_P на карте $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$:

$$\mu_P(w) = \tilde{\mu}(W) \quad \text{при } w \subset \mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, k, \theta),$$

где W – прообраз w при проектировании (1.1).

Нетрудно проверить, что мера μ_P не зависит от выбора карты. Поэтому μ_P корректно определена на всем многообразии $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R})$.

Если Ω измеримо по Лебегу и удовлетворяет условию (Б), то множество $\mathcal{P}(\Omega)$ является μ_P -измеримым.

Определим также

$$\mu(\Omega) = \mu_P(\mathcal{P}(\Omega))$$

при $\Omega \subset \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ (если $\Omega \subset \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$, то $\mu(\Omega) = \tilde{\mu}_{k, \theta}(\Omega)$).

Отображение μ инвариантно относительно правого действия группы $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$, т.е.

$$\mu(\Omega \cdot Q) = \mu(\Omega) \quad \text{при } Q \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}), \quad \Omega \subset \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}).$$

Эта формула легко проверяется, если матрица Q удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) Q – диагональная матрица;
- 2) для любого $X \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ матрица $X \cdot Q$ получается из матрицы X изменением нумерации столбцов;
- 3) для любого $X \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ матрица $X \cdot Q$ получается из матрицы X заменой одного из столбцов матрицы X на его сумму с некоторым другим столбцом.

В общем случае достаточно заметить, что любую невырожденную матрицу можно представить в виде произведения матриц вида 1), 2), 3).

Для любого натурального N определим

$$\chi(N) = 1 + \sum_{p|N} \frac{\ln p}{p}, \quad \text{где суммирование ведется по простым делителям } N.$$

Стандартным образом доказывается, что для любого $N \geq 3$

$$\chi(N) \ll 1 + \ln \omega(N) \ll 1 + \ln \ln N,$$

где $\omega(N)$ – количество простых делителей N .

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть множество $\Omega \subset \text{GL}_s(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям (А), (Б). Тогда для любого целого $N > 1$ количество целочисленных матриц $M \in \Omega$ с $\det M = N$ равно

$$\frac{\#\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N)}{(s-1)!} \left(\frac{\mu(\Omega)}{\zeta(2) \cdots \zeta(s)} \cdot \ln^{s-1} N + O_\Omega(\chi(N) \cdot \ln^{s-2} N) \right). \quad (1.2)$$

Доказательство теоремы приведено в [17].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Пусть множество $\Omega \subset \text{GL}_s(\mathbb{R})$ удовлетворяет (А) и следующему условию:

$$(Б') \quad \exists C > 0 : \quad \forall X \in \Omega \quad \prod_{i=1}^s \max_{1 \leq j \leq s} |x_{ij}| \leq C \cdot |\det X|.$$

(В отличие от (Б) в правой части неравенства стоит $|\det X|$ вместо $\det X$). Тогда количество целочисленных матриц $M \in \Omega$ с $|\det M| = N$ также равно (1.2). Для доказательства достаточно заметить, что множества $\Omega^+ = \{X \in \Omega : \det X \geq 0\}$ и $\Omega^- = \{X \in \Omega : \det X \leq 0\}$ не пересекаются и применить теорему 1.1.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $s = 3$ и множество $\Omega \subset \text{GL}_3(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям (А), (Б'). Пусть $d \in \mathbb{N}$, $d_2, d_3 \in \mathbb{Z}$. Тогда для любого целого $N > 1$ количество целочисленных матриц $M = M(a, b, c) \in \Omega$ с $|\det M| = dN$, удовлетворяющих условиям

$$(a + d_2b + d_3c) \in d \cdot \mathbb{Z}^3,$$

равно

$$\frac{\#\mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)}{2} \left(\frac{\mu(\Omega)}{\zeta(2)\zeta(3)} \cdot \ln^2 N + O_{\Omega, d_2, d_3, d}(\chi(N) \cdot \ln N) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим

$$G = \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 & 0 \\ d_2 d^{-1} & 1 & 0 \\ d_3 d^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда количество искомых матриц равно количеству целочисленных матриц с определителем N , лежащих в $\Omega' = \Omega \cdot G$. Нетрудно увидеть, что множество Ω' удовлетворяет условиям (А), (Б'). Осталось применить теорему 1.1, замечание 1.1 и учесть, что $\mu(\Omega') = \mu(\Omega \cdot G) = \mu(\Omega)$.

§ 2. Количество граней фиксированного типа

Целью параграфа является доказательство асимптотической формулы (0.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Многоугольник (многогранник) с вершинами в узлах решетки Γ будем называть *пустым относительно Γ* , если он не содержит точек Γ , кроме своих вершин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пирамиду (с отмеченной вершиной) с вершинами в узлах решетки Γ будем называть *почти пустой относительно Γ* , если она не содержит точек Γ , отличных от вершины и точек основания.

Если $\Gamma = \mathbb{Z}^s$, то фразу “относительно Γ ” в определениях 2.1, 2.2 опускаем.

Введем еще одно важное обозначение. Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$, плоскость π содержит хотя бы три линейно независимых узла решетки Γ . Возьмем любые три линейно независимых узла $a, b, c \in \Gamma \cap \pi$ такие, что треугольник с вершинами в точках a, b, c является пустым относительно Γ . Обозначим через

$$d(\Gamma; \pi) = \frac{|\det M(a, b, c)|}{\det \Gamma}$$

индекс подрешетки, порожденной a, b, c . Если F – грань многогранника Клейна решетки Γ , содержащаяся в плоскости π_F , то полагаем

$$d(\Gamma; F) = d(\Gamma; \pi_F).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если M – базисная матрица Γ , то величина $d(\Gamma; \pi_F)$ совпадает с целочисленным расстоянием от начала координат до плоскости $M^{-1} \cdot \pi_F$. Значит, $d(\Gamma; F)$ однозначно определяется типом грани.

Минимальная окрестность грани. Пусть F – многоугольник из $[0, +\infty)^3$ с вершинами в узлах решетки $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$. Через π_F обозначим плоскость, проходящую через F . Она выделяет в $\mathbb{R}^3$ два открытых полупространства, которые мы обозначим S_F^+ и S_F^- так, что S_F^- содержит начало координат. Из определения вытекает, что F является гранью многогранника Клейна решетки Γ , если и только если любой ненулевой узел Γ из $S_F^- \cup \pi_F \setminus F$ имеет хотя бы одну отрицательную координату. Докажем, что достаточно рассматривать некоторое конечное множество узлов.

Определим множество $X = X(\Gamma; F)$ следующим образом. Пусть $d = d(\Gamma; \pi_F)$. Если $d = 1$, то полагаем $X = \pi_F \cap \Gamma$. Пусть $d > 1$. Все точки решетки Γ лежат на плоскостях, параллельных π_F , которые расположены на одинаковом расстоянии друг от друга. Занумеруем такие плоскости, лежащие в S_F^- , через $\pi_{d-1}, \pi_{d-2}, \dots$ по возрастанию расстояния до $\pi_d = \pi_F$. Тогда π_0 проходит через начало координат. Положим

$$X = \bigcup_{r=1}^d \frac{d}{r} \cdot (\Gamma \cap \pi_r),$$

т.е. X состоит из узлов $\gamma \in \Gamma \cap \pi_F$ и точек пересечения π_F с прямыми, проходящими через начало координат и узлы решетки Γ , лежащие между плоскостями π_0 и $\pi_F = \pi_d$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Если X – дискретное, а F – выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^s$, то множество

$$P(X, F) = \{u \in X \setminus F : (\text{Conv}(F \cup \{u\}) \setminus F) \cap X = \{u\}\},$$

будем называть *минимальной X -окрестностью F* .

ЛЕММА 2.1. Пусть F – многоугольник из $[0, +\infty)^3$ с вершинами в узлах решетки $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$, $X = X(\Gamma; F)$ и $P = P(X; F)$ – минимальная X -окрестность F .

Тогда F является гранью многогранника Клейна решетки Γ , если и только если выполняются следующие условия:

$$P \cap [0, +\infty)^3 = \emptyset, \quad (2.1)$$

$$\text{пирамида } \text{Conv}(F \cup \{0\}) \text{ с основанием } F \text{ почти пустая относительно } \Gamma. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F является гранью многогранника Клейна. Тогда любой ненулевой узел Γ из $(S_F^- \cup \pi_F) \setminus F$ имеет хотя бы одну отрицательную координату и, значит, выполняются (2.1), (2.2).

Пусть выполняются условия (2.1), (2.2), $d = d(\Gamma; F)$, $\pi_F = \pi_d$ – плоскость, проходящая через F . Докажем, что F является гранью полиэдра Клейна решетки Γ . Возьмем любой ненулевой узел $u \in \Gamma \cap (S_F^- \cup \pi_F) \setminus F$. Нужно показать, что $u \notin [0, +\infty)^3$. Имеем $u \in \pi_r$ с $r \leq d$. Отдельно рассмотрим два случая.

1. Пусть $1 \leq r \leq d$. Тогда $\tilde{u} = (d/r) \cdot u \in X$. Согласно (2.2) $\tilde{u} \notin F$. Значит, существует точка $v \in P$, принадлежащая множеству $\text{Conv}(F \cup \{\tilde{u}\})$. Если $u \in [0, +\infty)^3$, то $\tilde{u} \in [0, +\infty)^3$ и $v \in [0, +\infty)^3$. Получили противоречие с (2.1).

2. Пусть $r \leq 0$. Из выпешедоказанного вытекает, что

$$\Gamma \cap \pi_F \cap [0, +\infty)^3 = \Gamma \cap F.$$

Это возможно только в случае, когда плоскость π_F пересекает координатные оси в точках вида $(\theta_1, 0, 0)$, $(0, \theta_2, 0)$, $(0, 0, \theta_1)$, где $\theta_i > 0$. Тогда любая из плоскостей π_r с $r \leq 0$ не содержит точек из $[0, +\infty)^3 \setminus \{0\}$. Значит, $u \notin [0, +\infty)^3$.

Конечность минимальной окрестности.

ЛЕММА 2.2. Пусть $t \in (1, +\infty)$, $\Gamma' \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$. Возьмем любой треугольник $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ такой, что две вершины Δ принадлежат Γ' , а оставшаяся содержится в $t\Gamma'$ и Δ не содержит других точек множества $\Gamma' \cup (t\Gamma')$. Тогда

$$\text{mes } \Delta \leq \frac{[t] + 1}{2} \cdot \det \Gamma',$$

где $[t]$ – целая часть t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим вершины Δ через a, b, c так, что

$$a, b \in \Gamma', \quad c \in t\Gamma'.$$

Пусть W – полоса, ограниченная прямыми l_1, l_2 , где l_1 (l_2) проходит через точку a (точку b) параллельно отрезку $[c, b]$. При этом $l_1 \cap W = \emptyset$, $l_2 \subset W$.

Пусть W_+ – “половина” полосы W , состоящая из точек $x \in W$ таких, что x и b лежат по разные стороны от прямой, проходящей через a и c .

Так как $a, b \in \Gamma'$, то W_+ содержит бесконечно много точек решетки Γ' . Возьмем любой узел $d \in \Gamma' \cap W_+$ такой, что треугольник Δ_{abd} (с вершинами в точках a, b, d) пустой относительно Γ' . Рассмотрим точки $d_k = a + k(d - a)$, $k \in \mathbb{N}$. Они лежат на прямой, проходящей через d, a . Пусть n – наименьшее натуральное число такое, что отрезок $[a, d_n]$ пересекается с прямой, проходящей через точку c параллельно $[a, b]$. Рассмотрим треугольник Δ_n с вершинами в a, b, d_n . Имеем

$$\text{mes } \Delta \leq \text{mes } \Delta_n = n \cdot \text{mes } \Delta_{abd} = n \cdot \frac{\det \Gamma'}{2}.$$

Рис. 1

Осталось оценить n . Рассмотрим точку

$$c_t = c - t(d - a) \in t\Gamma'.$$

Если $t \leq n - 1$, то c_t принадлежит треугольнику Δ и не совпадает с его вершинами. Это противоречит условиям леммы. Значит, $n < t + 1$, и поэтому

$$\text{mes } \Delta \leq n \cdot \frac{\det \Gamma'}{2} \leq ([t] + 1) \cdot \frac{\det \Gamma'}{2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $t_1 = 1$ и $t_i \in (1, +\infty)$, $i = \overline{2, d}$. Определим

$$X = \bigcup_{i=1}^d (t_i \mathbb{Z}^2).$$

Пусть F – выпуклый многоугольник с вершинами из $\mathbb{Z}^2$, причем $F \cap X = F \cap \mathbb{Z}^2$. Тогда минимальная X -окрестность F является конечным множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P = P(X; F)$ – минимальная X -окрестность F . Достаточно доказать, что множество P ограничено.

Пусть B – произвольный круг, содержащийся в F с центром в точке x_0 радиуса $R > 0$. Возьмем любую точку $x \in P$ и положим

$$U_F = \text{Conv}(F \cup \{x\}), \quad U_B = \text{Conv}(B \cup \{u\}).$$

Тогда $U_B \subset U_F$. Кроме того, $x \in t_j \mathbb{Z}^2$ с некоторым $j \in \{1, \dots, d\}$. Пусть $r = \#(\mathbb{Z}^2 \cap \partial F)$. Рассмотрим многоугольник $U_F \setminus F$. Он состоит из не более чем r треугольников Δ , каждый из которых удовлетворяет следующим условиям: 1) x – вершина Δ ; 2) две остальные вершины Δ являются точками $F \cap X$ и поэтому принадлежат $\mathbb{Z}^2$; 3) треугольник Δ не содержит других точек множества $\mathbb{Z}^2 \cup (t_j \mathbb{Z}^2)$. Согласно лемме 2.2 площадь каждого такого треугольника не больше чем $[t_j + 1]/2$. Значит, $\text{mes}(U_F \setminus F) \leq r[t_j + 1]/2$, поэтому

$$R|x - x_0| + \frac{\pi R^2}{2} = \text{mes } U_B \leq \text{mes } U_F \leq \text{mes } F + \frac{r[t_j + 1]}{2}.$$

Множество P ограниченное. Лемма доказана.

Параметризация граней. Возьмем любой тип $\mathcal{T} \in TF_3$. Зафиксируем любой многоугольник $T \in \mathcal{T}$, который параллелен плоскости $x_3 = 0$, а также упорядоченную тройку целочисленных точек (α, β, γ) таких, что треугольник с вершинами в точках $\alpha, \beta + \alpha, \gamma + \alpha$ содержится в T и является пустым, т.е.

$$\mathbb{Z}^3 \cap \text{Conv}(\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \gamma) = \{\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \gamma\} \subset T.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $\det M(\alpha, \beta, \gamma) > 0$. Пусть d_1, d_2, d_3 – алгебраические дополнения к элементам последней строки матрицы $M(\alpha, \beta, \gamma)$,

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + d_2\beta + d_3\gamma}{d}. \quad (2.3)$$

Нетрудно заметить, что

$$M(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d_1 = 1,$$

где $d = d(\mathcal{T})$ – целочисленное расстояние от плоскости, содержащей многоугольник типа $\mathcal{T}$, до начала координат. Поэтому $\tilde{\alpha} = (0, 0, 1)$ и тройка $\{\tilde{\alpha}, \beta, \gamma\}$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^3$.

Так как T, α, β, γ фиксированы, то далее пишем

$$T = T(\mathcal{T}), \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta, \gamma)(\mathcal{T}), \quad d_2 = d_2(\mathcal{T}), \quad d_3 = d_3(\mathcal{T}),$$

имея в виду, что эти объекты однозначно определяются по типу $\mathcal{T}$.

Определим множество

$$X(\mathcal{T}) = \bigcup_{r=1}^d \frac{d}{r} \cdot \mathbb{Z}_r^3,$$

где $\mathbb{Z}_r^3$ – множество точек из $\mathbb{Z}^3$, у которых третья координата равна r .

Так как $\tilde{\alpha}, \beta, \gamma$ образуют базис $\mathbb{Z}^3$, причем $\tilde{\alpha}_3 = 1, \beta_3 = \gamma_3 = 0$, то $X(\mathcal{T})$ состоит из точек $x(r, n, k)$ следующего вида:

$$x(r, n, k) = d \cdot \left(\tilde{\alpha} + \frac{n}{r} \cdot \beta + \frac{k}{r} \cdot \gamma \right), \quad r \in \mathbb{Z} \cap [1, d], \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $P(\mathcal{T})$ – минимальная $X(\mathcal{T})$ -окрестность множества T . Так как $\mathcal{T} \in TF_3$, то пирамида с основанием T и вершиной в начале координат является почти пустой. Поэтому $X(\mathcal{T}) \cap T = \mathbb{Z}^3 \cap T$ и, используя лемму 2.2, получаем

$$\#P(\mathcal{T}) = O_{\mathcal{T}}(1). \quad (2.4)$$

Пусть множества $J(\mathcal{T}) \subset \mathbb{Z}^2, J_P(\mathcal{T}) \subset \mathbb{Z}^3$ такие, что

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^3 \cap T &= \{\alpha + n\beta + k\gamma : (n, k) \in J(\mathcal{T})\}, \\ P(\mathcal{T}) &= \{x(r, n, k) : (r, n, k) \in J_P(\mathcal{T})\}. \end{aligned}$$

Возьмем любую решетку $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$ и грань $F \in \mathcal{F}(\Gamma; \mathcal{T})$, лежащую в угле $[0, +\infty)^3$. Согласно определению типа грани существует базисная матрица M решетки Γ такая, что $M^{-1} \cdot F = T$. Обозначим через $\Lambda(\Gamma; F)$ множество упорядоченных троек $(a, b, c) \in \Gamma^3$, для каждой из которых существует базисная матрица M решетки Γ , удовлетворяющая условиям

$$M^{-1} \cdot F = T, \quad M^{-1} \cdot a = \alpha, \quad M^{-1} \cdot b = \beta, \quad M^{-1} \cdot c = \gamma. \quad (2.5)$$

Нетрудно заметить, что величина $\#\Lambda(\Gamma; F)$ зависит только от $\mathcal{T}$, а именно

$$\#\Lambda(\Gamma; F) = \nu(\mathcal{T}), \quad (2.6)$$

где $\nu(\mathcal{T})$ – количество матриц $S \in \text{GL}_3(\mathbb{Z})$ таких, что

$$S \cdot T = T, \quad S \cdot \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

Если базисная матрица M решетки Γ удовлетворяет (2.5), то

$$\begin{aligned} X(\Gamma; F) &= M \cdot X(\mathcal{T}), \\ P(X; F) &= M \cdot P(\mathcal{T}) = \left\{ d \left(\tilde{a} + \frac{n}{r} \cdot b + \frac{k}{r} \cdot c \right) : (r, n, k) \in J_P(\mathcal{T}) \right\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $P(X; F)$ – минимальная $X(\Gamma; F)$ -окрестность грани F .

ЛЕММА 2.3. Следующие утверждения эквивалентны.

- (а) $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R}), F \in \mathcal{F}(\Gamma; \mathcal{T}), F \subset [0, +\infty)^3, (a, b, c) \in \Lambda(\Gamma; F)$.
- (б) Векторы $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяют условиям

$$F = \text{Conv}\{a + nb + kc : (n, k) \in J(\mathcal{T})\} \subset [0, +\infty)^3, \quad (2.8)$$

$$\left(\tilde{a} + \frac{n}{r} \cdot b + \frac{k}{r} \cdot c \right) \notin [0, +\infty)^3 \quad \text{при } (r, n, k) \in J_P(\mathcal{T}), \quad (2.9)$$

Γ – решетка с базисом $\{\tilde{a}, b, c\}$, а $\tilde{a}$ определяется формулой

$$\tilde{a} = \frac{a + d_2b + d_3c}{d}. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется (а). Из (2.5), (2.3) вытекает, что $\{\tilde{a}, b, c\}$ – базис Γ . Соотношение (2.8) следует из определений множеств $J(\mathcal{T})$, $\Lambda(\Gamma; F)$ и условия $F \subset [0, +\infty)^3$, а (2.9) – из (2.7) и леммы 2.1.

Пусть выполняется (б). Нетрудно заметить, что тогда справедливы соотношения (2.7). Докажем, что F – грань многогранника Клейна решетки Γ . Для этого достаточно проверить выполнение условий (2.1), (2.2). Соотношение (2.1) вытекает из (2.7) и (2.9). Докажем (2.2). Пусть M – базисная матрица Γ . Из определений F и $J(\mathcal{T})$ вытекает, что $M^{-1} \cdot F$ принадлежит целочисленно-линейному типу $\mathcal{T}$. Так как $\mathcal{T} \in TF_3$, то пирамида с основанием $M^{-1} \cdot F$ и вершиной в начале координат почти пустая. Значит, выполняется (2.2). Применяя лемму 2.1, получаем $F \in \mathcal{F}(\Gamma; \mathcal{T})$. Условие $(a, b, c) \in \Lambda(\Gamma; F)$ следует из определений Γ , F и $J(\mathcal{T})$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если выполняется условие (а) леммы 2.3 и $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)$, то

$$a, b, c \in \mathbb{Z}^3, \quad |\det M(a, b, c)| = d \cdot N, \quad (a + d_2b + d_3c) \in d\mathbb{Z}^3. \quad (2.11)$$

Если выполняется условие (б) и (2.11), то $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)$.

Определим множество $\mathcal{U}_+(N; \mathcal{T})$, состоящее из пар (Γ, F) , где $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)$, а $F \in \mathcal{F}(\Gamma; \mathcal{T})$, причем $F \subset [0, +\infty)^3$. Тогда

$$E_{\mathcal{T}}(N) = 2^3 \cdot \frac{\#\mathcal{U}_+(N; \mathcal{T})}{\#\mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)}. \quad (2.12)$$

Будем использовать следующие матричные множества:

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathcal{T}} &= \{M(a, b, c) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \text{выполняются (2.8), (2.9)}\} \\ \omega_{\mathcal{T}}(N) &= \{M(a, b, c) \in \Omega_{\mathcal{T}} : \text{выполняются (2.11)}\}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Для любых $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T} \in TF_3$ справедлива формула

$$\#\mathcal{U}_+(N; \mathcal{T}) = \frac{1}{\nu(\mathcal{T})} \cdot \#\omega_{\mathcal{T}}(N). \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой пары $(\Gamma, F) \in \mathcal{U}_+(N; \mathcal{T})$ определим

$$\tilde{\Lambda}(\Gamma; F) = \{M(a, b, c) : (a, b, c) \in \Lambda(\Gamma; F)\}.$$

Согласно лемме 2.3 и замечанию 2.2

$$\bigcup_{(\Gamma, F) \in \mathcal{U}_+(N; \mathcal{T})} \tilde{\Lambda}(\Gamma; F) = \omega_{\mathcal{T}}(N).$$

Если $(\Gamma_1, F_1) \neq (\Gamma_2, F_2)$, $(\Gamma_i, F_i) \in \mathcal{U}_+(N; \mathcal{T})$, то $\Lambda(\Gamma_1; F_1) \cap \Lambda(\Gamma_2; F_2) = \emptyset$. Поэтому, учитывая (2.6), получаем

$$\#\omega_{\mathcal{T}}(N) = \sum_{(\Gamma, F) \in \mathcal{U}_+(N; \mathcal{T})} \#\tilde{\Lambda}(\Gamma; F) = \nu(\mathcal{T}) \cdot \#\mathcal{U}_+(N; \mathcal{T}).$$

Вычисление $\#\omega_{\mathcal{T}}(N)$ и окончательная формула. Покажем, что для вычисления $\#\omega_{\mathcal{T}}(N)$ можно применить следствие 1.1. Очевидно, что множество $\Omega = \Omega_{\mathcal{T}}$ удовлетворяет условию (А). Осталось проверить выполнение (Б').

ЛЕММА 2.4. Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R}; N)$, минимумы $a, b, c \in \mathfrak{M}(\Gamma) \cap [0, +\infty)^3$ являются базисом Γ , причем

$$a_1 \geq \max\{b_1, c_1\}, \quad b_2 \geq \max\{a_2, c_2\}, \quad c_3 \geq \max\{a_3, b_3\}.$$

Тогда $a_1 b_2 c_3 \ll N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если минимум $v \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ и ненулевой узел $u \in \Gamma$ имеют неотрицательные координаты, то существует номер k такой, что $u_k \geq 2v_k$, так как в противном случае узел $u - v$ нарушает минимальность v . Поэтому

$$(2a - b), (2a - c), (2b - a), (2b - c), (2c - a), (2c - b) \notin \mathbb{R}_+^3. \quad (2.14)$$

Возьмем любое $\varepsilon \in (0, 1/4)$ (независящее от N). Если $a_1 b_2 c_3 \leq \varepsilon^{-3} N$, то утверждение леммы выполнено. Пусть $a_1 b_2 c_3 > \varepsilon^{-3} N$. Тогда по теореме Минковского о линейных формах существует ненулевой узел $u \in \Gamma$ такой, что

$$|u_1| < \varepsilon \cdot a_1, \quad |u_2| < \varepsilon \cdot b_2, \quad |u_3| < \varepsilon \cdot c_3.$$

Так как a – минимум, то $a_2 < |u_2|$ либо $a_3 < |u_3|$. Поэтому

$$a_2 < \varepsilon \cdot b_2 \quad \text{либо} \quad a_3 < \varepsilon \cdot c_3.$$

Аналогично используя минимальность b, c , получаем

$$\begin{aligned} b_1 < \varepsilon \cdot a_1 \quad \text{либо} \quad b_3 < \varepsilon \cdot c_3, \\ c_1 < \varepsilon \cdot a_1 \quad \text{либо} \quad c_2 < \varepsilon \cdot b_2. \end{aligned}$$

Применяя эти неравенства и учитывая (2.14), нетрудно проверить, что

$$N = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right| \geq a_1 b_2 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 > \left(\frac{1}{2} - 2 \cdot \varepsilon \right) a_1 b_2 c_3.$$

Так как $(1/2 - 2 \cdot \varepsilon) > 0$, то лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть F – грань полиэдра Клейна решетки $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$, причем $d = d(\Gamma; F)$, $S = \#(F \cap \Gamma)$. Тогда

$$\prod_{i=1}^3 \max_{u \in F \cap \Gamma} |u_i| \ll d \cdot S \cdot \det \Gamma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, считаем, что $F \subset [0, +\infty)^3$. Пусть $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ – вершины F такие, что

$$|v_i^{(i)}| = \max_{u \in F \cap \Gamma} |u_i|, \quad i = 1, 2, 3.$$

Пусть Γ' – решетка, порожденная $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$. Очевидно, что $\det \Gamma' = O(S \cdot d \cdot \det \Gamma)$. Кроме того, $v^{(i)} \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ (в силу (0.1)), и поэтому $v^{(i)} \in \mathfrak{M}(\Gamma')$. Осталось воспользоваться леммой 2.4, в которой Γ заменяем на Γ' .

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, $\mathcal{T} \in TF_3$. Справедлива следующая асимптотическая формула для среднего числа граней типа $\mathcal{T}$:

$$E_{\mathcal{T}}(N) = \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \cdot \ln^2 N + O_{\mathcal{T}}(\chi(N) \cdot \ln N), \quad (2.15)$$

где

$$\mathcal{C}_{\mathcal{T}} = \frac{4}{\nu(\mathcal{T})} \cdot \frac{\mu(\Omega_{\mathcal{T}})}{\zeta(2)\zeta(3)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 2.3 множество $\Omega_{\mathcal{T}}$ удовлетворяет условию (Б') (если $M(a, b, c) \in \Omega_{\mathcal{T}}$, то существуют решетка Γ и грань $F \in \mathcal{F}(\Gamma; \mathcal{T})$ такие, что $a, (b + a), (c + a) \in \Gamma \cap F$). Все условия следствия 1.1 выполнены. Применяя его, получаем

$$\#\omega_{\mathcal{T}}(N) = \frac{\#\mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)}{2\zeta(2)\zeta(3)} (\mu(\Omega_{\mathcal{T}}) \ln^2 N + O_{\Omega_{\mathcal{T}}, d_2, d_3, d}(\chi(N) \cdot \ln N)).$$

Осталось воспользоваться (2.12), (2.13). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Нетрудно проверить, что множество $\Omega_{\mathcal{T}}$ имеет непустую внутренность, и поэтому $\mu(\Omega_{\mathcal{T}}) > 0$, $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} > 0$. Действительно, так как $\mathcal{T} \in TF_3$, то существует решетка $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$ и грань $F \in \mathcal{F}(\Gamma; \mathcal{T})$, $F \subset [0, +\infty)^3$. Легко заметить, что тогда найдутся решетка общего положения Γ^* (т.е. $\gamma_i \neq 0$ при $i = 1, 2, 3$ для всех $\gamma \in \Gamma^* \setminus \{0\}$) и грань $F^* \in \mathcal{F}(\Gamma^*; \mathcal{T})$, $F^* \subset [0, +\infty)^3$. Для матрицы $M = M(a, b, c) \in \Lambda(\Gamma^*; F^*)$ все неравенства, входящие в определение $\Omega_{\mathcal{T}}$ будут строгими, т.е. M принадлежит внутренности $\Omega_{\mathcal{T}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Утверждения леммы 2.4 и следствия 2.3 не обобщаются на случай размерности 4 и выше. Следующий пример построен О.Н. Германом. Рассмотрим решетку Γ с базисной матрицей

$$M(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \varepsilon \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \varepsilon \end{pmatrix},$$

где $0 < \varepsilon < 1/2$. Тогда множество $F = \text{Conv}\{a^{(i)}\}_{i=1}^4$ является пустой гранью многогранника Клейна решетки Γ . Поэтому $a^{(i)} \in \mathcal{V}(\Gamma) \subset \mathfrak{M}(\Gamma)$. Однако

$$\det \Gamma = \varepsilon, \quad \prod_{i=1}^4 \max_{1 \leq j \leq 4} |a_i^{(j)}| = \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

О множестве TF_3 реализуемых граней. Содержание этого пункта приводится для полноты изложения и нигде не используется.

О.Н. Карпенковым [11] получено полное описание целочисленно-линейных типов $\mathcal{T} \in TF_3$ многоугольников, принадлежащих плоскостям, лежащим на целочисленном расстоянии большем чем 1 от начала координат. Рассмотрим остальные типы.

Пусть $TF_3(1)$ состоит из $\mathcal{T} \in TF_3$ таких, что многоугольники целочисленно-линейного типа $\mathcal{T}$ принадлежат плоскостям, лежащим на единичном целочисленном расстоянии от начала координат.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\mathcal{T}$ – целочисленно-линейный тип выпуклых многоугольников из $\mathbb{R}^3$. Тогда $\mathcal{T} \in TF_3(1)$, если и только если для любого $T \in \mathcal{T}$

- а) целочисленное расстояние от плоскости, содержащей T , до начала координат равно 1;
- б) существует треугольник Δ такой, что $T \subset \Delta$, $\Delta \cap \mathbb{Z}^3 = T \cap \mathbb{Z}^3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Если условия а), б) выполняются для некоторого $T \in \mathcal{T}$, то они выполняются для всех $T \in \mathcal{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{T} \in TF_3(1)$. Тогда существуют решетка $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$ и грань $F \in \mathcal{F}(\Gamma; \mathcal{T})$. Причем их всегда можно выбрать так, что $F \subset [0, +\infty)^3$. Рассмотрим треугольник Δ_Γ равный пересечению плоскости, проходящей через F , и угла $[0, +\infty)^3$. Тогда $\Delta_\Gamma \cap \Gamma = F \cap \Gamma$. Возьмем любую базисную матрицу M решетки Γ . Тогда $M^{-1}\Gamma = \mathbb{Z}^3$ и условие б), в котором $T = M^{-1} \cdot F$, $\Delta = M^{-1} \cdot \Delta_\Gamma$ выполнено. Условие а) выполняется по определению.

Пусть выполнены условия а) и б). Докажем, что $\mathcal{T} \in TF_3(1)$. Возьмем любой многоугольник $T \in \mathcal{T}$. Пусть Δ – треугольник из б). Рассмотрим пирамиду P с основанием Δ и вершиной в начале координат. Согласно а), б) она является почти пустой. Возьмем любое линейное преобразование L , которое плоскости, проходящие через стороны треугольника Δ и начало координат, переводит в координатные плоскости. Тогда $\Gamma = L\mathbb{Z}^3 \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$, $F = LT \in \mathcal{F}(\Gamma; \mathcal{T})$.

§ 3. Количество вершин

Формулировка основного результата. Пусть

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix} : a_1 < b_1 + c_1 \right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} a_2 > c_2 \\ \text{либо} \\ c_1 > b_1 \end{array} \right\}, \quad \Omega_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right\}, \\ \Omega_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} b_2 < a_2 + c_2, \\ b_1 > c_1 \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_i, b_i, c_i &\in (0, +\infty), \quad i = 1, 2, 3; \\ a_1 &\geq \max\{b_1, c_1\}, \quad b_2 > \max\{a_2, c_2\}, \quad c_3 > a_3 \geq b_3. \end{aligned}$$

Кроме того, определим:

Ω_V – множество матриц из Ω_1 , у которых

$$b_2 \leq a_2 + c_2, \quad c_3 \leq a_3 + b_3, \quad a_2 \geq c_2;$$

Ω'_V – множество матриц из Ω_V , у которых

$$\begin{aligned} b_2 &> \frac{a_2}{2} + c_2 \quad \text{либо} \quad c_3 > \frac{a_3}{2} + b_3, \\ a_1 &< 2c_1 \quad \text{либо} \quad a_2 < 2c_2, \\ a_1 &< 2b_1 \quad \text{либо} \quad a_3 < 2b_3; \end{aligned}$$

Ω''_V – множество матриц из Ω_V , у которых

$$b_2 \leq \frac{a_2}{2} + c_2, \quad c_3 \leq \frac{a_3}{2} + b_3;$$

$\Omega_{V,3}$ – множество матриц из Ω_V , у которых

$$a_1 < \frac{b_1}{2} + c_1, \quad a_2 + \frac{c_2}{2} < b_2, \quad 2a_3 < b_3 + c_3.$$

Сразу отметим, что все эти множества удовлетворяют условиям (А), (Б) из § 1.

Пусть

$$E_{\mathfrak{M}}(N) = \frac{1}{\#\mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)} \#\mathfrak{M}(\Gamma)$$

– среднее количество относительных минимумов решеток из $\mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)$. Из [15], [17] (см. также [16]) вытекает следующая асимптотическая формула:

$$E_{\mathfrak{M}}(N) = \frac{4 \cdot C_{\mathfrak{M}}}{\zeta(2)\zeta(3)} \cdot \ln^2 N + O(\chi(N) \cdot \ln N + 1), \quad (3.1)$$

где

$$C_{\mathfrak{M}} = \mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2) + 2\mu(\Omega_3) + 2\mu(\Omega_4).$$

В этом параграфе мы докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для любого целого $N > 1$ справедлива следующая асимптотическая формула для среднего числа вершин многогранников Клейна:*

$$E_{\mathcal{V}}(N) = \frac{4 \cdot C_{\mathcal{V}}}{\zeta(2)\zeta(3)} \cdot \ln^2 N + O(\chi(N) \cdot \ln N),$$

где

$$C_{\mathcal{V}} = C_{\mathfrak{M}} - \mu(\Omega'_V) - 3 \cdot \mu(\Omega''_V) - 2 \cdot \mu(\Omega_{V,3}).$$

Теорема будет доказана в конце параграфа.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Множество Ω'_V можно представить в виде

$$\Omega'_V = \Omega_V \setminus (\Omega''_V \cup \Omega_V^I \cup \Omega_V^{\text{II}}),$$

где Ω_V^I (Ω_V^{II}) – множество матриц из Ω_V , у которых

$$a_1 \geq 2c_1, \quad a_2 \geq 2c_2 \quad (a_1 \geq 2b_1, \quad a_3 \geq 2b_3).$$

Множества $\mathcal{P}(\Omega_V'')$, $\mathcal{P}(\Omega_V^I)$, $\mathcal{P}(\Omega_V^{II})$ попарно не пересекаются. Преобразование, которое сначала меняет местами 2-ю и 3-ю строки матрицы, а потом 2-й и 3-й столбцы, осуществляет биекцию между Ω_V^I и Ω_V^{II} . Поэтому

$$\begin{aligned}\mu(\Omega_V') &= \mu(\Omega_V) - \mu(\Omega_V'') - 2 \cdot \mu(\Omega_V^I), \\ C_{\mathcal{V}} &= C_{\mathcal{M}} - \mu(\Omega_V) - 2\mu(\Omega_V'') - 2\mu(\Omega_{V,3}) + 2\mu(\Omega_V^I).\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. По-видимому, постоянные $C_{\mathcal{M}}$, $C_{\mathcal{V}}$ не выражаются через известные. Приближенные вычисления дали следующие результаты:

$$\begin{aligned}\mu(\Omega_1) &\approx 0.0443899, & \mu(\Omega_2) &\approx 0.09221, & \mu(\Omega_3) &\approx 0.11194, & \mu(\Omega_4) &\approx 0.02688, \\ \mu(\Omega_V) &\approx 0.00248, & \mu(\Omega_V'') &\approx 0.00049, & \mu(\Omega_{V,3}) &\approx 0.00017, & \mu(\Omega_V^I) &\approx 0.00022, \\ C_{\mathcal{M}} &\approx 0.41205, & C_{\mathcal{V}} &\approx 0.40867.\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Есть основания полагать, что для любой размерности s существует предел

$$\theta(s) = 1 - \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N)} \#\mathcal{V}(\Gamma)}{\sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N)} \#\mathcal{M}(\Gamma)}$$

– доля относительных минимумов, которые не являются вершинами многогранников Клейна s -мерных решеток. Известно, что $\theta(2) = 0$. Из приведенных результатов вытекает, что $\theta(3) \approx 0.0082$. Начиная с размерности $s = 4$ почти ничего неизвестно. Интересными представляются следующие вопросы.

- 1) Верно ли, что функция θ монотонно возрастает?
- 2) Верно ли, что $\theta(s) \rightarrow 1$ при $s \rightarrow +\infty$?

Положительные ответы на эти вопросы означают, что с ростом размерности конструкции “относительные минимумы” и “многогранники Клейна” начинают сколь угодно сильно отличаться.

Доказательство основного результата. Пусть

$$\mathcal{U}_+(N) = \{(\Gamma, a) : \Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N), a \in \mathcal{M}(\Gamma) \setminus \mathcal{V}(\Gamma), a \in (0, +\infty)^3\}.$$

Используя вложение (0.1) и учитывая, что у любой решетки из $\mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)$ количество относительных минимумов, имеющих хотя бы одну нулевую координату, оценивается величиной $O(\ln N + 1)$ (см., например, [12], [20]), получаем

$$E_{\mathcal{V}}(N) = E_{\mathcal{M}}(N) - 2^3 \cdot \frac{\#\mathcal{U}_+(N)}{\#\mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)} + O(\ln N). \quad (3.2)$$

Здесь и ниже считаем, что $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$. Осталось вычислить количество минимумов, которые не являются вершинами многогранников Клейна.

Пусть $U(N)$ – множество пар (Γ, a) , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)$, $a \in \Gamma \cap (0, +\infty)^3$;
- 2) существует такая треугольная грань $F = F(\Gamma, a)$ многогранника Клейна решетки Γ , что для некоторого $n \in \mathbb{N}$

$$u = (2n + 1)a - nb' - nc', \quad (3.3)$$

$$F \cap \Gamma = \{b', c', u\} \cup \left\{ \frac{ka + (n - k)u}{n} \right\}_{k=1}^n, \quad (3.4)$$

где b' , c' , u – вершины F .

Условие (3.3) означает, что узел a лежит на медиане, опущенной из вершины u треугольника F на сторону $b'c'$, условие (3.4) – узлы из $\Gamma \cap F$, не являющиеся вершинами F , содержатся в отрезке $[a, u]$.

Докажем, что множества $\mathcal{U}_+(N)$ и $U(N)$ “почти” совпадают.

ТЕОРЕМА 3.2. *Если $(\Gamma, a) \in U(N)$, то $(\Gamma, a) \in \mathcal{U}_+(N)$.*

Если $(\Gamma, a) \in \mathcal{U}_+(N)$, причем множество вершин параллелепипеда

$$[0, 2a_1] \times [0, 2a_2] \times [0, 2a_3] \quad (3.5)$$

не содержит точек решетки Γ , кроме 0 и $2a$, то $(\Gamma, a) \in U(N)$.

Доказательство теоремы вытекает из результатов [18].

ЛЕММА 3.1. *Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N)$, $P_i, p_i \in (0, +\infty)$, $p_i \leq P_i$, $i = \overline{1, s-1}$. Тогда количество минимумов $\gamma \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, удовлетворяющих условиям*

$$p_i \leq |\gamma_i| \leq P_i, \quad i = \overline{1, s-1},$$

не больше чем

$$O_s \left(\prod_{i=1}^{s-1} \ln \left(\frac{P_i}{p_i} + 1 \right) \right).$$

Лемма легко доказывается методами [12] (см., например, [20]).

Из леммы 3.1 и известной оценки

$$|\gamma_i| \leq N, \quad i = \overline{1, s} \quad \text{при } \gamma \in \mathfrak{M}(\Gamma), \quad \Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N)$$

вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Для любой решетки $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N)$ количество относительных минимумов, у которых хотя бы одна координата равна некоторому фиксированному числу, не больше чем $O_s(\ln^{s-2} N)$.*

ЛЕММА 3.2. *Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)$, $\mathfrak{M}'(\Gamma)$ – множество $a \in \mathfrak{M}(\Gamma) \cap [0, +\infty)^3$ таких, что хотя бы одна вершина параллелепипеда (3.5), отличная от 0 и $2a$, является узлом Γ . Тогда $\#\mathfrak{M}'(\Gamma) \ll \ln N$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in \mathfrak{M}'(\Gamma)$. Тогда одна из точек

$$(2a_1, 0, 0), \quad (0, 2a_2, 0), \quad (0, 0, 2a_3)$$

является узлом Γ . Пусть, например, $(2a_1, 0, 0) \in \Gamma$. Тогда $(2a_1, 0, 0) \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, так как в противном случае существует узел $\gamma = (\gamma_1, 0, 0) \in \Gamma$ такой, что $0 < \gamma_1 < 2a_1$ и точка $(a - \gamma)$ нарушает минимальность a . Минимум вида $(2a_1, 0, 0)$ единственен. Поэтому одна из координат a однозначно определяется решеткой Γ . Используя следствие 3.1, получаем утверждение леммы.

Из леммы 3.2 и теоремы 3.2 вытекает оценка

$$\#\mathcal{U}_+(N) = \#U(N) + O(\#\mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N) \cdot \ln N).$$

Подставляя ее в (3.2), заключаем

$$E_{\mathcal{V}}(N) = E_{\mathfrak{M}}(N) - 8 \cdot \frac{\#U(N)}{\#\mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)} + O(\ln N). \quad (3.6)$$

Осталось вычислить количество элементов множества $U(N)$.

ЛЕММА 3.3. Пусть $(\Gamma, a) \in U(N)$, (b', c', u) – вершины грани $F = F(\Gamma, a)$, удовлетворяющие (3.3), (3.4). Тогда

$$3a_i \geq b'_i + c'_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.7)$$

и существует перестановка (k, m, n) из $\{1, 2, 3\}$ такая, что

$$b'_k + c'_k < a_k, \quad c'_m < a_m < b'_m, \quad b'_n < a_n < c'_n, \quad (3.8)$$

$$2a_m < b'_m, \quad 2a_n < c'_n. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.3) вытекает, что $(3a - b' - c') \in [0, +\infty)^3$. Поэтому выполняется (3.7). Кроме того,

$$(b' + c' - a), (2a - b'), (2a - c') \notin [0, +\infty)^3. \quad (3.10)$$

Из первого условия следует, что найдется номер k такой, что выполняется первое из неравенств (3.8). Пусть $\{m, n\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{k\}$. Если $a_m \geq \max\{b'_m, c'_m\}$, то (в силу 2-го и 3-го соотношений из (3.10)) $2a_k < \min\{b'_k, c'_k\}$. Противоречие с (3.7). Поэтому

$$a_m < \max\{b'_m, c'_m\}, \quad a_n < \max\{b'_n, c'_n\}. \quad (3.11)$$

Если $a_m < b'_m$, $a_n < b'_n$ (либо $a_m < c'_m$, $c'_n < b'_n$), то из (3.7) вытекает, что $(2a - c') \in [0, +\infty)^3$ (либо $(2a - b') \in [0, +\infty)^3$). Противоречие. Значит, существуют номера k, m, n , удовлетворяющие (3.8). Неравенства (3.9) следуют из (3.8), (3.10). Лемма доказана.

Пусть $U_1(N)$ – множество пар $(\Gamma, a) \in U(N)$ таких, что грань $F = F(\Gamma, a)$ удовлетворяет условию $d(\Gamma; F) = 1$. Напомним, что $d(\Gamma; F)$ совпадает с индексом подрешетки, порожденной векторами a, b', c' (b', c' – вершины треугольника F , удовлетворяющие (3.3), (3.4)). Разобьем $U_1(N)$ на две непересекающиеся части $U'(N)$ и $U''(N)$, где $U'(N)$ состоит из таких пар, что в условиях (3.3), (3.4) $n = 1$ (т.е. грань F из узлов решетки содержит только свои вершины и a), а для $U''(N)$, соответственно, $n \geq 2$.

ЛЕММА 3.4. Справедлива формула

$$\#U'(N) = \#\Omega'_V(\mathbb{Z}; N),$$

где $\Omega'_V(\mathbb{Z}; N)$ – множество целочисленных матриц $M \in \Omega'_V$ с $\det M = N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любую пару $(\Gamma, a) \in U'(N)$. Пусть $F = F(\Gamma, a)$. Согласно лемме 3.3 мы всегда можем единственным образом занумеровать вершины F через b', c', u так, что будут выполнены неравенства

$$\begin{aligned} b'_1 + c'_1 < a_1, \quad c'_2 < a_2 < b'_2, \quad b'_3 < a_3 < c'_3, \\ 2a_2 < b'_2, \quad 2a_3 < c'_3. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Определим взаимно однозначное отображение Φ , которое каждой паре $(\Gamma, a) \in U'(N)$ ставит в соответствие матрицу $M = M(a, b' - a, c' - a)$, где b', c' определяются указанным выше способом. Осталось доказать, что

$$\Phi(U'(N)) = \Omega'_V(\mathbb{Z}; N). \quad (3.13)$$

1. Докажем, что $\Phi(U'(N)) \subset \Omega'_V(\mathbb{Z}; N)$. Пусть $(\Gamma, a) \in U'(N)$, $M = M(a, b' - a, c' - a) = \Phi(\Gamma, a)$. Тогда выполняются неравенства (3.7), (3.12). Кроме того, так как узлы $(5a - 2b' - 2c')$, $(2b' - a)$, $(2c' - a)$ не принадлежат $[0, +\infty)^3$, то

$$\begin{aligned} 5a_2 &< 2(b'_2 + c'_2) \quad \text{либо} \quad 5a_3 < 2(b'_3 + c'_3), \\ a_1 &> 2b'_1 \quad \text{либо} \quad a_3 > 2b'_3, \\ a_1 &> 2c'_1 \quad \text{либо} \quad a_2 > 2c'_2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из (3.7), (3.12), (3.14) (и условий $a \in (0, +\infty)^3$, $b', c' \in [0, +\infty)^3$) следует, что $M \in \Omega'_V$. Так как $d(\Gamma; F) = 1$, то a, b', c' – базис Γ . Поэтому $\det M = N$. Значит, $M \in \Omega'_V(\mathbb{Z}; N)$ и $\Phi(U'(N)) \subset \Omega'_V(\mathbb{Z}; N)$.

2. Осталось доказать, что $\Omega'_V(\mathbb{Z}; N) \subset \Phi(U'(N))$. Пусть $M = M(a, b, c) \in \Omega'_V(\mathbb{Z}; N)$. Положим $b' = b + a$, $c' = c + a$ и определим решетку $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)$ с базисом a, b, c , а также узел $u = 3a - b' - c'$ и треугольник F с вершинами в точках b', c', u . Тогда

$$\Gamma \cap F = \{a, b', c', u\}.$$

Кроме того, $a \in (0, +\infty)^3$, $b', c' \in [0, +\infty)^3$ и выполняются неравенства (3.7), (3.12), (3.14). Применим лемму 2.1. Учитывая, что минимальная $X(\Gamma; F)$ -окрестность F состоит из точек

$$(2c' - a), \quad (2b' - a), \quad (2a - b'), \quad (2a - c'), \quad (5a - 2b' - 2c'), \quad (b' + c' - a),$$

получаем, что F – грань многогранника Клейна решетки Γ . Поэтому $(\Gamma, a) \in U'(N)$ и, значит, $\Omega'_V(\mathbb{Z}; N) \subset \Phi(U'(N))$. Равенство (3.13) доказано. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. *Справедлива формула*

$$\#U''(N) = 3 \cdot \#\Omega''_V(\mathbb{Z}; N),$$

где $\Omega''_V(\mathbb{Z}; N)$ – множество целочисленных матриц $M \in \Omega''_V$ с $\det M = N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.3 множество $U''(N)$ можно разбить на три непересекающиеся части $U''_k(N)$, $k = 1, 2, 3$, так, что

$$\forall (\Gamma, a) \in U''_k(N) \quad a_k > b'_k + c'_k,$$

где b', c' – вершины $F = F(\Gamma, a)$, удовлетворяющие (3.3), (3.4). Очевидно, что

$$\#U''_1(N) = \#U''_2(N) = \#U''_3(N), \quad \#U''(N) = 3 \cdot \#U''_1(N). \quad (3.15)$$

Вычислим $\#U''_1(N)$. Согласно лемме 3.3 для любой пары $(\Gamma, a) \in U''_1(N)$ существует единственная нумерация вершин грани $F = F(\Gamma, a)$ через b', c', u так,

что выполняются (3.3), (3.4), (3.12). Определим взаимно однозначное отображение Φ , которое каждой паре $(\Gamma, a) \in U_1''(N)$ ставит в соответствие матрицу $M = M(a, b' - a, c' - a)$, где b', c' определяются указанным выше способом. Осталось показать, что Φ отображает $U_1''(N)$ на $\Omega_V''(\mathbb{Z}; N)$.

1. Пусть $(\Gamma, a) \in U''(N)$, $M = M(a, b' - a, c' - a) = \Phi(\Gamma, a)$. Так как $(5a - 2b' - 2c') \in [0, +\infty)^3$, то помимо (3.7), (3.12) выполняются оценки

$$5a_2 \geq 2(b'_2 + c'_2), \quad 5a_3 \geq 2(b'_3 + c'_3). \quad (3.16)$$

Используя (3.7), (3.12), (3.16), получаем $M \in \Omega_V''$. Так как $d(\Gamma; F) = 1$, то a, b', c' – базис Γ . Кроме того, $\det M > 0$, и поэтому $\det M = N$. Значит, $M \in \Omega_V''(\mathbb{Z}; N)$ и $\Phi(U''(N)) \subset \Omega_V''(\mathbb{Z}; N)$.

2. Пусть $M(a, b, c) \in \Omega_V''(\mathbb{Z}; N)$. Положим $b' = b + a$, $c' = c + a$ и определим решетку $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)$ с базисом a, b, c и треугольник F с вершинами в точках b', c', u , где $u = (2n + 1)a - n(b' + c')$, n – наибольшее натуральное число, для которого соответствующий u имеет неотрицательные координаты. Тогда выполняются (3.4), (3.7), (3.12), (3.16). Минимальная $X(\Gamma; F)$ -окрестность F состоит из четырех точек

$$(2a - b'), \quad (2a - c'), \quad ((2n + 3)a - (n + 1)(b' + c')), \quad (b' + c' - a).$$

Используя лемму 2.1, получаем, что F – грань многогранника Клейна решетки Γ . Значит, $(\Gamma, a) \in U_1''(N)$, причем $M = \Phi(\Gamma, a)$. Следовательно, $\Omega_V''(\mathbb{Z}; N) \subset \Phi(U_1''(N))$. Поэтому $\Phi(U_1''(N)) = \Omega_1''(\mathbb{Z}; N)$, $\#U_1''(N) = \#\Omega_V''(\mathbb{Z}; N)$. Применяя (3.15), приходим к требуемой формуле. Лемма доказана.

Осталось рассмотреть множество $U(N) \setminus U_1(N)$. В [11] получено полное описание типов граней трехмерных полиэдров Клейна с $d(\Gamma; F) > 1$. Согласно результатам [11], если $(\Gamma, a) \in U(N)$, $F = F(\Gamma, a)$, причем $d(\Gamma; F) > 1$, то $d(\Gamma; F) = 3$ и грань F принадлежит типу $\mathcal{T}_3$, где $\mathcal{T}_3$ – множество многоугольников целочисленно-линейно эквивалентных треугольнику с вершинами в точках

$$(1, 1, 3), \quad (0, 2, 3), \quad (2, 3, 3).$$

Отметим, что тогда a – единственная точка Γ , лежащая на $F(\Gamma, a)$ и не совпадающая с вершиной (т.е. $n = 1$).

ЛЕММА 3.6. Пусть $U_3(N) = U(N) \setminus U_1(N)$, а $\omega_{V,3}(N)$ – множество целочисленных матриц $M = M(a, b, c) \in \Omega_{V,3}$, удовлетворяющих условиям

$$\det M = 3N, \quad (a - b + c) \in 3\mathbb{Z}^3. \quad (3.17)$$

Тогда $\#U_3(N) = 2 \cdot \#\omega_{V,3}(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.3 для любой пары $(\Gamma; a) \in U_3(N)$ существует единственная нумерация вершин треугольника $F = F(\Gamma; a)$ через b', c', u так, что выполняются (3.12). Так как F имеет тип $\mathcal{T}_3$, то

$$\frac{a - b' + c'}{3} \in \Gamma \quad \text{либо} \quad \frac{a + b' - c'}{3} \in \Gamma. \quad (3.18)$$

Одновременно эти включения выполняться не могут (иначе $2a/3 \in \Gamma$ – противоречие с $a \in \mathfrak{M}(\Gamma)$). Поэтому $U_3(N)$ можно разбить на две непересекающиеся части $U_{3,1}(N)$ и $U_{3,2}(N)$ так, что для первого множества выполняется первое из включений (3.18), а для второго – второе. Очевидно, что

$$\#U_{3,1}(N) = \#U_{3,2}(N), \quad \#U_3(N) = 2 \cdot \#U_{3,1}(N). \quad (3.19)$$

Определим взаимно однозначное отображение Φ , которое паре $(\Gamma, F) \in U_{3,1}(N)$ ставит в соответствие матрицу $M(a, b' - a, c' - a)$, где b', c' определяются указанным выше образом. Осталось доказать, что $\Phi(U_{3,1}(N)) = \omega_{V,3}(N)$.

1. Пусть $(\Gamma, a) \in U_{3,1}(N)$. Тогда выполняются (3.7), (3.12), (3.17). Узлы $\tilde{a}$, b , c образуют базис Γ , где

$$\tilde{a} = \frac{a - b + c}{3}, \quad b = b' - a, \quad c = c' - a. \quad (3.20)$$

Кроме того,

$$b'_1 + 2c'_1 < a_1, \quad 5a_2 < c'_2 + 2b'_2, \quad 2a_3 + b'_3 < c'_3. \quad (3.21)$$

Для доказательства (3.21) достаточно рассмотреть узлы

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= 2\tilde{a} + b = \frac{2}{3} \left(a + \frac{b}{2} + c \right) = \frac{-a + b' + 2c'}{3}, \\ u^{(2)} &= 2\tilde{a} - c = \frac{2}{3} \left(a - b - \frac{c}{2} \right) = \frac{5a - 2b' - c'}{3}, \\ u^{(3)} &= 2\tilde{a} + b - c = \frac{2}{3} \left(a + \frac{b}{2} - \frac{c}{2} \right) = \frac{2a + b' - c'}{3}, \end{aligned}$$

которые не должны принадлежать $[0, +\infty)^3$. Используя указанные соотношения, получаем $M = M(a, b' - a, c' - a) \in \omega_{V,3}(N)$. Значит, $\Phi(U_{3,1}(N)) \subset \omega_{V,3}(N)$.

2. Пусть $M(a, b, c) \in \omega_{V,3}(N)$. Определим $b' = b + a$, $c' = c + a$ и решетку $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)$ с базисом $\tilde{a}$, b , c , где $\tilde{a}$ удовлетворяет (3.20). Тогда выполняются соотношения (3.7), (3.12), (3.17), (3.21). Пусть F – треугольник с вершинами в точках b' , c' , u , где $u = 3a - (b' + c')$. Тогда $F \subset [0, +\infty)^3$. Докажем, что F – грань многогранника Клейна решетки Γ . Будем использовать лемму 2.1. Множество $X(\Gamma; F)$ состоит из точек вида

$$3\tilde{a} + \frac{3n}{2}b + \frac{3m}{2}c = a + (b - a) \left(\frac{3n}{2} - 1 \right) + (c - a) \left(\frac{3m}{2} + 1 \right), \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

а также узлов Γ , лежащих на плоскости, проходящей через F . Поэтому минимальная $X(\Gamma; F)$ -окрестность F состоит из точек $3/2u^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$. Согласно (3.21) эти точки не лежат в $[0, +\infty)^3$. Используя лемму 2.1, получаем, что F – грань многогранника Клейна решетки Γ . Значит, $(\Gamma, a) \in U_{3,1}(N)$, причем $\Phi(\Gamma; a) = M(a, b, c)$. Поэтому $\omega_{V,3}(N) \subset \Phi(U_{3,1}(N))$ и, следовательно, $\Phi(U_{3,1}(N)) = \omega_{V,3}(N)$. Используя (3.19), получаем утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Согласно леммам 3.4–3.6

$$\#U(N) = \#\Omega'_V(\mathbb{Z}; N) + 3 \cdot \#\Omega''_V(\mathbb{Z}; N) + 2 \cdot \#\omega_{V,3}(N).$$

Применяя теорему 1.1 и следствие 1.1, получаем

$$\#U(N) = \frac{\#\mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N)}{2\zeta(2)\zeta(3)} ((\mu(\Omega'_V) + 3 \cdot \mu(\Omega''_V) + 2 \cdot \mu(\Omega_{V,3})) \ln^2 N + O(\chi(N) \ln N)).$$

Из последнего равенства и (3.6), (3.1) вытекает утверждение теоремы.

Список литературы

- [1] Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений в 3-х томах. Т. 1*, Изд-во АН УССР, Киев, 1952.
- [2] H. Minkowski, “Généralisation de la théorie des fractions continues”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **13**:2 (1896), 41–60.
- [3] F. Klein, “Ueber eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung”, *Gött. Nachr.*, **3** (1895), 357–359.
- [4] В. А. Быковский, “Относительные минимумы решеток и вершины многогранников Клейна”, *Функц. анализ и его прил.*, **40**:1 (2006), 69–71; англ. пер.: V. A. Bykovskii, “Local minima of lattices and vertices of Klein polyhedra”, *Funct. Anal. Appl.*, **40**:1 (2006), 56–57.
- [5] V. I. Arnold, “Higher dimensional continued fractions”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **3**:3 (1998), 10–17.
- [6] В. И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, Фазис, М., 2000; англ. пер.: V. Arnold, *Arnold’s problems*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [7] В. И. Арнольд, *Цепные дроби*, МЦНМО, М., 2001.
- [8] M. L. Kontsevich, Yu. M. Suhov, “Statistics of Klein polyhedra and multidimensional continued fractions”, *Pseudoperiodic topology*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **197**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 9–27.
- [9] J.-O. Moussaïf, *Voiles et polyèdres de Klein: Géométrie, algorithmes et statistiques*, Doc. Sci. Thèse, Univ. Paris IX–Dauphine, Paris, 2000.
- [10] О. Н. Карпенков, “Об инвариантной мере Мёбиуса и распределении граней Гаусса–Кузьмина”, *Анализ и особенности. Часть 1*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда, Тр. МИАН, **258**, Наука, М., 2007, 79–92; англ. пер.: O. N. Karpenkov, “On an invariant Mobius measure and the Gauss–Kuzmin face distribution”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **258** (2007), 74–86.
- [11] O. N. Karpenkov, “Completely empty pyramids on integer lattices and two-dimensional faces of multidimensional continued fractions”, *Monatsh. Math.*, **152**:3 (2007), 217–249.
- [12] В. А. Быковский, “О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул”, *Докл. РАН*, **389**:2 (2003), 154–155; англ. пер.: V. A. Bykovskii, “On the error of number-theoretic quadrature formulas”, *Dokl. Math.*, **67**:2 (2003), 175–176.
- [13] В. А. Быковский, “Отклонение сеток Коробова”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:3 (2012), 19–38; англ. пер.: V. A. Bykovskii, “The discrepancy of the Korobov lattice points”, *Izv. Math.*, **76**:3 (2012), 446–465.
- [14] А. А. Илларионов, Д. А. Слинкин, “О количестве вершин многогранников Клейна в среднем”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:1 (2011), 48–55.

- [15] А. А. Илларионов, “Среднее количество относительных минимумов трехмерных целочисленных решеток”, *Алгебра и анализ*, **23**:3 (2011), 189–215; англ. пер.: А. А. Illarionov, “Average number of local minima for three-dimensional integral lattices”, *St. Petersburg Math. J.*, **23**:3 (2012), 551–570.
- [16] А. А. Илларионов, “Среднее количество относительных минимумов трехмерных целочисленных решеток фиксированного определителя”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:3 (2012), 111–138; англ. пер.: А. А. Illarionov, “The average number of relative minima of three-dimensional integer lattices of a given determinant”, *Izv. Math.*, **76**:3 (2012), 535–562.
- [17] А. А. Illarionov, “On the asymptotic distribution of integer matrices”, *Mosc. J. Comb. Number Theory*, **1**:4 (2011), 13–57.
- [18] О. Н. Герман, “Полиэдры Клейна и относительные минимумы решеток”, *Матем. заметки*, **79**:4 (2006), 546–552; англ. пер.: О. N. German, “Klein polyhedra and relative minima of lattices”, *Math. Notes*, **79**:4 (2006), 505–510.
- [19] А. А. Илларионов, “Статистические свойства многомерных аналогов непрерывных дробей”, *Наука – Хабаровскому краю: материалы XII краевого конкурса молодых ученых*, Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, Хабаровск, 2010, 5–15.
- [20] А. А. Илларионов, “Оценки количества относительных минимумов решеток”, *Матем. заметки.*, **89**:2 (2011), 249–259; англ. пер.: А. А. Illarionov, “Estimates of the number of relative minima of lattices”, *Math. Notes*, **89**:2 (2011), 245–254.

А. А. Илларионов (А. А. Illarionov)
Хабаровское отделение
Института прикладной математики ДВО РАН
E-mail: illar_a@list.ru

Поступила в редакцию
01.12.2010 и 18.03.2013