Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кротов, Критерии компактности в пространствах L^p , $p \geq 0$, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 7, 129–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7828>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:27:54

УДК 517.518.22

В. Г. Кротов

Критерии компактности в пространствах L^p , $p \geq 0$

В работе доказываются новые критерии компактности в пространствах суммируемых и измеримых функций на метрическом пространстве с мерой, удовлетворяющей условию удвоения. Эти критерии формулируются в терминах неравенств локальной гладкости или в терминах максимальных операторов, измеряющих локальную гладкость.

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: компактность, полная ограниченность, пространства суммируемых функций, пространство измеримых функций, максимальные операторы, локальная гладкость.

§ 1. Введение

Множество в метрическом пространстве называется:

- *компактным*, если любое открытое покрытие этого множества содержит конечное подпокрытие;
- *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ оно имеет конечную ε -сеть.

Для компактности множества в полном метрическом пространстве необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и вполне ограниченным (критерий Хаусдорфа).

Исторически первым критерием компактности в пространстве функций была теорема Арцела–Асколи, дающая условия полной ограниченности в пространстве непрерывных функций $C(X)$ на компактном метрическом пространстве X (см. подробнее [1; §IV.16]).

Множество $S \subset C(X)$ вполне ограничено в том и только том случае, когда оно равномерно ограничено и равномерно непрерывно:

- a) $\sup_{f \in S} \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty$;
- b) $\lim_{\delta \rightarrow +0} \sup_{f \in S} \sup_{x, y: |x-y| < \delta} |f(x) - f(y)| = 0$.

Во многих ситуациях критерии компактности в функциональных пространствах имеют подобную форму: полная ограниченность множества равносильна его ограниченности плюс некоторое свойство равномерной непрерывности относительно метрики рассматриваемого пространства. Примером может служить следующий критерий М. Рисса для $L^p([0, 1]^n)$ (см. [2] при $p \geq 1$ и [3] при $0 < p < 1$).

Множество $S \subset L^p([0, 1]^n)$, $p > 0$, вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено и

$$\lim_{h \rightarrow +0} \sup_{f \in S} \int_{\prod_{k=1}^n [0, 1-h_k]} |f(x+h) - f(x)|^p d\mu(x) = 0. \quad (1.1)$$

Мы будем рассматривать вопрос о условиях полной ограниченности для пространств $L^p(X)$, где (X, d, μ) – метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ .

На протяжении всей работы систематически используются следующие обозначения:

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

для шара с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$ и

$$f_B = \int_B f d\mu = \frac{1}{\mu B} \int_B f d\mu$$

для среднего значения функции $f \in L^1(B)$ по шару $B \subset X$. Для любого шара $B \subset X$ радиус B будем обозначать r_B .

Следующий критерий компактности в пространствах $L^p(X)$, $p > 1$, доказал А. Н. Колмогоров (см. [4]).

Множество $S \subset L^p(X)$, $p > 1$, вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено и

$$\lim_{r \rightarrow +0} \sup_{f \in S} \int_X \left| f(x) - \int_{B(x, r)} f d\mu \right|^p d\mu(x) = 0. \quad (1.2)$$

Здесь X – ограниченное измеримое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и все функции считаются продолженными нулем вне X . Отметим недавнюю работу [5], в которой обсуждаются критерии компактности М. Рисса и А. Н. Колмогорова.

Опираясь на свойства максимальной функции Харди–Литтлвуда, критерий А. Н. Колмогорова нетрудно доказать для общих ограниченных метрических пространств X , если выполнено условие удвоения: существует постоянная $c_\mu > 0$ такая, что

$$\mu B(x, 2r) \leq c_\mu \mu B(x, r), \quad x \in X, \quad r > 0. \quad (1.3)$$

В работе [6] доказана достаточность критерия А. Н. Колмогорова для ограниченного X при более слабом предположении – из (1.2) следует полная ограниченность S при условии

$$h(r) = \inf_{x \in X} \mu B(x, r) > 0, \quad r > 0.$$

Несколько иной характер имеет следующий критерий компактности в $L^p(X)$. В его формулировке участвует пространство измеримых функций $L^0(X)$ – множество всех (классов эквивалентности) измеримых функций на X . Оно является полным метрическим пространством относительно метрики

$$d_{L^0}(f, g) = \int_X \varphi_0(f - g) d\mu, \quad \text{где} \quad \varphi_0(t) = \frac{|t|}{1 + |t|},$$

причем сходимость по этому расстоянию совпадает со сходимостью по мере (см., например, [7; п. 4.7.46]).

ТЕОРЕМА 1 (А. Лебег, Дж. Витали). *Пусть X – множество, снабженное конечной мерой, $0 < p < \infty$. Множество $S \subset L^p(X)$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда:*

- а) S вполне ограничено в $L^0(X)$;
 б) интегралы семейства функций $\{|f|^p : f \in S\}$ равностепенно абсолютно непрерывны.

Обычно это утверждение формулируется в виде критерия сходимости последовательности функций в $L^p(X)$ (см., например, [7; теорема 4.5.4]). В явном виде формулировка достаточности теоремы 1 для случая $X = [0, 1]$, $p \geq 1$ имеется в [8; гл. V, § 2]. Нам не удалось обнаружить в литературе доказательство этой теоремы. Поскольку мы используем ее ниже, в § 2 для полноты будет приведено ее доказательство.

Условие а) в теореме Лебега–Витали можно проверять с помощью следующего критерия М. Фреше (см. [9]), в котором X – любое множество с конечной мерой (см. также [7; п. 4.7.126]).

Полная ограниченность множества $S \subset L^0(X)$ равносильна условию: для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\lambda > 0$ и конечное разбиение X на непересекающиеся измеримые части $X_1, \dots, X_n$, что для любой функции $f \in S$ найдется измеримое подмножество $E(f) \subset X$, $\mu E(f) < \varepsilon$, для которого

$$\sup_{x \in X \setminus E(f)} |f(x)| \leq \lambda, \quad \sup_{x, y \in X_i \setminus E(f)} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

при всех $f \in S$ и $i = 1, \dots, n$.

В [10] этому критерию была придана следующая форма, которая будет использована нами ниже.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (X, d, μ) – ограниченное метрическое пространство с мерой, удовлетворяющей условию удвоения (1.3). Множество $S \subset L^0(X)$ является вполне ограниченным тогда и только тогда, когда оно почти равномерно ограничено и почти равностепенно непрерывно, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $\delta > 0$ и $\lambda > 0$, что для любой функции $f \in S$ найдется измеримое подмножество $E(f) \subset X$ со свойствами:

- а) $\mu E(f) < \varepsilon$;
 б) $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $x, y \in X \setminus E(f)$, $d(x, y) < \delta$;
 в) $|f(x)| \leq \lambda$ при $x \in X \setminus E(f)$.

Хотя в [10] это утверждение доказано лишь для случая, когда $X \subset \mathbb{R}$ – ограниченное измеримое по Лебегу множество (и доказательство достаточно существенно одномерное), оно сохраняет силу в приведенной более общей ситуации. Мы покажем это в § 2.

В настоящей работе мы предлагаем новый подход к доказательству критериев компактности множеств в пространствах $L^p(X)$, где $p \geq 0$ и (X, d, μ) – метрическое пространство со свойством удвоения (1.3), которое предполагается выполненным до конца работы.

Наш подход идейно основан на следующей форме теоремы Н.Н. Лузина о C -свойстве (см. [11]).

Для любой функции $f \in L^0(X)$ на ограниченном метрическом пространстве X существуют функция $\eta \in \Omega$, функция $g \in L^0(X)$ и множество E , $\mu E = 0$, для которых

$$|f(x) - f(y)| \leq [g(x) + g(y)]\eta(d(x, y)), \quad x, y \in X \setminus E. \quad (1.4)$$

Здесь и ниже в работе Ω – класс возрастающих функций $\eta: (0, 2] \rightarrow (0, +\infty)$, для которых $\eta(+0) = 0$.

Это количественная форма теоремы Н. Н. Лузина в том смысле, что свойства функций g и η контролируют C -свойство Лузина. В самом деле, пусть $\lambda > 0$ и

$$E_\lambda = \{x \in X \setminus E : g(x) \leq \lambda\}.$$

Тогда из (1.4) вытекает неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\lambda\eta(d(x, y)), \quad x, y \in E_\lambda,$$

которое означает равномерную непрерывность функции f на множестве E_λ , и $2\lambda\eta(\delta)$ является оценкой модуля непрерывности f на этом множестве. При этом мера E_λ может быть сделана сколь угодно близкой к мере X за счет выбора λ . Последнее следует из того, что для любой измеримой на X функции g выполнено соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mu\{|g| > \lambda\} = 0. \quad (1.5)$$

Для $\eta \in \Omega$ и функции $f \in L^0(X)$ обозначим $D_\eta(f)$ класс функций $g \in L^0(X)$, для каждой из которых существует такое множество $E \subset X$, $\mu E = 0$, что выполнено неравенство (1.4). Приведенное только что утверждение говорит о том, что для любой функции $f \in L^0(X)$ множество $D_\eta(f)$ непусто для некоторой функции $\eta \in \Omega$.

В следующих двух теоремах, которые являются основными в нашей работе, метрическое пространство X предполагается ограниченным.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p > 0$ и множество $S \subset L^p(X)$ ограничено. Тогда следующие условия равносильны:

1) S вполне ограничено;

2) существует функция $\eta \in \Omega$, для которой

$$\sup_{f \in S} \inf_{g \in D_\eta(f)} \|g\|_{L^p(X)} < +\infty. \quad (1.6)$$

В терминах классов $D_\eta(f)$ можно формулировать и критерии компактности в пространстве $L^0(X)$.

ТЕОРЕМА 4. Множество $S \subset L^0(X)$ является вполне ограниченным тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sup_{f \in S} \mu\{|f| > \lambda\} = 0 \quad (1.7)$$

и существует такая функция $\eta \in \Omega$, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sup_{f \in S} \inf_{g \in D_\eta(f)} \mu\{g > \lambda\} = 0. \quad (1.8)$$

Условие (1.8) является аналогом условия (1.6) для пространства $L^0(X)$. Что касается (1.7), то оно является адекватной заменой свойства ограниченности S : само пространство $L^0(X)$ является ограниченным, как и любое его подмножество.

План нашей работы следующий. В § 2 доказываются теоремы 1 и 2. Функция g в неравенстве (1.4) строится с помощью подходящих максимальных операторов, нужные свойства которых приведены в § 3. Эти максимальные операторы также можно использовать для формулировки условий компактности.

В § 4 мы приведем такие условия для пространств $L^p(X)$, а также выведем из них теорему 3. В § 5 доказывается аналог теоремы 3 для случая неограниченно-го пространства X . Наконец, в § 6 с помощью другого семейства максимальных операторов мы изучим условия компактности в $L^0(X)$ и докажем теорему 4.

§ 2. Доказательство теорем 1 и 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. *Достаточность.* Пусть выполнены условия а) и б). Для $\varepsilon > 0$ в силу б) можно найти такое $\delta > 0$, что

$$\sup_{g \in S} \int_E |g|^p d\mu < \varepsilon^p$$

для любого множества $E \subset X$ с $\mu E < \delta$. Выберем далее $\sigma > 0$ настолько малым, что $\sigma^p \mu X < \varepsilon^p$, и найдем $\delta\varphi_0(\sigma)$ -сеть $\{f_k\}_{k=1}^n \subset S$ для S в $L^0(X)$. Это возможно в силу условия а).

Пусть $f \in S$ и номер $1 \leq k \leq n$ определяется так, что $d_{L^0}(f, f_k) < \delta\varphi_0(\sigma)$. Тогда

$$\int_X |f - f_k|^p d\mu = \int_{|f - f_k| \leq \sigma} + \int_{|f - f_k| > \sigma} < \sigma^p \mu X + \int_{|f - f_k| > \sigma} |f - f_k|^p d\mu.$$

Интеграл справа оценивается как ¹

$$\begin{aligned} \int_{|f - f_k| > \sigma} |f - f_k|^p d\mu &\leq c \left(\int_{|f - f_k| > \sigma} |f|^p d\mu + \int_{|f - f_k| > \sigma} |f_k|^p d\mu \right) \\ &\leq c \sup_{g \in S} \int_{|f - f_k| > \sigma} |g|^p d\mu < c\varepsilon^p, \end{aligned}$$

так как в силу выбора σ

$$\begin{aligned} \mu\{|f - f_k| > \sigma\} &= \mu\{\varphi_0(|f - f_k|) > \varphi_0(\sigma)\} \\ &\leq \frac{1}{\varphi_0(\sigma)} \int_X \varphi_0(|f - f_k|) d\mu = \frac{d_{L^0}(f, f_k)}{\varphi_0(\sigma)} < \delta. \end{aligned}$$

Итак,

$$\int_X |f - f_k|^p d\mu < c\varepsilon^p$$

и $\{f_k\}_{k=1}^n$ является $c\varepsilon$ -сетью для S в $L^p(X)$.

Необходимость условия б) очевидна: зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\varepsilon^{1/p}$ -сеть для S в $L^p(X)$. Пусть $f \in S$ и $1 \leq k \leq n$ определяется так, что $\|f - f_k\|_{L^p}^p < \varepsilon$. Тогда

$$\int_E |f|^p d\mu \leq c \left(\|f - f_k\|_{L^p}^p + \max_{1 \leq k \leq n} \int_E |f_k|^p d\mu \right) < c\varepsilon$$

для любого измеримого множества $E \subset X$ достаточно малой меры в силу свойства абсолютной непрерывности интегралов функций $|f_1|^p, \dots, |f_n|^p$.

¹Здесь и на протяжении всей работы c обозначает различные положительные постоянные, зависящие, возможно, от определенных параметров, но эти зависимости для нас несущественны.

Для доказательства необходимости условия а) снова возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем δ -сеть $\{f_k\}_{k=1}^n$ для S в $L^p(X)$ (зависимость δ от $\varepsilon > 0$ будет ясна из дальнейшего) и для $f \in S$ определим номер $1 \leq k \leq n$ так, чтобы $\|f - f_k\|_{L^p}^p < \delta$. Тогда для любого $\sigma > 0$

$$d_{L^0}(f, f_k) = \int_{|f-f_k| \leq \sigma} + \int_{|f-f_k| > \sigma} \leq \varphi_0(\sigma) \mu X + \int_{|f-f_k| > \sigma} \varphi_0(f - f_k) d\mu.$$

Первое слагаемое справа будет меньше ε при достаточно малом $\sigma > 0$. Зафиксировав такое σ , оценим интеграл справа отдельно при $p \geq 1$ и при $0 < p < 1$. В первом из этих случаев

$$\int_{|f-f_k| > \sigma} \varphi_0(f - f_k) d\mu \leq \int_{|f-f_k| > \sigma} |f - f_k| d\mu \leq \sigma^{1-p} \int_X |f - f_k|^p d\mu < \sigma^{1-p} \delta^p,$$

а во втором

$$\begin{aligned} \int_{|f-f_k| > \sigma} \varphi_0(f - f_k) d\mu &\leq \mu\{|f - f_k| > \sigma\} = \mu\{|f - f_k|^p > \sigma^p\} \\ &\leq \sigma^{-p} \int_X |f - f_k|^p d\mu < \sigma^{-p} \delta^p. \end{aligned}$$

Теперь ясно, как выбрать δ в зависимости от ε , чтобы набор $\{f_k\}_{k=1}^n$ был ε -сетью для S в $L^0(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Необходимость имеется в [10] в нужной общности.

Достаточность. Ограниченное метрическое пространство (X, d, μ) со свойством удвоения (1.3) удовлетворяет геометрическому условию удвоения (не связанному с мерой): существует число $n \in \mathbb{N}$ такое, что любой шар в X покрывается не более чем n шарами вдвое меньшего радиуса (см. [12; лемма 16.3]). В частности, для любого $\delta > 0$ ограниченное пространство X покрывается конечным числом шаров $B_1, \dots, B_m$ радиуса $\delta/2$. Поэтому если для множества $S \subset L^0(X)$ выполнены условия теоремы 2, то, полагая

$$X_1 = B_1, \quad X_k = B_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right), \quad k = 2, \dots, m,$$

видим, что для S выполнены условия критерия М.Фреше (формулировку см. перед теоремой 2), из которого следует полная ограниченность S .

§ 3. Максимальные функции

Пусть (X, d, μ) – метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ (не обязательно ограниченное), причем мера любого шара $B \subset X$ положительна и конечна.

Напомним, что мы условились до конца работы считать выполненным условие удвоения (1.3), из которого вытекает существование такого числа $\gamma > 0$, что

$$\mu B(x, R) \leq c_\mu \left(\frac{R}{r} \right)^\gamma \mu B(x, r), \quad x \in X, \quad 0 < r < R. \quad (3.1)$$

Это неравенство получается простой итерацией (1.3).

Далее отметим некоторые факты для ограниченных пространств X . Нам будет удобно считать, что если X ограничено, то $\text{diam } X = 1$; это не уменьшит общности.

Беря в (3.1) $R = 2$, получаем неравенство

$$\mu X \leq cr^{-\gamma} \mu B(x, r)$$

для любых $x \in X$ и $r \in (0, 2]$.

Поэтому ограниченное пространство (X, d, μ) с условием удвоения имеет конечную меру. К таким пространствам применимы теоремы 1 и 2.

Из последнего неравенства следует также оценка снизу для мер шаров

$$\mu B(x, r) \geq cr^\gamma, \quad x \in X, \quad 0 < r \leq 2. \quad (3.2)$$

Если $p > 0$, то используем стандартное обозначение

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

(при $0 < p < 1$ это, конечно, не норма, но мы сохраняем обозначение и в этом случае); $L^p(X)$ обозначает множество (классов эквивалентности) измеримых функций, для которых эта величина конечна. При каждом $p > 0$ пространство $L^p(X)$ полно относительно метрики $d_{L^p}(f, g) = \|f - g\|_{L^p}^*$, где

$$p^* = \min\{1, p\}. \quad (3.3)$$

Для $q > 0$ ведем семейство максимальных функций Харди–Литтлвуда

$$M_q f(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}(x)} \left(\int_B |f|^q d\mu \right)^{1/q} \quad (3.4)$$

(это определение корректно для каждой функции $f \in L^p_{\text{loc}}(X)$ при $p \geq q$), которые удовлетворяют следующим стандартным оценкам:

$$\|M_q f\|_{L^p(X)} \leq c \|f\|_{L^p(X)}, \quad \text{если } p > q > 0 \quad (3.5)$$

(см., например, [13; теорема 2.2]).

Под значением функции $f \in L^0(X)$ в точке $x \in X$ мы будем понимать аппроксимативный предел для f в точке x (который существует почти всюду, а каждая функция из $L^0(X)$ аппроксимативно непрерывна почти всюду на X ; см., например, [7; § 5.8]).

Если $x \in X$ и $0 < t \leq 2$, то обозначим

$$\mathcal{B}(x, t) = \{B : x \in B, r_B < t\}, \quad \mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(x, 2),$$

$$\mathcal{N}_{\eta, t}^q f(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}(x, t)} \frac{1}{\eta(r_B)} \left(\int_B |f(x) - f(y)|^q d\mu(y) \right)^{1/q}, \quad 0 < t < 2,$$

и $\mathcal{N}_{\eta, 2}^q = \mathcal{N}_{\eta}^q$. В случае $\eta(t) \equiv 1$ вместо $\mathcal{N}_{\eta, t}^q$ будем писать $\mathcal{N}_{0, t}^q$. Использование параметра q дает возможность согласовать определение $\mathcal{N}_{\eta}^q f$ с заданной степенью суммируемости f .

В случае $X = \mathbb{R}^n$ для $\eta(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, эти операторы впервые появились в работах А. Кальдерона (см., например, [14]). В [14] и [15] рассматривались также более общие операторы, когда $\alpha > 0$ и в определении $\mathcal{N}_\eta^q$ вместо $f(x)$ вычитается некоторый многочлен, степень которого зависит от α . Систематическому изучению максимальных функций такого сорта на $\mathbb{R}^n$ посвящена монография [16].

Отметим также, что в неявном виде максимальные операторы $\mathcal{N}_\eta^1$ использовались также в работе К. И. Осколкова [17], посвященной изучению задачи П. Л. Ульянова о количественных оценках C -свойства Лузина для функций с заданной мажорантой L^p -модуля непрерывности.

Для любой функции $\eta \in \Omega$ операторы $\mathcal{N}_\eta^1$ в случае $X = [0, 1]^n$ впервые изучал В. И. Коляда (см. [18], [19]). Мотивировкой для рассмотрения такого спектра характеристик η в этих работах было расширение возможностей для более тонкой классификации функций по их локальной гладкости: как показывает следующее простое неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq [\mathcal{N}_\eta^1 f(x) + \mathcal{N}_\eta^1 f(y)] \eta(d(x, y)), \quad x, y \in X, \quad (3.6)$$

$\mathcal{N}_\eta^1 f$ измеряет локальную гладкость функции f .

В случае общего метрического пространства X классы функций, определяемые в терминах $\mathcal{N}_\eta^1$, изучались в работах [20] (в степенном случае $\eta(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$) и в [21]–[24].

Для операторов $\mathcal{N}_\eta^q$ также справедливы неравенства локальной гладкости вида (1.4) и (3.6)

$$|f(x) - f(y)| \leq c [\mathcal{N}_\eta^q f(x) + \mathcal{N}_\eta^q f(y)] \eta(d(x, y)), \quad x, y \in X. \quad (3.7)$$

ЛЕММА 1. Если $0 < q \leq p$ и $f \in L^p(X)$, то функция $\mathcal{N}_{\eta,t}^q f$ измерима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать измеримость $\mathcal{N}_{\eta,t}^q f$ на любом фиксированном шаре $B_0 \subset X$. По теореме Н. Н. Лузина для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое измеримое множество $E_n \subset B_0$, что $\mu(B_0 \setminus E_n) < 2^{-n}$ и сужение $f|_{E_n}$ непрерывно на E_n .

Зададим $\lambda > 0$ и покажем, что множество

$$E_n^\lambda = \{\mathcal{N}_{\eta,t}^q f > \lambda\} \cap E_n$$

является измеримым. Для этого возьмем точку $x \in E_n^\lambda$, найдем шар $B \in \mathcal{B}(x, r)$, $0 < r < t$, со свойством

$$\left(\int_B |f(x) - f(y)|^q d\mu(y) \right)^{1/q} > \lambda \eta(r_B)$$

и положим

$$\varepsilon = \left(\left[\frac{1}{\eta(r_B)} \left(\int_B |f(x) - f(y)|^q d\mu(y) \right)^{1/q} \right]^{q^*} - \lambda^{q^*} \right)^{1/q^*} > 0.$$

После этого найдем $\delta > 0$ такое, что $B(x, \delta) \subset B$ и

$$\frac{|f(x) - f(z)|}{\eta(r(B))} < \varepsilon \quad \text{при} \quad z \in B(x, \delta) \cap E_n.$$

Тогда при $z \in B(x, \delta) \cap E_n$ выполнено неравенство (см. также (3.3))

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\eta(r_B)} \left(\int_B |f(z) - f(y)|^q d\mu(y) \right)^{1/q} \right]^{q^*} \\ & \geq \left[\frac{1}{\eta(r_B)} \left(\int_B |f(x) - f(y)|^q d\mu(y) \right)^{1/q} \right]^{q^*} - \left[\frac{|f(x) - f(z)|}{\eta(r(B))} \right]^{q^*} \\ & > \lambda^{q^*} + \varepsilon^{q^*} - \varepsilon^{q^*} = \lambda^{q^*}. \end{aligned}$$

Поэтому $B(x, \delta) \cap E_n \subset E_n^\lambda$. Это означает, что $E_n^\lambda = E_n \cap G$, где G – некоторое открытое множество, поэтому E_n^λ измеримо.

Осталось заметить, что если

$$E = B_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

то $\mu E = 0$ и

$$\{\mathcal{N}_{\eta,t}^\varphi f > \lambda\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^\lambda \right) \cup (E \cap \{\mathcal{N}_{\eta,t}^\varphi f > \lambda\}),$$

причем все множества в правой части измеримы. Лемма доказана.

Отметим еще следующие очевидные неравенства:

$$\mathcal{N}_{0,t}^q f(x) \leq c M_q f(x), \quad (3.8)$$

$$\mathcal{N}_\eta^q f(x) \leq \sup_{0 < t < 2} \frac{\mathcal{N}_{0,t}^q f(x)}{\eta(t)}. \quad (3.9)$$

ЛЕММА 2. Пусть $0 < q < p$ и множество $S \subset L^p(X)$ вполне ограничено. Тогда существует функция $\eta \in \Omega$, для которой

$$\sup_{f \in S} \|\mathcal{N}_\eta^q f\|_{L^p(X)} < +\infty. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что для любой функции $f \in L^p(X)$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|\mathcal{N}_{0,t}^q f\|_{L^p(X)} = 0. \quad (3.11)$$

Это следует из неравенств (3.8), (3.5) и из того, что непрерывные функции плотны в $L^p(X)$ в силу регулярности меры μ (см. [1; лемма VI.8.19]).

В самом деле, зададим $\varepsilon > 0$ и запишем f в виде $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in C(X)$ и $\|f_2\|_{L^p} < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \|\mathcal{N}_{0,t}^q f\|_{L^p(X)}^{p^*} & \leq c \left(\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \|\mathcal{N}_{0,t}^q f_1\|_{L^p(X)}^{p^*} + \overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \|\mathcal{N}_{0,t}^q f_2\|_{L^p(X)}^{p^*} \right) \\ & = c \overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \|\mathcal{N}_{0,t}^q f_2\|_{L^p(X)}^{p^*} \leq c \|M_q f_2\|_{L^p(X)}^{p^*} \leq c \|f_2\|_{L^p(X)}^{p^*} \leq c \varepsilon^{p^*}, \end{aligned}$$

откуда и следует (3.11).

Далее покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} \sup_{f \in S} \|\mathcal{N}_{0,t}^q f\|_{L^p(X)} = 0. \quad (3.12)$$

Для этого снова зададим $\varepsilon > 0$ и найдем ε -сеть $\{f_k\}_{k=1}^{m_\varepsilon}$ для S . Пусть $f \in S$ и номер $k = k(f)$ таков, что

$$\|f - f_k\|_{L^p(X)} < \varepsilon.$$

Тогда, используя неравенства (3.8) и (3.5), получаем

$$\begin{aligned} \sup_{f \in S} \|\mathcal{N}_{0,t}^q f\|_{L^p(X)}^{p^*} &\leq c \left(\sup_{f \in S} \|\mathcal{N}_{0,t}^q (f - f_k)\|_{L^p(X)}^{p^*} + \max_{1 \leq k \leq m_\varepsilon} \|\mathcal{N}_{0,t}^q f_k\|_{L^p(X)}^{p^*} \right) \\ &\leq c \left(\sup_{f \in S} \|M_q(f - f_k)\|_{L^p(X)}^{p^*} + \max_{1 \leq k \leq m_\varepsilon} \|\mathcal{N}_{0,t}^q f_k\|_{L^p(X)}^{p^*} \right) \\ &\leq c \left(\varepsilon^{p^*} + \max_{1 \leq k \leq m_\varepsilon} \|\mathcal{N}_{0,t}^q f_k\|_{L^p(X)}^{p^*} \right). \end{aligned}$$

Второе слагаемое в скобках в последней строке меньше ε^{p^*} при достаточно малых t в силу (3.11), записанного для элементов ε -сети.

Используя (3.12), построим по индукции последовательность $t_n \downarrow 0$. Положим $t_0 = 2$, и если $t_0, \dots, t_{n-1}$ уже определены, выберем $t_n < t_{n-1}$ таким образом, чтобы

$$\sup_{f \in S} \|\mathcal{N}_{0,t_n}^q f\|_{L^p(X)} < 2^{-n}. \quad (3.13)$$

Определим теперь функцию $\eta \in \Omega$ равенством $\eta(2) = 1$ и

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{при } t = t_n, \\ \text{линейна и непрерывна на } [t_n, t_{n-1}], \end{cases} \quad n \geq 1.$$

Покажем, что она удовлетворяет условию (3.10).

Используя неравенства (3.9) и (3.13), получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_\eta^q f\|_{L^p(X)}^{p^*} &\leq \left\| \max_{n \geq 0} \sup_{t_{n+1} < t \leq t_n} \frac{\mathcal{N}_{0,t}^q f}{\eta(r)} \right\|_{L^p(X)}^{p^*} \leq \left\| \max_{n \geq 0} \frac{\mathcal{N}_{0,t_n}^q f}{\eta(t_{n+1})} \right\|_{L^p(X)}^{p^*} \\ &\leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_{0,t_n}^q f}{\eta(t_{n+1})} \right\|_{L^p(X)}^{p^*} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|(n+1) \mathcal{N}_{0,t_n}^q f\|_{L^p(X)}^{p^*} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p^*} 2^{-np^*}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

(3.10) выполнено и лемма доказана.

В частности, из леммы 2 вытекает, что для любой функции $f \in L^p(X)$ существует функция $\eta \in \Omega$, для которой

$$D_\eta(f) \cap L^p(X) \neq \emptyset. \quad (3.15)$$

Отметим, что при $q = p$ лемма 2 теряет силу уже в случае, когда множество S состоит из одной точки.

В самом деле, пусть для простоты X ограничено и $\text{diam } X = 1$. Тогда если функция f такова, что $f \in L^p(X)$, а $M_p f \notin L^p(X)$, то в силу неравенства

$$\mathcal{N}_\eta^p f(x) \geq \frac{cM_p f(x) - |f(x)|}{\eta(2)}$$

максимальная функция $\mathcal{N}_\eta^p f$ не принадлежит $L^p(X)$, какова бы ни была функция $\eta \in \Omega$.

§ 4. Компактность в пространствах L^p , $p > 0$

В этом параграфе мы предполагаем, что X является ограниченным метрическим пространством.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $0 < q < p$ и множество $S \subset L^p(X)$ ограничено. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) S вполне ограничено;
- 2) существует функция $\eta \in \Omega$, для которой выполнено условие (3.10);
- 3) выполнено условие

$$\lim_{r \rightarrow +0} \sup_{f \in S} \int_X \left[\int_{B(x,r)} |f(x) - f(y)|^q d\mu(y) \right]^{p/q} d\mu(x) = 0. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что из 1) следует 2), является следствием леммы 2. То, что из 2) следует 3), очевидно. Используя теорему 1 (она применима: в начале § 2 отмечалось, что ограниченное пространство (X, d, μ) со свойством удвоения (3.1) имеет конечную меру), покажем, что из 3) следует 1).

Обозначим для краткости

$$m_{q,r} f(x) = \left(\int_{B(x,r)} |f(x) - f(y)|^q d\mu(y) \right)^{1/q},$$

запишем очевидное неравенство

$$|f(x)|^q \leq c(|f(x) - f(y)|^q + |f(y)|^q),$$

усредним его по $y \in B(x, r)$, а затем возведем в степень p/q и проинтегрируем по множеству $E \subset X$:

$$\int_E |f(x)|^p d\mu(x) \leq c \left(\int_X [m_{q,r} f(x)]^p d\mu + \int_E \int_{B(x,r)} |f(y)|^p d\mu \right).$$

Далее используем неравенство (3.2):

$$\int_E |f(x)|^p d\mu(x) \leq c \left(\int_X [m_{q,r} f(x)]^p d\mu + r^{-\gamma} \mu E \|f\|_{L^p}^p \right).$$

Зададим теперь $\varepsilon > 0$ и зафиксируем здесь $r > 0$ настолько малым, чтобы первое слагаемое справа было меньше ε . Это можно сделать в силу условия (4.1). Тогда второе слагаемое справа будет меньше чем ε , если мера множества E достаточно мала.

Этим доказано, что выполнено условие б) теоремы 1. Осталось проверить условие а) этой теоремы, для чего мы будем использовать теорему 2.

Пусть $x, y \in X$, $\delta > d(x, y)$. Аналогично предыдущему получается неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq c \left(m_{q,\delta} f(x) + \left[\int_{B(x,\delta)} |f(y) - f(z)|^q d\mu(z) \right]^{1/q} \right).$$

Так как $B(x, \delta) \subset B(y, 2\delta)$, то в силу условия удвоения (1.3) из последнего неравенства вытекает, что

$$|f(x) - f(y)| \leq c [m_{q,2\delta} f(x) + m_{q,2\delta} f(y)], \quad x, y \in X, \quad d(x, y) < \delta. \quad (4.2)$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и зафиксируем $\lambda > 0$ настолько большим, чтобы

$$\sup_{f \in S} \mu\{|f| > \lambda\} < \varepsilon.$$

Это возможно в силу ограниченности S и неравенства Чебышёва. Кроме того, зафиксируем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы

$$\int_X [m_{q,2\delta} f]^p d\mu < \varepsilon^{p+1}.$$

Тогда, снова применяя неравенство Чебышёва, получаем

$$\mu\{m_{q,2\delta} f > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_X [m_{q,2\delta} f]^p d\mu < \varepsilon.$$

Если теперь обозначить

$$E(f) = \{x : |f(x)| > \lambda\} \cup \{x : m_{q,2\delta}(x) > \varepsilon\},$$

то $\mu E(f) < 2\varepsilon$, $|f(x)| \leq \lambda$ при $x \notin E(f)$ и $|f(x) - f(y)| < c\varepsilon$ при $x, y \notin E(f)$, $d(x, y) < \delta$.

Итак, выполнены все условия теоремы 2, в силу которой множество S вполне ограничено в $L^0(X)$, а по теореме 1 оно вполне ограничено и в $L^p(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $p > 0$. Покажем, что условие (1.6) равносильно условию (3.10) при любом $0 < q < p$. Тогда утверждение теоремы 3 будет следовать из теоремы 5.

В самом деле, в силу неравенства (3.7) из (3.10) следует (1.6). Обратно, если выполнено (1.6), то пусть число A таково, что для каждой функции $f \in S$ существует $g \in D_\eta(f)$ с $\|g\|_{L^p(X)} \leq A$. Возведем в степень q неравенство (1.4), применим неравенство $(a+b)^q \leq c(a^q + b^q)$ и усредним (по y) по произвольному шару B , содержащему точку x :

$$\left(\int_B |f(x) - f(y)|^q d\mu(y) \right)^{1/q} \leq c \left[g(x) + \left(\int_B g^q d\mu \right)^{1/q} \right] \eta(2r_B).$$

Поэтому если обозначить $\eta_1(t) = \eta(2t)$, $t \in (0, 2]$, то

$$\mathcal{N}_{\eta_1}^q f(x) \leq cg(x) + M_q g(x)$$

и в силу неравенства (3.5) будет $\|\mathcal{N}_\eta^q f\|_{L^p(X)} \leq cA$. Поэтому (3.10) выполнено с η_1 на месте η .

Отметим, что при $p > q = 1$ эквивалентность условий 2) в теореме 3 и (3.10) вытекает непосредственно из теоремы 1 работы [25].

Для $\eta \in \Omega$ рассмотрим классы

$$C_\eta^{p,q}(X) = \{f \in L^p(X) : \|f\|_{C_\eta^{p,q}} = \|f\|_{L^p(X)} + \|\mathcal{N}_\eta^q f\|_{L^p(X)} < \infty\} \quad (4.3)$$

(см. [15], [16], [18]–[21], [24], [25]). Используя эти классы, критерий компактности в пространствах L^p можно переформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $0 < q < p$; тогда вполне ограниченными множествами в $L^p(X)$ являются ограниченные множества в $C_\eta^{p,q}(X)$, $\eta \in \Omega$, и только они.

§ 5. Случай неограниченного X

Если множество $X \subset \mathbb{R}^n$ не является ограниченным, то критерий компактности А. Н. Колмогорова уже неверен. Соответствующий пример приведен в работе [26]. Поэтому нужны дополнительные условия для компактности. Такие условия были найдены в [26], где доказано следующее.

Если X – измеримое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и множество $S \subset L^p(X)$, $p > 1$, ограничено, то для полной ограниченности S необходимо и достаточно одновременное выполнение условий (1.2) и

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{f \in S} \int_{|x| > R} |f|^p d\mu = 0.$$

А. Тулайков (см. [27]) доказал это утверждение Колмогорова–Тамаркина для случая $p = 1$.

Сейчас мы покажем, что результаты § 4 также соответствующим образом можно распространить на неограниченные метрические пространства X .

ТЕОРЕМА 7. Пусть $0 < q < p$ и множество $S \subset L^p(X)$ ограничено. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) S вполне ограничено;
- 2) существует функция $\eta \in \Omega$, для которой выполнено (3.10), и для некоторого $x_0 \in X$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{f \in S} \int_{X \setminus B(x_0, R)} |f|^p d\mu = 0; \quad (5.1)$$

- 3) выполнены (4.1) и (5.1) для некоторого $x_0 \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S вполне ограничено. Существование функции $\eta \in \Omega$ со свойством (3.10) следует из леммы 2. Справедливость условия (5.1) очевидна. Точно так же очевидно, что из 2) следует 3).

Покажем, что из 3) следует 1). Для этого зададим $\varepsilon > 0$ и зафиксируем $R > 0$ таким образом, чтобы

$$\sup_{f \in S} \int_{X \setminus B(x_0, R)} |f|^p d\mu < \varepsilon^p. \quad (5.2)$$

После этого обозначим $B_0 = B(x_0, R)$, $B_1 = B(x_0, R + 1)$ и введем локализующую функцию

$$F_R(x) = \frac{d(x, B_1^c)}{d(x, B_1^c) + d(x, B_0)}$$

($E^c = X \setminus E$ – дополнение множества E). Тогда очевидно, что $\text{supp } F_R \subset B_1$, $F_R(x) = 1$ при $x \in B_0$ и $|F_R(x) - F_R(y)| \leq cd(x, y)$ при всех $x, y \in X$.

Рассмотрим множество $S_R = \{fF_R : f \in S\}$. Легко видеть, что оно ограничено в $L^p(B_0)$ и удовлетворяет условию (4.1) с $X = B_0$. Поэтому S_R вполне ограничено в $L^p(B_0)$ по теореме 5 и для любого $\varepsilon > 0$ у него существует конечная ε -сеть $\{f_k F_R\}_{k=1}^n$ с некоторыми $f_k \in S$. Так как

$$\begin{aligned} \|f - f_k F_R\|_{L^p(X)}^p &= \int_{B_0^c} |f - f_k F_R|^p d\mu + \int_{B_0} |f - f_k F_R|^p d\mu \\ &\leq \int_{B_0^c} |f - f_k F_R|^p d\mu + \varepsilon^p, \end{aligned}$$

то в силу выбора R (см. (5.2)) $\{f_k F_R\}_{k=1}^n$ является $c\varepsilon$ -сетью для S в $L^p(X)$.

Аналогом теоремы 3 для неограниченных X является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $0 < q < p$ и множество $S \subset L^p(X)$ ограничено. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) S вполне ограничено;
- 2) существует функция $\eta \in \Omega$, для которой выполнено (1.6), и для некоторого $x_0 \in X$ выполнено (5.1).

Доказательство такое же, как и в теореме 7.

§ 6. Компактность в пространстве L^0

В этом параграфе мы снова предполагаем, что X – ограниченное метрическое пространство.

Пусть Φ – множество всех четных функций $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, положительных и возрастающих на $(0, +\infty)$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(0) = \varphi(+0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \infty,$$

Φ_1 – подкласс функций из Φ , для которых $\varphi(t)/t$ убывает.

Отметим для дальнейшего, что для $\varphi \in \Phi_1$ выполнены неравенства

$$\frac{\varphi^{-1}(t)}{t} \leq \frac{\varphi^{-1}(s)}{s}, \quad 0 < t < s, \quad (6.1)$$

$$\varphi(t + s) \leq \varphi(t) + \varphi(s), \quad t, s > 0. \quad (6.2)$$

Если $\varphi \in \Phi$, то $\varphi(L)$ – множество (классов эквивалентности) измеримых функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, для которых конечна величина

$$\int_X \varphi(f) d\mu.$$

Классы $\varphi(L)$ систематически изучались в работах П. Л. Ульянова (см., например, обзор [28]).

Если $\varphi \in \Phi_1$, то $\varphi(L)$ является полным метрическим пространством относительно метрики (см. (6.2))

$$d_{\varphi(L)}(f, g) = \int_X \varphi(f - g) d\mu$$

и непрерывные функции плотны в нем (последнее следует из регулярности меры μ).

ЛЕММА 3. Если множество $S \subset L^0(X)$ вполне ограничено, то выполнено условие (1.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем ε -сеть $g_1, \dots, g_n$ для S . Тогда для каждого элемента $f \in S$ найдется такой номер $1 \leq k \leq n$, что $d_{L^0}(f, g_k) < \varepsilon$.

Пусть $\lambda > 1$; тогда

$$\sup_{f \in S} \mu\{|f| > 2\lambda\} \leq \sup_{f \in S} \mu\{|f - g_k| > \lambda\} + \max_{1 \leq k \leq n} \mu\{|g_k| > \lambda\}. \quad (6.3)$$

Первое слагаемое справа в (6.3) оценивается как

$$\begin{aligned} \varepsilon > d_{L^0}(f, g_k) &\geq \int_{\{|f - g_k| > \lambda\}} \frac{|f - g_k|}{1 + |f - g_k|} d\mu \\ &\geq \frac{\lambda}{1 + \lambda} \mu\{|f - g_k| > \lambda\} \geq \frac{1}{2} \mu\{|f - g_k| > \lambda\}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\sup_{f \in S} \mu\{|f - g_k| > \lambda\} < 2\varepsilon.$$

В силу (1.5) второе слагаемое справа в (6.3) будет меньше ε при всех достаточно больших λ .

ЛЕММА 4. Если множество $S \subset L^0(X)$ вполне ограничено, то существует функция $\psi \in \Phi_1$, для которой

$$\sup_{f \in S} \int_X \psi(f) d\mu < +\infty$$

и интегралы семейства $\{\psi \circ f : f \in S\}$ равномерно абсолютно непрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, в силу леммы 3 найдется последовательность $\lambda_k \uparrow \infty$ со свойствами

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_k > 2\lambda_{k-1}, \quad \sup_{f \in S} \mu\{|f| > \lambda_k\} < 2^{-k},$$

поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \sup_{f \in S} \mu\{|f| > \lambda_k\} < +\infty. \quad (6.4)$$

Определим функцию $\psi \in \Phi_1$ равенствами $\psi(t) = t$ на $[0, 1]$, $\psi(\lambda_k) = k$ при всех $k \geq 1$ и линейно интерполируем ψ на отрезках $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$, $k \geq 1$. Из условия $\lambda_k > 2\lambda_{k-1}$ легко вывести, что $\psi \in \Phi_1$.

Кроме того, при $f \in S$

$$\begin{aligned} \int_X \psi(f) d\mu &= \left(\int_{\{|f| \leq 1\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{\lambda_k < |f| \leq \lambda_{k+1}\}} \right) \psi(f) d\mu \\ &\leq \mu X + \sum_{k=0}^{\infty} \psi(\lambda_{k+1}) \sup_{f \in S} \mu\{\lambda_k < |f| \leq \lambda_{k+1}\} \\ &\leq \mu X + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \sup_{f \in S} \mu\{|f| > \lambda_k\}, \end{aligned}$$

и первое утверждение вытекает из (6.4).

Докажем второе утверждение леммы. Зададим $\varepsilon > 0$, используя (6.4), найдем $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{k=n}^{\infty} (k+1) \sup_{f \in S} \mu\{|f| > \lambda_k\} < \frac{\varepsilon}{2},$$

и положим $\delta = \varepsilon/(2\psi(\lambda_n))$. Тогда если множество $E \subset X$ измеримо и $\mu E < \delta$, то для любой функции $f \in S$

$$\begin{aligned} \int_E \psi(|f|) d\mu &= \left(\int_{E \cap \{|f| \leq \lambda_n\}} + \sum_{k=n}^{\infty} \int_{E \cap \{\lambda_k < |f| \leq \lambda_{k+1}\}} \right) \psi(|f|) d\mu \\ &\leq \psi(\lambda_n) \mu E + \sum_{k=n}^{\infty} \int_{\{\lambda_k < |f| \leq \lambda_{k+1}\}} \psi(|f|) d\mu \\ &\leq \lambda_n \delta + \sum_{k=n}^{\infty} A_k \sup_{f \in S} \mu\{|f| > \lambda_k\} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Отметим, что для построенной функции ψ в лемме 4 будет $\psi(t) = t$ при $t \in [0, 1]$. В частности, для этой функции ψ выполнены неравенства

$$\psi(t) \leq 2\psi(\max\{1, \lambda\})\varphi_0(t) \quad \text{при } t \in [0, \lambda]. \quad (6.5)$$

В самом деле, если $0 \leq t \leq 1$, то

$$\psi(t) = t = (1+t) \frac{t}{1+t} \leq 2\varphi_0(t).$$

Если же $t \in [1, \lambda]$, то

$$\psi(t) \leq \psi(\lambda) \frac{\varphi_0(t)}{\varphi_0(\lambda)} \leq 2\psi(\lambda)\varphi_0(t).$$

ЛЕММА 5. Если множество $S \subset L^0(X)$ вполне ограничено и функция $\psi \in \Phi_1$ определена по лемме 4, то S вполне ограничено в $\psi(L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi \in \Phi_1$ – функция из леммы 4. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\lambda > 2$ такое, что

$$\sup_{f \in S} \int_{\{|f| > \lambda\}} \psi(f) d\mu < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Положим теперь $\delta = \varepsilon/(4\psi(\lambda))$ и найдем δ -сеть $f_1, \dots, f_n$ для S в $L^0(X)$. При этом можно считать, что $f_k \in S$ при всех $k = 1, \dots, n$.

Пусть $f \in S$; тогда $d_{L^0}(f, f_k) < \delta$ для некоторого $1 \leq k \leq n$. Тогда, используя (6.2) и (6.5), получаем

$$\begin{aligned} \int_X \psi(f - f_k) d\mu &= \int_{\{|f - f_k| \leq \lambda\}} \psi(f - f_k) d\mu + \int_{\{|f - f_k| > \lambda\}} \psi(f - f_k) d\mu \\ &\leq 2\psi(\lambda) \int_X \varphi_0(f - f_k) d\mu + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Это означает, что $f_1, \dots, f_n$ является ε -сетью для S в $\psi(L)$.

Определим, далее, семейство максимальных операторов, подобных введенным в §3. Пусть $\eta \in \Omega$, $\varphi \in \Phi_1$ и $f \in \varphi(L)$. Обозначим тогда

$$\mathcal{N}_{\eta,t}^\varphi f(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}(x,t)} \frac{1}{\eta(r_B)} \int_B \varphi(f(x) - f(y)) d\mu(y), \quad 0 < t < 2, \quad (6.6)$$

и $\mathcal{N}_{\eta,2}^\varphi = \mathcal{N}_\eta^\varphi$. В случае $\eta(t) \equiv 1$ вместо $\mathcal{N}_{\eta,t}^\varphi$ будем писать $\mathcal{N}_{0,t}^\varphi$.

Для степенных функций $\varphi(t) = t^q$, $q > 0$, операторы $\mathcal{N}_{\eta,t}^\varphi f$ несколько отличаются от операторов $\mathcal{N}_{\eta,t}^q f$ из §3 (сейчас мы не извлекаем корень степени q). Это не должно привести к путанице, так как результаты всех предыдущих параграфов здесь не используются. Измеримость $\mathcal{N}_{\eta,t}^\varphi f$ доказывается подобно тому, как это делалось в лемме 1.

Отметим также следующие простые неравенства:

$$\mathcal{N}_{0,t}^\varphi f(x) \leq 2M_1(\varphi \circ f)(x), \quad \varphi \in \Phi_1, \quad f \in \varphi(L), \quad 0 < t < 2, \quad (6.7)$$

$$\mathcal{N}_\eta^\varphi f(x) \leq \sup_{0 < t < 2} \frac{\mathcal{N}_{0,t}^\varphi f(x)}{\eta(t)}. \quad (6.8)$$

ТЕОРЕМА 9. Множество $S \subset L^0(X)$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.7) и существуют функции $\eta \in \Omega$ и $\varphi \in \Phi$ со свойством

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sup_{f \in S} \mu\{\mathcal{N}_\eta^\varphi f > \lambda\} = 0. \quad (6.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $S \subset L^0(X)$ вполне ограничено; тогда условие (1.7) вытекает из леммы 3.

Проверим условие (6.9). Пусть функция $\psi \in \Phi_1$ определяется для множества S по лемме 4. Обозначим $\varphi(t) = \sqrt{\psi(t)}$. Тогда

$$\mathcal{N}_0^\varphi f(x) = \mathcal{N}_0^{\sqrt{\psi}} f(x) \leq 2M_1(\varphi \circ f)(x).$$

Так как для любой функции $f \in S$ композиция $\varphi \circ f = \sqrt{\psi} \circ f$ принадлежит $L^2(X)$, то в силу неравенства (3.5) при $q = 1$ и $p = 2$

$$\|\mathcal{N}_0^\varphi f\|_{L^2(X)} \leq c \|\varphi \circ f\|_{L^2(X)} = \|\psi \circ f\|_{L^1(X)}^{1/2} \leq c.$$

Повторим теперь рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 2, с операторами $\mathcal{N}_{0,t}^\varphi f$ вместо $\mathcal{N}_{0,t}^q f$, а также используем (6.7) и (6.8) вместо (3.8) и (3.9). Тогда получим для любой функции $f \in S$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|\mathcal{N}_{0,t}^\varphi f\|_{L^2(X)} = 0.$$

Из этого соотношения и из полной ограниченности S в $\varphi(L)$ (см. лемму 5), опять повторяя доказательство леммы 2, получим соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +0} \sup_{f \in S} \|\mathcal{N}_{0,t}^\varphi f\|_{L^2(X)} = 0.$$

Построение функции $\eta \in \Omega$ тоже происходит, как и в лемме 2. В результате мы получим, что

$$\sup_{f \in S} \|\mathcal{N}_\eta^\varphi f\|_{L^2(X)} < +\infty,$$

и в силу неравенства Чебышёва

$$\sup_{f \in S} \mu\{\mathcal{N}_\eta^\varphi f > \lambda\} \leq c \left(\frac{1}{\lambda} \sup_{f \in S} \|\mathcal{N}_\eta^\varphi f\|_{L^2(X)} \right)^2 \leq c\lambda^{-2}, \quad \lambda > 0,$$

поэтому условие (6.9) выполнено.

Достаточность. Пусть для функций $\eta \in \Omega$ и $\varphi \in \Phi$ выполнено (6.9). Обозначим для краткости $c_0 = \max\{\eta(2), 1\}$ и положим

$$g(x) = g_f(x) = \frac{\varphi^{-1}(2c_0 \mathcal{N}_\eta^\varphi f(x))}{c_0}, \quad E = \{g = +\infty\};$$

тогда выполнено неравенство (1.4).

В самом деле, пусть $x, y \in X \setminus E$ и $r > d(x, y)$; тогда шар $B = B(x, r) \subset X$ содержит обе эти точки. Для любого z в силу (6.2)

$$\varphi(|f(x) - f(y)|) \leq \varphi(|f(x) - f(z)|) + \varphi(|f(y) - f(z)|).$$

Усредняя по $z \in B$, получим

$$\varphi(|f(x) - f(y)|) \leq \eta(d(x, y))[\mathcal{N}_\eta^\varphi f(x) + \mathcal{N}_\eta^\varphi f(y)].$$

Применим к обеим частям обратную функцию φ^{-1} и воспользуемся неравенством (6.1):

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \varphi^{-1}(\eta(d(x, y))[\mathcal{N}_\eta^\varphi f(x) + \mathcal{N}_\eta^\varphi f(y)]) \\ &\leq \frac{\eta(d(x, y))}{c_0} \varphi^{-1}(c_0[\mathcal{N}_\eta^\varphi f(x) + \mathcal{N}_\eta^\varphi f(y)]) \\ &\leq \frac{\eta(d(x, y))}{c_0} \varphi^{-1}(2c_0 \max\{\mathcal{N}_\eta^\varphi f(x), \mathcal{N}_\eta^\varphi f(y)\}) \\ &\leq \frac{\eta(d(x, y))}{c_0} [\varphi^{-1}(2c_0 \mathcal{N}_\eta^\varphi f(x)) + \varphi^{-1}(2c_0 \mathcal{N}_\eta^\varphi f(y))] \\ &= \eta(d(x, y)) [g_f(x) + g_f(y)], \end{aligned}$$

и (1.4) доказано.

Теперь зададим $\varepsilon > 0$ и выберем $\lambda > 2$ такое, что

$$\sup_{f \in S} \mu\{|f| > \lambda\} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sup_{f \in S} \mu\{g_f > \lambda\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Существование такого λ обеспечивается условиями (1.7) и (6.9). Положим

$$E(f) = \{|f| > \lambda\} \cup \{g_f > \lambda\}, \quad \delta = \eta^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{4\lambda} \right).$$

Очевидно, что выполнены условия а) и с) теоремы 2 (см. замечание в начале § 2). Кроме того, из (1.4) следует и условие б) этой теоремы. Отсюда получаем полную ограниченность S в $L^0(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Доказательство достаточности повторяет последний абзац в обосновании предыдущей теоремы.

Обратно, если S вполне ограничено в $L^0(X)$, то (1.7) вытекает из леммы 3, а существование функций g со свойством (1.8) установлено в доказательстве необходимости теоремы 9.

Список литературы

- [1] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Часть 1. Общая теория*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. I. General theory.*, Pure Appl. Math., **7**, Intersci. Publ., New York–London, 1958.
- [2] M. Riesz, “Sur les ensembles compacts de fonctions sommables”, *Acta Sci. Math (Szeged)*, **6**:1 (1933), 136–142.
- [3] M. Tsuji, “On the compactness of space L^p ($p > 0$) and its application to integral equations”, *Kodai Math. Sem. Rep.*, **3**:1–2 (1951), 33–36.
- [4] A. N. Kolmogoroff, “Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel”, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, **9** (1931), 60–63.
- [5] H. Hanche-Olsen, H. Holden, “The Kolmogorov–Riesz compactness theorem”, *Expo. Math.*, **28**:4 (2010), 385–394.
- [6] A. Kałamańska, “On compactness of embedding for Sobolev spaces defined on metric spaces”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **24**:1 (1999), 123–132.
- [7] В. И. Богачев, *Основы теории меры*, т. 1, РХД, М.–Ижевск, 2003.
- [8] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа*, Наука, М., 1965; англ. пер.: L. A. Lusternik, V. J. Sobolev, *Elements of functional analysis*, Hindustan Publ., Delhi, 1971.
- [9] M. Fréchet, “Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables”, *Fund. Math.*, **9** (1927), 25–32.
- [10] E. H. Hanson, “A note on compactness”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39**:6 (1933), 397–400.
- [11] В. Г. Кротов, “Количественная форма C -свойства Лузина”, *Укр. матем. журн.*, **62**:3 (2010), 387–395; англ. пер.: V. G. Krotov, “Quantitative form of the Luzin C -property”, *Ukrainian Math. J.*, **62**:3 (2010), 441–451.
- [12] G. David, S. Semmes, *Fractured fractals and broken dreams. Self-similar geometry through metric and measure*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **7**, Clarendon Press, Oxford, 1997.
- [13] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

- [14] A. P. Calderón, “Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions”, *Studia Math.*, **44**:3 (1972), 563–582.
- [15] A. P. Calderón, R. Scott, “Sobolev type inequalities for $p > 0$ ”, *Studia Math.*, **62**:1 (1978), 75–92.
- [16] R. A. DeVore, R. C. Sharpley, “Maximal functions measuring smoothness”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **47**, no. 293, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.
- [17] К. И. Осолков, “Аппроксимативные свойства суммируемых функций на множествах полной меры”, *Матем. сб.*, **103(145)**:4(8) (1977), 563–589; англ. пер.: K. I. Oskolkov, “Approximation properties of summable functions on sets of full measure”, *Math. USSR-Sb.*, **32**:4 (1977), 489–514.
- [18] В. И. Коляда, “Оценки максимальных функций, связанных с локальной гладкостью”, *Докл. АН СССР*, **293**:4 (1987), 534–537; англ. пер.: V. I. Kolyada, “Estimates of maximal functions connected with local smoothness”, *Soviet Math. Dokl.*, **35**:2 (1987), 345–348.
- [19] V. I. Kolyada, “Estimates of maximal functions measuring local smoothness”, *Anal. Math.*, **25**:1 (1999), 277–300.
- [20] D. Yang, “New characterizations of Hajlasz–Sobolev spaces on metric spaces”, *Sci. China Ser. A*, **46**:5 (2003), 675–689.
- [21] И. А. Иванишко, “Оценки максимальных функций Кальдерона–Коляды на пространствах однородного типа”, *Тр. Ин-та матем.*, **12**:1 (2004), 64–67.
- [22] В. Г. Кротов, “Весовые L^p -неравенства для шарп-максимальных функций на метрических пространствах с мерой”, *Изв. НАН Армении. Сер. матем.*, **41**:2 (2006), 25–42; англ. пер.: V. G. Krotov, “Weighted L^p -inequalities for sharp-maximal functions on metric measure spaces”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **41**:2 (2006), 22–38.
- [23] И. А. Иванишко, В. Г. Кротов, “Обобщенное неравенство Пуанкаре–Соболева на метрических пространствах”, *Тр. Ин-та матем.*, **14**:1 (2006), 51–61.
- [24] И. А. Иванишко, В. Г. Кротов, “Компактность вложений соболевского типа на метрических пространствах с мерой”, *Матем. заметки*, **86**:6 (2009), 829–844; англ. пер.: I. A. Ivanishko, V. G. Krotov, “Compactness of embeddings of Sobolev type on metric measure spaces”, *Math. Notes*, **86**:5–6 (2009), 775–788.
- [25] И. А. Иванишко, “Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой”, *Матем. заметки*, **77**:6 (2005), 937–941; англ. пер.: I. A. Ivanishko, “Generalized Sobolev classes on metric measure spaces”, *Math. Notes*, **77**:5–6 (2005), 865–869.
- [26] J. D. Tamarkin, “On the compactness of the space L_p ”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **38**:2 (1932), 79–84.
- [27] A. Tulajkov, “Zur Kompaktheit im Raum L_p für $p = 1$ ”, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. I*, **39** (1933), 167–170.
- [28] П. Л. Ульянов, “Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ ”, *УМН*, **27**:2 (1972), 3–52; англ. пер.: P. L. Ul’yanov, “Representation of functions by series and classes $\varphi(L)$ ”, *Russian Math. Surveys*, **27**:2 (1972), 1–54.

В. Г. Кротов (V. G. Krotov)

Белорусский государственный университет, г. Минск

E-mail: krotov@bsu.by

Поступила в редакцию

11.12.2010 и 09.09.2011