Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Шакин, Кусочно лексsegmentные идеалы, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 11, 117–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm783>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:20:48

УДК 512.714

Д. А. Шакин

Кусочно лексsegmentные идеалы

Рассматривается задача описания функций Гильберта однородных идеалов в кольце коммутативных многочленов, содержащих фиксированный мономиальный идеал I . Для этой цели вводится понятие кусочно лексsegmentного идеала, обобщающее понятие лексsegmentного идеала. Доказывается, что в случае, когда идеал I является кусочно лексsegmentным, возможно описать функции Гильберта однородных идеалов, содержащих I , способом, аналогичным предложенному Маколеем для ситуации $I = 0$. Кроме того, получено обобщение экстремальных свойств лексsegmentных идеалов (неравенство для чисел Бетти, поведение при факторизации по общим однородным формам).

Библиография: 17 названий.

§ 1. Введение

Рассмотрим следующую задачу. Пусть k – некоторое поле и $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \dots$, $R_0 = k$, – коммутативная градуированная алгебра, порожденная n элементами степени 1. Пусть также задана функция $H: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$. Существует ли такой однородный идеал $J \subseteq R$, что функция H является функцией Гильберта алгебры R/J , т.е. для всех $d \geq 0$ имеем $H(d) = \dim_k (R/J)_d$, где $(R/J)_d$ – градуированная компонента степени d ? Для ответа на этот вопрос можно представить алгебру S как факторалгебру алгебры коммутативных многочленов: $R = A/I$, где $A = k[x_1, \dots, x_n]$ и I – некоторый однородный идеал. Тогда задача сводится к нахождению такого однородного идеала $J \subseteq A$, содержащего идеал I , что $H(d) = \dim_k (A/J)_d$. В 1927 г. случай $I = (0)$ (т.е. $R = k[x_1, \dots, x_n]$) рассмотрел Маколей [1]. Он показал, что существует сравнительно узкий класс идеалов (так называемые лексsegmentные идеалы), которые имеют простое комбинаторное описание и, более того, функции Гильберта факторалгебр алгебры многочленов по однородным идеалам исчерпываются функциями Гильберта факторалгебр алгебры многочленов по лексsegmentным идеалам. Оказалось, что лексsegmentные идеалы обладают некоторыми интересными экстремальными свойствами, например, лексsegmentный идеал имеет максимальные градуированные числа Бетти среди всех однородных идеалов с заданной функцией Гильберта [2] и [3]. Кроме того, лексsegmentные идеалы обладают экстремальными свойствами при факторизации по общим однородным формам [4], [5]. Вопрос о распространении этих свойств на случай $I \neq (0)$ тоже представляется весьма интересным.

Обобщая идею Маколея, Клементс и Линдстрём [6] рассмотрели случай $I = (x_1^{d_1}, x_2^{d_2}, \dots, x_n^{d_n})$, где $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Частичное обобщение свойств экстремальности в такой ситуации получено Арамовой, Херцогом и Хиби в работе [7]

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00468).

(для случая $d_1 = \dots = d_n = 2$) и Гашаровым [8]. В статье [9] получено необходимое и достаточное условие на идеал I для возможности обобщения теоремы Маколея в случае $A = k[x_1, x_2]$.

Довольно очевидно, что можно распространить теорему Маколея на случай, когда идеал I является лекссегментным. В настоящей работе вводится понятие кусочно лекссегментного идеала, являющееся естественным расширением понятия лекссегментного идеала. Оказывается, что на случай, когда идеал I кусочно лекссегментен, возможно обобщить как теорему Маколея, так и многие свойства экстремальности.

В §2 статьи дается определение кусочно лекссегментных идеалов, а также доказываются их основные свойства.

В §3 теорема Маколея обобщается на случай, когда идеал I является кусочно лекссегментным, приводится как формулировка в терминах функций Гильберта, так и комбинаторная постановка задачи. Кроме того, доказывается, что в классе сильно устойчивых идеалов только для кусочно лекссегментных обобщение теоремы Маколея в таком виде возможно.

В §4 доказывается неравенство для чисел Бетти над кольцом A , обобщающее упомянутые выше результаты.

В §5 рассматриваются векторные пространства и идеалы, экстремальные в смысле теоремы Маколея, в частности, обобщается одна теорема Гоцмана [10], и показывается, что эти экстремальные идеалы имеют гомологические свойства, сходные со свойствами соответствующих лекссегментных идеалов.

При рассмотрении ненулевого идеала I возникает новая задача о сравнении чисел Бетти над кольцом A/I . В §6 приводятся некоторые результаты в этом направлении.

В §7 доказываются обобщения теоремы Грина [4] и некоторых результатов из статей [5], [11], касающихся факторизации по общим однородным формам.

Пользуясь случаем, автор хотел бы выразить свою признательность Е. С. Голлуду за высказанные им многочисленные ценные замечания, которые были учтены при написании окончательного варианта этой работы.

§2. Кусочно лекссегментные идеалы и их свойства

Пусть $A = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — кольцо многочленов от n переменных, $\text{char } k = 0$, A_d — множество мономов степени d в A . Введем на мономах в A лексикографический порядок: $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} > x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$, если $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_l = b_l, a_{l+1} > b_{l+1}$ для некоторого l . Для всякого однородного идеала I положим $I_d = I \cap A_d$. Если I — мономиальный идеал, то через $G(I)$ обозначим его минимальное порождающее множество, состоящее из мономов. Для всякого монома $u \in A$ положим $m(u) = \max\{i : x_i \mid u\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Мономиальный идеал $I \subseteq A$ называется *кусочно лекссегментным*, если для любого монома $u \in G(I)$ степени d и для любого монома $v \in A$ степени d такого, что $v > u$ и $m(v) \leq m(u)$, выполнено $v \in I$.

Пусть $l \leq n$, положим $A(l) = k[x_1, \dots, x_l] \subseteq A$ — подкольцо в A . Если I — мономиальный идеал в A , то положим $I(l) = I \cap A(l)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $I \subseteq A$ — кусочно лекссегментный идеал. Тогда

- 1) идеал $I(l)$ кусочно лекссегментный в кольце $A(l)$;

2) идеал $IA' \subseteq A' = k[x_1, \dots, x_r]$ кусочно лекссегментный при $r > n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба утверждения следуют непосредственно из определения кусочно лекссегментного идеала.

Понятие кусочно лекссегментного идеала естественным образом обобщает понятие лекссегментного идеала.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Мономиальный идеал $I \subseteq A$ называется *лекссегментным*, если для любого монома $u \in I_d$ и для любого монома $v \in A_d$ такого, что $v > u$, выполнено $v \in I$.

Всякий лекссегментный идеал является, очевидно, кусочно лекссегментным. С другой стороны, не все кусочно лекссегментные идеалы являются лекссегментными. Например, идеал в кольце $k[x_1, x_2, x_3]$, порожденный мономами x_1^2 , x_1x_2 и x_2^2 , является кусочно лекссегментным, но не является лекссегментным. Следующее предложение уточняет строение кусочно лекссегментных идеалов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Идеал $I \subseteq A$ является кусочно лекссегментным тогда и только тогда, когда существуют такие лекссегментные идеалы $L_i \subseteq A(i)$, $i = 1, \dots, n$, что

$$I = L_1A + L_2A + \dots + L_nA.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Представление кусочно лекссегментного идеала I в виде суммы лекссегментных $I = L_1A + L_2A + \dots + L_nA$, вообще говоря, не является единственным; например, идеал $I = (x_1) \subseteq A = k[x_1, x_2]$ можно представить как $L_1A + L_2A$ с $L_1 = (x_1) \subseteq A(1)$, $L_2 = (0) \subseteq A(2)$, а также с $L_1 = (0) \subseteq A(1)$ и $L_2 = (x_1) \subseteq A(2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.4. Проведем индукцию по n — числу переменных в A . База индукции следует из того, что при $n = 1$ всякий кусочно лекссегментный идеал является лекссегментным. Пусть теперь $n > 1$ и при всех $l < n$ предложение уже доказано.

Пусть $I \subseteq A$ — кусочно лекссегментный идеал, тогда по предложению 2.2 идеал $I(n-1)$ является кусочно лекссегментным, следовательно, по предположению индукции $I(n-1) = L_1A(n-1) + \dots + L_{n-1}A(n-1)$. Рассмотрим все такие мономы $u \in G(I)$, что $m(u) = n$. Для каждого такого монома u построим множество мономов $L(u) = \{v \in A : \deg v = \deg u, v \geq u\}$. По определению кусочно лекссегментного идеала $L(u) \subseteq I$. Пусть L_n — идеал в A , порожденный всеми множествами $L(u)$; покажем, что $I = L_1A + \dots + L_nA$. Положим $J = L_1A + \dots + L_nA$. Включение $J \subseteq I$ очевидно, так как выше было показано, что $L(u) \subseteq I$. Докажем теперь, что $I \subseteq J$. Так как I мономиальный, то достаточно доказать, что $u \in J$ для всякого монома $u \in I$. Действительно, пусть g — минимальная порождающая идеала I , делящая u . Если $m(g) < n$, то $g \in L_1A(n-1) + \dots + L_{n-1}A(n-1)$. Следовательно, $u \in L_1A(n-1) + \dots + L_{n-1}A(n-1) \subseteq J$. Если $m(g) = n$, то $u \in L_n \subseteq J$.

Докажем теперь, что идеал $I = L_1A + \dots + L_nA$ является кусочно лекссегментным. По предположению индукции $J = L_1A(n-1) + \dots + L_{n-1}A(n-1)$ является кусочно лекссегментным. Пусть $u \in G(I)$. Если $u \in JA$, то $u \in J$ (так как это минимальная порождающая) и, следовательно, $u \in G(J)$. Поэтому для

всякого $v \in A_{\deg u}$ такого, что $m(v) \leq m(u)$ и $v > u$, выполнено $v \in J \subseteq I$. Если же $u \in L_n$, то так как L_n лекссегментный, то для всякого $v \in A_{\deg u}$ такого, что $v > u$, выполнено $v \in L_n \subseteq I$. Таким образом, I кусочно лекссегментный.

Ниже сформулированы некоторые технические утверждения, которые будут полезны в дальнейшем.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Если $I, J \subseteq A$ – кусочно лекссегментные идеалы, то $I + J$ кусочно лекссегментный, в частности, $I + L$ – кусочно лекссегментный идеал для всякого лекссегментного идеала $L \subseteq A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2.4 $I = L_1 A + \dots + L_n A$, $J = L'_1 A + \dots + L'_n A$, где $L_i, L'_i \subseteq A(i)$ – лекссегментные идеалы. Следовательно, $I + J = (L_1 + L'_1)A + \dots + (L_n + L'_n)A$, причем $L_i + L'_i \subseteq A(i)$ – лекссегментные идеалы. Снова применив предложение 2.4, получим, что $I + J$ кусочно лекссегментный.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. *Если идеал $I \subseteq A$ кусочно лекссегментный, то идеал $J = (I : x_n^d)$ кусочно лекссегментный при всех $d \geq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2.4 $I = L_1 A + \dots + L_n A$, где $L_i, L'_i \subseteq A(i)$ – лекссегментные идеалы. Тогда

$$\begin{aligned} J = (I : x_n^d) &= (L_1 : x_n^d)A + \dots + (L_{n-1} : x_n^d)A + (L_n : x_n^d)A \\ &= L_1 A + \dots + L_{n-1} A + (L_n : x_n^d)A, \end{aligned}$$

так как идеалы $L_1, \dots, L_{n-1}$ не имеют порождающих, делящихся на x_n . Идеал $(L_n : x_n^d) \subseteq A(n)$ является, очевидно, лекссегментным, следовательно, по предложению 2.4 идеал J кусочно лекссегментен.

Пусть I – мономиальный идеал в A . Через $I_{n=d}$ обозначим идеал в кольце $A(n-1)$, порожденный такими мономами $u \in A(n-1)$, что $ux_n^d \in I$.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. *Если идеал $I \subseteq A$ кусочно лекссегментный, то идеал $I_{n=d} \subseteq A(n-1)$ кусочно лекссегментный при всех $d \geq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $J = (I : x_n^d)$, этот идеал кусочно лекссегментный по предыдущему следствию. Для завершения доказательства достаточно заметить, что $I_{n=d} = J(n-1)$ и, следовательно, является кусочно лекссегментным по предложению 2.2.

§3. Теорема Маколея для кусочно лекссегментных идеалов

В этом параграфе приводятся результаты, обобщающие комбинаторную теорему Маколея [1].

Пусть I – некоторый мономиальный идеал в кольце A , $R = A/I$ – факторкольцо, R_d, I_d – множества мономов степени d в R и I соответственно. Так как I – мономиальный идеал, то мономы в R можно упорядочить, индуцируя порядок с помощью лексикографического порядка в A .

Пусть $M \subseteq R_i$, через $D^R M$ обозначим множество, состоящее из старших мономов в R_i с условием $|D^R M| = |M|$, и через $C^R M$ – множество, состоящее из меньших мономов в R_i , $|C^R M| = |M|$ (верхний индекс “ R ” указывает в каком кольце

действуют операторы C и D). Если $a = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \in R_i$, то обозначим

$$\begin{aligned}\Gamma^R(a) &= \{x_1^{a_1-1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}, x_1^{a_1} x_2^{a_2-1} \dots x_n^{a_n}, \dots, x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n-1}\} \cap R_{i-1}, \\ \Gamma^R(M) &= \bigcup_{a \in M} \Gamma^R(a), \\ \Delta^R(a) &= \{x_1^{a_1+1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}, x_1^{a_1} x_2^{a_2+1} \dots x_n^{a_n}, \dots, x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n+1}\} \cap R_{i+1}, \\ \Delta^R(M) &= \bigcup_{a \in M} \Delta^R(a).\end{aligned}$$

Множество $M \subseteq R_i$ называется D^R -сжатым, если $D^R M = M$, и C^R -сжатым, если $C^R M = M$. Будем говорить, что в факторкольце R выполняется теорема Маколея, если

$$\forall i \geq 1, \quad \forall M \subseteq R_i \quad \Delta^R(D^R M) \subseteq D^R(\Delta^R(M)). \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. На самом деле, условие (1) можно заменить эквивалентным ему условием

$$\forall i \geq 1, \quad \forall M \subseteq R_i \quad |\Delta^R(D^R M)| \leq |\Delta^R(M)|,$$

так как в [9] показано, что для любых I и M множество $\Delta^R(D^R M)$ D^R -сжато.

Классическая теорема Маколея, доказанная в [1], получается из (1), если в качестве идеала I взять нулевой идеал (т.е. $R = A$). Из классической теоремы Маколея сразу следует, что (1) выполняется в факторкольцах вида $R = A/L$, где L — некоторый лексsegmentный идеал. Ниже будет доказано, что теорема Маколея выполняется в факторкольцах по всем кусочно лексsegmentным идеалам. Другие примеры факторколец, в которых выполняется теорема Маколея, приведены в [6] и [9].

Ниже приводится формулировка теоремы Маколея, часто оказывающаяся более удобной, чем (1); доказательство их эквивалентности содержится в [9].

ТЕОРЕМА 3.2. *Теорема Маколея в факторкольце R выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\forall i \geq 2, \quad \forall M \subseteq R_i \quad \Gamma^R(C^R M) \subseteq C^R \Gamma^R(M). \quad (2)$$

Кроме того, в [9] было показано, что справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Пусть $I \subseteq A$ — мономиальный идеал. Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) для всякого $d > 1$, для всякого C^R -сжатого множества $M \subseteq R_d$ множество $\Gamma^R(M)$ тоже C^R -сжато;
- 2) для всякого $d > 0$ и для любых мономов a и b , удовлетворяющих условиям $a \in R_{d+1}$, $b \in R_d$, $bx_n < a$ и $bx_i \in I$, если $bx_i < a$, выполнено равенство $a = bx_l$ для некоторого l .

Более того, каждое из этих эквивалентных утверждений необходимо для выполнения теоремы Маколея в $R = A/I$.

При доказательстве теоремы Маколея в факторкольцах по кусочно лексsegmentным идеалам существенным является то, что все кусочно лексsegmentные идеалы являются сильно устойчивыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Множество $M \subseteq A_d$ называется *сильно устойчивым*, если из того, что моном u принадлежит M , следует, что $ux_i/x_j \in M$, если $x_j|u$ и $i < j$. Мономидальный идеал $I \subseteq A$ называется *сильно устойчивым*, если множество I_d является сильно устойчивым для всякого d .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Всякий кусочно лекссегментный идеал $J \subseteq A$ является сильно устойчивым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно (см. [12]), для доказательства сильной устойчивости достаточно установить, что для всех $u \in G(J)$ выполнено $ux_i/x_j \in J$, если только $x_j|u$ и $i < j$. Это сразу следует из определения кусочно лекссегментного идеала, нужно лишь заметить, что $ux_i/x_j > u$ и $t(ux_i/x_j) \leq t(u)$.

Следует отметить, однако, что далеко не все сильно устойчивые идеалы являются кусочно лекссегментными. В качестве примера можно рассмотреть идеал, порожденный мономами $x_1^3, x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_1x_2^2, x_1x_2x_3, x_2^3$ и $x_2^2x_3$ в кольце $k[x_1, x_2, x_3]$; он сильно устойчив, но не кусочно лекссегментен.

Для сильно устойчивых идеалов выполняется следующее простое свойство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. *Пусть J – сильно устойчивый идеал и моном ux_n принадлежит J . Тогда либо $u \in J$, либо $ux_n \in G(J)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $ux_n \notin G(J)$, то существует такое $l \leq n$, что $u' = ux_n/x_k \in I$. Так как I сильно устойчивый, то $u'x_k/x_n = u \in I$.

Для сильно устойчивых идеалов предложение 3.3 можно переформулировать следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. *Пусть $I \subseteq A$ – сильно устойчивый идеал. Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) для всякого $d > 1$, для всякого C^R -сжатого множества $M \subseteq R_d$ множество $\Gamma^R(M)$ тоже C^R -сжато;
- 2) для всякого $d > 0$ и для любых мономов a и b , удовлетворяющих условиям $a \in A_{d+1}$, $b \in R_d$, $bx_n < a$ и $bx_n \in I$, выполнено $a \in I$.

Более того, каждое из этих эквивалентных утверждений необходимо для выполнения теоремы Маколея в $R = A/I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства предложения достаточно показать, что для сильно устойчивых идеалов утверждение 2) предложения 3.3 эквивалентно утверждению 2) предложения 3.7.

Пусть выполнено утверждение 2) предложения 3.3. Пусть мономы a и b удовлетворяют всем условиям, наложенным в утверждении 2) предложения 3.7. Если $a \notin I$, то $a \in R_{d+1}$, кроме того, $bx_i \in I$ при всех i по причине сильной устойчивости идеала I . Таким образом, из утверждения 2) предложения 3.3 следует, что $a = bx_l$, т.е. $a \in I$. Противоречие. Итак, предположение о том, что $a \notin I$, было неверно.

Пусть выполнено утверждение 2) предложения 3.7. Предположим, что существуют мономы a и b , удовлетворяющие всем условиям, наложенным в утверждении 2) предложения 3.3, но при этом $a \neq bx_l$ ни для какого l . Из утверждения 2) предложения 3.7 получаем, что $a \in I$. Противоречие с тем, что $a \in R_{d+1}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.8. Пусть $I \subseteq A$ – кусочно лекссегментный идеал. Тогда для всякого $d > 1$, для всякого C^R -сжатого множества $M \subseteq R_d$ множество $\Gamma^R(M)$ тоже C^R -сжато.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как I кусочно лекссегментный, то по предложению 3.5 он является сильно устойчивым. Следовательно, достаточно установить выполнение утверждения 2) предложения 3.7. Пусть мономы a и b удовлетворяют всем условиям утверждения 2) предложения 3.7. По предложению 3.6 $bx_n \in G(I)$, поэтому из определения кусочно лекссегментного идеала следует, что $a \in I$.

Подводя итог обсуждению условий, необходимых для выполнения теоремы Маколея в случае сильно устойчивого идеала I , сформулируем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. Пусть I – сильно устойчивый идеал и в $R = A/I$ выполняется теорема Маколея. Тогда I кусочно лекссегментный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторого $u \in G(I)$, $m(u) = l \leq n$, существует моном u' степени $d = \deg u$, $m(u') \leq l$, больший u , но который не принадлежит I . Для определенности считаем, что u' – наименьший моном степени d , больший u , имеющий $m(u') \leq l$ и не принадлежащий I . Обозначим $v = u/x_l$.

Моном u' делится на x_l , т.е. $m(u') = l$. Действительно, если u' не делится на x_l , то $u'' = u'x_{m(u')+1}/x_{m(u')} \in I$, так как u'' следующий по порядку за u' моном (и меньший его). Отсюда по причине сильной устойчивости идеала I получаем, что $u' \in I$. Противоречие.

Покажем, что $vx_n \notin I$. Предположим противное, тогда по лемме 3.6 либо $v \in I$, либо $vx_n \in G(I)$. Первое невозможно, так как $u \in G(I)$. Если же выполнено $vx_n \in G(I)$, то $v \notin I$. Из предложения 3.7 следует, что в этом случае $u' \in I$. Противоречие.

Пусть j – минимальное число, удовлетворяющее условию $vx_j \notin I$; так как I сильно устойчивый, то при $t \geq j$ имеем $vx_t \notin I$, а при $t < j$ имеем $vx_t \in I$. Рассмотрим множество

$$B = \{w \in R_d : w < vx_n\} \cup \{w \in R_d : u' \geq w > vx_j\}.$$

Покажем, что для множества B нарушается теорема Маколея, т.е. $\Gamma^R(C^R B) \not\subseteq C^R \Gamma^R(B)$. Действительно, пусть

$$B' = \{w \in R_{d-1} : w \leq u'/x_l\}.$$

Тогда $\Gamma^R(B) \subseteq B' \setminus \{v\}$. С другой стороны, так как $j > l$, то $u'x_n/x_l \in C^R(B)$, поэтому $u'/x_l \in \Gamma^R(C^R B)$, а так как Γ^R -образ C^R -сжатого множества C^R -сжат (предложение 3.7), то $\Gamma^R(C^R B) = B'$, т.е.

$$|\Gamma^R(C^R B)| > |\Gamma^R(B)| = |C^R \Gamma^R(B)|.$$

Противоречие.

Теперь мы докажем основной результат этого параграфа, показывающий, что необходимое условие из предыдущего предложения является достаточным для выполнения теоремы Маколея.

ТЕОРЕМА 3.10. Пусть I – кусочно лексисегментный идеал. Тогда в $R = A/I$ выполняется теорема Маколея.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем индукцией по числу переменных в $A = k[x_1, \dots, x_n]$. При $n = 1$ теорема очевидна. Предположим, что при $n - 1$ теорема уже доказана, докажем ее для n .

Напомним некоторые определения. Пусть $P \subseteq A$ – однородный идеал. Тогда через $\text{In}(P)$ обозначается его идеал старших членов (относительно обратного лексикографического порядка с $x_1 > x_2 > \dots > x_n$). Кроме того, существует такое непустое открытое по Зарискому множество в $\text{GL}(n, k)$, что для любых двух преобразований f и g , принадлежащих этому множеству, имеет место равенство $\text{In}(f(P)) = \text{In}(g(P))$, при этом идеал $\text{In}(f(P))$ называется *общим идеалом старших членов идеала P* и обозначается $\text{Gin}(P)$. Известно, что в описанном выше множестве преобразований есть преобразования с верхнетреугольными матрицами (см., например, [13]). Одним из главных свойств общего идеала старших членов является то, что если $\text{char } k = 0$, то он сильно устойчив (см. [13]).

ЛЕММА 3.11. Если I – сильно устойчивый идеал, а J – однородный идеал, содержащий I , то $I \subseteq \text{Gin}(J)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как I – сильно устойчивый идеал, то $f(I) = I$ для всякого невырожденного линейного преобразования переменных с верхнетреугольной матрицей (см., например, [13]). Следовательно, $\text{In}(f(I)) = I$. Осталось лишь вспомнить, что $\text{Gin}(J) = \text{In}(f(J))$ для некоторого невырожденного линейного преобразования f с верхнетреугольной матрицей.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. Лемма 3.11 позволяет перейти от рассмотрения произвольного множества $M \subseteq R_d$ к случаю, когда $M \cup I_d$ является сильно устойчивым. Действительно, пусть J идеал в A , порожденный I и M . Рассмотрим множество $M' = \text{Gin}(J)_d \setminus I_d$. Заметим, что $M' \cup I_d$ – сильно устойчивое множество, так как идеал $\text{Gin}(J)$ сильно устойчив. Имеем

$$|M'| = |\text{Gin}(J)_d| - |I_d| = |J_d| - |I_d| = |M|$$

(первое равенство – по лемме 3.11, а второе – из совпадения функций Гильберта J и $\text{Gin}(J)$). Кроме того,

$$|\Delta^R(M')| \leq |\text{Gin}(J)_{d+1}| - |I_{d+1}| = |J_{d+1}| - |I_{d+1}| = |\Delta^R(M)|.$$

Поэтому если показать, что $|\Delta^R(M')| \geq |\Delta^R(D^R M')|$, то получим $|\Delta^R(M)| \geq |\Delta^R(D^R M)|$, так как $D^R M' = D^R M$.

Если множество $M \subseteq R_d$ таково, что $M \cup I_d$ является сильно устойчивым, то множество $M' = R_d \setminus M$ является *обратно сильно устойчивым*, т.е. сильно устойчивым при обратном порядке переменных. Будем говорить, что в $R = A/I$ теорема Маколея выполняется для всех обратно сильно устойчивых множеств, если для всякого $i \geq 2$ и всякого обратно сильно устойчивого множества $M \subseteq R_i$ выполнено

$$\Gamma^R(C^R M) \subseteq C^R \Gamma^R(M). \quad (3)$$

ЛЕММА 3.13. Теорема Маколея в $R = A/I$ для всех обратно сильно устойчивых множеств выполняется тогда и только тогда, когда в R выполняется теорема Маколея.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала в R выполняется теорема Маколея для всех обратно сильно устойчивых множеств. Из замечания 3.12 следует, что достаточно доказать, что $|\Delta^R(M)| \geq |\Delta^R(D^R M)|$ для каждого множества $M \subseteq R_d$ такого, что $I_d \cup M$ сильно устойчиво. Предположим, что для некоторого множества M , удовлетворяющего этому условию, имеем $|\Delta^R(M)| < |\Delta^R(D^R M)|$. Пусть $M' = R_{d+1} \setminus \Delta^R(M)$, тогда M' обратно сильно устойчиво. Кроме того, пусть $M'' = R_{d+1} \setminus \Delta^R(D^R M)$. Тогда M'' C^R -сжато и $|M''| < |M'|$. Следовательно, существует моном $u \in C^R M' \setminus M''$, т.е. $u \in \Delta^R(D^R M) \cap C^R M'$. Так как для всех обратно сильно устойчивых множеств теорема Маколея выполняется, то $\Gamma^R(C^R M') \subseteq C^R \Gamma^R(M')$. Заметим, что $\Gamma^R(M') \cap M = \emptyset$, поэтому $D^R M \cap C^R \Gamma^R(M') = \emptyset$ и, следовательно, $D^R M \cap \Gamma^R(C^R M') = \emptyset$. Но так как $u \in \Delta^R(D^R M) \cap C^R M'$, то, с одной стороны, $u = u'x_j$, где $u' \in D^R M$, а с другой стороны, в этом случае $u' \in \Gamma^R(C^R M')$. Противоречие.

Пусть теперь в R выполняется теорема Маколея. По теореме 3.2 включение (3) справедливо для всех множеств M , в частности, для обратно сильно устойчивых.

Таким образом, для доказательства теоремы 3.10 достаточно показать, что теорема Маколея выполняется для всех обратно сильно устойчивых множеств.

Пусть $M \subseteq R_i$, тогда положим $M_{j=d} = \{x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \in M : a_j = d\}$ и обозначим через $C_{j=d}^R M$ множество, состоящее из наименьших мономов в $(R_i)_{j=d}$, удовлетворяющее условию $|C_{j=d}^R M| = |M_{j=d}|$. Если $C_{j=d}^R M = M_{j=d}$, то будем говорить, что множество M $C_{j=d}^R$ -сжато, а если $C_{j=d}^R M \neq M_{j=d}$ при всех d от 0 до i , то будем говорить, что множество M j -сжато.

ЛЕММА 3.14. Пусть $M \subseteq R_v$ — обратно сильно устойчивое множество, и пусть

$$M' = \bigcup_{d=0}^v C_{n=d}^R M.$$

Тогда

- 1) выполнено включение

$$\Gamma^R(M') \subseteq \bigcup_{d=0}^v C_{n=d}^R \Gamma^R(M);$$

- 2) множество M' обратно сильно устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \Gamma^R(M') &= \Gamma^R\left(\bigcup_{d=0}^v C_{n=d}^R M\right) = \bigcup_{d=0}^v \Gamma^R(C_{n=d}^R M) \\ &= \bigcup_{d=0}^v \Gamma^R(C_{n=d}^R M)_{n=d} \cup \bigcup_{d=1}^v \Gamma^R(C_{n=d}^R M)_{n=d-1}. \end{aligned}$$

В силу следствия 2.8 идеал $I_{n=d} \subseteq A(n-1)$ является кусочно лекссегментным. Тогда по предположению индукции в $A(n-1)/I_{n=d}$ выполняется теорема Маколея, т.е. $\Gamma^R(C_{n=d}^R M)_{n=d} \subseteq C_{n=d}^R \Gamma^R(M_{n=d})$. Следовательно,

$$\bigcup_{d=0}^v \Gamma^R(C_{n=d}^R M)_{n=d} \subseteq \bigcup_{d=0}^v C_{n=d}^R \Gamma^R(M_{n=d}) \subseteq \bigcup_{d=0}^v C_{n=d}^R \Gamma^R(M).$$

Покажем теперь, что $\Gamma^R(C_{n=d}^R M)_{n=d-1} = C_{n=d-1}^R \Gamma^R(M_{n=d})$. Действительно,

$$|\Gamma^R(C_{n=d}^R M)_{n=d-1}| = |C_{n=d}^R M| = |M_{n=d}| = |C_{n=d-1}^R \Gamma^R(M_{n=d})|.$$

Кроме того, множество $S = \Gamma^R(C_{n=d}^R M)_{n=d-1} \setminus C_{n=d-1}^R \Gamma^R(M_{n=d})$ -сжато, так как иначе нашлись бы два элемента $a, b \in (R_{v-1})_{n=d-1}$, удовлетворяющие условиям $a > b$, $a \in S, b \notin S$, т.е. $bx_n \in I$, откуда сразу следует (в силу кусочной лексегментности идеала I), что $ax_n \in I$. Противоречие, так как $ax_n \in C_{n=d}^R M$. Таким образом, множества $\Gamma^R(C_{n=d}^R M)_{n=d-1}$ и $C_{n=d-1}^R \Gamma^R(M_{n=d})$ имеют одинаковую мощность и они оба $C_{n=d-1}^R$ -сжаты, следовательно, они совпадают. Окончательно получаем

$$\bigcup_{d=1}^v \Gamma^R(C_{n=d}^R M)_{n=d-1} = \bigcup_{d=1}^v C_{n=d-1}^R \Gamma^R(M_{n=d}) \subseteq \bigcup_{d=1}^v C_{n=d-1}^R \Gamma^R(M),$$

откуда следует, что

$$\Gamma^R(M') = \bigcup_{d=0}^v \Gamma^R(C_{n=d}^R M)_{n=d} \cup \bigcup_{d=1}^v \Gamma^R(C_{n=d}^R M)_{n=d-1} \subseteq \bigcup_{d=0}^v C_{n=d}^R \Gamma^R(M).$$

Докажем теперь второе утверждение. Пусть $u \in M'$, т.е. $u \in C_{n=d}^R M$ для некоторого d . Пусть $i < j \leq n$. Если $j < n$, то $ux_j/x_i \in C_{n=d}^R M$, так как $C_{n=d}^R M$ $C_{n=d}^R$ -сжато. Следовательно, $ux_j/x_i \in M'$. Если $j = n$, то достаточно показать, что $\Gamma^R(C_{n=d}^R M)_{n=d} \subseteq \Gamma^R(C_{n=d+1}^R M)_{n=d}$. Для доказательства этого заметим, что в силу обратной сильной устойчивости множества M выполнено включение $\Gamma^R(M_{n=d})_{n=d} \subseteq \Gamma^R(M_{n=d+1})_{n=d}$, откуда следует, что $C_{n=d}^R \Gamma^R(M_{n=d}) \subseteq C_{n=d}^R \Gamma^R(M_{n=d+1})$. Кроме того, выше было доказано, что $C_{n=d}^R \Gamma^R(M_{n=d+1}) = \Gamma^R(C_{n=d+1}^R M)_{n=d}$ и $\Gamma^R(C_{n=d}^R M)_{n=d} \subseteq C_{n=d}^R \Gamma^R(M_{n=d})$. Таким образом,

$$\Gamma^R(C_{n=d}^R M)_{n=d} \subseteq \Gamma^R(C_{n=d+1}^R M)_{n=d}.$$

ЛЕММА 3.15. Пусть $M \subseteq R_v$ — обратно сильно устойчивое n -сжатое множество, элементы $h = x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n} \in M$, $g = x_1^{g_1} \dots x_n^{g_n} \in R_v$. Если $h_n \leq g_n$ и $g < h$, то $g \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим элемент $h' = x_1^{h'_1} \dots x_n^{h'_n}$, удовлетворяющий следующим условиям: $h' \in M$, $h'_n \leq g_n$ и $h > h' \geq g$.

Если $h_n = g_n$, то $h' = g$.

Пусть $h_n < g_n$. Так как $g < h$, то существует такое s , что $h_i = g_i$ при $i < s$ и $h_s > g_s$. Если для некоторого $t > s$ имеем $h_t > g_t$, то положим $h' = hx_n/x_t$ ($h' \in M$ в силу обратной сильной устойчивости множества M). Если же для всех $t > s$ выполняется неравенство $h_t \leq g_t$, то положим $h' = hx_n/x_s$. Аналогично, в силу обратной сильной устойчивости множества M получаем, что $h' \in M$. Кроме того, очевидно, что $h > h'$ и $h'_t \leq g_t$ при $t > s$. Следовательно, если $h'_s = g_s$, то $h' = g$, а если $h'_s > g_s$, то $h' > g$, т.е. всегда $h' \geq g$.

Таким образом, элемент h' построен. Если $h' = g$, то $g \in M$ и лемма доказана. Если $h' > g$, то применим описанную выше процедуру к h' и g и получим h'' и т.д.; за конечное число шагов получим, что $g \in M$.

Итак, докажем теорему Маколея для обратно сильно устойчивых множеств. Пусть $M \subseteq R_v$ – произвольное обратно сильно устойчивое множество. Покажем сначала, что $|\Gamma^R(M)| \geq |\Gamma^R(C^R M)|$.

Рассмотрим множество M' из леммы 3.14. Оно n -сжато по определению, кроме того, оно обратно сильно устойчиво и для него выполняется включение $\Gamma^R(M') \subseteq \bigcup_{d=0}^v C_{n=d}^R \Gamma^R(M)$, в частности, $|\Gamma^R(M')| \leq |\bigcup_{d=0}^v C_{n=d}^R \Gamma^R(M)| = |\Gamma^R(M)|$. Положим $T' = \Gamma^R(M')$.

Если $M' = R_v$, то $M = R_v$ и, очевидно, $\Gamma^R(C^R M) = C^R(\Gamma^R(M))$.

Если $M' \neq R_v$, то через $h = x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_n^{h_n}$ обозначим наибольший моном в M' и через $g = x_1^{g_1} x_2^{g_2} \dots x_n^{g_n}$ – наименьший моном в $R_v \setminus M'$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $g > h$. Значит, $M' = C^R M$ и, следовательно, $|\Gamma^R(C^R M)| = |\Gamma^R(M')| \leq |\Gamma^R(M)|$.

2) Пусть $g < h$. По лемме 3.15 $h_n > 0$, так как M' обратно сильно устойчиво и n -сжато. Положим $h' = x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_n^{h_n-1}$ и $g' = x_1^{g_1} x_2^{g_2} \dots x_n^{g_n-1}$, если $g_n > 0$. Так как $\Gamma^R(M') \subseteq T'$, то $h' \in T'$. Обозначим

$$M'' = (M' \setminus \{h\}) \cup \{g\},$$

$$T'' = \begin{cases} T', & g_n = 0; \\ (T' \setminus \{h'\}) \cup \{g'\}, & g_n > 0. \end{cases}$$

Покажем, что $\Gamma^R(M'') \subseteq T''$.

Пусть $f \in M' \setminus \{h\}$. Тогда $h' \notin \Gamma^R(f)$. Следовательно, $\Gamma^R(M' \setminus \{h\}) \subseteq T''$.

Пусть $g_n > 0$. Тогда $g' \in T''$ по построению. Если существует такое i , $1 \leq i \leq n-1$, что $g_i > 0$, то $x_1^{g_1} x_2^{g_2} \dots x_i^{g_i-1} \dots x_n^{g_n} \in \Gamma^R(g)$. Моном $g'' = x_1^{g_1} x_2^{g_2} \dots x_i^{g_i-1} \dots x_n^{g_n+1}$ принадлежит M' , так как $g'' < g$ и g наименьший в $R_v \setminus M'$ ($g'' \in R_v$ в силу сильной устойчивости идеала I). Таким образом, $\Gamma^R(g) \subseteq T' \cup \{g'\}$. Заметим далее, что $h' \notin \Gamma^R(g)$ и, значит, $\Gamma^R(g) \subseteq T''$.

Пусть $g_n = 0$. Тогда если $g_i > 0$, то снова $g'' = x_1^{g_1} x_2^{g_2} \dots x_i^{g_i-1} \dots x_n^{g_n+1} \in M'$, поэтому $x_1^{g_1} x_2^{g_2} \dots x_i^{g_i-1} \dots x_n^{g_n} \in \Gamma^R(g'')$, т.е. $\Gamma^R(g) \subseteq T' = T''$.

Таким образом, $\Gamma^R(M'') \subseteq T''$. Кроме того, $|M''| = |M'|$, $|T''| \leq |T'|$ и M'' – обратно сильно устойчивое n -сжатое множество. Следовательно, к множествам M'' и T'' можно применить аналогичное рассуждение и получить M''' и T''' и т.д. За конечное число шагов получим $M' \dots' = C^R M$ и $\Gamma^R(M' \dots') = \Gamma^R(C^R M) \subseteq T' \dots'$. Следовательно,

$$|\Gamma^R(C^R M)| \leq |T' \dots'| \leq \dots \leq |T'| = |\Gamma^R(M')| \leq |\Gamma^R(M)|.$$

Таким образом, $|\Gamma^R(C^R M)| \leq |\Gamma^R(M)|$. Кроме того, из кусочной лексsegmentности идеала I следует (см. следствие 3.8), что множество $\Gamma^R(C^R M)$ C^R -сжато, поэтому $\Gamma^R(C^R M) \subseteq C^R(\Gamma^R(M))$. Теорема 3.10 доказана полностью.

Комбинируя предложение 3.9 и теорему 3.10, получаем следующее

СЛЕДСТВИЕ 3.16. Пусть I – сильно устойчивый идеал. Теорема Маколея в факторкольце $R = A/I$ выполняется тогда и только тогда, когда I кусочно лексsegmentный.

Завершая этот параграф, приведем следствия теоремы Маколея в терминах функций Гильберта.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.17. Пусть $I \subseteq A$ – некоторый мономиальный идеал. Идеал $J \subseteq A$ называется *I -лекссегментным*, если его можно представить в виде $J = I + L$, где $L \subseteq A$ – некоторый лекссегментный идеал. В частности, для всякого I -лекссегментного идеала J выполнено включение $I \subseteq J$.

СЛЕДСТВИЕ 3.18. Пусть $I \subseteq A$ – кусочно лекссегментный идеал и $J \subseteq A$ – однородный идеал, содержащий I . Тогда существует единственный I -лекссегментный идеал $L^I(J)$ такой, что функции Гильберта идеалов J и $L^I(J)$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала существование. Достаточно рассмотреть случай, когда идеал J мономиальный. Действительно, пусть $J' = \text{In}(J)$ – идеал старших членов идеала J относительно обратного лексикографического порядка. Тогда $J' \supseteq I$, так как I мономиальный. Кроме того, функции Гильберта идеалов J' и J совпадают.

Если J мономиальный, то рассмотрим такой мономиальный идеал L , что $L_i = I_i \cup D^R(J_i \setminus I_i)$. Существование такого идеала следует из того, что в $R = A/I$ выполняется теорема Маколея:

$$\Delta^R(D^R(J_i \setminus I_i)) \subseteq D^R(\Delta^R(J_i \setminus I_i)) \subseteq D^R(J_{i+1} \setminus I_{i+1}).$$

Очевидно, что идеал L I -лекссегментный и что функции Гильберта идеалов J и L совпадают.

Единственность сразу следует из требований I -лекссегментности и совпадения функций Гильберта.

СЛЕДСТВИЕ 3.19. Пусть $I \subseteq A$ – кусочно лекссегментный идеал, $R = A/I$ и задана функция $H: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, $H(0) = 1$. Пусть $M_d \subseteq R_d$ – D^R -сжатое множество, $|M_d \cup I_d| = H(d)$. Функция H является функцией Гильберта некоторого однородного идеала в кольце A , содержащего I , тогда и только тогда, когда $|\Delta^R(M_d)| \leq |M_{d+1}|$ для всех $d \geq 1$.

§ 4. Неравенство для чисел Бетти

После того как для факторколец по кусочно лекссегментным идеалам доказана теорема Маколея, естественно исследовать вопрос о возможности обобщения других результатов, связанных с ней, на случай кусочно лекссегментных идеалов. Одним из самых известных результатов, обобщающих теорему Маколея в кольце многочленов, является неравенство для чисел Бетти однородных идеалов, полученное независимо в статьях [2] и [3]. В этом параграфе мы докажем следующее обобщение этого неравенства.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $I \subseteq A$ – кусочно лекссегментный идеал, $J \subseteq A$ – однородный идеал, содержащий I , и $L^I(J)$ – соответствующий I -лекссегментный идеал. Тогда для всех i и j выполнено неравенство

$$\beta_{i,i+j}^A(J) \leq \beta_{i,i+j}^A(L^I(J)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим идеал $\text{Gin}(J)$. Как уже отмечалось выше, этот идеал сильно устойчив и функции Гильберта идеалов $\text{Gin}(J)$ и J совпадают. Кроме того, по лемме 3.11 идеал $\text{Gin}(J)$ содержит I и $L^I(\text{Gin}(J)) = L^I(J)$. Известно также (см., например, [13]), что

$$\beta_{i,i+j}^A(J) \leq \beta_{i,i+j}^A(\text{Gin}(J)).$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\beta_{i,i+j}^A(J) \leq \beta_{i,i+j}^A(L^I(J))$$

только для сильно устойчивых идеалов J , содержащих идеал I .

Введем следующие обозначения: если $M \subseteq A_d$, то положим

$$m_i(M) = |\{u \in M : m(u) = i\}|$$

и

$$M_i(M) = |\{u \in M : m(u) \leq i\}|.$$

ЛЕММА 4.2. Пусть $M \subseteq R_d$ — обратно сильно устойчивое множество. Тогда $|\Gamma^R(M)| = m_n(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, каждому элементу $u \in M$ с $m(u) = n$ можно сопоставить $u/x_n \in \Gamma^R(M)$, поэтому $|\Gamma^R(M)| \geq m_n(M)$. Пусть теперь $u \in M$ и $i < n$, тогда $u/x_i = u'/x_n$, где $u' = ux_n/x_i \in M$ в силу обратной сильной устойчивости. Следовательно, $|\Gamma^R(M)| \leq m_n(M)$.

ЛЕММА 4.3. Пусть $M \subseteq R_d$ и $M \cup I_d$ сильно устойчиво. Тогда для всех i от 1 до n выполнено неравенство

$$M_i(D^R M \cup I_d) \leq M_i(M \cup I_d).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по n — числу переменных в $A = k[x_1, \dots, x_n]$. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что лемма доказана при $n - 1$, докажем ее при n .

Покажем, что $m_n(D^R M \cup I_d) \geq m_n(M \cup I_d)$. Действительно, рассмотрим множество $M' = R_d \setminus M$, это множество обратно сильно устойчиво. Так как I кусочно лексsegmentный, то в R выполняется теорема Маколея. Поэтому $|\Gamma^R(M')| \geq |\Gamma^R(C^R M')|$. По лемме 4.2 $|\Gamma^R(M')| = m_n(M')$ и $|\Gamma^R(C^R M')| = m_n(C^R M')$, следовательно, $m_n(M') \geq m_n(C^R M')$. Но так как $m_n(M') = m_n(A_d \setminus (I_d \cup M))$, то $m_n(I_d \cup M) = m_n(A_d) - m_n(M')$. Аналогично, $m_n(I_d \cup D^R M) = m_n(A_d) - m_n(C^R M')$, поэтому $m_n(D^R M \cup I_d) \geq m_n(M \cup I_d)$.

Рассмотрим идеал $J = I \cap A(n-1) \subseteq A(n-1)$, а также множества $S = M \cap A(n-1)_d$ и $T = D^R M \cap A(n-1)_d$. Пусть $R' = A(n-1)/J$. Идеал J является кусочно лексsegmentным по предложению 2.2, кроме того, множество $S \cup J_d$ является сильно устойчивым, а $T - D^R$ -сжатым. Заметим, что $J_d = \{u \in I_d : m(u) < n\}$, поэтому $|J_d \cup S| = |I_d \cup M| - |m_n(I_d \cup M)|$ и $|J_d \cup T| = |I_d \cup D^R M| - |m_n(I_d \cup D^R M)|$, а также

$$M_i(S \cup J_d) = M_i(M \cup I_d), \quad (4)$$

$$M_i(T \cup J_d) = M_i(D^R M \cup I_d) \quad (5)$$

при i от 1 до $n - 1$. Заметим далее, что

$$\begin{aligned} |S| &= |J_d \cup S| - |J_d| = |I_d \cup M| - |m_n(I_d \cup M)| - |J_d| \\ &\geq |I_d \cup D^R M| - |m_n(I_d \cup D^R M)| - |J_d| = |T|. \end{aligned}$$

Пусть S' – такое подмножество в S , что $S' \cup J_d$ является сильно устойчивым (в $A(n - 1)$) и $|S'| = |T|$, т.е. $T = D^{R'} S'$ (для получения S' можно, например, убрать из S нужное количество младших мономов). По предположению индукции

$$M_i(T \cup J_d) \leq M_i(S' \cup J_d)$$

при i от 1 до $n - 1$. А так как $S' \subseteq S$, то

$$M_i(T \cup J_d) \leq M_i(S \cup J_d).$$

Используя равенства (4) и (5), получаем

$$M_i(D^R M \cup I_d) \leq M_i(M \cup I_d)$$

при i от 1 до $n - 1$. Осталось доказать лишь, что

$$M_n(D^R M \cup I_d) \leq M_n(M \cup I_d),$$

но это очевидно, так как

$$M_n(D^R M \cup I_d) = |D^R M \cup I_d| = |M \cup I_d| = M_n(M \cup I_d).$$

Лемма доказана.

Завершим теперь доказательство теоремы 4.1. В [12] Эльяу и Кервер показали, что

$$\beta_{i,i+j}^A(J) = \sum_{l=1}^n \binom{l-1}{i} (m_l(J_j) - M_l(J_{j-1})) \quad (6)$$

для всякого сильно устойчивого идеала $J \subseteq A$. Преобразуем предыдущее выражение:

$$\begin{aligned} \beta_{i,i+j}^A(J) &= \sum_{l=1}^n \binom{l-1}{i} (M_l(J_j) - M_{l-1}(J_j) - M_l(J_{j-1})) \\ &= \sum_{l=1}^n \binom{l-1}{i} (M_l(J_j) - M_l(J_{j-1})) - \sum_{l=0}^{n-1} \binom{l}{i} M_l(J_j) \\ &= \binom{n-1}{i} M_n(J_j) - \sum_{l=1}^n \binom{l-1}{i} M_l(J_{j-1}) \\ &\quad - \sum_{l=1}^{n-1} \left(\binom{l}{i} - \binom{l-1}{i} \right) M_l(J_j) \\ &= \binom{n-1}{i} |J_j| - \sum_{l=1}^n \binom{l-1}{i} M_l(J_{j-1}) - \sum_{l=1}^{n-1} \binom{l-1}{i-1} M_l(J_j). \end{aligned}$$

Итак, пусть J – сильно устойчивый идеал, содержащий I . Заметим, что $L^I(J)_j \cap R_j = D^R(J_j \cap R_j)$ и J_j – сильно устойчивое множество. Следовательно, по лемме 4.3 $M_s(L^I(J)_j) \leq M_s(J_j)$, причем это неравенство справедливо при всех j и s . Так как идеалы J и $L^I(J)$ являются сильно устойчивыми, то, применяя формулу Эльяу–Кервера (6), получаем

$$\begin{aligned} \beta_{i,i+j}^A(J) &= \binom{n-1}{i} |J_j| - \sum_{l=1}^n \binom{l-1}{i} M_l(J_{j-1}) - \sum_{l=1}^{n-1} \binom{l-1}{i-1} M_l(J_j) \\ &\leq \binom{n-1}{i} |L^I(J)_j| - \sum_{l=1}^n \binom{l-1}{i} M_l(L^I(J)_{j-1}) \\ &\quad - \sum_{l=1}^{n-1} \binom{l-1}{i-1} M_l(L^I(J)_j) = \beta_{i,i+j}^A(L^I(J)), \end{aligned}$$

так как $|J_j| = |L^I(J)_j|$. Теорема 4.1 доказана.

Из теоремы 4.1 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $I \subseteq A$ – кусочно лекссегментный идеал, и пусть задана функция $H: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$. Пусть $C_{I,H}$ – множество всех однородных идеалов в кольце A , которые содержат I и функция Гильберта которых совпадает с H . Если множество $C_{I,H}$ непусто, то в нем найдется такой элемент L , что для всякого $J \in C_{I,H}$ и для всех i и j выполнено неравенство

$$\beta_{i,i+j}^A(J) \leq \beta_{i,i+j}^A(L).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если множество $C_{I,H}$ непусто, то существует некоторый $J \in C_{I,H}$. По следствию 3.18 имеем $L^I(J) \in C_{I,H}$. По теореме 4.1 $L = L^I(J)$ обладает нужным свойством.

§ 5. I -гоцмановы идеалы и их числа Бетти

Особый интерес вызывают свойства множеств, экстремальных в смысле теоремы Маколея, т.е. таких множеств $M \subseteq R_d$, для которых неравенство

$$|\Delta^R(D^R M)| \leq |\Delta^R(M)|$$

превращается в равенство. Если $R = A$, т.е. $I = (0)$, то векторное пространство, порожденное мономами экстремального множества $M \subseteq A_d$, называется *гоцмановым*. Оказывается, что многие свойства гоцмановых векторных пространств можно обобщить на случай, когда идеал I является кусочно лекссегментным.

Пусть I – кусочно лекссегментный идеал, $R = A/I$ и $\delta(I)$ есть максимальная степень порождающих идеала I , т.е. $\delta(I) = \max\{\deg u : u \in G(I)\}$.

Будем говорить, что векторное пространство $V \subseteq A$ *мономиально*, если в нем можно выбрать базис, состоящий из мономов, в этом случае через $B(V)$ обозначим мономиальный базис V . Если $S \subseteq A$, то обозначим через $\langle S \rangle$ векторное пространство, порожденное S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Мономиальное пространство $V \subseteq \langle A_d \rangle$ называется *I-лекс-сегментным*, если

- 1) $I_d \subseteq B(V)$;
- 2) $B(V) \setminus I_d$ есть D^R -сжатое множество.

Например, если идеал $J \subseteq A$ *I-лекссегментный*, то $\langle J_d \rangle$ есть *I-лекссегментное* векторное пространство.

Если $V \subseteq \langle A_d \rangle$ – векторное пространство, содержащее I_d , то через $L^I(V)$ обозначим *I-лекссегментное* векторное пространство, порожденное мономами степени d и имеющее размерность, равную размерности V , а через xV обозначим векторное пространство, порожденное всеми многочленами вида $x_i f$, где $f \in V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Векторное пространство $V \subseteq \langle A_d \rangle$ называется *I-гоцмановым*, если

- 1) $d \geq \delta(I) = \max\{\deg u : u \in G(I)\}$;
- 2) $I_d \subseteq V$;
- 3) $\dim xV = \dim xL^I(V)$.

Будем называть однородный идеал J *I-гоцмановым*, если все пространства $\langle J_d \rangle$ *I-гоцмановы* при $d \geq \delta(I)$ и $\langle J_d \rangle = \langle I_d \rangle$ при $d < \delta(I)$; иначе говоря, идеалы J и $L^I(J)$ имеют одинаковое количество минимальных порождающих каждой степени и, кроме того, их градуированные компоненты совпадают с соответствующими компонентами идеала I при $d < \delta(I)$.

Следующая теорема обобщает теорему Гоцмана [10].

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть I – кусочно лекссегментный идеал, $V \subseteq \langle A_d \rangle$ – *I-гоцманово* векторное пространство. Тогда xV тоже *I-гоцманово*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства потребуется следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4. Мономиальное пространство $V \subseteq \langle A_d \rangle$ называется *сильно устойчивым*, если множество $B(V)$ является сильно устойчивым.

Докажем сначала несколько вспомогательных лемм.

Положим $m_i(V) = m_i(B(V))$ и $M_i(V) = M_i(B(V))$ для мономиального пространства $V \subseteq A$. Доказательство следующей простой леммы можно найти в [2].

ЛЕММА 5.5. Пусть $V \subseteq \langle A_d \rangle$ – *сильно устойчивое* пространство. Тогда

- 1) для всякого i от 1 до n

$$m_i(xV) = M_i(V);$$

- 2) справедливо

$$\dim xV = \sum_{i=1}^n M_i(V).$$

Доказательство теоремы 5.3 начнем с рассмотрения случая сильно устойчивого векторного пространства.

ЛЕММА 5.6. Пусть $V \subseteq \langle A_d \rangle$ – *сильно устойчивое I-гоцманово* пространство. Тогда $V' = xV$ тоже *I-гоцманово*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по лемме 5.5.2)

$$\sum_{i=1}^n M_i(V) = \dim xV = \dim xL^I(V) = \sum_{i=1}^n M_i(L^I(V))$$

(среднее равенство – в силу I -гоцмановости V). Следовательно, по лемме 4.3 получаем, что для всякого i от 1 до n выполняются равенства $M_i(V) = M_i(L^I(V))$ и $m_i(V) = m_i(L^I(V))$. Далее, снова по лемме 5.5.2) и 1)

$$\dim xV' = \sum_{i=1}^n M_i(V') = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i M_j(V) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i M_j(L^I(V)) = \dim x(xL^I(V)).$$

Осталось заметить, что $xL^I(V) = L^I(V')$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть W – идеал, порожденный V . Заметим, что $I \subseteq W$, так как $d \geq \delta(I)$. Рассмотрим далее идеал $J = \text{Gin}(W)$. Этот идеал сильно устойчив, кроме того, по лемме 3.11 $I \subseteq J$. Так как

$$\dim x\langle W_d \rangle = \dim \langle J_{d+1} \rangle \geq \dim x\langle J_d \rangle \geq \dim x\langle W_d \rangle$$

(последнее неравенство – по теореме 3.10 и в силу I -гоцмановости $\langle W_d \rangle$), то $\langle J_{d+1} \rangle = x\langle J_d \rangle$ и $\dim x\langle J_d \rangle = \dim x\langle W_d \rangle$, т.е. $\langle J_d \rangle$ I -гоцманово. По лемме 5.6 получаем, что $\langle J_{d+1} \rangle$ I -гоцманово. Если показать, что $\langle J_{d+2} \rangle = x\langle J_{d+1} \rangle$, то получим, что $\langle W_{d+1} \rangle = xV$ I -гоцманово. Иными словами, нужно показать, что у идеала J нет минимальных порождающих степени $d+2$.

Переход от идеала W к $J = \text{Gin}(W)$ можно осуществить в два этапа. Сначала при помощи общей линейной замены переменных перейти к идеалу W' . (Очевидно, что у идеала W' будут порождающие только степени d (как и у W).) Затем взять идеал старших членов $\text{In}(W')$ идеала W' относительно обратного лексикографического порядка, тогда $\text{In}(W') = \text{Gin}(W)$. Таким образом, достаточно показать, что при переходе от W' к $\text{In}(W')$ порождающие степени $d+2$ не появятся.

Предположим, что у $\text{In}(W')$ есть порождающая степени $d+2$, т.е. существуют такие $f_{ij} \in W'_d$ со старшими коэффициентами 1 и $\lambda_{ij} \in k \setminus \{0\}$, что для любых s, t и для любого $f \in W'_d$ выполнено

$$\text{Lt}\left(\sum_{i,j} \lambda_{ij} x_i x_j f_{ij}\right) \neq \text{Lt}(x_s x_t f).$$

Пусть $m = \text{Lt}\left(\sum_{i,j} \lambda_{ij} x_i x_j f_{ij}\right)$, $M = \max_{i,j} \text{Lt}(x_i x_j f_{ij})$. Будем считать, что данное представление m в виде $\text{Lt}\left(\sum_{i,j} \lambda_{ij} x_i x_j f_{ij}\right)$ имеет минимальное число слагаемых, у которых старший член равен M . Заметим, что $M > m$, поэтому таких слагаемых по крайней мере два. Пусть эти слагаемые суть $\lambda_{ij} x_i x_j f_{ij}$ и $\lambda_{lk} x_l x_k f_{lk}$. Так как равенство $x_i x_j = x_k x_l$ невозможно (иначе число слагаемых можно уменьшить), то считаем, что $i < l$. Пусть $\text{Lt}(f_{ij}) = u$, разберем два случая.

Если $x_l | u$, то, так как идеал $\text{In}(W')$ сильно устойчивый, имеем $x_i u / x_l = \text{Lt}(f)$ для некоторого $f \in W'_d$ со старшим коэффициентом 1. Следовательно, $\text{Lt}(x_l x_j f) = M$, поэтому

$$m = \lambda_{ij} x_j (x_i f_{ij} - x_l f) + \lambda_{lk} x_l (x_k f_{lk} - x_j f) - (\lambda_{ij} + \lambda_{lk}) x_l x_j f + \text{остальные члены.}$$

Рассмотрим $h = x_i f_{ij} - x_l f$. Заметим, что $\text{Lt}(h) < M/x_j$. Так как $\text{In}(W')$ не имеет порождающих степени $d+1$, то $\text{Lt}(h) = \text{Lt}(x_{s_1} f_1)$ для некоторого $f_1 \in W'_d$ со старшим коэффициентом 1. Выберем λ_1 так, чтобы $\text{Lt}(h - \lambda_1 x_{s_1} f_1) < \text{Lt}(h)$. Рассмотрим далее $h_1 = h - \lambda_1 x_{s_1} f_1$ и найдем $\lambda_2 x_{s_2} f_2$ из условий $f_2 \in W'_d$, $\text{Lt}(h_1) = \text{Lt}(x_{s_2} f_2)$ и $\text{Lt}(h_1 - \lambda_2 x_{s_2} f_2) < \text{Lt}(h_1)$; и т. д. Так как $\text{Lt}(h_i) > \text{Lt}(h_{i+1})$, то процесс на каком-то шаге остановится и мы получим $h = \sum_{p=1}^s \lambda_p x_{s_p} f_p$, причем $\text{Lt}(x_{s_p} f_p) < M/x_j$. Аналогично, $x_k f_{lk} - x_j f = \sum_{p=1}^t \mu_p x_{t_p} g_p$, где $\text{Lt}(x_{t_p} g_p) < M/x_l$. Таким образом,

$$m = \lambda_{ij} x_j \sum_{p=1}^s \lambda_p x_{s_p} f_p + \lambda_{lk} x_l \sum_{p=1}^t \lambda_p x_{t_p} g_p - (\lambda_{ij} + \lambda_{lk}) x_l x_j f \\ + \text{остальные члены.}$$

Заметим, что число членов, имеющих старший член M , уменьшилось, что невозможно. Противоречие.

Если же $x_l \nmid u$, то $x_l = x_j$ и тогда

$$m = \lambda_{ij} x_l (x_i f_{ij} - x_k f_{lk}) + (\lambda_{ij} + \lambda_{lk}) x_l x_k f_{lk} + \text{остальные члены.}$$

Рассуждая как и выше, получаем, что $x_i f_{ij} - x_k f_{lk} = \sum_{p=1}^s \lambda_p x_{s_p} f_p$, причем $\text{Lt}(x_{s_p} f_p) < M/x_l$. Поэтому

$$m = \lambda_{ij} x_l \sum_{p=1}^s \lambda_p x_{s_p} f_p + (\lambda_{ij} + \lambda_{lk}) x_l x_k f_{lk} + \text{остальные члены.}$$

Снова число членов, имеющих старший член M , уменьшилось. Противоречие. Теорема 5.3 доказана полностью.

Следующая теорема, обобщающая результат статьи [14], показывает, что I -гоцманов идеал и соответствующий ему I -лекссегментный идеал имеют сходные гомологические характеристики.

ТЕОРЕМА 5.7. Пусть I — кусочно лекссегментный идеал, J — I -гоцманов идеал. Тогда J и $L^I(J)$ имеют одинаковые градуированные числа Бетти (как модули над A).

Доказательство опирается на следующие леммы.

ЛЕММА 5.8. Пусть J — I -гоцманов идеал и $\text{Gin}(J)$ — его общий идеал старших членов. Тогда J и $\text{Gin}(J)$ имеют одинаковые градуированные числа Бетти, в частности, общий идеал старших членов J -гоцманова идеала тоже J -гоцманов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J' идеал, порожденный J_d .

Если $d < \delta(I)$, то $J_d = I_d$ и, следовательно, идеал J' сильно устойчив. Из формулы Эльяу-Кервера (6) следует, что идеал J' имеет линейную резольвенту.

Если $d \geq \delta(I)$, то по теореме 5.3 векторные пространства $\langle J'_i \rangle$ — I -гоцмановы, т. е. $J' - I$ -гоцманов идеал. Покажем, что $\text{Gin}(J')$ порождается элементами степени d . Действительно, если у $\text{Gin}(J')$ есть порождающая степени $d' > d$, то

$$\dim \mathbf{x} \langle \text{Gin}(J')_{d'-1} \rangle < \dim \langle \text{Gin}(J')_{d'} \rangle = \dim \langle J'_{d'} \rangle \\ = \dim \mathbf{x} \langle J'_{d'-1} \rangle \leq \dim \mathbf{x} \langle \text{Gin}(J')_{d'-1} \rangle$$

(первое равенство следует из совпадения функций Гильберта J' и $\text{Gin}(J')$, второе – из того, что у J' нет порождающих степени d' , а последнее неравенство – из теоремы 3.10). Противоречие. Таким образом, идеал $\text{Gin}(J')$ порожден мономами степени d , а так как он сильно устойчивый, то из формулы Эльяу–Кервера (6) опять следует, что его резольвента линейна [12]. Кроме того, так как при переходе от J' к $\text{Gin}(J')$ градуированные числа Бетти не убывают (см., например, [13]), то и $J' = (J_d)$ имеет линейную резольвенту.

Таким образом, при всех d идеал J' имеет линейную резольвенту. Как было показано в статье [15], градуированные числа Бетти однородного идеала J и его общего идеала старших членов $\text{Gin}(J)$ совпадают тогда и только тогда, когда все идеалы (J_d) , порожденные пространствами $\langle J_d \rangle$, имеют линейные резольвенты.

ЛЕММА 5.9. *Пусть J – I -гоцманов сильно устойчивый идеал. Тогда J и $L^I(J)$ имеют одинаковые градуированные числа Бетти.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве леммы 5.6 было показано, что $m_j(J_d) = m_j(L^I(J)_d)$ и $M_j(J_d) = M_j(L^I(J)_d)$ для всех d и j . Из формулы Эльяу–Кервера следует, что $\beta_{i,i+j}^A(J)$ полностью определяется числами $m_l(J_j)$ и $M_l(J_{j-1})$, $l = 1, \dots, n$, аналогично, число Бетти $\beta_{i,i+j}(L^I(J))$ полностью определяется числами $m_l(L^I(J)_j)$ и $M_l(L^I(J)_{j-1})$, $l = 1, \dots, n$. Таким образом, $\beta_{i,i+j}(J) = \beta_{i,i+j}(L^I(J))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.7. Пусть J – I -гоцманов идеал, по лемме 5.8 $\text{Gin}(J)$ тоже I -гоцманов и имеет такие же градуированные числа Бетти, что и J . Над полем характеристики нуль общий идеал старших членов является сильно устойчивым, поэтому для завершения доказательства достаточно применить лемму 5.9.

§6. Неравенство для чисел Бетти над факторкольцом

При рассмотрении теоремы Маколея для факторколец появляется возможность рассматривать числа Бетти не только над самим кольцом A , но и над кольцом $R = A/I$. Хотя поведение чисел Бетти над R гораздо более сложно, некоторые результаты могут быть получены и здесь.

Введем следующее обозначение: если M – некоторое множество мономов в A , то положим

$$h_M(s, t) = \sum_{u \in M} t s^{\deg u} (1 + st)^{m(u)-1}.$$

В статье [16] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть I и J – сильно устойчивые идеалы в кольце A , причем $I \subseteq J \cap (x_1, \dots, x_n)^2$. Тогда ряд Пуанкаре модуля A/J над кольцом A/I имеет вид:*

$$P_{A/J}^{A/I}(s, t) = \frac{1 + h_{G(J)}(s, t) - t h_{G(I) \cap G(J)}(s, t)}{1 - t h_{G(I)}(s, t)}.$$

ЛЕММА 6.2. *Пусть $J \subseteq A$ – сильно устойчивый идеал. Тогда*

$$h_{G(J)}(s, t) = t \sum_{l \geq 1} s^l \sum_{i \geq 0} \beta_{i,i+l}^A(J) (st)^i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему 6.1 для случая $I = 0$:

$$P_{A/J}^A(s, t) = \frac{1 + h_{G(J)}(s, t) - th_{G(I) \cap G(J)}(s, t)}{1 - th_{G(I)}(s, t)} = 1 + h_{G(J)}(s, t),$$

так как $G(I) = G(I) \cap G(J) = \emptyset$. С другой стороны, по определению ряда Пуанкаре

$$P_{A/J}^A(s, t) = \sum_{l \geq 0} \sum_{i \geq 0} \beta_{i, i+l}^A(A/J) s^{i+l} t^i.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $\beta_{i, i+l}^A(A/J) = \beta_{i-1, i+l}^A(J)$, а также $\beta_{0,0}^A(A/J) = 1$ и $\beta_{0,j}^A(A/J) = 0$ при $j > 0$, т.е.

$$P_{A/J}^A(s, t) = 1 + t \sum_{l \geq 1} s^l \sum_{i \geq 0} \beta_{i, i+l}^A(J) (st)^i,$$

откуда и следует искомое равенство.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Лемму 6.2 можно получить без использования теоремы 6.1, напрямую воспользовавшись формулой Эльяу–Кервера (6).

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть $I \subseteq A$ – кусочно лексегментный идеал, не имеющий порождающих степени 1, J – сильно устойчивый идеал, содержащий I . Если либо

$$G(J) \cap G(I) = G(L^I(J)) \cap G(I),$$

либо

$$G(L^I(J)) \cap G(I) = \emptyset,$$

то

$$P_{A/J}^{A/I}(s, t) \ll P_{A/L^I(J)}^{A/I}(s, t),$$

где знак $\ll$ означает покоэффициентное неравенство степенных рядов; причем в первом случае (т.е. при $G(J) \cap G(I) = G(L^I(J)) \cap G(I)$) равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$P_J^A(s, t) = P_{L^I(J)}^A(s, t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = L^I(J)$. Для доказательства рассмотрим разность

$$\begin{aligned} D(s, t) &= P_{A/L^I(J)}^{A/I}(s, t) - P_{A/J}^{A/I}(s, t) \\ &= \frac{h_{G(L)}(s, t) - h_{G(J)}(s, t) - th_{G(I) \cap G(L)}(s, t) + th_{G(I) \cap G(J)}(s, t)}{1 - th_{G(I)}(s, t)}. \end{aligned}$$

Заметим сначала, что ряд

$$\frac{1}{1 - th_{G(I)}(s, t)}$$

есть ряд с неотрицательными коэффициентами, поэтому достаточно доказать, что многочлен

$$h_{G(L)}(s, t) - h_{G(J)}(s, t) - th_{G(I) \cap G(L)}(s, t) + th_{G(I) \cap G(J)}(s, t)$$

имеет неотрицательные коэффициенты. Рассмотрим в первую очередь $D_1(s, t) = -th_{G(I) \cap G(L)}(s, t) + th_{G(I) \cap G(J)}(s, t)$. По условию теоремы либо $G(J) \cap G(I) = G(L) \cap G(I)$ и, следовательно, $D_1(s, t) \equiv 0$, либо $G(L) \cap G(I) = \emptyset$ и тогда $D_1(s, t) = th_{G(I) \cap G(J)}(s, t)$ – в обоих случаях все коэффициенты $D_1(s, t)$ неотрицательны.

Перейдем теперь к $D_2(s, t) = h_{G(L)}(s, t) - h_{G(J)}(s, t)$. Применяя лемму 6.2, получаем

$$D_2(s, t) = t \sum_{l \geq 1} s^l \sum_{i \geq 0} (\beta_{i, i+l}^A(L) - \beta_{i, i+l}^A(J)) (st)^i.$$

Так как по теореме 4.1 $\beta_{i, i+l}^A(L) \geq \beta_{i, i+l}^A(J)$, то все коэффициенты многочлена $D_2(s, t)$ неотрицательны, причем $D_2(s, t) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\beta_{i, i+l}^A(L) = \beta_{i, i+l}^A(J)$ при всех i и l , т.е. когда

$$P_J^A(s, t) = P_{L^I(J)}^A(s, t).$$

Теорема доказана.

Несмотря на то, что условия теоремы 6.4 весьма ограничительны, она позволяет полностью рассмотреть случай сильно устойчивых I -гоцмановых идеалов.

СЛЕДСТВИЕ 6.5. Пусть $I \subseteq A$ – кусочно лекссегментный идеал, не имеющий порождающих степени 1, J – сильно устойчивый I -гоцманов идеал. Тогда

$$P_{A/J}^{A/I}(s, t) = P_{A/L^I(J)}^{A/I}(s, t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = L^I(J)$. Заметим, что в этом случае $G(J) \cap G(I) = G(L) \cap G(I) = G(I)$ по определению I -гоцманова идеала, кроме того, по теореме 5.7 ряд Пуанкаре I -гоцманова идеала совпадает с рядом Пуанкаре соответствующего I -лекссегментного идеала:

$$P_L^A(s, t) = P_J^A(s, t).$$

Поэтому, применяя предыдущую теорему, получаем

$$P_{A/L}^{A/I}(s, t) = P_{A/J}^{A/I}(s, t).$$

Следствие доказано.

§ 7. Теорема Грина

В этом параграфе мы рассмотрим результаты, связанные с теоремой Грина [4], описывающей поведение однородных векторных пространств при факторизации по общим линейным формам, а также с различными ее обобщениями (см. [5], [8], [11] и [17]).

Напомним, что однородная форма h называется *общей для некоторого векторного пространства* $V \subseteq \langle A_d \rangle$, если пространство $V + \langle (h)_d \rangle$ имеет наибольшую возможную размерность.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть I – кусочно лекссегментный идеал в A . Если $V \subseteq \langle A_d \rangle$ – векторное пространство, содержащее I_d , h_1 – общая однородная форма для V степени $s < d$, а h_2 – общая однородная форма для $L^I(V)$ степени s , то

$$\dim L^I(V)/h_2 \leq \dim V/h_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно доказать, что

$$\dim(L^I(V) + \langle(h_2)_d\rangle) \leq \dim(V + \langle(h_1)_d\rangle).$$

Сначала сведем утверждение к случаю сильно устойчивого векторного пространства V .

ЛЕММА 7.2. Пусть $V \subseteq \langle A_d \rangle$ – векторное пространство, содержащее I_d , h – общая однородная форма для V степени $s < d$. Тогда существует такое сильно устойчивое пространство $W \subseteq \langle A_d \rangle$, содержащее I_d , что $\dim V = \dim W$ и

$$\dim(W + \langle(x_n^s)_d\rangle) \leq \dim(V + \langle(h)_d\rangle).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пространство $W = \langle \text{Gin}(J)_d \rangle$, где J – идеал, порожденный V . Пространство W сильно устойчиво, содержит I_d и $\dim V = \dim W$. Кроме того, $\text{Gin}(J) = \text{In}(f(J))$, где f – некоторое общее невырожденное линейное преобразование с верхнетреугольной матрицей; возьмем такое $g \in \langle A_1 \rangle$, что $f(g) = x_n$. Так как h – общая форма для V , то

$$\dim(V + \langle(g^s)_d\rangle) \leq \dim(V + \langle(h)_d\rangle).$$

Положим $K = (f(V))$, тогда $f((g^s) + J) = (x_n^s) + K$. Поэтому

$$\dim(\langle K_d \rangle + \langle(x_n^s)_d\rangle) = \dim(V + \langle(g^s)_d\rangle).$$

Заметим далее, что $\text{In}(K) + (x_n^s) \subseteq \text{In}((x_n^s) + K)$ и что $\langle \text{In}(K)_d \rangle = W$. Поэтому

$$\dim(W + \langle(x_n^s)_d\rangle) \leq \dim(\text{In}(K + (x_n^s))_d) = \dim(\langle(K + (x_n^s))_d\rangle),$$

откуда получаем, что

$$\dim(W + \langle(x_n^s)_d\rangle) \leq \dim(\langle(K + (x_n^s))_d\rangle) = \dim(V + \langle(g^s)_d\rangle) \leq \dim(V + \langle(h)_d\rangle).$$

В статье [5] доказано, что x_n^s является общей однородной формой степени s для всякого сильно устойчивого векторного пространства, т.е., в частности, для W из предыдущей леммы и для $L^I(V)$.

ЛЕММА 7.3. Пусть $V \subseteq \langle A_d \rangle$ – сильно устойчивое векторное пространство, содержащее I_d , $L \subseteq \langle A_d \rangle$ – I -лекссегментное векторное пространство, причем $\dim V \leq \dim L$. Тогда $\dim(L : x_n^s) \geq \dim(V : x_n^s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по s . При доказательстве леммы 4.3 было показано, что

$$\dim(L^I(V) : x_n) = m_n(L^I(V)) \geq m_n(V) = \dim(V : x_n),$$

а так как $L^I(V) \subseteq L$, то $\dim(L : x_n) \geq \dim(V : x_n)$. База индукции доказана.

Пусть лемма доказана для $s-1$ для всех идеалов I и пространств V и L , удовлетворяющих ее условию; докажем лемму для s . Рассмотрим идеал $J = (I : x_n^{s-1}) \subseteq A$. Этот идеал является кусочно лекссегментным по следствию 2.7. Рассмотрим пространства $V' = (V : x_n^{s-1})$ и $L' = (L : x_n^{s-1})$. Очевидно, что V' сильно устойчиво и содержит J_{d-s+1} , а L' – J -лекссегментно. Кроме того, по предположению индукции $\dim L' \geq \dim V'$, поэтому, аналогично базе индукции, $\dim(L' : x_n) \geq \dim(V' : x_n)$. Для завершения доказательства осталось заметить, что $\dim(L : x_n^s) = \dim(L' : x_n)$ и $\dim(V : x_n^s) = \dim(V' : x_n)$.

Теперь теорема 7.1 вытекает непосредственно из предыдущей леммы.

Особый интерес представляют пространства, экстремальные в смысле теоремы 7.1 для однородных форм степени 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4. Векторное пространство $V \subseteq \langle A_d \rangle$, содержащее I_d , называется *пространством Грина*, если $\dim V/h = \dim L^I(V)/x_n$ для линейной формы h , общей для V .

Следующая теорема, обобщающая результат Гашарова [11], показывает связь между I -гоцмановыми пространствами и пространствами Грина.

ТЕОРЕМА 7.5. Пусть I – кусочно лексsegmentный идеал в A . Если $V \subseteq \langle A_d \rangle$ – I -гоцманово векторное пространство, то V – пространство Грина.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разберем сначала случай, когда V сильно устойчиво.

ЛЕММА 7.6. Пусть $V \subseteq \langle A_d \rangle$ – I -гоцманово сильно устойчивое векторное пространство. Тогда V – пространство Грина.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было замечено при доказательстве леммы 5.6, для всякого i от 1 до n выполняются равенства $M_i(V) = M_i(L^I(V))$ и $m_i(V) = m_i(L^I(V))$, в частности, $m_n(V) = m_n(L^I(V))$. Так как x_n является общей линейной формой для V и $L^I(V)$, то $\dim V/x_n = \dim L^I(V)/x_n$.

Пусть $\mathcal{G} = \text{GL}(n, k)$ – пространство невырожденных матриц над полем k размера $n \times n$, снабженное топологией Зариского. Пусть $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$ – подпространство верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а

$$\mathcal{U}' = \{\lambda u \in \mathcal{G} : \lambda \in k \setminus \{0\}, u \in \mathcal{U}\}.$$

Пусть также $\mathcal{L}$ – n -мерное векторное пространство над k , снабженное топологией Зариского. Обозначим базисные векторы в $\mathcal{L}$ через $x_1, \dots, x_n$.

ЛЕММА 7.7. Пусть $B \subseteq \mathcal{U}$, $C \subseteq \mathcal{L}$ – непустые открытые множества. Тогда существуют такие $u \in B$ и $y \in C$, что $u(y) = \lambda x_n$ для некоторого $\lambda \in k \setminus \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество

$$B' = \{\lambda u : \lambda \in k \setminus \{0\}, u \in B\} \subseteq \mathcal{U}'.$$

Это открытое множество в $\mathcal{U}'$. Рассмотрим далее множество

$$B^{-1} = \{u^{-1} : u \in B'\} \subseteq \mathcal{U}',$$

оно тоже открыто в $\mathcal{U}'$. Заметим, что множество $D = \{u(x_n) : u \in B^{-1}\}$ непусто и открыто в $\mathcal{L}$, так как его можно отождествить с множеством последних столбцов матриц из B^{-1} . Так как C и D – открытые непустые множества в $\mathcal{L}$, то их пересечение непусто. Пусть $y \in C \cap D$, тогда $y = v^{-1}(x_n)$, где $v^{-1} \in B^{-1}$, т.е. $x_n = v(y)$, где $v \in B'$. Следовательно, $v = \lambda u$, где $u \in \mathcal{U}$ и $\lambda \in k \setminus \{0\}$, т.е. $u(y) = x_n/\lambda$.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 7.5. Пусть V – I -гоцманово векторное пространство. Пусть J – идеал, порожденный V . Пусть $K = \text{Gin}(J)$, и пусть $W = \langle K_d \rangle$. Как известно (см., например, [13]), существует такое открытое множество $B \subseteq \mathcal{U}$, что $K = \text{In}(u(J))$ для любого $u \in B$. Кроме того, обозначим через $C \subseteq \mathcal{L}$ открытое множество линейных форм, общих для V . По предыдущей лемме существуют такие $u \in B$ и $y \in C$, что $u(y) = \lambda x_n$. Поэтому $u(J + (y)) = u(J) + (x_n)$. Кроме того, так как мы рассматриваем обратный лексикографический порядок, то $\text{In}(u(J) + (x_n)) = \text{In}(u(J)) + (x_n)$, т.е.

$\text{In}(u(J) + (x_n)) = K + (x_n)$. Следовательно, $\dim(V + \langle (y)_d \rangle) = \dim(W + \langle (x_n)_d \rangle)$, а так как $\dim W = \dim V$, то $\dim V/y = \dim W/x_n$. Для завершения доказательства осталось заметить, что W сильно устойчиво и I -гоцманово (аналогично доказательству леммы 5.8), и применить лемму 7.6.

Список литературы

1. *Macaulay F. S.* Some properties of enumeration in the theory of modular systems // Proc. London Math. Soc. (2). 1927. V. 26. P. 531–555.
2. *Bigatti A. M.* Upper bounds for the Betti numbers of a given Hilbert function // Comm. Algebra. 1993. V. 21. P. 2317–2334.
3. *Hulett H.* Maximum Betti numbers of homogeneous ideals with a given Hilbert function // Comm. Algebra. 1993. V. 21. P. 2335–2350.
4. *Green M.* Restrictions of linear series to hyperplanes, and some results of Macaulay and Gotzmann // Algebraic curves and projective geometry / ed. E. Ballico, C. Ciliberto. New York: Springer-Verlag, 1989. P. 76–86. (Lecture Notes in Math. V. 1389.)
5. *Herzog J., Popescu D.* Hilbert functions and homogeneous generic forms // Compositio Math. 1998. V. 113. № 1. P. 1–22.
6. *Clements G., Lindström B.* A generalization of a combinatorial theorem of Macaulay // J. Combin. Theory. 1969. V. 7. P. 230–238.
7. *Aramova A., Herzog J., Hibi T.* Squarefree lexsegment ideals // Math. Z. 1998. V. 228. P. 353–378.
8. *Gasharov V.* Green and Gotzmann theorems for polynomial rings with restricted powers of the variables // J. Pure Appl. Algebra. 1998. V. 130. № 2. P. 113–118.
9. *Шакин Д. А.* О некоторых обобщениях комбинаторной теоремы Маколея на случай факторколец // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 9. С. 143–160.
10. *Gotzmann G.* Eine Bedingung für die Flachheit und das Hilbertpolynom eines graduierten Ringes // Math. Z. 1978. V. 158. P. 61–70.
11. *Gasharov V.* Extremal properties of Hilbert functions // Illinois J. Math. 1997. V. 41. № 4. P. 612–629.
12. *Eliahou S., Kervaire M.* Minimal resolutions of some monomial ideals // J. Algebra. 1990. V. 129. P. 1–25.
13. *Eisenbud D.* Commutative algebra with a view toward algebraic geometry. New York: Springer-Verlag, 1995.
14. *Herzog J., Hibi T.* Componentwise linear ideals // Nagoya Math. J. 1999. V. 153. P. 141–153.
15. *Aramova A., Herzog J., Hibi T.* Ideals with stable Betti numbers // Adv. Math. 2000. V. 152. P. 72–77.
16. *Iyengar S., Pardue K.* Maximal minimal resolutions // J. Reine Angew. Math. 1999. V. 512. P. 27–48.
17. *Gasharov V.* Hilbert functions and homogeneous generic forms. II // Compositio Math. 1999. V. 116. P. 167–172.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: dshakin@online.ru

Поступила в редакцию
12.03.2003