Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Демёхин, А. М. Райгородский, О. И. Рубанов, Дистанционные графы, имеющие большое хроматическое число и не содержащие клик или циклов заданного размера, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 4, 49–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7830>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 06:19:45

УДК 519.112.4+519.174+519.176

Е. Е. Демёхин, А. М. Райгородский, О. И. Рубанов

Дистанционные графы, имеющие большое хроматическое число и не содержащие клик или циклов заданного размера

Доказано существование последовательностей дистанционных графов $G_n \subset \mathbb{R}^n$, хроматические числа которых растут экспоненциально, но которые в то же время не содержат клик или циклов заданного наперед размера.

Библиография: 42 названия.

Ключевые слова: дистанционный граф, случайный граф, хроматическое число, клика, цикл.

DOI: 10.4213/sm7830

§ 1. Введение и постановки основных задач

Настоящая работа посвящена решению ряда экстремальных задач для дистанционных графов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ растущей размерности. Напомним, что *дистанционный граф* (или *граф расстояний*) – это такой граф, у которого вершины являются элементами некоторого метрического пространства X с метрикой ρ , а ребра – те или иные пары вершин, отстоящих друг от друга на расстояние из данного множества $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}_+$. Иными словами, граф $G = (V, E)$ дистанционный, если

$$V \subseteq X, \quad E \subseteq \{ \{x, y\} : x, y \in V, \rho(x, y) \in \mathcal{A} \}.$$

Дистанционные графы играют огромную роль в комбинаторной геометрии. Например, они естественным образом возникают в связи с классической задачей о хроматическом числе пространства $\mathbb{R}^n$. Эта задача состоит в отыскании наименьшего количества $\chi(\mathbb{R}^n)$ цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, чтобы между одноцветными точками не было расстояния 1:

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min \{ \chi : \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, \forall i \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \neq 1 \}.$$

Здесь $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ – евклидово расстояние между векторами. Понятно, причем здесь и дистанционные графы. Действительно, возьмем граф $\mathfrak{G} = (\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$, у которого

$$\mathfrak{V} = \mathbb{R}^n, \quad \mathfrak{E} = \{ \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1 \}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00683) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2519.2012.1).

Рассмотрим его *хроматическое число* $\chi(\mathfrak{G})$ (минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить все вершины графа, чтобы у него не было ребер с одноцветными концами). Ясно, что $\chi(\mathbb{R}^n) = \chi(\mathfrak{G})$. Более того, по теореме П. Эрдеша–Н. Г. де Брёйна (см. [1]), если величина $\chi(\mathbb{R}^n)$ конечна, то она достигается на некотором конечном подграфе графа $\mathfrak{G}$. Однако совсем легко видеть, что, скажем, $\chi(\mathbb{R}^n) \leq (n+1)^n$ и, стало быть, с точки зрения хроматического числа пространства, достаточно ограничиться изучением конечных графов расстояний в $\mathbb{R}^n$.

Перечислим основные результаты о хроматических числах дистанционных графов в различных размерностях. Нас будет интересовать в первую очередь максимальное значение хроматического числа, т.е. величина $\chi(\mathbb{R}^n)$.

- $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$. Этот результат очевиден.
- $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$. Оба результата довольно простые. Доказательства их можно найти в работах [2], [3] и в брошюре [4].
- $6 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$. Нижняя оценка принадлежит О. Нечуштану (см. [5]), а верхняя – Д. Кулсону (см. [6]).
- $7 \leq \chi(\mathbb{R}^4) \leq 54$. Нижняя оценка принадлежит К. Кантвеллу (см. [7]) и Л. Л. Иванову (см. [8]), а верхняя – Г. Тоту и Р. Радойчичу (см. [9]).
- $(1.239 \dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$. Нижняя оценка принадлежит А. М. Райгородскому (см. [10]), а верхняя – Д. Ларману и К. А. Роджерсу (см. [11]). Заметим, что приведенная нижняя оценка является модификацией первоначальной экспоненциальной оценки П. Франкла и Р. М. Уилсона, имевшей вид $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.207 \dots + o(1))^n$ (см. [12]).

Таким образом, мы видим, что с ростом размерности хроматическое число пространства (максимальное значение хроматического числа графа расстояний в $\mathbb{R}^n$) растет экспоненциально.

Отметим также, что для дистанционных графов, которые мы сейчас рассматриваем, множество $\mathcal{A}$, порождающее ребра, имеет тривиальный вид $\mathcal{A} = \{1\}$. Ясно, что в рамках задачи о хроматических числах мы с тем же успехом можем взять любое $\mathcal{A} = \{a\}$: от этого ничего не изменится. Заметим, наконец, что, поскольку мы запрещаем точкам одного цвета отстоять друг от друга на расстояние 1 (или a), величину a зачастую называют *запрещенным расстоянием*.

Перейдем к постановкам экстремальных задач, о которых пойдет речь в настоящей работе. В 1959 г. П. Эрдеш (см. [13]) доказал красивый и довольно неожиданный факт.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $k \geq 2, l \geq 2$ – произвольные натуральные числа. Тогда существует граф, у которого хроматическое число больше k , а длина минимального простого цикла больше l .

Иными словами, бывают графы G со сколь угодно большим хроматическим числом $\chi(G)$ и *обхватом* $g(G)$ (длиной кратчайшего цикла).

В 1976 г. П. Эрдеш, отталкиваясь от своей же теоремы 1, сформулировал такой вопрос (см. [14]): *существует ли дистанционный граф на плоскости, имеющий хроматическое число 4 и не содержащий треугольников?* Отметим, что конструкция из [2], дающая оценку $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$, содержит четыре треугольника, и это по существу. На вопрос Эрдеша был получен утвердительный ответ. Уже в 1979 г. Н. Уормалд построил плоский граф расстояний с хроматическим

числом 4 и без треугольников (см. [15]). Правда, у этого графа было 6448 вершин. В 1996 г. П. О’Доннелл и Р. Хохберг предложили аналогичный граф всего с двадцатью тремя вершинами (см. [16]). Наконец, в 2000 г. О’Доннелл доказал существование графа расстояний на плоскости с хроматическим числом 4 и наперед заданным обхватом (см. [17], [18]).

Нас интересуют обобщения задачи Эрдеша на случай размерности $n \geq 3$. Разумеется, здесь речь идет о построении графов с хроматическим числом, максимально близким к наибольшему из известных. Так, в размерности 3 имеет смысл говорить о хроматическом числе 5 или 6. В растущей размерности правильным аналогом четверки служит экспонента. Остается лишь ввести основные величины, которые нам предстоит изучать.

Итак, пусть $\omega(G)$ – это число вершин в максимальном полном подграфе графа $G = (V, E)$:

$$\omega(G) = \max\{|W| : W \subseteq V, \forall x, y \in W \quad \{x, y\} \in E\}.$$

Поскольку любой полный подграф называется *кликой*, величину $\omega(G)$ называют *кликовым числом* графа. Утверждение “ $\omega(G) < 3$ ”, очевидно, равносильно утверждению об отсутствии треугольников в G . Положим

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{clique}}(k) &= \sup\left\{\zeta : \exists \text{ функция } \delta = \delta(n) \text{ такая, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) = 0 \right. \\ &\quad \left. \text{и } \forall n \exists G \text{ в } \mathbb{R}^n, \text{ у которого } \omega(G) < k, \chi(G) \geq (\zeta + \delta(n))^n\right\}, \\ \zeta_{\text{girth}}(k) &= \sup\left\{\zeta : \exists \text{ функция } \delta = \delta(n) \text{ такая, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) = 0 \right. \\ &\quad \left. \text{и } \forall n \exists G \text{ в } \mathbb{R}^n, \text{ у которого } g(G) > k, \chi(G) \geq (\zeta + \delta(n))^n\right\}. \end{aligned}$$

Разумеется, для некоторых k эти величины могут оказаться меньше единицы, и тогда смысла в их рассмотрении нет. Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы доказать неравенства $\zeta_{\text{clique}}(k) > 1$ для всех k и, более того, найти оптимальные значения в правых частях этих неравенств. Аналогичное исследование мы проведем и для случая величины $\zeta_{\text{girth}}(k)$.

Дальнейшая структура статьи будет следующей. В § 2 мы подробно изучим величину $\zeta_{\text{clique}}(3)$. В § 3 мы получим серию оценок для $\zeta_{\text{clique}}(k)$ с произвольным k , исходя из некоторого общего подхода, связанного с теорией кодирования. В § 4 мы также получим оценки для $\zeta_{\text{clique}}(k)$ с произвольным k , но при этом используем принципиально другой подход, нежели в § 3, – подход вероятностный. В том же § 4 мы аккуратно сопоставим все полученные результаты. Параграф 5 мы посвятим оценкам величины $\zeta_{\text{girth}}(k)$. Наконец, в § 6 мы обобщим полученные результаты на случай нескольких запрещенных расстояний (дистанционных графов в $\mathbb{R}^n$ с множествами запретов $\mathcal{A}$, $|\mathcal{A}| > 1$).

Завершая введение, заметим, что историю задачи о хроматическом числе пространства и различные результаты относительно дистанционных графов можно найти в обзорах [19]–[21] и книгах [4], [22]–[26].

§ 2. Оценка величины $\zeta_{\text{clique}}(3)$

Этот параграф мы построим следующим образом. В п. 2.1 мы сформулируем наш основной результат. В п. 2.2 мы его докажем. Пп. 2.3 и 2.4 будут посвящены обсуждению возможности уточнения основного результата.

2.1. Формулировка основного результата. Сперва заметим, что еще в 2007 г. О.И. Рубанов доказал следующую теорему (см. [27]).

ТЕОРЕМА 2. *Существует такой граф расстояний G в $\mathbb{R}^3$, что $\chi(G) \geq 5$ и $\omega(G) \leq 3$.*

В этом году Рубанову удалось заменить оценку $\omega(G) \leq 3$ на $\omega(G) \leq 2$. Данный результат пока не опубликован. Что же до основного нашего вопроса – вопроса о графах без треугольников в $\mathbb{R}^n$, $n \rightarrow \infty$, и их хроматических числах, – то принципиально новый результат по нему содержится в теореме 3.

ТЕОРЕМА 3. *Имеет место оценка*

$$\zeta_{\text{clique}}(3) \geq 2 \left(\frac{1}{3} \right)^{1/3} \left(\frac{2}{3} \right)^{2/3} = 1.058 \dots$$

Теорема 3 означает, что в растущей размерности есть графы расстояний без треугольников, у которых тем не менее экспоненциально большие хроматические числа. Конечно, величина 1.058 меньше и величины 1.239, и величины 1.207 (см. § 1), но она все-таки строго больше единицы. Более того, из теоремы 3 моментально следует осмысленность изучения всех величин $\zeta_{\text{clique}}(k)$, так как мы теперь знаем, что каждая из этих величин никак не меньше, чем 1.058.

В следующем пункте мы докажем теорему 3.

2.2. Доказательство теоремы 3. Зафиксируем размерность n . Положим $k = [0.5n]$. Рассмотрим минимальное простое число p такое, что $k - p < n/6 - 1$. Известно, что с ростом n справедлива асимптотика $p = p(n) \sim n/3$. Это обусловлено тем, что между x и $x + O(x^{0.525})$ всегда есть простое число (см. [28]).

Рассмотрим граф $G = (V, E)$, у которого

$$V = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : \forall i \ x_i \in \{0, 1\}, \ x_1 + \dots + x_n = k \},$$

$$E = \{ \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{2p} \}.$$

Иными словами, здесь запрещенное расстояние – это величина $a = \sqrt{2p}$, которая однозначно соответствует скалярному произведению $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k - p$.

Прежде всего заметим, что в графе G нет треугольников. Действительно, предположим, что треугольник с вершинами $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ нашелся. Обозначим через $\mathcal{R}_n$ множество $\{1, \dots, n\}$ номеров координат каждого из векторов $\mathbf{t} \in V$. Пусть $A_{\mathbf{x}}, A_{\mathbf{y}}, A_{\mathbf{z}} \subset \mathcal{R}_n$ – множества позиций, на которых расположены единицы векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ соответственно. Поскольку пара $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ образует ребро, $|A_{\mathbf{x}} \cup A_{\mathbf{y}}| = k + p$. На позициях из $A_{\mathbf{x}} \cup A_{\mathbf{y}}$ вектор $\mathbf{z}$ не может иметь больше чем $2k - 2p$ единиц. Значит, остальные $k - (2k - 2p) = 2p - k$ его единиц должны разместиться на позициях из $\mathcal{R}_n \setminus (A_{\mathbf{x}} \cup A_{\mathbf{y}})$. Количество этих позиций равно $n - k - p$. Если мы покажем, что $n - k - p < 2p - k$, то мы придем

к противоречию с предположением о наличии треугольника в G . Итак,

$$(n - k - p) - (2p - k) = n - 3p < n - 3\left(k - \frac{n}{6} + 1\right) \leq n - 3\left(\frac{n}{2} - \frac{n}{6}\right) = 0.$$

Искомое неравенство установлено, и, значит, в G на самом деле отсутствуют треугольники.

Перейдем к оценке хроматического числа. Хорошо известно неравенство $\chi(G) \geq |V|/\alpha(G)$, где $\alpha(G)$ – это величина, в некотором смысле двойственная величине $\omega(G)$ (отсюда и обозначение):

$$\alpha(G) = \max\{|W| : W \subseteq V, \forall x, y \in W \quad \{x, y\} \notin E\}.$$

Эта величина называется *числом независимости* графа; в свою очередь, все множества вершин графа, свободные от его ребер, называются *независимыми*. Таким образом, число независимости – это мощность самого большого независимого множества вершин.

В нашем случае, очевидно, $|V| = C_n^k$. Значит, нам нужно как можно точнее оценить сверху $\alpha(G)$. Это делается с помощью линейно-алгебраического метода в комбинаторике (см. [26], [29]). А именно каждому вектору $\mathbf{x} \in V$ мы сопоставляем некоторый полином $P_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]$. В данном случае мы полагаем

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{i=0, i \not\equiv k \pmod{p}}^{p-1} (i - (\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n).$$

Иными словами, произведение берется по всем наименьшим неотрицательным вычетам по модулю p , кроме остатка от деления k на p .

Полиномы подобраны так, чтобы выполнялось следующее

Свойство 1. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ условие $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv k \pmod{p}$ равносильно условию $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Свойство очевидно, и мы его не доказываем. Ясно, далее, что степень каждого полинома не превосходит $p - 1$. Сейчас мы еще упростим полиномы, причем так, что свойство 1 для новых полиномов останется верным. Раскроем в данном полиноме $P_{\mathbf{x}}$ скобки. Получится линейная комбинация мономов, каждый из которых имеет вид

$$y_{i_1}^{\alpha_1} \cdots y_{i_q}^{\alpha_q}, \quad q \leq p - 1.$$

Формально заменим всякий такой моном мономом

$$y_{i_1} \cdots y_{i_q}.$$

Поскольку в свойстве 1 фигурируют лишь векторы $\mathbf{y} \in V$, т.е. векторы, все координаты которых суть 0 или 1, то значение полинома не меняется, а стало быть, свойство 1 для новых полиномов $P'_{\mathbf{x}}$ снова выполнено.

Полиномы $P'_{\mathbf{x}}$ хороши тем, что, хотя их степени по-прежнему могут достигать значения $p - 1$, все они содержатся в пространстве полиномов размерности $\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i < nC_n^p$. На сравнительной малости этой размерности мы и сыграем.

Рассмотрим произвольное независимое множество $W = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\} \subset V$. Иначе говоря, для любых i, j выполнено $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq k - p$. Возьмем полиномы $P'_{\mathbf{x}_1}, \dots, P'_{\mathbf{x}_s}$. Предположим, что для некоторых $c_1, \dots, c_s \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ имеет место сравнение

$$c_1 P'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}) + \dots + c_s P'_{\mathbf{x}_s}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p} \quad \forall \mathbf{y} \in V.$$

Пусть $\mathbf{y} = \mathbf{x}_i$, i любое. Тогда

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = k \equiv k \pmod{p}.$$

Значит, ввиду свойства 1 $P'_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{y}) \not\equiv 0 \pmod{p}$. В то же время $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) \neq k - p$. Разумеется, $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) < k$. Но очевидно, что $k - 2p < 0$, т.е. $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) > k - 2p$. В итоге $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) \not\equiv k \pmod{p}$, а стало быть, опять же за счет свойства 1, $P'_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p}$ для всех $j \neq i$. Поскольку p простое, имеем $c_i \equiv 0 \pmod{p}$ при любом i .

Приведенное выше рассуждение показывает, что полиномы $P'_{\mathbf{x}_1}, \dots, P'_{\mathbf{x}_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Следовательно, s не превосходит размерности пространства, порожденного этими полиномами, а она, как мы помним, не больше, чем nC_n^p . Множество W было произвольным, так что выполнено и неравенство $\alpha(G) \leq nC_n^p$.

Итак,

$$\chi(G) \geq \frac{C_n^k}{nC_n^p}.$$

Пользуемся тем фактом, что $p \sim n/3$, и стандартными выкладками с участием формулы Стирлинга. Получаем

$$C_n^k = (2 + o(1))^n, \quad nC_n^p = \left(\frac{1}{(1/3)^{1/3}(2/3)^{2/3}} + o(1) \right)^n,$$

$$\zeta_{\text{clique}}(3) \geq 2 \left(\frac{1}{3} \right)^{1/3} \left(\frac{2}{3} \right)^{2/3} = 1.058 \dots$$

Теорема доказана.

2.3. Общая конструкция с $(0, 1)$ -векторами. В доказательстве теоремы 3 мы использовали граф, вершины которого представляли собой $(0, 1)$ -векторы с фиксированным количеством k единиц. При этом k было выбрано равным $[0.5n]$. При внимательном изучении всего рассуждения, приведенного в п. 2.2, становится ясно, что с самого начала можно было брать следующую более общую конструкцию.

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Пусть также p – произвольное простое число. Положим

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : \forall i \ x_i \in \{0, 1\}, \ x_1 + \dots + x_n = k\},$$

$$E = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{2p}\}.$$

При $p < k/2$ треугольники в конструкции точно есть. При $p \geq k/2$ условием отсутствия треугольников в конструкции по-прежнему служит неравенство

$$n - k - p < 2p - k.$$

Иными словами, $p > n/3$ при любом k . Условием применимости линейно-алгебраического метода является, в свою очередь, неравенство

$$k - 2p < \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{0, 2k - n\}.$$

Если $k \leq 2n/3$ и $p > n/3$, то

$$k - 2p < \frac{2n}{3} - \frac{2n}{3} = 0 \leq \max\{0, 2k - n\}.$$

Если же $2n/3 < k \leq n$ и $p > n/3$, то

$$k - 2p < n - \frac{2n}{3} = \frac{n}{3} < \max\{0, 2k - n\} = 2k - n.$$

Таким образом, условие отсутствия треугольников всегда влечет применимость линейной алгебры.

Получается оценка

$$\chi(G) \geq \frac{C_n^k}{nC_n^p},$$

которая, очевидно, тем больше, чем меньше p . Следовательно, мы возвращаемся к ситуации $p \sim n/3$. Более того, уже при данном p оценка тем лучше, чем большее значение принимает величина C_n^k . Так мы возвращаемся к $k = [0.5n]$.

Мы показали, что параметры в теореме 3 были выбраны оптимально с точки зрения предложенного метода.

2.4. Дальнейшие возможные обобщения. Графы, множества вершин которых состоят из $(0, 1)$ -векторов, в науке о хроматических числах впервые были использованы в работе [12], где, как мы уже говорили в § 1, была доказана оценка $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.207 \dots + o(1))^n$. Впоследствии рассматривались и графы более общего вида. Например, наилучшая известная оценка хроматического числа пространства (с константой 1.239 в основании экспоненты) построена на рассмотрении графов с вершинами в $(-1, 0, 1)$ -векторах (см. [10]). Изучались и графы, вершины которых являются произвольными элементами решетки $\mathbb{Z}^n$ (см. [30]–[33]).

В этой связи уместно было бы попробовать строить и графы без треугольников хотя бы на $(-1, 0, 1)$ -векторах. К сожалению, к успеху это не приводит. Нам удалось доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Пусть, далее, k_1, k_{-1}, k_0 – произвольные натуральные числа, в сумме дающие n . Пусть, наконец, a – произвольное число. Положим

$$\begin{aligned} V &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : \forall i \ x_i \in \{-1, 0, 1\}, \\ &\quad |\{i : x_i = 1\}| = k_1, |\{i : x_i = -1\}| = k_{-1}, |\{i : x_i = 0\}| = k_0\}, \\ E &= \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a\}. \end{aligned}$$

Тогда при любых значениях параметров k_1, k_{-1}, k_0 и a , которые гарантируют отсутствие треугольников в конструкции, нижняя оценка хроматического

числа графа $G = (V, E)$, полученная с помощью линейно-алгебраического метода, не превосходит величины $(c + o(1))^n$, где

$$c \leq 2 \left(\frac{1}{3} \right)^{1/3} \left(\frac{2}{3} \right)^{2/3} = 1.058 \dots$$

Доказательство предложения 1 основано на подробном разборе ряда случаев (соотношений между параметрами), и, поскольку оно, с одной стороны, громоздко, с другой стороны, просто, а главное, не позволяет получить новый результат в исходной задаче, мы его здесь не приводим.

Для более сложно составленных векторов целочисленной решетки довольно тяжело выписывать условия отсутствия треугольников. По-видимому, исчерпывающий результат в этих случаях возможен лишь за счет применения численных методов. В настоящей работе мы этим не занимались.

§ 3. Оценка величины $\zeta_{\text{clique}}(k)$ с помощью границ для равновесных кодов

Этот параграф мы разобьем на три пункта. В п. 3.1 мы обсудим общую идею подхода и сформулируем наш результат. В п. 3.2 мы докажем этот результат. В п. 3.3 мы сделаем несколько замечаний и приведем таблицу оценок для разных значений k .

3.1. Идея подхода и формулировка результата. Мы снова хотим использовать графы, у которых вершины – $(0, 1)$ -векторы с фиксированным числом единиц. В теории кодирования совокупности таких векторов называются *равновесными кодами*, и про равновесные коды известно достаточно много. Например, доказан ряд верхних оценок для числа кодовых слов (т.е. как раз $(0, 1)$ -векторов) в равновесных кодах с данной нижней границей для расстояния Хэмминга. В нашем случае нижняя граница для расстояния Хэмминга – это, по сути, величина запрещенного расстояния. Поэтому ясно, что применение известных результатов для кодов может сильно помочь в нашей задаче. И действительно, удается доказать следующую общую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Пусть дано натуральное число $k \geq 3$. Пусть, далее, a и b – произвольные вещественные числа, удовлетворяющие ограничениям

$$a \in (0, 1), \quad b \in (0, 1), \quad b > 2a, \quad b^2 > a, \quad \left\lceil \frac{b-a}{b^2-a} \right\rceil < k.$$

Тогда

$$\zeta_{\text{clique}}(k) \geq \frac{(b-a)^{b-a}(1-b+a)^{1-b+a}}{b^b(1-b)^{1-b}}.$$

Результаты для конкретных значений k , полученные путем оптимизации по a и b , мы приведем в п. 3.3. Доказательство – в следующем пункте.

3.2. Доказательство теоремы 4. Положим $l = [bn]$. Возьмем минимальное простое число p , для которого $l - p < [an]$ и

$$\frac{pn}{l^2 - ln + pn} \leq \frac{b-a}{b^2-a}.$$

Тогда $p \sim (b - a)n$. При этом за счет неравенства $b > 2a$ мы имеем также оценку $l - 2p < 0$. Рассмотрим граф $G = (V, E)$, у которого

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : \forall i \ x_i \in \{0, 1\}, \ x_1 + \dots + x_n = l\},$$

$$E = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{2p}\}.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5. *Максимальное число двоичных n -мерных векторов веса l (т.е. с l единицами), отстоящих друг от друга на расстояние Хэмминга, не меньшее 2δ , не превосходит величины*

$$\left\lceil \frac{\delta n}{l^2 - ln + \delta n} \right\rceil,$$

когда скоро знаменатель указанной дроби больше нуля.

Доказательство теоремы можно найти в книге [34]. Эта теорема позволяет утверждать, что $\omega(G) < k$. Действительно, пусть $H \subset G$ — некоторая клика. Тогда ее вершины отстоят друг от друга на расстояние Хэмминга, равное $2p$. Значит, $\delta = p$ и размер клики H никак не больше чем

$$\left\lceil \frac{pn}{l^2 - ln + pn} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{b - a}{b^2 - a} \right\rceil < k,$$

ведь по условию $b^2 > a$.

Далее, линейно-алгебраический метод (применимый ввиду неравенства $l - 2p < 0$) дает оценку

$$\chi(G) \geq \frac{C_n^l}{nC_n^p}.$$

Поскольку $l \sim bn$, а $p \sim (b - a)n$, получаем за счет стандартных выкладок, что

$$\chi(G) \geq \left(\frac{(b - a)^{b-a} (1 - b + a)^{1-b+a}}{b^b (1 - b)^{1-b}} + o(1) \right)^n.$$

Теорема 4 доказана.

3.3. Комментарии и таблица оценок. Прежде всего отметим, что при $k \leq 4$ результат теоремы 4 слабее результата теоремы 3. Это связано с тем, что оценка из теории кодирования универсальна и мы, по сути, слегка уточнили ее при $k \in \{3, 4\}$. Уже при $k = 5$ мы получаем в точности ту же константу $1.058\dots$, полагая $b = 1/2$, $a = 1/6$. Ниже мы приводим таблицу результатов, вытекающих из теоремы 4 при различных значениях k .

Отметим еще одно важное обстоятельство. Из теоремы 5 видно, что если $l = n/2$ и $\delta = cn$, $c < 1/4$, то размер максимального кода (максимальной клики) не превосходит константы, которая тем больше, чем ближе c к одной четверти. Однако хорошо известно, что при $c = 1/4$ клики в соответствующем дистанционном графе имеют растущий размер, а возможно, даже размер n . Это связано с классической задачей про матрицы Адамара (см. [35]).

Указанное обстоятельство в некотором смысле послужит основой для применения в следующем разделе вероятностного метода, который для большинства значений k даст лучшие оценки величины $\zeta_{\text{clique}}(k)$, нежели те, которые мы уже получили.

k	b	a	$\zeta_{\text{clique}}(k) \geq$	k	b	a	$\zeta_{\text{clique}}(k) \geq$
6	0.52	0.208	1.07429	20	0.5	0.236	1.12294
7	0.498	0.198	1.08575	25	0.47	0.216	1.12557
8	0.5	0.208	1.09332	30	0.47	0.24	1.12794
9	0.5	0.214	1.09924	35	0.5	0.224	1.12997
10	0.5	0.218	1.10331	40	0.476	0.242	1.13107
11	0.5	0.222	1.10749	45	0.5	0.228	1.13237
12	0.5	0.224	1.10961	50	0.5	0.244	1.13237
13	0.474	0.202	1.11244	55	0.472	0.218	1.13276
14	0.472	0.202	1.1144	101	0.476	0.224	1.13595
15	0.5	0.23	1.11615	1001	0.484	0.234	1.13917
16	0.5	0.232	1.11839	10001	0.495	0.245	1.1397

§ 4. Оценка величины $\zeta_{\text{clique}}(k)$ с помощью вероятностного метода

Общая идея подхода состоит в том, чтобы взять графы, у каждого из которых изначально есть клики сколь угодно большого размера, а потом удалить часть ребер из этих графов, уничтожив в них все клики данной величины, и выбрать из множества рассмотренных графов оптимальный. Наиболее эффективным окажется здесь вероятностный метод (см. [36]–[38]).

Заметим, что результаты этого раздела очень похожи на результаты работ [39], [40]. Однако будут тут и небольшие, но важные отличия, которые приведут к некоторому уточнению оценок. Поэтому и формулировки, и доказательства мы воспроизведем во всех подробностях.

Итак, в п. 4.1 мы сформулируем основные результаты. В п. 4.2 мы проведем сравнение новых результатов как между собой, так и с результатами § 3. В пп. 4.3 и 4.4 докажем теоремы из п. 4.1.

4.1. Формулировки результатов. Следующие две теоремы дают общий рецепт получения “оптимальных” оценок для величин $\zeta_{\text{clique}}(k)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $k \geq 5$ – произвольное натуральное число, $b_0 \in (0, 1/2)$ – произвольное вещественное число. Положим

$$\tau_0 = \tau_0(b_0) = \left(\frac{b_0}{2}\right)^{-b_0/2} \left(1 - \frac{b_0}{2}\right)^{-(1-b_0/2)}, \quad \tau_1 = \tau_1(b_0) = b_0^{-b_0} (1 - b_0)^{-(1-b_0)}.$$

Рассмотрим

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(b_0, k) = \left\{ c' \in [\tau_0, \tau_1] : k \geq \left\lceil \frac{2 \ln \tau_1}{\ln c' - \ln \tau_0} \right\rceil \right\}.$$

Положим $c = c(b_0, k) = \inf \mathcal{C}$, если $\mathcal{C} \neq \emptyset$, и $c = \tau_1$ иначе.

Тогда $\zeta_{\text{clique}}(k) \geq \tau_1/c$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $k \geq 5$ – произвольное натуральное число, а b_{-1}, b_1 – произвольные вещественные числа, удовлетворяющие ограничениям

$$b_{-1}, b_1 \in (0, 1), \quad b_{-1} + b_1 \leq \frac{1}{2}, \quad b_{-1} \leq b_1.$$

Положим

$$A = \frac{2 + 9b_{-1} + 3b_1 - \sqrt{(2 + 9b_{-1} + 3b_1)^2 - 12(3b_{-1} + b_1)^2}}{12},$$

$$B = \frac{3b_{-1} + b_1}{2} - 2A, \quad C = 1 + A - \frac{3b_{-1} + b_1}{2}.$$

Пусть, далее,

$$\rho_0 = \rho_0(b_{-1}, b_1) = A^{-A} B^{-B} C^{-C},$$

$$\rho_1 = \rho_1(b_{-1}, b_1) = b_{-1}^{-b_{-1}} b_1^{-b_1} (1 - b_{-1} - b_1)^{-(1-b_{-1}-b_1)}.$$

Рассмотрим

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(b_{-1}, b_1, k) = \left\{ c' \in [\rho_0, \rho_1] : k \geq \left\lceil \frac{2 \ln \rho_1}{\ln c' - \ln \rho_0} \right\rceil \right\}.$$

Положим $c = c(b_{-1}, b_1, k) = \inf \mathcal{C}$, если $\mathcal{C} \neq \emptyset$, и $c = \rho_1$ иначе.

Тогда $\zeta_{\text{clique}}(k) \geq \rho_1/c$.

Нетрудно проверить, что в условиях теоремы 6 величина τ_0 всегда меньше величины τ_1 , а потому множество $\mathcal{C}$ определено корректно. В конечном счете имеем

$$\zeta_{\text{clique}}(k) \geq \max_{b_0 \in (0, 1/2)} \frac{\tau_1(b_0)}{c(b_0, k)}.$$

Аналогичный комментарий верен и относительно теоремы 7. Правда, там не столь очевидно неравенство $\rho_0 < \rho_1$; доказательство этого неравенства можно найти в [26]. В итоге

$$\zeta_{\text{clique}}(k) \geq \max_{b_{-1}, b_1} \frac{\rho_1(b_{-1}, b_1)}{c(b_{-1}, b_1, k)}.$$

В следующем пункте мы сравним результаты теорем 4, 6 и 7.

4.2. Сопоставление результатов. Прежде всего заметим, что теоремы 6 и 7 отличаются от своих аналогов из [40] тем, что в [40] величина $\zeta(k)$ определялась условием $\omega(G) \leq k$, тогда как теперь мы делаем более сильное ограничение $\omega(G) < k$. Тем не менее дополнительный вероятностный трюк, который мы ввели в доказательства, позволил сохранить результаты в точности такими же, какими они были прежде – при нестрогой оценке размера максимальной клики. Соответственно, мы собрали оптимальные результаты в таблице, которую приводим ниже. В первом столбце указано k , во втором и третьем – b_{-1}, b_1 (параметры из теоремы 7), в четвертом – наилучшая оценка в теореме 7, в пятом – b_0 (параметр из теоремы 6), в шестом – наилучшая оценка в теореме 6, в седьмом – лучшая из оценок теорем 6 и 7; при этом в четвертом и шестом столбцах жирным шрифтом выделена та оценка, которая попала в седьмой столбец. Все оценки даны с восемью точными знаками после запятой.

k	Теорема 7			Теорема 6		
	b_{-1}	b_1	$\zeta(k) \geq$	b_0	$\zeta(k) \geq$	$\zeta(k) \geq$
5	0.00001734	0.02544379	1.00280720	0.02825291	1.00297305	1.00297305
6	0.00071800	0.08438940	1.01694361	0.09659179	1.01838640	1.01838640
7	0.00270696	0.12703569	1.03395854	0.14157882	1.03626539	1.03626539
8	0.00553133	0.15711445	1.05011426	0.17051644	1.05242870	1.05242870
9	0.00869977	0.17904575	1.06460594	0.19035277	1.06632451	1.06632451
10	0.01190629	0.19555639	1.07739346	0.20472195	1.07816823	1.07816823
11	0.01498920	0.20833110	1.08864080	0.21558694	1.08829570	1.08864080
12	0.01787410	0.21844807	1.09855184	0.22408139	1.09701591	1.09855184
13	0.02053497	0.22662152	1.10731983	0.23090096	1.10458387	1.10731983
14	0.02297102	0.23333932	1.11511348	0.23649470	1.11120346	1.11511348
15	0.02519380	0.23894375	1.12207552	0.24116490	1.11703654	1.12207552
16	0.02722013	0.24368069	1.12832523	0.24512232	1.12221184	1.12832523
17	0.02906839	0.24773059	1.13396195	0.24851823	1.12683247	1.13396195
18	0.03075664	0.25122837	1.13906849	0.25146404	1.13098160	1.13906849
19	0.03230179	0.25427658	1.14371408	0.25404355	1.13472693	1.14371408
20	0.03371912	0.25695447	1.14795689	0.25632099	1.13812400	1.14795689
25	0.03931602	0.26656957	1.16461196	0.26461281	1.15125524	1.16461196
30	0.04321023	0.27249456	1.17618197	0.26984084	1.16020045	1.17618197
35	0.04605883	0.27649512	1.18467380	0.27343793	1.16668123	1.18467380
40	0.04822699	0.27937171	1.19116666	0.27606415	1.17159101	1.19116666
45	0.04992995	0.28153709	1.19628994	0.27806578	1.17543859	1.19628994
50	0.05130175	0.28322476	1.20043462	0.27964192	1.17853468	1.20043462
55	0.05242980	0.28457649	1.20385612	0.28091520	1.18107971	1.20385612
100	0.05755871	0.29034354	1.21959032	0.28647009	1.19266305	1.21959032
1000	0.06326998	0.29611686	1.23753236	0.29226811	1.20564840	1.23753236
10000	0.06384354	0.29666283	1.23936294	0.29283085	1.20696080	1.23936294
100000	0.06390091	0.29671712	1.23954636	0.29288697	1.20709218	1.23954636

Видно, что теорема 6 сильнее теоремы 7 лишь при $k \leq 10$. Любопытно, что теорема 6 доказывается с помощью $(0, 1)$ -векторов, а теорема 7 – с помощью $(-1, 0, 1)$ -векторов. Иными словами, если в подходе с равновесными кодами (вернее, в его “ручном” аналоге из § 2) добавление минус единиц не помогло (см. п. 2.4), то в вероятностном подходе увеличение числа координат дает уточнения результатов.

Далее, число в шестой колонке, очевидно, стремится к $1.207\dots$, а число в четвертой колонке становится все ближе к $1.239\dots$. Это и суть константы из работ [12] и [10], в которых получены самые сильные из известных нижние оценки для $\chi(\mathbb{R}^n)$ (см. § 1). Таким образом, в асимптотике по k теоремы 6 и 7 дают очень сильные результаты.

Результат теоремы 4 в указанном смысле слабее. Оценки в таблице из п. 3.3 не стремятся ни к 1.207 , ни к 1.239 . Их пределом является величина

$$1.139\dots = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{1/4}\left(\frac{3}{4}\right)^{3/4}.$$

Это видно из таблицы, но это нетрудно доказать формально.

В то же время при малых k теорема 4 все-таки лучше. А именно она сильнее теорем 6 и 7 при всех $k \leq 13$. Таким образом, результат теоремы 6 оказывается полностью в некотором смысле покрыт результатом теоремы 4.

Заметим, наконец, что теоремы 6 и 7, по существу, не применимы к $k \leq 4$. Таким образом, в этой области “штучные подходы” и их обобщения через “кодирование” просто незаменимы.

В следующем пункте мы докажем теорему 6.

4.3. Доказательство теоремы 6. Зафиксируем k, b_0 , а стало быть, и $\tau_0, \tau_1, \mathcal{C}, c$. Легко видеть, что либо $\mathcal{C} = \emptyset$, либо $\mathcal{C} = \{\tau_1\}$, либо $\mathcal{C} = [c, \tau_1]$, $c \geq \tau_0$. В первых двух случаях утверждение теоремы тривиально. Рассмотрим ситуацию, когда $\tau_0 \leq c < \tau_1$.

Возьмем произвольное $c' \in (c, \tau_1)$. Здесь важно, что c' строго больше c , хотя и сколь угодно близко к c . Если мы покажем, что $\zeta_{\text{clique}}(k) \geq \tau_1/c'$, то, беря инфимум обеих частей неравенства по c' , мы получим искомое утверждение $\zeta_{\text{clique}}(k) \geq \tau_1/c$.

Итак, нам нужно убедиться в существовании такой функции $\delta(n) = o(1)$, что при всех n найдется граф расстояний $G = (V, E)$ в $\mathbb{R}^n$, у которого одновременно $\omega(G) < k$ и $\chi(G) \geq (\tau_1/c' + \delta(n))^n$.

Положим для каждого достаточно большого $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{V}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, |\{i : x_i = 1\}| = [b_0 n]\}.$$

Пусть p – минимальное простое число, удовлетворяющее условию $[b_0 n] - 2p < 0$. Положим

$$\mathcal{E}_n = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{2p}\}, \quad \mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n).$$

С помощью формулы Стирлинга легко показать, что

$$N = |\mathcal{V}_n| = (\tau_1 + o(1))^n.$$

В то же время уже хорошо известный нам линейно-алгебраический метод дает оценку

$$\alpha = \alpha(\mathcal{G}_n) \leq nC_n^p.$$

При $n \rightarrow \infty$ имеем $p \sim b_0 n/2$ и, значит, за счет все той же формулы Стирлинга $\alpha \leq (\tau_0 + \delta_1)^n$ с некоторой $\delta_1 = o(1)$.

Конечно, если снова вспомнить простую оценку $\chi(G) \geq |V|/\alpha(G)$, то окажется, что

$$\chi(\mathcal{G}_n) \geq \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} + \delta_2(n) \right)^n$$

с некоторой $\delta_2 = o(1)$, и это, на первый взгляд, даже лучше заявленного в теореме результата. Неприятность в том, что граф расстояний $\mathcal{G}_n$ вполне может содержать (и содержит) клики размера больше k (ср. конец п. 3.3).

Воспользуемся вероятностным методом (см. [36]–[38]). Рассмотрим произвольное число $\gamma \in (\tau_0/c', 1)$. Такое γ существует, поскольку $c' > c \geq \tau_0$. Положим $q = \gamma^n$, где n по-прежнему достаточно велико. Построим случайный

подграф $G = (\mathcal{V}_n, E)$ графа $\mathcal{G}_n$, “кладя” в E каждое ребро из $\mathcal{E}_n$ с вероятностью q независимо от остальных ребер. Образуется вероятностное пространство $(\Omega_n, \mathcal{B}_n, \mathbf{P}_n)$, в котором

$$\Omega_n = \{G = (\mathcal{V}_n, E), E \subseteq \mathcal{E}_n\}, \quad \mathcal{B}_n = 2^{\Omega_n}, \quad \mathbf{P}_n(G) = q^{|E|}(1-q)^{|\mathcal{E}_n|-|E|}$$

для $G = (\mathcal{V}_n, E)$.

Определим на Ω_n два семейства случайных величин. Во-первых, при каждом $l \in \mathbb{N}$ и при каждом $G \in \Omega_n$ положим $X_l(G)$ равной числу независимых множеств вершин размера l в графе G . Во-вторых, при аналогичных условиях $Y_m(G)$ – это число клик размера m в G .

Пусть $l = \lfloor (c')^n \rfloor$. Ясно, что за счет неравенства $c' < \tau_1$ при больших n выполнено $l < N = |\mathcal{V}_n|$, а стало быть, величина X_l корректно определена.

Допустим, мы показали, что

$$\mathbf{M}X_l < \frac{1}{2}, \quad \mathbf{M}Y_k < \frac{N}{4},$$

где через $\mathbf{M}\xi$ обозначено математическое ожидание случайной величины ξ . Тогда по неравенству Маркова (Чебышёва) имеют место оценки (см. [41])

$$\mathbf{P}_n(X_l \geq 1) \leq \mathbf{M}X_l < \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}_n\left(Y_k \geq \frac{N}{2}\right) \leq \frac{\mathbf{M}Y_k}{N/2} < \frac{1}{2},$$

т.е.

$$\mathbf{P}_n(X_l = 0) > \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}_n\left(Y_k < \frac{N}{2}\right) > \frac{1}{2}.$$

Значит, существует граф G в $\mathbb{R}^n$ с $\alpha(G) \leq l$ и с не более чем $N/2$ кликами размера k . Удалим из каждой клики в G по одной вершине, получится граф G' с не менее $N/2$ вершинами и с $\alpha(G') \leq l$. В итоге

$$\chi(G') \geq \frac{N/2}{\alpha(G')} = \left(\frac{\tau_1}{c'} + \delta(n)\right)^n,$$

и теорема доказана. (Следует только заметить, что при малых n доказывать нечего, ведь мы вольны на начальном отрезке натурального ряда выбрать значения $\delta(n)$ сколь угодно большими по модулю.) Что ж, будем оценивать математические ожидания.

Начнем с $\mathbf{M}X_l$. За счет линейности математического ожидания имеем

$$\mathbf{M}X_l = \sum_{W \subset \mathcal{V}_n, |W|=l} (1-q)^{r(W)}, \quad r(W) = |\{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{E}_n : \mathbf{x} \in W, \mathbf{y} \in W\}|.$$

Ясно, что поскольку $c' > \tau_0$, то $l > \alpha = \alpha(\mathcal{G}_n)$ при всех достаточно больших n , и, стало быть, для каждого $W \subset \mathcal{V}_n$, $|W| = l$, выполнено $r(W) > 0$. Нетрудно, однако, установить и гораздо более точное неравенство $r(W) \geq l^2/(4\alpha)$, верное при $l > \alpha$ (см. [40]).

Заметим, что

$$\frac{l^2}{4\alpha} \geq \frac{((c')^2 + \delta_3(n))^n}{(\tau_0 + \delta_4(n))^n} = \left(\frac{(c')^2}{\tau_0} + \delta_5(n)\right)^n, \\ \delta_3(n) = o(1), \quad \delta_4(n) = o(1), \quad \delta_5(n) = o(1).$$

Таким образом, полагая

$$A_l = \frac{l^2}{4\alpha},$$

имеем (с некоторыми $\delta_i(n) = o(1)$)

$$\begin{aligned} MX_l &\leq C_N^l (1-q)^{A_l} \leq \left(\frac{eN}{l}\right)^l (1-q)^{A_l} \\ &\leq \left(\frac{\tau_1}{c'} + \delta_6(n)\right)^{(c' + \delta_7(n))^n} \exp\left(-q \left(\frac{(c')^2}{\tau_0} + \delta_5(n)\right)^n\right) \\ &= \exp\left((c' + \delta_8(n))^n - \left(\frac{\gamma \cdot (c')^2}{\tau_0} + \delta_9(n)\right)^n\right). \end{aligned}$$

У нас $\gamma > \tau_0/c'$. Значит, $\gamma \cdot (c')^2/\tau_0 > c'$, т.е.

$$\begin{aligned} (c' + \delta_8(n))^n - \left(\frac{\gamma \cdot (c')^2}{\tau_0} + \delta_9(n)\right)^n &\rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow \infty, \\ \exp\left((c' + \delta_8(n))^n - \left(\frac{\gamma \cdot (c')^2}{\tau_0} + \delta_9(n)\right)^n\right) &\rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, при всех достаточно больших n выполнено $MX_l < 1/2$, и нам остается обосновать оценку $MY_k < N/2$.

За счет линейности математического ожидания имеем $MY_k \leq C_N^k q^{C_k^2}$. Далее, поскольку k – константа (т.е. k не зависит от n),

$$\begin{aligned} MY_k &\leq N^k \cdot (\gamma^n)^{C_k^2} = (\tau_1 + \delta_{10}(n))^{nk} \gamma^{nk(k-1)/2} \\ &= (\tau_1 + \delta_{10}(n))^n e^{n(k-1)(\ln \tau_1 + k/2 \ln \gamma + \delta_{11}(n))}. \end{aligned}$$

Из определения c и из условия $c < c'$ видно, что

$$k \geq \left\lceil \frac{2 \ln \tau_1}{\ln c - \ln \tau_0} \right\rceil \geq \frac{2 \ln \tau_1}{\ln c - \ln \tau_0} > \frac{2 \ln \tau_1}{\ln c' - \ln \tau_0}.$$

Все наши прежние выкладки верны при любом $\gamma > \tau_0/c'$. Возьмем γ настолько близким к своей нижней границе, чтобы оказалась справедливой оценка $k > 2 \ln \tau_1/(-\ln \gamma)$. Тогда, с учетом отрицательности величины $\ln \gamma$,

$$\ln \tau_1 + \frac{k}{2} \ln \gamma < \ln \tau_1 - \ln \tau_1 = 0.$$

Таким образом, $MY_k = o(N)$ при $n \rightarrow \infty$, и нужное нам неравенство при больших n имеет место.

Теорема доказана.

4.4. Доказательство теоремы 7. Схема действий практически полностью повторяет свой аналог из предыдущего пункта. По существу, разница только в построении графа $\mathcal{G}_n$.

Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_n &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, \\ &\quad |\{i : x_i = -1\}| = [b_{-1}n], \quad |\{i : x_i = 1\}| = [b_1n]\}. \end{aligned}$$

Пусть, далее, p – минимальное простое число, удовлетворяющее условию $[b_{-1}n] + [b_1n] - 2p < -2[b_{-1}n]$. Положим

$$\mathcal{E}_n = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{2p}\}, \quad \mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n).$$

По формуле Стирлинга $|\mathcal{V}_n| = (\rho_1 + o(1))^n$. Кроме того, известно (см. [26]), что

$$\alpha = \alpha(\mathcal{G}_n) \leq (\rho_0 + o(1))^n.$$

Наконец, неравенство типа $r(W) \geq l^2/(4\alpha)$ верно и здесь. Дальнейшие рассуждения ясны, и теорема доказана.

§ 5. О величине $\zeta_{\text{girth}}(k)$

Этот параграф мы разобьем на три части. В п. 5.1 мы сформулируем наши основные результаты. В пп. 5.2 и 5.3 мы эти результаты докажем.

5.1. Формулировки результатов. Для того, чтобы получить оценки величины $\zeta_{\text{clique}}(k)$, мы использовали графы $G_{b,a} = (V_b, E_a)$ следующего вида:

$$V_b = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : \forall i \ x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = b\},$$

$$E_a = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a\}$$

при некоторых b и a . Оказывается, в таких графах всегда есть четные циклы любой допустимой длины. В частности, справедлива

ТЕОРЕМА 8. Пусть $b \leq n/2$, $a \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, причем $k \geq 2$ и $b - k \geq a$. Тогда в графе $G_{b,a}$ есть цикл длины $2k$.

Теорему 8 мы докажем в следующем пункте. Уже сейчас, однако, ясно, что величину $\zeta_{\text{girth}}(k)$ не удастся оценить с помощью какого бы то ни было графа $G_{b,a}$. Графы с более сложной координатной структурой вершин (например, графы, у которых вершины могут содержать -1 , а не только 0 и 1) довольно трудно исследовать на предмет наличия в них каких-либо циклов, и мы их также в настоящей работе не рассматриваем. Зато в рамках нашей стандартной технологии мы найдем графы вида $G_{b,a}$, которые не содержат нечетных циклов длины $\leq 2k + 1$ с любым наперед заданным k и которые тем не менее имеют экспоненциально большие хроматические числа. Это весьма любопытно, ведь, как известно, критерием двудольности графа служит отсутствие нечетных циклов в нем. Конечно, мы избавимся лишь от коротких циклов, и все же это по-прежнему нетривиально.

Итак, обозначим через $g_{\text{odd}}(G)$ длину кратчайшего нечетного цикла в G . Положим

$$\zeta_{\text{odd girth}}(k) = \sup\left\{\zeta : \exists \text{ функция } \delta = \delta(n) \text{ такая, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) = 0 \right. \\ \left. \text{и } \forall n \exists G \in \mathbb{R}^n, \text{ у которого } g_{\text{odd}}(G) > k, \chi(G) \geq (\zeta + \delta(n))^n\right\}.$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 9. Имеет место оценка

$$\zeta_{\text{odd girth}}(2k + 1) \geq 2 \left(\frac{k}{2k + 1} \right)^{k/(2k+1)} \left(\frac{k + 1}{2k + 1} \right)^{(k+1)/(2k+1)}.$$

Теорему 9 мы докажем в п. 5.3. Стоит отметить, что

$$\zeta_{\text{odd girth}}(3) = \zeta_{\text{clique}}(3).$$

Нетрудно видеть, что в указанном случае оценки из теорем 3 и 9 совпадают.

5.2. Доказательство теоремы 8. Нам нужно найти в графе $G_{b,a}$ цикл длины $2k$. Иными словами, нам надо предъявить вершины $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2k} \in V_b$, для которых $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) = a$ при всех $i \in \{1, \dots, 2k\}$ (здесь $2k+1 = 1$). Сейчас мы эти вершины просто укажем. Для этого сперва разобьем множество $\{1, \dots, n\}$ координатных позиций каждого вектора из V_b на части $A_1, \dots, A_5$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, \dots, a-1\}, & A_2 &= \{a, \dots, b-k\}, \\ A_3 &= \{b-k+1, \dots, 2b-2k-a+1\}, & A_4 &= \{2b-2k-a+2, \dots, 2b-a+1\}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$|A_1| = a-1, \quad |A_2| = b-a-k+1, \quad |A_3| = b-a-k+1, \quad |A_4| = 2k.$$

При этом все корректно, поскольку

$$b-k \geq a, \quad 2b-a+1 \leq 2 \cdot \frac{n}{2} - 1 + 1 = n,$$

так что $|A_5| \geq 0$.

У каждого из будущих векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2k}$ в части A_1 мы расположим единицы, в части A_5 — нули. Далее, наполнение частей A_2, A_3 , имеющих одинаковую мощность, будем чередовать. В векторах с нечетными номерами A_2 заполним единицами, A_3 — нулями, а в векторах с четными номерами мы, напротив, A_2 заполним нулями, A_3 — единицами. Наконец, с частью A_4 поступим следующим образом. В векторе $\mathbf{x}_1$ на первые k позиций из A_4 поставим единицы, на остальные позиции поставим нули. В векторе $\mathbf{x}_{i+1}$ мы поставим 1 на последнюю позицию, в которой у вектора $\mathbf{x}_i$ стоит 1, а за ней последовательно разместим еще $k-1$ единиц (мы считаем, что $2k+t=t$). Теперь легко видеть, что

$$(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_i) = a-1+1 = a,$$

так что вершины с соседними номерами соединены ребрами, причем часть A_4 устроена так, что указанное соотношение верно и при $i = 2k$. Кроме того, число единиц в каждом векторе равно

$$(a-1) + (b-a-k+1) + 2k = b.$$

Значит, векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2k}$ образуют цикл длины $2k$ в графе $G_{b,a}$, и теорема доказана.

5.3. Доказательство теоремы 9. Положим $b = \lceil n/2 \rceil$. Возьмем минимальное простое число p , большее величины $nk/(2k+1)$. Ясно, что, как всегда, $p \sim nk/(2k+1)$, и что при достаточно больших n выполнены неравенства

$$b > p > \frac{nk}{2k+1}.$$

Пусть $a = b - p$. Очевидно, $b - 2p < 0$. Сказанное сразу же влечет оценку

$$\chi(G_{b,a}) \geq \frac{C_n^b}{nC_n^p},$$

которая получается за счет линейной алгебры. В свою очередь, стандартная аналитика (формула Стирлинга) показывает, что

$$\frac{C_n^b}{nC_n^p} = \left(2 \left(\frac{k}{2k+1} \right)^{k/(2k+1)} \left(\frac{k+1}{2k+1} \right)^{(k+1)/(2k+1)} + o(1) \right)^n.$$

Таким образом, остается убедиться в том, что $g_{\text{odd}}(G_{b,a}) > 2k + 1$.

Предположим, в $G_{b,a}$ есть цикл на вершинах $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2k+1}$. Обозначим через A_i , $i = 1, \dots, 2k+1$, множество координатных позиций, на которых в векторе $\mathbf{x}_i$ стоят единицы.

ЛЕММА 1. Пусть $|A_1 \cap A_i| = \alpha$. Тогда $|A_1 \cap A_{i+2}| \leq \alpha + n + 2a - 2b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Посмотрим сперва на вектор $\mathbf{x}_{i+1}$ и соответствующее множество A_{i+1} . Поскольку

$$|\{1, \dots, n\} \setminus (A_1 \cup A_i)| = n - 2b + \alpha,$$

количество элементов множества A_{i+1} , находящихся в множестве $\{1, \dots, n\} \setminus (A_1 \cup A_i)$, можно представить в виде $n - 2b + \alpha - \varepsilon$, $\varepsilon \geq 0$. При этом, конечно, $|A_i \cap A_{i+1}| = a$. Значит,

$$|A_{i+1} \cap (A_1 \setminus A_i)| = b - a - (n - 2b + \alpha - \varepsilon) = 3b - a - \alpha - n + \varepsilon.$$

Положим

$$|A_{i+1} \cap (A_i \cap A_1)| = a - \delta, \quad |A_{i+1} \cap (A_i \setminus A_1)| = \delta, \quad 0 \leq \delta \leq a.$$

Теперь рассмотрим A_{i+2} . Дабы понять, в каком случае пересечение этого множества с A_1 имеет наибольшую мощность, разобьем A_1 на части:

$$A_1 = (A_{i+1} \cap (A_1 \setminus A_i)) \sqcup (A_{i+1} \cap (A_i \cap A_1)) \sqcup B_3 = B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3.$$

Величина $|A_{i+2} \cap A_1|$ максимальна, коль скоро $A_{i+2} \cap A_{i+1} \subseteq B_1 \cup B_2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |A_{i+2} \cap A_1| &\leq |A_{i+2} \cap A_{i+1}| + |B_3| = a + b - (3b - a - \alpha - n + \varepsilon) - (a - \delta) \\ &= n - 2b + a + \alpha - \varepsilon + \delta \leq n - 2b + 2a + \alpha. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Мы знаем, что $|A_1 \cap A_2| = a$. Стало быть, лемма 1 говорит, что

$$\begin{aligned} |A_1 \cap A_4| &\leq a + (n + 2a - 2b), & |A_1 \cap A_6| &\leq a + 2(n + 2a - 2b), \\ |A_1 \cap A_{2k+2}| &\leq a + k(n + 2a - 2b), \end{aligned}$$

где $A_{2k+2} = A_1$. Если мы сейчас докажем, что $a + k(n + 2a - 2b) < b$, то мы, очевидно, придем к противоречию, ведь

$$|A_1 \cap A_{2k+2}| = |A_1 \cap A_1| = b.$$

Итак,

$$\begin{aligned} a + k(n + 2a - 2b) &= b - p + k(n + 2(b - p) - 2b) \\ &= b - p(2k + 1) + kn < b - \frac{kn}{2k + 1} \cdot (2k + 1) + kn = b, \end{aligned}$$

и теорема 9 доказана.

§ 6. Несколько запрещенных расстояний

В этом параграфе будет шесть пунктов. В п. 6.1 мы расскажем об истории задачи о хроматическом числе пространства с несколькими запрещенными расстояниями и поставим нашу основную задачу. В п. 6.2 приведем формулировку основного результата. В п. 6.3 мы докажем этот результат. В п. 6.4 мы дадим несколько комментариев о связи доказанного нами результата с его аналогами из предыдущих разделов. Поскольку в формулировке основного результата будет присутствовать оптимизация по нескольким параметрам, мы в п. 6.5 расскажем о решении соответствующей оптимизационной задачи (которое само по себе нетривиально). Наконец, в п. 6.6 мы приведем некоторые таблицы с численными результатами, которые получаются при решении упомянутой выше оптимизационной задачи.

6.1. История вопроса и постановка основной задачи. В настоящем разделе нас будут интересовать дистанционные графы, у которых вершины по-прежнему являются элементами пространства $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой, а ребра задаются не одним запрещенным расстоянием, но некоторым конечным множеством запретов $\mathcal{A}$. А именно мы прежде всего рассмотрим величину

$$\chi(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}) = \min\{\chi : \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, \forall i \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \notin \mathcal{A}\}.$$

Конечно, можно пытаться исследовать различные свойства $\chi(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ в зависимости от тех или иных характеристик множества $\mathcal{A}$. Однако здесь мы ограничимся вариантом задачи, при котором искомой является величина

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; m) = \max_{\mathcal{A}, |\mathcal{A}|=m} \chi(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}).$$

Величину $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; m)$ рассматривал еще П. Эрдеш, который знал, например, что

$$c_1 m \sqrt{\ln m} \leq \bar{\chi}(\mathbb{R}^2; m) \leq c_2 m^2, \quad c_1, c_2 > 0.$$

Подобные результаты описаны в обзоре [20].

Аккуратно подсчитанные нижние оценки для хроматических чисел $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; m)$, коль скоро $n \rightarrow \infty$, впервые были приведены в статье [19]. Там было доказано, что

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 1) \geq (1.239 \dots + o(1))^n, \quad \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 2) \geq (1.439 \dots + o(1))^n.$$

Кроме того, там была установлена общая нижняя оценка, справедливая даже в случае любой функции $m = m(n)$:

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; m) \geq (c_1 m)^{c_2 n}, \quad c_1, c_2 > 0.$$

Константы c_1, c_2 были чрезвычайно маленькими (порядка 2^{-10000}), поэтому позже указанный результат уточнялся (см. [42]). А в работах [32], [33] была разработана оптимизационная техника, позволившая найти оптимальные (в рамках некоторого метода) константы типа 1.239 и 1.439. Перечислим эти результаты:

$$\begin{aligned}\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 2) &\geq (1.465 \dots + o(1))^n, & \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 3) &\geq (1.667 \dots + o(1))^n, \\ \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 4) &\geq (1.848 \dots + o(1))^n, & \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 5) &\geq (2.013 \dots + o(1))^n, \\ \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 6) &\geq (2.165 \dots + o(1))^n, & \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 7) &\geq (2.308 \dots + o(1))^n, \\ \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 8) &\geq (2.442 \dots + o(1))^n, & \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 9) &\geq (2.570 \dots + o(1))^n, \\ \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 10) &\geq (2.691 \dots + o(1))^n, & \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 11) &\geq (2.807 \dots + o(1))^n, \\ \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 12) &\geq (2.919 \dots + o(1))^n, & \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 13) &\geq (3.026 \dots + o(1))^n, \\ \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 14) &\geq (3.130 \dots + o(1))^n, & \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 15) &\geq (3.231 \dots + o(1))^n, \\ \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 16) &\geq (3.328 \dots + o(1))^n.\end{aligned}$$

Список можно продолжать и дальше.

Что касается верхних оценок величин $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; m)$, то ничего лучшего не придумано, нежели оценка

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; m) \leq (3 + o(1))^{nm},$$

мгновенно вытекающая из неравенства $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 1) \leq (3 + o(1))^n$, которое мы уже цитировали в § 1. Понятно, что с ростом m эта оценка катастрофически удаляется от имеющихся нижних оценок. Впрочем, по-видимому, именно верхние оценки подлежат дальнейшему усилению.

Как и в предшествующей части работы, нас будут интересовать графы расстояний с ограниченным кликовым числом. При этом теперь наши графы расстояний – это подграфы в графах $\mathfrak{G}_{\mathcal{A}} = (\mathfrak{V}, \mathfrak{E}_{\mathcal{A}})$, у которых

$$\mathfrak{V} = \mathbb{R}^n, \quad \mathfrak{E}_{\mathcal{A}} = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \in \mathcal{A}\}.$$

Основным объектом нашего исследования будет величина

$$\zeta_{\text{clique}}(k, m) = \sup \left\{ \zeta : \exists \text{ функция } \delta = \delta(n) \text{ такая, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) = 0 \right. \\ \left. \text{и } \forall n \exists \mathcal{A} \text{ мощности } m \text{ и } \exists G \text{ в } \mathfrak{G}_{\mathcal{A}}, \text{ у которого } \omega(G) < k, \chi(G) \geq (\zeta + \delta(n))^n \right\}.$$

Разумеется, $\zeta_{\text{clique}}(k, 1) = \zeta_{\text{clique}}(k)$, так что тут мы сконцентрируемся на случаях $m \geq 2$.

В следующем пункте мы сформулируем наш основной результат. Заметим, что в этом параграфе мы не станем говорить про обхват, т.е. про величину

$$\zeta_{\text{girth}}(k, m) = \sup \left\{ \zeta : \exists \text{ функция } \delta = \delta(n) \text{ такая, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) = 0 \right. \\ \left. \text{и } \forall n \exists \mathcal{A} \text{ мощности } m \text{ и } \exists G \text{ в } \mathfrak{G}_{\mathcal{A}}, \text{ у которого } g(G) > k, \chi(G) \geq (\zeta + \delta(n))^n \right\},$$

которая также, конечно, имеет смысл.

6.2. Формулировка результата. Нам удалось доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 10. Пусть даны числа k и m . Пусть также $r \geq 1$ – произвольное натуральное число. Рассмотрим симплекс

$$\Delta = \{\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_r) : v_i \in [0, 1], v_0 + v_1 + \dots + v_r = 1\}.$$

Для каждого $\mathbf{v} \in \Delta$ положим

$$\begin{aligned} g(t) &= g(t, \mathbf{v}) = \sum_{i=0}^r \mathbb{I}_{\{t \geq \sum_{j=0}^i v_j\}}(t), \\ \bar{s}' &= \bar{s}'(\mathbf{v}) = \int_0^1 g^2(t) dt, \quad \underline{s}' = \underline{s}'(\mathbf{v}) = \int_0^1 g(t)g(1-t) dt, \\ \mathbf{b} &= (0, 1, \dots, r), \quad \mathbf{e} = (1, \dots, 1), \\ H' &= H'(\mathbf{v}) = \left\{ \boldsymbol{\eta} = (\eta_0, \dots, \eta_r) : \eta_i \in [0, 1], (\boldsymbol{\eta}, \mathbf{e}) = 1, (\boldsymbol{\eta}, \mathbf{b}) \leq \frac{\bar{s}' - \underline{s}'}{m+1} \right\}, \\ f(\mathbf{a}) &= \sum_{i=0}^r a_i \ln a_i, \quad \mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_r), \\ \rho(\mathbf{v}) &= \min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\} - \frac{k-2}{k} f(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Тогда

$$\zeta_{\text{clique}}(k, m) \geq e^{\rho(\mathbf{v})}.$$

Следствием из теоремы является утверждение о том, что

$$\zeta_{\text{clique}}(k, m) \geq \max_{r \geq 1} \max_{\mathbf{v} \in \Delta} e^{\rho(\mathbf{v})}.$$

Ясно, что мы тем самым имеем нетривиальную задачу на поиск экстремума. Мы поступим так. Сперва в п. 6.3 докажем теорему 10. Доказательство будет опираться на вероятностный метод, подобно тому, как это было с теоремами 6 и 7. Затем в п. 6.4 мы прокомментируем связь теоремы 10 с теоремами 6 и 7. В п. 6.5 обсудим задачу отыскания интересующего нас экстремума. Наконец, в п. 6.6 мы приведем таблицы результатов, которые мы получим в итоге для различных пар параметров k, m .

Заметим, что здесь мы не стали привлекать технику теории кодирования, но работаем лишь с вероятностным подходом.

6.3. Доказательство теоремы 10. Зафиксируем числа k, m и r , а также вектор $\mathbf{v} \in \Delta$. Если $\rho(\mathbf{v}) \leq 0$, то утверждение теоремы 10 тривиально. Поэтому будем считать, что $\rho(\mathbf{v}) > 0$.

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_n &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1, \dots, r\}, \\ &\quad \forall j \in \{0, 1, \dots, r-1\} \quad |\{i : x_i = j\}| = [v_j n], \\ &\quad |\{i : x_i = r\}| = n - [v_0 n] - \dots - [v_{r-1} n]\}. \end{aligned}$$

Иными словами, число координат величины j в каждом векторе из $\mathcal{V}_n$ асимптотически равно $v_j n$. Нетрудно видеть, что тем самым

$$N = |\mathcal{V}_n| = (e^{-f(\mathbf{v})} + o(1))^n.$$

Положим, далее,

$$\bar{s} = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}_n} (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \underline{s} = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}_n} (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Несложно убедиться в том, что $\bar{s} \sim \bar{s}' n$, $\underline{s} \sim \underline{s}' n$ (см. также [33]).

Пусть p – минимальное простое число такое, что $\bar{s} - (m+1)p < \underline{s}$. Тогда с учетом известных фактов из теории чисел (см. п. 2.2) имеем $p \sim (\bar{s}' - \underline{s}')/(m+1)$.

Положим

$$\mathcal{A} = \{\sqrt{2p}, \sqrt{4p}, \dots, \sqrt{2mp}\},$$

$$\mathcal{E}_n = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \in \mathcal{A}\}, \quad \mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n) \in \mathfrak{G}_{\mathcal{A}}.$$

В работе [32] показано, что

$$\alpha = \alpha(\mathcal{G}_n) \leq \sum_{\mathbf{u} \in H} \frac{n!}{u_0! \cdot u_1! \cdots u_r!},$$

где

$$H = \{\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_r) : u_i \in \mathbb{N}, (\mathbf{u}, \mathbf{e}) = n, (\mathbf{u}, \mathbf{b}) \leq p-1\}.$$

Стандартный анализ с участием формулы Стирлинга дает запись

$$\alpha \leq \left(\exp\left(-\min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} f(\boldsymbol{\eta})\right) + o(1) \right)^n.$$

Далее следует применить вероятностный метод. Для этого выберем некоторые параметры. Во-первых, пусть $\gamma \in [0, 1]$ таково, что $\ln \gamma < 2f(\mathbf{v})/k$ и что $-\min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\} - \ln \gamma < -f(\mathbf{v})$. Последнему условию можно удовлетворить, поскольку $\rho(\mathbf{v}) > 0$, т.е.

$$-\min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\} - \frac{2f(\mathbf{v})}{k} < -f(\mathbf{v}),$$

а значит, нужно просто брать любое γ , при котором $\ln \gamma$ достаточно близок к величине $2f(\mathbf{v})/k$, хотя и меньше ее строго. Во-вторых, пусть c таково, что одновременно

$$\ln c < -f(\mathbf{v}), \quad \ln c > -\min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\} - \ln \gamma.$$

Так, опять же, можно сделать, поскольку ввиду неравенства

$$-\min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\} - \ln \gamma < -f(\mathbf{v}),$$

интервал

$$\left(-\min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\} - \ln \gamma, -f(\mathbf{v}) \right)$$

не пуст.

Положим $q = \gamma^n$, $l = [c^n]$ (ср. п. 4.3). Построим на основе графа $\mathcal{G}_n$ случайный граф с вероятностью ребра q . Определим случайные величины X_l и Y_k в точности так же, как одноименные величины определялись в п. 4.3. Корректность и нетривиальность определения величины X_l следует из того, что

$$l = (e^{\ln c} + o(1))^n < (e^{-f(\mathbf{v})} + o(1))^n = N,$$

$$l > \left(\exp\left(-\min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\} - \ln \gamma\right) + o(1) \right)^n > \alpha.$$

Разумеется, мы всюду далее будем считать, что n достаточно велико, опуская упоминание об этом.

Остается (см. п. 4.3) показать, что $MX_l < 1/2$ и $MY_k < N/4$. Проводим знакомые выкладки

$$MX_l \leq C_N^l (1-q)^{l^2/(4\alpha)} \leq \exp\left((c + o(1))^n - \left(\frac{\gamma c^2}{\exp(-\min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\})} + o(1)\right)^n\right).$$

Мы знаем, что $\ln c > -\min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\} - \ln \gamma$. Значит, $\ln c + \ln \gamma > -\min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\}$, т.е. $\gamma c > \exp(-\min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\})$. Таким образом,

$$\frac{\gamma c^2}{\exp(-\min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\})} > c,$$

откуда

$$(c + o(1))^n - \left(\frac{\gamma c^2}{\exp(-\min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\})} + o(1)\right)^n \rightarrow -\infty,$$

а стало быть,

$$\exp\left((c + o(1))^n - \left(\frac{\gamma c^2}{\exp(-\min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\})} + o(1)\right)^n\right) < \frac{1}{2}.$$

В свою очередь,

$$MY_k \leq C_N^k q^{C_k^2} \leq N^k q^{C_k^2} = N \cdot N^{k-1} q^{C_k^2},$$

и нам достаточно убедиться в том, что $N^{k-1} q^{C_k^2} \rightarrow 0$. В самом деле,

$$N^{k-1} q^{C_k^2} = (e^{-f(\mathbf{v})(k-1)} + o(1))^n \cdot (\gamma^{k(k-1)/2})^n$$

$$= \left(\exp\left(-f(\mathbf{v})(k-1) + \frac{k(k-1)}{2} \cdot \ln \gamma\right) + o(1) \right)^n.$$

Но мы знаем, что $\ln \gamma < 2f(\mathbf{v})/k$, а значит,

$$-f(\mathbf{v})(k-1) + \frac{k(k-1)}{2} \ln \gamma < -f(\mathbf{v})(k-1) + f(\mathbf{v})(k-1) = 0,$$

так что $\exp(-f(\mathbf{v})(k-1) + (k(k-1))/2 \cdot \ln \gamma) \rightarrow 0$ и $N^{k-1} q^{C_k^2} \rightarrow 0$.

Итак, мы показали, что

$$\zeta_{\text{clique}}(k, m) \geq \frac{e^{-f(\mathbf{v})}}{c} = e^{-f(\mathbf{v}) - \ln c}.$$

Беря в этом неравенстве инфимум по c , для которых $\ln c > -\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\} - \ln \gamma$, и супремум по γ , для которых $\ln \gamma < 2f(\mathbf{v})/k$, получаем оценку

$$\zeta_{\text{clique}}(k, m) \geq \exp\left(-f(\mathbf{v}) + \min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\} + \frac{2f(\mathbf{v})}{k}\right) = e^{\rho(\mathbf{v})}.$$

Теорема 10 доказана.

6.4. Небольшой комментарий к теореме 10. Из общих соображений понятно, что теоремы 6 и 7 должны быть частными случаями теоремы 10. В действительности, так оно, конечно, и есть. Разница заключается в том, что в теоремах 6 и 7 мы смогли в явном виде отыскать минимум, возникающий в формулировке теоремы 10. Иными словами, если в теореме 10 величина $\rho(\mathbf{v})$ включает в себя минимизацию по η , то в теоремах 6 и 7 эта минимизация произведена заранее. При этом в последних двух теоремах $r = 2$ и $r = 3$ соответственно. Разумеется, мы с таким же успехом могли в тех теоремах полагать $r = 4$ и т.д., рассматривая не $(0, 1)$ -векторы и не $(-1, 0, 1)$ -векторы (которые с точки зрения нашей задачи равносильны $(0, 1, 2)$ -векторам), а $(0, 1, 2, 3)$ -векторы и т.д. Разумеется, такое усложнение привело бы к тому, что надлежащий минимум по η мы не смогли бы найти явно. Но суть не в том. А суть в том, что непосредственная проверка показывает отсутствие сколь-нибудь заметных улучшений результатов теорем 6 и 7 при переходе к большему количеству значений координат в каждом векторе конструкции. Именно поэтому мы выделили случай $m = 1$: в нем достаточно брать $r = 2$, $r = 3$, и это позволяет упростить вычисления.

Напротив, в теореме 10 величина m произвольная, и на проверку оказывается, что чем больше m , тем больше оптимальное значение r . Очевидно, что с большими r и перебор по симплексу Δ весьма трудоемок, а стало быть, требуются нетривиальные соображения, помогающие такой перебор осуществлять за разумное время. Благо для каждого $\mathbf{v} \in \Delta$ нам еще нужно вычислить минимум по $\eta \in H'$, где H' довольно хитро само зависит от $\mathbf{v}$.

Аналогичную проблему в иной ситуации преодолели авторы статьи [33]. В следующем пункте мы напомним экстремальную задачу, которую им удалось решить, и увидим, что наша задача практически с ней совпадает. В итоге нам останется лишь напомнить основные идеи из работы [33], дабы прояснить возникновение численных данных в п. 6.6.

6.5. Решение экстремальной задачи. Итак, нам хочется численно найти

$$\max_{r \geq 1} \max_{\mathbf{v} \in \Delta} \exp\left(\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\} - \frac{k-2}{k} f(\mathbf{v})\right).$$

Однако в работе [33] изложена технология поиска

$$\max_{r \geq 1} \max_{\mathbf{v} \in \Delta} \exp\left(\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\} - f(\mathbf{v})\right).$$

Там слегка иные обозначения, но смысл именно такой.

Понятно, что разница между задачами отсутствует, ведь k – это константа. Ниже мы лишь напомним основную схему оптимизации.

Прежде всего при каждом r ищем

$$\max_{\mathbf{v} \in \Delta} \left(\min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\} - \frac{k-2}{k} f(\mathbf{v}) \right).$$

Далее, замечаем, что в H' неравенство можно заменить равенством, т.е. нам нужно найти

$$S_{r,m,k} = \max_{\mathbf{v} \in \Delta} \left(\min_{\mathbf{s} \in \Delta, (\mathbf{s}, \mathbf{b}) = h(\mathbf{v})/(m+1)} f(\mathbf{s}) - \frac{k-2}{k} f(\mathbf{v}) \right),$$

где $h(\mathbf{v}) = \bar{s}' - \underline{s}'$.

Вводим векторы $\mathbf{a}^i$, исходя из утверждения (предложение 2 из [33]): *функция $h(\mathbf{v})$ вогнута на Δ , а неравенство $h(\mathbf{v}) \geq q$ при любом q равносильно системе из не более чем 2^{r-1} линейных неравенств $(\mathbf{v}, \mathbf{a}^i) \geq q$ с целыми неотрицательными векторами $\mathbf{a}^i$, не зависящими от q* . Получаем (теорема 1 из [33]), что

$$S_{r,m,k} = \max_{i=1, \dots, 2^{r-1}} \max_{0 \leq p \leq w(r,m)} \left(\min_{\mathbf{s} \in \Delta, (\mathbf{s}, \mathbf{b}) = p} f(\mathbf{s}) - \frac{k-2}{k} \min_{\mathbf{v} \in \Delta, (\mathbf{v}, \mathbf{a}^i) = (m+1)p} f(\mathbf{v}) \right),$$

где

$$w(r, m) = \min \left\{ \frac{r-1}{2}, \frac{r^2-1}{6(m+1)} \right\}.$$

Для любого $\lambda > 0$ полагаем

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{r-1} \lambda^j} (1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{r-1}) \in \mathbb{R}^r.$$

А для любого вектора $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r)$ с целыми неотрицательными координатами полагаем

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{r-1} \lambda^{a_{j+1}}} (\lambda^{a_1}, \lambda^{a_2}, \dots, \lambda^{a_r}) \in \mathbb{R}^r.$$

Оказывается, что (теорема 2 из [33])

$$S_{r,m,k} = \max_{i=1, \dots, 2^{r-1}} \max_{0 \leq p \leq w(r,m)} \left(f(\boldsymbol{\lambda}) - \frac{k-2}{k} f(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{a}^i}) \right),$$

где λ – единственный положительный корень полинома $\sum_{j=0}^{r-1} (j-p)z^j$, а μ – единственный положительный корень полинома $\sum_{j=0}^{r-1} (a_{j+1}^i - (m+1)p)z^{a_{j+1}^i}$.

Такая задача решается достаточно легко. Ее численное решение описано в [33; § 4], его мы и реализуем при получении таблиц из следующего пункта, который завершает настоящий параграф, а с ним и всю нашу работу.

6.6. Таблицы результатов. В таблицах, которые мы приводим ниже, отражены m от 1 до 20. Для каждого m величина k меняется в стандартных пределах 1 – 20, 25, 50, ... Мы также указываем значение $r \leq 10$, вплоть до которого приходилось искать максимумы для данных m и k . Видно, что при $m \leq 11$ и при $k \rightarrow \infty$ величина искомой константы стремится ровно к той величине, которая для данного m выписана в п. 6.1. При $m > 11$ начинаются

небольшие расхождения, связанные с тем, что мы не брали $r > 10$. Последнее обстоятельство обусловлено, в свою очередь, нехваткой мощности персонального компьютера. Если написать программу, делающую распределенные вычисления, и запустить ее на кластере, то можно будет брать r порядка 20, а это и есть та величина, которую использовали авторы работы [33].

Стоит отметить, что есть три клетки в первой таблице, где стоит точная единица. Это соответствует тому, что вероятностный метод дает экспоненциальные оценки хроматического числа не при всех k . При $m = 1$ мы и прежде работали лишь с $k \geq 5$. Иными словами, ясно, что заведомо имеются ситуации, когда идеи теории кодирования могут помочь и здесь – при $m > 1$.

$k \setminus m$	1	r	2	r	3	r	4	r	5	r
3	1.000000	0	1.000000	0	1.001271	1	1.010972	1	1.025130	2
4	1.000000	0	1.016665	1	1.055782	2	1.096186	3	1.134188	4
5	1.002973	1	1.058718	2	1.122702	3	1.182135	4	1.236366	5
6	1.018386	1	1.099706	2	1.180723	3	1.254357	5	1.321082	6
7	1.036265	1	1.134785	2	1.229070	4	1.313893	5	1.390598	7
8	1.052429	1	1.164501	3	1.269349	4	1.363230	6	1.448099	7
9	1.066325	1	1.189781	3	1.303175	4	1.404563	6	1.496227	7
10	1.078168	1	1.211347	3	1.331877	4	1.439591	6	1.536999	8
11	1.088641	2	1.229900	3	1.356502	5	1.469605	6	1.571930	8
12	1.098552	2	1.245997	3	1.377831	5	1.495581	6	1.602161	8
13	1.107320	2	1.260076	3	1.396467	5	1.518267	6	1.628566	8
14	1.115113	2	1.272482	3	1.412880	5	1.538243	7	1.651816	8
15	1.122076	2	1.283491	3	1.427439	5	1.555959	7	1.672439	8
16	1.128325	2	1.293319	3	1.440437	5	1.571776	7	1.690852	8
17	1.133962	2	1.302145	3	1.452111	5	1.585980	7	1.707389	9
18	1.139068	2	1.310113	3	1.462651	5	1.598803	7	1.722321	9
19	1.143714	2	1.317370	4	1.472213	5	1.610438	7	1.735870	9
20	1.147957	2	1.324001	4	1.480927	5	1.621040	7	1.748218	9
25	1.164612	2	1.349947	4	1.514987	5	1.662487	7	1.796502	9
50	1.200435	2	1.405522	4	1.587854	6	1.751161	8	1.899879	9
100	1.219590	2	1.435237	4	1.626797	6	1.798568	8	1.955191	10
1000	1.237532	2	1.463131	4	1.663355	6	1.843092	8	2.007171	10
10000	1.239363	2	1.465982	4	1.667092	6	1.847644	8	2.012487	10
100000	1.239546	2	1.466267	4	1.667467	6	1.848100	8	2.013020	10

$k \setminus m$	6	r	7	r	8	r	9	r	10	r
3	1.040369	3	1.055470	3	1.070035	4	1.083948	5	1.097196	5
4	1.169410	5	1.202065	6	1.232460	7	1.260886	8	1.287592	9
5	1.286031	6	1.331837	8	1.374384	9	1.414155	10	1.451537	10
6	1.382065	7	1.438305	9	1.490586	10	1.539514	10	1.585569	10
7	1.460707	8	1.525420	9	1.585647	10	1.642088	10	1.695284	10
8	1.525716	8	1.597430	10	1.664250	10	1.726939	10	1.786094	10
9	1.580123	9	1.657711	10	1.730074	10	1.798032	10	1.862219	10
10	1.626218	9	1.708798	10	1.785883	10	1.858336	10	1.926821	10
11	1.665716	9	1.752588	10	1.833738	10	1.910065	10	1.982261	10
12	1.699908	10	1.790506	10	1.875191	10	1.954891	10	2.030319	10
13	1.729777	10	1.823641	10	1.911426	10	1.994086	10	2.072354	10

$k \setminus m$	6	r	7	r	8	r	9	r	10	r
14	1.756084	10	1.852831	10	1.943356	10	2.028635	10	2.109415	10
15	1.779423	10	1.878734	10	1.971698	10	2.059309	10	2.142327	10
16	1.800265	10	1.901871	10	1.997019	10	2.086718	10	2.171743	10
17	1.818987	10	1.922658	10	2.019773	10	2.111354	10	2.198188	10
18	1.835895	10	1.941435	10	2.040329	10	2.133615	10	2.222086	10
19	1.851238	10	1.958477	10	2.058990	10	2.153826	10	2.243787	10
20	1.865223	10	1.974012	10	2.076004	10	2.172256	10	2.263578	10
25	1.919929	10	2.034805	10	2.142603	10	2.244423	10	2.341099	10
50	2.037155	10	2.165191	10	2.285568	10	2.399459	10	2.507751	10
100	2.099938	10	2.235086	10	2.362273	10	2.482705	10	2.597292	10
1000	2.158974	10	2.300852	10	2.434486	10	2.561114	10	2.681663	10
10000	2.165015	10	2.307583	10	2.441879	10	2.569143	10	2.690304	10
100000	2.165620	10	2.308257	10	2.442620	10	2.569948	10	2.691170	10

$k \setminus m$	11	r	12	r	13	r	14	r	15	r
3	1.109804	6	1.121815	7	1.133272	7	1.144220	10	1.154699	10
4	1.312789	10	1.336654	10	1.359334	10	1.380954	10	1.401621	10
5	1.486840	10	1.520320	10	1.552185	10	1.582609	10	1.611740	10
6	1.629130	10	1.670504	10	1.709943	10	1.747657	10	1.783821	10
7	1.745667	10	1.793584	10	1.839319	10	1.883104	10	1.925138	10
8	1.842182	10	1.895581	10	1.946598	10	1.995487	10	2.042459	10
9	1.923133	10	1.981176	10	2.036674	10	2.089894	10	2.141061	10
10	1.991863	10	2.053882	10	2.113218	10	2.170152	10	2.224914	10
11	2.050870	10	2.116326	10	2.178982	10	2.239126	10	2.296999	10
12	2.102037	10	2.170490	10	2.236042	10	2.298989	10	2.359574	10
13	2.146803	10	2.217892	10	2.285990	10	2.351400	10	2.414370	10
14	2.186283	10	2.259706	10	2.330059	10	2.397649	10	2.462731	10
15	2.221351	10	2.296853	10	2.369216	10	2.438750	10	2.505712	10
16	2.252699	10	2.330066	10	2.404231	10	2.475507	10	2.544154	10
17	2.280886	10	2.359933	10	2.435722	10	2.508568	10	2.578734	10
18	2.306362	10	2.386932	10	2.464192	10	2.538460	10	2.610001	10
19	2.329498	10	2.411454	10	2.490052	10	2.565614	10	2.638405	10
20	2.350601	10	2.433823	10	2.513644	10	2.590387	10	2.664320	10
25	2.433281	10	2.521481	10	2.606109	10	2.687495	10	2.765914	10
50	2.611128	10	2.710124	10	2.805166	10	2.896599	10	2.984709	10
100	2.706733	10	2.811571	10	2.912242	10	3.009098	10	3.102433	10
1000	2.796842	10	2.907207	10	3.013196	10	3.115171	10	3.213433	10
10000	2.806072	10	2.917003	10	3.023538	10	3.126038	10	3.224805	10
100000	2.806998	10	2.917985	10	3.024575	10	3.127127	10	3.225945	10

$k \setminus m$	16	r	17	r	18	r	19	r	20	r
3	1.164748	10	1.174400	9	1.183687	10	1.192635	10	1.201269	10
4	1.421424	10	1.440444	10	1.458746	10	1.476392	10	1.493431	10
5	1.639701	10	1.666600	10	1.692528	10	1.717566	10	1.741784	10
6	1.818582	10	1.852068	10	1.884388	10	1.915635	10	1.945892	10
7	1.965584	10	2.004585	10	2.042260	10	2.078714	10	2.114038	10
8	2.087693	10	2.131339	10	2.173527	10	2.214368	10	2.253957	10
9	2.190361	10	2.237954	10	2.283974	10	2.328537	10	2.371745	10
10	2.277700	10	2.328674	10	2.377976	10	2.425726	10	2.472028	10
11	2.352800	10	2.406697	10	2.458835	10	2.509336	10	2.558307	10
12	2.418003	10	2.474448	10	2.529056	10	2.581952	10	2.633247	10
13	2.475109	10	2.533792	10	2.590568	10	2.645566	10	2.698897	10
14	2.525513	10	2.586176	10	2.644869	10	2.701724	10	2.756855	10
15	2.570315	10	2.632739	10	2.693139	10	2.751646	10	2.808377	10
16	2.610388	10	2.674391	10	2.736318	10	2.796303	10	2.854465	10
17	2.646437	10	2.711861	10	2.775162	10	2.836478	10	2.895928	10
18	2.679033	10	2.745743	10	2.810288	10	2.872807	10	2.933421	10
19	2.708646	10	2.776525	10	2.842201	10	2.905813	10	2.967485	10
20	2.735666	10	2.804611	10	2.871318	10	2.935928	10	2.998564	10
25	2.841592	10	2.914723	10	2.985476	10	3.053995	10	3.120412	10
50	3.069738	10	3.151892	10	3.231353	10	3.308281	10	3.382821	10
100	3.192495	10	3.279500	10	3.363639	10	3.445081	10	3.523978	10
1000	3.308239	10	3.399814	10	3.488357	10	3.574045	10	3.657042	10
10000	3.320097	10	3.412139	10	3.501132	10	3.587256	10	3.670672	10
100000	3.321285	10	3.413375	10	3.502413	10	3.588580	10	3.672038	10

Список литературы

- [1] N. G. de Bruijn, P. Erdős, “A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations”, *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A*, **54**:5 (1951), 371–373.
- [2] L. Moser, W. Moser, “Solution to problem 10”, *Canad. Math. Bull.*, **4** (1961), 187–189.
- [3] H. Hadwiger, “Ungeklärte Probleme No. 40”, *Elem. Math.*, **16** (1961), 103–104.
- [4] А. М. Райгородский, *Хроматические числа*, МЦНМО, М., 2003.
- [5] О. Nechushtan, “On the space chromatic number”, *Discrete Math.*, **256**:1–2 (2002), 499–507.
- [6] D. Coulson, “A 15-colouring of 3-space omitting distance one”, *Discrete Math.*, **256**:1–2 (2002), 83–90.
- [7] K. Cantwell, “Finite Euclidean Ramsey theory”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **73**:2 (1996), 273–285.
- [8] Л. Л. Иванов, “Оценка хроматического числа пространства $\mathbb{R}^4$ ”, *УМН*, **61**:5 (2006), 181–182; англ. пер.: L. L. Ivanov, “An estimate for the chromatic number of the space $\mathbb{R}^4$ ”, *Russian Math. Surveys*, **61**:5 (2006), 984–986.
- [9] R. Radoičić, G. Tóth, “Note on the chromatic number of the space”, *Discrete and computational geometry*, Algorithms Combin., **25**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 696–698.
- [10] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства”, *УМН*, **55**:2 (2000), 147–148; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “On the chromatic number of a space”, *Russian Math. Surveys*, **55**:2 (2000), 351–352.
- [11] D. G. Larman, C. A. Rogers, “The realization of distances within sets in Euclidean space”, *Mathematika*, **19** (1972), 1–24.

- [12] P. Frankl, R. M. Wilson, “Intersection theorems with geometric consequences”, *Combinatorica*, **1**:4 (1981), 357–368.
- [13] P. Erdős, “Graph theory and probability”, *Canad. J. Math.*, **11** (1959), 34–38.
- [14] P. Erdős, “Unsolved problems”, *Congressus numerantium*, v. 15, Utilitas Math., Winnipeg, 1976, 678–696.
- [15] N. Wormald, “A 4-chromatic graph with a special plane drawing”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **28**:1 (1979), 1–8.
- [16] R. Hochberg, P. O’Donnell, “Some 4-chromatic unit-distance graphs without small cycles”, *Geombinatoric*, **5**:4 (1996), 137–141.
- [17] P. O’Donnell, “Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. I. Graph description”, *Geombinatorics*, **9**:3 (2000), 145–152.
- [18] P. O’Donnell, “Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane II. Graph description”, *Geombinatorics*, **9**:4 (2000), 180–193.
- [19] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “Borsuk’s problem and the chromatic numbers of some metric spaces”, *Russian Math. Surveys*, **56**:1 (2001), 103–139.
- [20] L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and his mathematics. II* (Budapest, Hungary, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, Springer-Verlag, Berlin; Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 649–666.
- [21] А. Сойфер, “Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее”, *Матем. просвещение*, **8**, 2004, 186–221.
- [22] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [23] J. Pach, P. K. Agarwal, *Combinatorial geometry*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley-Interscience Publ., New York, 1995.
- [24] V. Klee, S. Wagon, *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*, Dolciani Math. Exp., **11**, Math. Association of America, Washington, 1991.
- [25] A. Soifer, *The mathematical coloring book*, Springer-Verlag, New York, 2009.
- [26] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007.
- [27] О. И. Рубанов, “Хроматические числа трехмерных графов расстояний, не содержащих тетраэдров”, *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 797–800; англ. пер.: O. I. Rubanov, “Chromatic numbers of 3-dimensional distance graphs containing no tetrahedra”, *Math. Notes*, **82**:5 (2007), 718–721.
- [28] R. C. Baker, G. Harman, J. Pintz, “The difference between consecutive primes. II”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **83**:3 (2001), 532–562.
- [29] L. Babai, P. Frankl, *Linear algebra methods in combinatorics, Part 1*, Department of Computer Science, The University of Chicago, Preliminary version 2, 1992.
- [30] А. М. Райгородский, “Проблемы Борсука и Грюнбаума для решетчатых многогранников”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 81–108; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “The problems of Borsuk and Grunbaum on lattice polytopes”, *Izv. Math.*, **69**:3 (2005), 513–537.
- [31] А. Э. Гутерман, В. К. Любимов, А. М. Райгородский, С. А. Усачев, “О числах независимости графов расстояний с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$: оценки, гипотезы и приложения к задачам Нелсона–Эрдеша–Хадвигера и Борсука”, *Итоги науки и техники, сер. “Современная математика”*, **65** (2009), 82–100.
- [32] А. М. Райгородский, И. М. Шитова, “О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями”, *Матем. сб.*, **199**:4 (2008), 107–142; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, I. M. Shitova, “Chromatic numbers of real and rational spaces with real or rational forbidden distances”, *Sb. Math.*, **199**:4 (2008), 579–612.

- [33] Е. С. Горская, И. М. Митричева, В. Ю. Протасов, А. М. Райгородский, “Оценка хроматических чисел евклидова пространства методами выпуклой минимизации”, *Матем. сб.*, **200**:6 (2009), 3–22; англ. пер.: E. S. Gorskaya, I. M. Mitricheva, V. Yu. Protasov, A. M. Raigorodskii, “Estimating the chromatic numbers of Euclidean space by convex minimization methods”, *Sb. Math.*, **200**:6 (2009), 783–801.
- [34] Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, Связь, М., 1979; пер. с англ.: F. J. MacWilliams, N. J. A. Sloane, *The theory of error-correcting codes*, I, II, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1977.
- [35] М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: M. Hall, *Combinatorial theory*, Blaisdell Publ., Waltham, MA–Toronto–London, 1967.
- [36] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином: лаборатория знаний, М., 2007; пер. с англ.: N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York, 2000.
- [37] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [38] А. М. Райгородский, *Вероятность и алгебра в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2008.
- [39] А. М. Raigorodskii, O. I. Rubanov, “On the clique and the chromatic numbers of high-dimensional distance graphs”, *Number theory and applications*, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2009, 149–155.
- [40] А. М. Райгородский, О. И. Рубанов, “О графах расстояний с большим хроматическим числом и без больших клик”, *Матем. заметки*, **87**:3 (2010), 417–428; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, O. I. Rubanov, “Distance graphs with large chromatic number and without large cliques”, *Math. Notes*, **87**:3 (2010), 392–402.
- [41] Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей*, 3-е изд., Физматлит, М., 1961; нем. пер. 2-го изд.: B. W. Gnedenko, *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Lehrbücher und Monogr., **9**, Akademie-Verlag, Berlin, 1957.
- [42] А. М. Райгородский, М. И. Абсаямова, “О нижней оценке хроматического числа пространства $\mathbb{R}^n$ с k запрещенными расстояниями и метрикой l_1 ”, *Чебышёвский сб.*, 2006, № 4, 105–112.

Е. Е. Демёхин (E. E. Demekhin)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: edemekhin@gmail.com

Поступила в редакцию

14.12.2010 и 09.12.2011

А. М. Райгородский (A. M. Raigorodskii)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова;
Факультет инноваций и высоких технологий
Московского физико-технического института
E-mail: mraigor@yandex.ru

О. И. Рубанов (O. I. Rubanov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова;
Факультет инноваций и высоких технологий
Московского физико-технического института
E-mail: leg@pisem.net