Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Еремин, Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 9, 51–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7835>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 17:42:45

УДК 515.124.4+519.176

А. Ю. Еремин

Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства

Рассматривается задача о поиске минимального заполнения конечного метрического пространства, т.е. взвешенного графа наименьшего веса, соединяющего данное конечное метрическое пространство. Получена минимальная формула для веса минимального заполнения, с помощью которой доказаны различные свойства минимальных заполнений.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: минимальное заполнение, конечные метрические пространства, граф, проблема Громова, периметр метрического пространства.

DOI: 10.4213/sm7835

§ 1. Введение

Задача о минимальном заполнении конечного метрического пространства впервые была поставлена А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным в [1]. Она возникла на стыке двух известных проблем – проблемы Штейнера о кратчайшей сети (см., например, [2]) и проблемы Громова о минимальном заполнении гладкого многообразия (см. [3]).

Задача состоит в поиске взвешенного графа наименьшего веса, затягивающего данное метрическое пространство так, что для любых двух точек метрического пространства вес любого пути, соединяющего их в графе, не меньше расстояния между ними в метрическом пространстве.

Опишем данную конструкцию более подробно, приведя определения из [1]. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – конечное псевдометрическое пространство (т.е. расстояние между разными точками может быть равно 0), $G = (V, E)$ – связный конечный граф, соединяющий M (по определению связный граф G соединяет M , если $M \subset V$), $w: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ – функция на ребрах графа со значениями в неотрицательных числах, называемая *весовой* и порождающая *взвешенный граф* $\mathcal{G} = (G, w)$. Будем называть вершины графа G , лежащие в M , *граничными*, а остальные – *внутренними*. Сумму $\sum_{e \in E} w(e)$ будем называть *весом графа* и обозначать через $w(\mathcal{G})$. Определим на множестве V псевдометрику d_w , считая расстоянием между двумя вершинами наименьший из весов путей, соединяющих их в графе G .

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00664а), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1410.2012.1) и гранта Правительства РФ по постановлению № 220 (договор № 11.G34.31.0053).

Заполнением конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M}$ назовем соединяющий M взвешенный граф $\mathcal{G} = (G, w)$ такой, что для любых $p, q \in M$ выполнено $\rho(p, q) \leq d_w(p, q)$. Тогда граф G назовем *типом* этого заполнения. Число $\text{mf}(\mathcal{M}) = \inf w(\mathcal{G})$ по всем заполнениям $\mathcal{G}$ пространства $\mathcal{M}$ назовем *весом минимального заполнения*, а любое заполнение $\mathcal{G}$, для которого $w(\mathcal{G}) = \text{mf}(\mathcal{M})$, назовем *минимальным заполнением* пространства $\mathcal{M}$.

Если же мы фиксируем некоторый граф G , соединяющий M , и ищем $\inf w(\mathcal{G})$ только по заполнениям пространства $\mathcal{M}$, имеющим тип G , то полученное число будем называть *весом минимального параметрического заполнения* и обозначать $\text{mpf}(\mathcal{M}, G)$, а любое заполнение $\mathcal{G} = (G, w)$ такое, что $w(\mathcal{G}) = \text{mpf}(\mathcal{M}, G)$, будем называть *минимальным параметрическим заполнением типа G* . Очевидно, что $\text{mf}(\mathcal{M}) = \min_G \text{mpf}(\mathcal{M}, G)$, где минимум берется по всевозможным графам, соединяющим M .

В статье [1] доказывалось, что для заданного конечного метрического пространства всегда существует хотя бы одно минимальное заполнение.

Рассмотрим минимальное заполнение $\mathcal{G} = (G, w)$. Если в графе G есть цикл, то все входящие в него ребра имеют нулевой вес (иначе, удалив какое-либо из них, получим заполнение меньшего веса). Будем называть *граничным путем* простой путь в графе G , соединяющий две граничные вершины. Очевидно, любое ребро, через которое не проходит ни один граничный путь, имеет нулевой вес. Итак, последовательно стягивая в графе G ребра нулевого веса, получим дерево, все висячие вершины которого (напомним, что вершина графа называется *висячей*, если ее степень равна 1) являются граничными. Далее будем рассматривать заполнения только такого типа.

Если у графа G есть граничные вершины, не являющиеся висячими, то их можно сделать таковыми с помощью вклейки ребра нулевого веса. Также с помощью ребер нулевого веса можно расщепить все внутренние вершины степени более 3 до вершин степени 3, а внутренние вершины степени 2 можно выкинуть, объединив инцидентные им ребра в одно – с весом, равным сумме весов исходных. Итак, после проведения всех этих операций получим взвешенный граф $\mathcal{G}' = (G', w')$, являющийся деревом, у которого все граничные вершины имеют степень 1, а все внутренние – степень 3. Такие деревья будем называть *бинарными*. Легко видеть, что $\mathcal{G}'$ также будет минимальным заполнением пространства $\mathcal{M}$. Поэтому для поиска веса минимального заполнения достаточно рассматривать заполнения, тип которых – бинарное дерево.

В статье [1] рассматриваются только заполнения, у которых весовая функция неотрицательна. Позже О. А. Ивановым и А. А. Тужилиным была предложена идея рассмотреть заполнения, у которых весовая функция может быть произвольной. Эта идея была развита в статье [4], в частности, был доказан важный факт о том, что вес минимального заполнения равен весу минимального обобщенного заполнения (т.е. заполнения с допустимыми отрицательными весами). Ниже это утверждение будет изложено более формально.

Для большей общности и удобства при доказательстве различных свойств обобщенных заполнений мы будем работать с более широким классом пространств, чем псевдометрические.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Назовем ρ -пространством упорядоченную пару $\mathcal{M} = (M, \rho)$, где M – конечное множество, а $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная симметричная функция, заданная на его декартовом квадрате.

Очевидно, любое конечное псевдометрическое пространство можно рассматривать как ρ -пространство.

Определим понятие обобщенного заполнения ρ -пространства. Пусть $\mathcal{M}$ – ρ -пространство, $G = (V, E)$ – дерево, соединяющее M , причем так, что все висячие вершины G принадлежат M , $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ – весовая функция, порождающая обобщенный взвешенный граф $\mathcal{G} = (G, w)$. Сумму $\sum_{e \in E} w(e)$ будем называть *весом графа* и обозначать $w(\mathcal{G})$. Обозначим через $d_w(a, b)$, где $a, b \in V$, вес единственного простого (несамопересекающегося) пути, соединяющего вершины a и b (эта функция не обязательно является псевдометрикой, в частности может быть отрицательной).

Назовем $\mathcal{G}$ *обобщенным заполнением ρ -пространства M* , если $d_w(a, b) \geq \rho(a, b)$ при всех $a, b \in M$. Граф G называется *типом этого обобщенного заполнения*. Число $\text{mf}_-(\mathcal{M}) = \inf w(\mathcal{G})$ по всем обобщенным заполнениям $\mathcal{G}$ ρ -пространства $\mathcal{M}$ назовем *весом минимального обобщенного заполнения*, а любое обобщенное заполнение $\mathcal{G}$, для которого $w(\mathcal{G}) = \text{mf}_-(\mathcal{M})$, назовем *обобщенным минимальным заполнением ρ -пространства $\mathcal{M}$* .

Если же мы фиксируем некоторое дерево G , соединяющее M (причем так, что множество висячих вершин графа G является подмножеством M), и ищем $\inf w(\mathcal{G})$ только по обобщенным заполнениям пространства $\mathcal{M}$, имеющим тип G , то полученное число будем называть *весом обобщенного минимального параметрического заполнения* и обозначать $\text{mpf}_-(\mathcal{M}, G)$, а любое обобщенное заполнение $\mathcal{G} = (G, w)$ такое, что $w(\mathcal{G}) = \text{mpf}_-(\mathcal{M}, G)$, будем называть *обобщенным минимальным параметрическим заполнением типа G* . Очевидно, что $\text{mf}_-(\mathcal{M}) = \min_G \text{mpf}_-(\mathcal{M}, G)$, где минимум берется только по деревьям G , являющимся бинарными.

В этих обозначениях основной результат статьи [4] формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – псевдометрическое пространство. Тогда $\text{mf}_-(\mathcal{M}) = \text{mf}(\mathcal{M})$.

Таким образом, любое минимальное заполнение является также и обобщенным минимальным заполнением; поэтому все свойства, выполняющиеся для минимальных обобщенных заполнений, будут выполняться и для минимальных заполнений.

В статье [1] была выдвинута гипотеза о том, что вес минимального заполнения конечного метрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ может быть вычислен по формуле $\text{mf}(\mathcal{M}) = \min_G \max_{\pi \in \mathcal{O}(G)} p(\mathcal{M}, \pi)$, где G – всевозможные бинарные деревья с границей M , $\pi \in \mathcal{O}(G)$ – *планарный обход дерева G* , т.е. некоторая циклическая перестановка множества его граничных вершин такая, что соответствующий путь проходит по каждому ребру графа G дважды, $p(\mathcal{M}, \pi) = (1/2) \sum_{q \in M} \rho(q, \pi(q))$ – *полупериметр пространства $\mathcal{M}$ относительно обхода π* . Оказывается, данная гипотеза неверна (см. пример 4.6), но, как гласит теорема 4.4, гипотеза становится верной при замене обходов на мультиобходы. Говоря неформально, *мультиобход* – это путь, проходящий через каждое ребро $2k$ раз, где k – какое-то натуральное число (а не ровно по

два раза, как в случае обходов). Эта теорема позволит также получить ряд свойств обобщенных минимальных заполнений. В частности, будет доказано, что для почти всех псевдометрических пространств любое обобщенное минимальное заполнение имеет тип бинарного дерева и его весовая функция строго положительна (т.е. заполнение является не обобщенным).

Автор благодарит А. О. Иванова, А. А. Тужилина и Н. П. Стрелкову за постоянное внимание к работе, а также всех участников семинара “Минимальные сети”, проходящего на механико-математическом факультете МГУ, за проявленный интерес, многочисленные полезные обсуждения и дискуссии.

§ 2. Необходимые определения

Пусть S – конечное множество мощности n . Назовем *мультициклическим порядком кратности k на множестве S* отображение $\pi: \mathbb{Z}_{nk} \rightarrow S$ такое, что:

- 1) для любого индекса $j \in \mathbb{Z}_{nk}$ имеем $\pi(j) \neq \pi(j+1)$;
- 2) для любого элемента $s \in S$ его прообраз при отображении π состоит ровно из k элементов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Назовем дерево $G = (V, E)$ *бинарным*, если у него множество висячих вершин совпадает с M , а множество внутренних вершин $V \setminus M$ состоит из вершин степени 3. Заметим, что тогда $|E| = 2|M| - 3$.

Пусть $G = (V, E)$ – бинарное дерево с границей M , состоящей из n вершин.

Напомним определение разбиения границы дерева, порожденного удалением ребра $e \in E$, введенное в [1]. Пусть $e \in E$ – любое ребро дерева G . После его удаления дерево G распадется на две связные компоненты, обозначим их G_1 и G_2 . Положим $M_i = M \cap G_i$. Обозначим через $\mathcal{P}_G(e) = \{M_1, M_2\}$ полученное разбиение M .

Мультициклический порядок на M назовем *планарным по отношению к G* или *мультиобходом G* , если существует такое l , что для каждого $e \in E$ и $M_i \in \mathcal{P}_G(e)$ существует ровно l элементов $p \in \mathbb{Z}_{nk}$, для которых $\pi(p) \in M_i$, но $\pi(p+1) \notin M_i$. Такое l назовем *кратностью мультиобхода*, мультиобходы кратности l также будем называть *l -обходами*. Множество всех мультиобходов G обозначим $\mathcal{T}(G)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Определение планарного обхода G из [1] соответствует определению 1-обхода G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Если мультициклический порядок является мультиобходом, то его кратность как мультиобхода равна его кратности как мультициклического порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим любую вершину $v \in M$; пусть e – единственное ребро, ей инцидентное. Тогда $\mathcal{P}_G(e) = \{\{v\}, M \setminus \{v\}\}$. По определению мультиобхода существует ровно l элементов $p \in \mathbb{Z}_{nk}$ таких, что $\pi(p) = v$ и $\pi(p+1) \neq v$. Условие $\pi(p+1) \neq v$ несущественно в силу определения мультициклического порядка, поэтому прообраз v состоит ровно из l элементов, значит, $k = l$.

Для любых $v_1, v_2 \in M$ обозначим через $\Gamma_{v_1 v_2}$ путь из вершины v_1 в вершину v_2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Мультициклический порядок π на множестве M является мультиобходом кратности l тогда и только тогда, когда для любого $e \in E$ среди путей $\Gamma_{\pi(j)\pi(j+1)}$ ровно $2l$ проходят через e .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любое ребро $e \in E$, $\mathcal{P}_G(e) = \{M_1, M_2\}$. Пусть P_1 – множество путей $\Gamma_{\pi(j)\pi(j+1)}$, начинающихся в вершинах из M_1 и кончающихся в вершинах из M_2 , а P_2 – наоборот. Тогда множество P путей $\Gamma_{\pi(j)\pi(j+1)}$, проходящих через e , есть $P_1 \sqcup P_2$. Также $|P_1| = |P_2|$ (в силу цикличности порядка π количества путей, идущих из M_1 в M_2 и обратно, должны совпадать), поэтому $|P| = 2|P_1|$. Условие того, что мультициклический порядок является мультиобходом, равносильно тому, что для каждого $e \in E$ выполнено $|P_1| = |P_2| = l$, откуда следует требуемое.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Пусть π является l -обходом G , $v \in V$ – внутренняя вершина степени 3, e_1, e_2, e_3 – инцидентные ей ребра. Тогда среди путей $\Gamma_{\pi(j)\pi(j+1)}$, $0 \leq j < nl$, ровно по l проходят через каждую из пар ребер (e_1, e_2) , (e_2, e_3) , (e_1, e_3) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть через пару ребер (e_1, e_2) проходят C путей из указанных, через пары (e_1, e_3) и (e_2, e_3) – по B и A соответственно. Тогда имеем $B + C = A + C = A + B = 2l$, так как $B + C$, $A + C$, $A + B$ – количества путей, проходящих через e_1 , e_2 и e_3 соответственно. Отсюда имеем $A = B = C = l$.

Пусть $M = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_{|E|}\}$. Введем векторы $\gamma_{v_i v_j} \in \mathbb{R}^{|E|}$: k -я компонента вектора $\gamma_{v_i v_j}$ равна 1, если путь $\Gamma_{v_i v_j}$ проходит через e_k , и равна 0 в противном случае. Также введем вектор $\gamma \in \mathbb{R}^{|E|}$, все компоненты которого равны 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Пусть π – мультициклический порядок на G кратности k . В этом случае он является мультиобходом тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{j=0}^{nk-1} \gamma_{\pi(j)\pi(j+1)} = 2k\gamma.$$

Легко видеть, что это предложение есть переформулировка предложения 2.4.

Итак, пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – ρ -пространство, π – произвольный мультициклический порядок кратности k на нем. *Мультипериметром пространства $\mathcal{M}$ по отношению к порядку π назовем величину*

$$p(\mathcal{M}, \pi) = \frac{1}{2k} \sum_{j=0}^{nk-1} \rho(\pi(j), \pi(j+1)).$$

§ 3. Алгебраические свойства мультиобходов

В этом параграфе предполагается, что заданы ρ -пространство $\mathcal{M} = (M, \rho)$ и бинарное дерево $G = (V, E)$ с границей M , состоящей из n вершин. отождествим граничные вершины дерева G с индексами $1, 2, \dots, n$. В этом случае будут корректно определены пути Γ_{ij} и соответствующие им векторы $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}^{|E|}$.

Введем векторное пространство $U = \mathbb{R}^{C_n^2} = \{\sum_{i,j} \alpha_{ij} u_{ij}\}$ с базисом u_{ij} (здесь и далее двойной индекс ij имеет значение $\{i, j\}$, т.е. $u_{ij} = u_{ji}$, и суммирование

ведется по всем двухэлементным подмножествам множества M). Обозначим через $U_{\mathbb{Z}_+}$ подмножество U , состоящее из элементов, для которых $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_+$; аналогично введем $U_{\mathbb{Q}_+}$ и $U_{\mathbb{R}_+}$. Для любого вектора $u \in U$ обозначим через $I(u)$ множество индексов $\{i, j\}$, соответствующих ненулевым координатам u .

Для любого мультициклического порядка π кратности k на множестве M определим $\tilde{\pi} \in U_{\mathbb{Z}_+}$:

$$\tilde{\pi} = \sum_{l=0}^{nk-1} u_{\pi(l)\pi(l+1)}.$$

Определим также линейные отображения $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{|E|}$, $p: U \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g\left(\sum_{i,j} \alpha_{ij} u_{ij}\right) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \gamma_{ij}, \quad p\left(\sum_{i,j} \alpha_{ij} u_{ij}\right) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \rho(i, j).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Мультициклический порядок π на M является k -обходом дерева G тогда и только тогда, когда $g(\tilde{\pi}) = 2k\gamma$ (это переформулировка предложения 2.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В этих обозначениях $p(\mathcal{M}, \pi) = \frac{1}{2k} p(\tilde{\pi})$.

Получается, что для любого π , являющегося k -обходом G , $\tilde{\pi} \in U_{\mathbb{Z}_+}$ и выполнено $g(\tilde{\pi}) = 2k\gamma$. Докажем обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть для $u \in U_{\mathbb{Z}_+}$ выполнено $g(u) = 2k\gamma$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда существует k -обход π дерева G такой, что $u = \tilde{\pi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем условие теоремы:

$$2k\gamma = g(u) = g\left(\sum_{i,j} \alpha_{ij} u_{ij}\right) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \gamma_{ij}. \quad (1)$$

Введем вспомогательный граф G' , множество вершин которого есть M , а между вершинами i и j проведено ребро кратности α_{ij} .

ЛЕММА 3.4. При выполнении условий теоремы 3.3 граф G' связан.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Рассмотрим любую компоненту связности графа G' ; без ограничения общности можно считать, что ее вершины есть $v_1, \dots, v_m$, $m < n$. Пусть $\tilde{G}$ – минимальное поддереву дерева G , содержащее вершины $v_1, \dots, v_m$. Очевидно, что $\tilde{G} \cap M = \{v_1, \dots, v_m\}$. Более того, у дерева $\tilde{G}$ не может быть висячих вершин, кроме $v_1, \dots, v_m$ (иначе их можно было бы удалить). Обозначим через $d(w)$ для $w \in V(\tilde{G})$ количество ребер в пути из v_1 в w в графе G (этот путь единствен и, значит, является путем и в $\tilde{G}$). Выберем среди вершин $\tilde{G}$, степень которых в $\tilde{G}$ строго меньше, чем в G , ту, для которой величина $d(w)$ максимальна (если таких вершин нет, то $\tilde{G} = G$ и все доказано).

Заметим, что степень вершины w в G равна 3 (если она висячая в G , то либо ее степени в G и $\tilde{G}$ совпадают, либо она не входит в $\tilde{G}$), а степень в $\tilde{G}$ равна 2 (если она висячая в $\tilde{G}$, то совпадает с одной из вершин v_i , а значит, является висячей и в G , т.е. ее степени в G и $\tilde{G}$ совпадают).

Рассмотрим вершины, смежные с w в графе G ; пусть это $w_1, w_2 \in \tilde{G}$ и $w_3 \notin \tilde{G}$. Рассмотрим путь из w в v_1 в графе $\tilde{G}$. Без ограничения общности можно считать, что следующая за w вершина в нем есть w_1 . Тогда $d(w_1) + 1 = d(w) = d(w_2) - 1$. Пусть $ww_1 = e_A, ww_2 = e_B, ww_3 = e_C$. Рассмотрим линейную функцию L на $\mathbb{R}^{|E|}$:

$$L(\beta) = \beta_B + \beta_C - \beta_A$$

(β_X – компонента вектора β , соответствующая ребру e_X). Заметим, что если Γ_{ab} не проходит через пару ребер (ww_2, ww_3) , то $L(\gamma_{ab}) = 0$. С другой стороны, имеем $\sum_{i,j} \alpha_{ij} L(\gamma_{ij}) = L(2k\gamma) = 2k + 2k - 2k > 0$, поэтому существует путь Γ_{ab} , проходящий через пару ребер (ww_2, ww_3) , такой, что $\alpha_{ab} > 0$. Без ограничения общности можно считать, что вершины a, w_2, w, w_3, b лежат на Γ_{ab} именно в таком порядке.

Предположим, что $a \notin \tilde{G}$. Тогда рассмотрим путь из вершины w_2 в вершину a . Пусть e – первое его ребро, не лежащее в $\tilde{G}$, f – непосредственно предшествующая ему вершина. Заметим, что степень f в $\tilde{G}$ строго меньше, чем в G . При этом $d(f) \geq d(w_2) > d(w)$ (так как путь, соединяющий v_1 и a , проходит через w_2). Получили противоречие с выбором w . Значит, $a \in \tilde{G}$.

Заметим, что $b \notin \tilde{G}$, иначе $\tilde{G}$ содержит путь, соединяющий v_1 и b , и ребро ww_3 в частности.

Ребро ab в G' имеет кратность $\alpha_{ab} > 0$, при этом a лежит в одной компоненте связности, а b в другой. Противоречие, значит, граф G' связан.

Вернемся к доказательству теоремы. Выберем любую вершину $v_i \in M$. Ее степень в графе G' равна $\sum_j \alpha_{ij}$. В графе G ей инцидентно ровно одно ребро e . Ограничение равенства (1) на компоненту, соответствующую ребру e , дает равенство $\sum_j \alpha_{ij} = 2k$ (через e проходят те и только те граничные пути, одна из конечных вершин которых есть v_i). Отсюда получаем, что степень любой вершины в G' равна $2k$. В силу доказанной леммы граф связан, значит (см., например, [5]), в нем существует эйлеров цикл $v_{i_1} \rightarrow v_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow v_{i_{nk}} \rightarrow v_{i_1}$. Положим $\pi(l) = v_{i_l}$.

В силу того, что степени всех вершин G' есть $2k$, эйлеров цикл проходит через каждую из них k раз, значит, π – мультициклический порядок кратности k на M . Равенство

$$u = \sum_{i,j} \alpha_{ij} u_{ij} = \sum_{l=0}^{nk-1} u_{\pi(l)\pi(l+1)} = \tilde{\pi}$$

выполнено, так как коэффициент при u_{ij} в левой части равен кратности ребра ij в G' , а в правой части равен количеству прохождений выбранного эйлерова цикла через него.

Также имеем $g(\tilde{\pi}) = g(u) = 2k\gamma$, откуда следует, что π является мультиобходом G (в силу замечания 3.1).

Легко видеть, что два мультициклических порядка, различающихся как отображения, при этом могут соответствовать одному и тому же набору граничных путей (с кратностями), через которые они проходят. Введем определение эквивалентности мультициклических порядков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Два мультициклических порядка π и σ назовем *эквивалентными* (обозначение $\pi \sim \sigma$), если $\tilde{\pi} = \tilde{\sigma}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Симметричность, рефлексивность и транзитивность отношения $\sim$ очевидны; таким образом, имеем корректно определенное отношение эквивалентности.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Если мультициклические порядки π и σ эквивалентны, то их кратности совпадают.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Если мультициклический порядок π является k -обходом бинарного дерева G , то любой эквивалентный ему порядок также является k -обходом G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi \sim \sigma$, другими словами, $\tilde{\pi} = \tilde{\sigma}$. В силу того, что π является k -обходом дерева G , имеем $g(\tilde{\pi}) = 2k\gamma$, а значит, и $g(\tilde{\sigma}) = 2k\gamma$; отсюда получаем, что σ — k -обход дерева G (см. замечание 3.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. Пусть отображение π задает мультициклический порядок кратности k . Определим для любого $r \in \mathbb{Z}_{nk}$ отображения π_{r+}, π_{r-} следующим образом: $\pi_{r+}(i) = \pi(i + r)$, $\pi_{r-}(i) = \pi(-i + r)$. Эти отображения также задают мультициклические порядки, причем эквивалентные исходному.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.10. В случае кратности 1 все мультициклические порядки, эквивалентные π , имеют вид π_{r+} , $r \in \mathbb{Z}_n$, или π_{r-} , $r \in \mathbb{Z}_n$.

Таким образом, в соответствии с доказанной теоремой 3.3 отображение $\pi \mapsto \tilde{\pi}$ задано на множестве k -обходов, постоянно на классах эквивалентности и, значит, задает биекцию между множеством k -обходов бинарного дерева G , факторизованном по отношению эквивалентности $\sim$, и множеством $U_{\mathbb{Z}_+} \cap \{u \mid g(u) = 2k\gamma\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.11. Суммой мультициклических порядков π_1 и π_2 кратностей k и l соответственно называется любой мультициклический порядок π такой, что $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2$. Выпишем один из таких порядков явно. Заменяем π_1 и π_2 на эквивалентные так, что $\pi_1(0) = \pi_2(0)$ (например, с помощью сдвига; см. замечание 3.9). Определим мультициклический порядок $\pi_1 + \pi_2$ кратности $(k + l)$:

$$(\pi_1 + \pi_2)(i) = \begin{cases} \pi_1(i), & \text{если } 0 \leq i < nk, \\ \pi_2(i - nk), & \text{если } nk \leq i < n(k + l). \end{cases}$$

Таким образом, сумма мультициклических порядков существует и, очевидно, единственна с точностью до эквивалентности.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. Если π_1 и π_2 являются мультиобходами бинарного дерева G , то их сумма — тоже мультиобход G , а его кратность равна сумме кратностей π_1 и π_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.13. Справедливо равенство

$$p(\mathcal{M}, \pi_1 + \pi_2) = \frac{1}{2(k + l)} p(\tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2) = \frac{k}{k + l} p(\mathcal{M}, \pi_1) + \frac{l}{k + l} p(\mathcal{M}, \pi_2).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.14. Произведением мультициклического порядка π на натуральное число m называется любой мультициклический порядок σ такой, что $\sigma \sim \underbrace{\pi + \dots + \pi}_{m \text{ раз}}$ (аналогично сумме он существует и единствен с точностью до эквивалентности).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.15. Равносильное определение: мультициклический порядок σ является произведением π на натуральное число m тогда и только тогда, когда $\tilde{\sigma} = m\tilde{\pi}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.16. Укажем явно один из мультициклических порядков, являющихся произведением π на m . Пусть кратность π равна k . Возьмем в качестве $m\pi$ мультициклический порядок кратности mk , для которого $m\pi(i) = \pi(i \bmod nk)$, $0 \leq i < nmk$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.17. Если π является мультиобходом дерева G , то для любого натурального m произведение $m\pi$ – также мультиобход G , его кратность равна произведению m на кратность π .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.18. Имеет место равенство $p(\mathcal{M}, m\pi) = p(\mathcal{M}, \pi)$.

Определение на мультиобходах операций сложения и умножения позволяет ввести достаточно естественное определение неприводимости мультиобхода.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.19. Назовем мультиобход π бинарного дерева G *неприводимым*, если ни при каком натуральном m мультиобход $m\pi$ не раскладывается в сумму мультиобходов дерева G нетривиальным образом, т.е. из $m\pi \sim \pi_1 + \pi_2$ следует $\pi_1 \sim k\pi$, $\pi_2 \sim (m - k)\pi$ для некоторого натурального $k \leq m$.

В теореме 3.3 мы доказали, что любое решение уравнения $g(u) = 2k\gamma$, $k \in \mathbb{N}$, принадлежащее $U_{\mathbb{Z}_+}$, может быть представлено в виде $u = \tilde{\pi}$, где π – некоторый мультиобход бинарного дерева G . После деления уравнения на $2k$ в силу линейности g можно прийти к уравнению $g(u') = \gamma$, где $u' = u/(2k) \in U_{\mathbb{Q}_+}$. Далее, нам хочется изучить решения уравнения $g(u) = \gamma$, лежащие в $U_{\mathbb{R}_+}$. Легко видеть, что у этого уравнения есть решения, не представимые в виде $\tilde{\pi}/(2k)$, например, достаточно взять

$$u = \alpha \frac{\tilde{\pi}}{2k} + (1 - \alpha) \frac{\tilde{\sigma}}{2l},$$

где π , σ – мультиобходы дерева G кратностей k и l соответственно, $\alpha \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$. Оказывается, что в некотором смысле это единственная проблема, которая может возникнуть. Формально получаем следующее: любое решение уравнения $g(u) = \gamma$ может быть разложено в сумму $\tilde{\pi}_k$ с некоторыми коэффициентами (где π_k – неприводимые мультиобходы дерева G).

Для доказательства этого факта нам понадобятся несколько технических лемм.

ЛЕММА 3.20. Пусть u – элемент $U_{\mathbb{R}_+}$ такой, что $g(u) = \gamma$, и система векторов $\{\gamma_{ij} \mid \{i, j\} \in I(u)\}$ линейно зависима (например, это заведомо выполнено в случае $|I(u)| > |E|$).

Тогда существуют $u_1, u_2 \in U_{\mathbb{R}_+}$ и положительные действительные числа β_1, β_2 , в сумме дающие 1, такие, что выполнены следующие свойства:

- 1) $g(u_1) = g(u_2) = g(u) = \gamma$;
- 2) $u = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$;
- 3) $\max\{|I(u_1)|, |I(u_2)|\} < |I(u)|$;
- 4) если u принадлежит $U_{\mathbb{Q}_+}$, то можно выбрать u_1 и u_2 также лежащими в $U_{\mathbb{Q}_+}$, а числа β_1, β_2 – рациональными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим u по базису: $u = \sum_{i,j} \alpha_{ij} u_{ij}$. В силу линейной зависимости системы векторов $\{\gamma_{ij} \mid \{i, j\} \in I(u)\}$ существуют θ_{ij} такие, что $\sum_{I(u)} \theta_{ij} \gamma_{ij} = 0$ (и эта линейная комбинация нетривиальна). Более того, в силу того, что γ_{ij} имеют рациональные координаты, θ_{ij} также можно выбрать рациональными. Обозначим

$$I_+ = \{\{i, j\} \in I(u) \mid \theta_{ij} > 0\}, \quad I_- = \{\{i, j\} \in I(u) \mid \theta_{ij} < 0\}.$$

Каждое из этих множеств непусто, иначе из $\sum_{I(u)} \theta_{ij} \gamma_{ij} = 0$ следовала бы тривиальность выбранной линейной комбинации. Пусть

$$p = \min_{I_+} \frac{\alpha_{ij}}{\theta_{ij}}, \quad q = \min_{I_-} \frac{\alpha_{ij}}{-\theta_{ij}}.$$

Тогда возьмем

$$u_1 = u - p \sum_{I(u)} \theta_{ij} u_{ij}, \quad u_2 = u + q \sum_{I(u)} \theta_{ij} u_{ij}, \quad \beta_1 = \frac{p}{p+q}, \quad \beta_2 = \frac{p}{p+q}.$$

Выполнение свойств 1), 2) и 4) очевидно. Множество $I(u_1)$ отличается от $I(u)$ отсутствием ровно тех элементов, на которых достигается минимум из определения p ; аналогично для $I(u_2)$. Поэтому свойство 3) также выполнено.

СЛЕДСТВИЕ 3.21. Пусть π – неприводимый l -обход дерева G . Тогда система векторов $\{\gamma_{\pi(k)\pi(k+1)} \mid 0 \leq k < ln\}$ линейно независима (повторяющиеся векторы включаются в указанное множество по одному разу). В частности, среди $\gamma_{\pi(k)\pi(k+1)}$ не более $|E|$ различных векторов, т.е. неприводимый мультиобход задействует не более чем $|E|$ различных граничных путей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Возьмем u равным $\frac{1}{2l}\tilde{\pi}$. Тогда $u \in U_{\mathbb{Q}_+}$, $g(u) = \gamma$. Также $I(u) = \{\{\pi(k), \pi(k+1)\} \mid 0 \leq k < ln\}$, поэтому выполнены все условия леммы 3.20; значит, существуют $u_1, u_2 \in U_{\mathbb{Q}_+}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Q}$ такие, что выполнены свойства 1)–4). Домножим равенство $\frac{1}{2l}\tilde{\pi} = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$ на натуральное число так, чтобы оно приняло вид $a\tilde{\pi} = 2b_1 u'_1 + 2b_2 u'_2$, где $u'_1, u'_2 \in U_{\mathbb{Z}_+}$, $a, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$. Заметим, что $g(2b_1 u'_1) = 2l_1 \gamma$, $g(2b_2 u'_2) = 2l_2 \gamma$, где l_1, l_2 – целые числа, делящиеся на b_1 и b_2 соответственно; поэтому по теореме 3.3 существуют мультиобходы π_1 и π_2 такие, что $2b_1 u'_1 = \tilde{\pi}_1$, $2b_2 u'_2 = \tilde{\pi}_2$, т.е. $a\pi \sim \pi_1 + \pi_2$, причем это разложение нетривиально в силу $I(\tilde{\pi}_1) = I(u_1) < I(u) = I(\tilde{\pi})$.

ЛЕММА 3.22. Пусть $u \in U_{\mathbb{R}_+}$, выполнено $g(u) = \gamma$ и система векторов $\{\gamma_{ij} \mid \{i, j\} \in I(u)\}$ линейно независима. Тогда существует неприводимый l -обход π такой, что $u = \frac{1}{2l}\tilde{\pi}$, и любой мультиобход σ такой, что $I(\tilde{\sigma}) \subseteq I(u) = I(\tilde{\pi})$ (другими словами, множество граничных путей, через которые проходит σ , является подмножеством граничных путей, через которые проходит π), представляется в виде $\sigma \sim t\pi$ (u , значит, $I(\tilde{\sigma}) = I(\tilde{\pi}) = I(u)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дополним систему векторов $\{\gamma_{ij} \mid \{i, j\} \in I(u)\}$ до базиса в $\mathbb{R}^{|E|}$ (это возможно в силу ее независимости). Пусть полученная система есть $\{\gamma_{ij} \mid \{i, j\} \in \widehat{I}\}$, где $I(u) \subset \widehat{I}$. Рассмотрим систему уравнений относительно w

$$\begin{cases} g(w) = \gamma, \\ \alpha^{ij}(w) = 0 \quad \text{при } \{i, j\} \notin \widehat{I} \end{cases} \quad (2)$$

(α^{ij} – соответствующие координаты). Эта система содержит $|E| + (C_n^2 - |E|) = C_n^2$ уравнений и C_n^2 неизвестных, ее матрица невырождена (в силу того, что $\{\gamma_{ij} \mid \{i, j\} \in \widehat{I}\}$ – базис $\mathbb{R}^{|E|}$), элементы равны 0 или 1, т.е. рациональны, поэтому она имеет единственное решение, причем его координаты рациональны (более того, их знаменатели делят определитель матрицы системы, не превосходящий C_n^2). Заметим, что u является ее решением, откуда $u \in U_{\mathbb{Q}^+}$. Пусть $2l$ – минимальное четное число такое, что $2lu \in U_{\mathbb{Z}^+}$. Тогда $g(2lu) = 2lg(u) = 2l\gamma$, откуда по теореме 3.3 существует мультиобход π такой, что $u = \frac{1}{2l}\tilde{\pi}$.

Пусть σ – некоторый k -обход такой, что $I(\tilde{\sigma}) \subseteq I(u)$. Тогда $\frac{1}{2k}\tilde{\sigma}$ также является решением системы (2); поэтому $u = \frac{1}{2k}\tilde{\sigma} = \frac{1}{2l}\tilde{\pi}$, откуда $I(\tilde{\sigma}) = I(\tilde{\pi}) = I(u)$. Далее, имеем $2ku, 2lu \in U_{\mathbb{Z}^+}$, откуда $2\text{НОД}(k, l)u \in U_{\mathbb{Z}^+}$; в силу выбора l имеем $l = \text{НОД}(k, l)$, т.е. k делится на l нацело. Пусть частное равно m . Тогда $\tilde{\sigma} = \frac{2k}{2l}\tilde{\pi} = m\tilde{\pi}$, откуда $\sigma \sim m\pi$.

Пусть теперь $a\pi \sim \pi_1 + \pi_2$ – какое-то разложение. Тогда $I(\tilde{\pi}_1) \subseteq I(\tilde{\pi}) = I(u)$, откуда сразу получаем $\pi_1 \sim m\pi$. Аналогично для π_2 , поэтому это разложение тривиально, а значит, π – неприводимый мультиобход.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.23. Из доказательства леммы 3.22 видно, что справедливо неравенство $2l \leq C_n^2$, поэтому кратность π не превосходит C_n^2 !. Таким образом, кратность любого неприводимого мультиобхода бинарного дерева с n граничными вершинами не превосходит C_n^2 ! (так как в доказанной лемме можно взять $u = \frac{1}{2k}\tilde{\sigma}$, где σ – произвольный неприводимый мультиобход).

СЛЕДСТВИЕ 3.24. Пусть система векторов $\{\gamma_{ij} \mid \{i, j\} \in I\}$ линейно независима. Тогда существует не более одного неприводимого мультиобхода такого, что множество граничных путей, через которые он проходит, является подмножеством $\{\Gamma_{ij} \mid \{i, j\} \in I\}$; причем если не существует неприводимого мультиобхода, то не существует вообще ни одного мультиобхода с таким свойством.

СЛЕДСТВИЕ 3.25. У фиксированного бинарного дерева с n граничными вершинами есть не более $C_{C_n^2}^{2n-3}$ неприводимых мультиобходов.

СЛЕДСТВИЕ 3.26. Пусть π – l -обход дерева G такой, что система векторов $\{\gamma_{\pi(k)\pi(k+1)} \mid 0 \leq k < ln\}$ линейно независима, и не существует $m > 1$ и мультиобхода σ дерева G таких, что $\pi \sim m\sigma$. Тогда π неприводим.

Итак, все готово для доказательства обещанной теоремы.

ТЕОРЕМА 3.27. Пусть G – бинарное дерево, $\pi_1, \dots, \pi_k$ – его неприводимые мультиобходы (по следствию 3.25 их конечное число) кратностей $d_1, \dots, d_k$ соответственно. Тогда для любого решения уравнения $g(u) = \gamma$, принадлежащего $U_{\mathbb{R}^+}$, существуют неотрицательные вещественные числа $\beta_1, \dots, \beta_m$,

в сумме дающие 1, такие, что выполнено

$$u = \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i}{2d_i} \tilde{\pi}_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многократно применяя лемму 3.20, представим u в виде

$$u = \sum_{i=1}^l b_i u_i, \quad (3)$$

где $\sum_i b_i = 1$, векторы u_i лежат в $U_{\mathbb{R}_+}$ и удовлетворяют уравнению $g(u_i) = \gamma$, а системы векторов $\{\gamma_{ij} \mid \{i, j\} \in I(u_i)\}$ линейно независимы. Далее, по лемме 3.22 для каждого i существует $j(i) \in \{1, \dots, k\}$ такое, что $u_i = \frac{1}{2d_{j(i)}} \tilde{\pi}_{j(i)}$ (в силу того, что $\pi_1, \dots, \pi_k$ – все возможные неприводимые мультиобходы дерева G). Подставив эти равенства в разложение (3) и обозначив через β_j сумму b_i по тем i , для которых $j(i) = j$ (фактически, сгруппировав подобные слагаемые), получим искомое.

§ 4. Основные результаты

Применим полученные знания о мультиобходах для доказательства основной теоремы.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – ρ -пространство, а G – бинарное дерево с границей M . Тогда $\text{mpf}_-(\mathcal{M}, G) = \max_{\pi \in \mathcal{T}(G)} p(\mathcal{M}, \pi)$, где $\mathcal{T}(G)$ – множество всех мультиобходов дерева G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{|E|}$, w – вектор весов ребер $w = (w(e_1), \dots, w(e_{|E|}))$. Тогда $w(G) = \langle w, \gamma \rangle$, $w(\Gamma_{ij}) = \langle w, \gamma_{ij} \rangle$.

Обозначим $P = \sup_{\pi \in \mathcal{T}(G)} p(\mathcal{M}, \pi)$. Докажем сначала, что $\text{mpf}_-(\mathcal{M}, G) \geq P$. Для этого достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\mathcal{G} = (G, w)$ – произвольное обобщенное заполнение пространства $\mathcal{M}$ типа G , а π – произвольный мультиобход дерева G . Тогда выполнено неравенство $w(G) \geq p(\mathcal{M}, \pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π имеет кратность d . Тогда в обозначениях теоремы 4.1 имеем

$$\begin{aligned} w(G) &= \langle w, \gamma \rangle = \frac{1}{2d} \langle w, 2d\gamma \rangle = \frac{1}{2d} \sum_{l=0}^{nd-1} \langle w, \gamma_{\pi(l)\pi(l+1)} \rangle \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{l=0}^{nd-1} w(\Gamma_{\pi(l)\pi(l+1)}) \geq \frac{1}{2d} \sum_{l=0}^{nd-1} \rho(\pi(l), \pi(l+1)) = p(\mathcal{M}, \pi), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Положим $Q = \max_{k=1, \dots, m} p(\mathcal{M}, \pi_k)$, где π_k , $k = 1, \dots, m$, – все неприводимые мультиобходы дерева G , и пусть $d_1, \dots, d_m$ – их кратности. Очевидно, $Q \leq P$.

Докажем, что $\text{mpf}_-(\mathcal{M}, G) \leq Q$. Предположим противное; тогда любое обобщенное заполнение ρ -пространства $\mathcal{M}$ типа G имеет вес строго больше Q .

Заметим, что система линейных неравенств относительно w

$$\begin{cases} \langle \gamma_{ij}, w \rangle - \rho(i, j) \geq 0, & 1 \leq i < j \leq n, \\ Q - \langle \gamma, w \rangle \geq 0 \end{cases}$$

несовместна (так как любое ее решение w соответствует весовой функции обобщенного заполнения типа G , причем с весом не больше Q). Значит (см., например, [6]), существуют неотрицательные α_{ij} , α и отрицательное T такие, что для любого w выполнено

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} (\langle \gamma_{ij}, w \rangle - \rho(i, j)) + \alpha(Q - \langle \gamma, w \rangle) = T.$$

Группируя слагаемые с w , получаем

$$\left\langle \sum_{i,j} \alpha_{ij} \gamma_{ij} - \alpha \gamma, w \right\rangle + \alpha Q - \sum_{i,j} \alpha_{ij} \rho(i, j) = T.$$

В силу того, что равенство выполнено для всех w , необходимо, чтобы выполнялось $\sum_{i,j} \alpha_{ij} \gamma_{ij} - \alpha \gamma = 0$. Векторы γ_{ij} имеют неотрицательные компоненты, $\alpha_{ij} \geq 0$, поэтому это неравенство может быть выполнено только при $\alpha > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha = 1$. Введем $u = \sum_{i,j} \alpha_{ij} u_{ij} \in U_{\mathbb{R}^+}$; тогда $g(u) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \gamma_{ij} = \gamma$. Поэтому по теореме 3.27 существуют неотрицательные числа $\beta_1, \dots, \beta_m$, в сумме дающие 1, такие, что $u = \sum_{k=1}^m \frac{\beta_k}{2d_k} \tilde{\pi}_k$. Воспользуемся линейным отображением $p: U \rightarrow \mathbb{R}$, отображающим u_{ij} в $\rho(i, j)$:

$$\begin{aligned} T &= Q - \sum_{i,j} \alpha_{ij} \rho(i, j) = Q - p(u) = \sum_{k=1}^m \beta_k \left(Q - \frac{1}{2d_k} p(\tilde{\pi}_k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \beta_k (Q - p(\mathcal{M}, \pi_k)) \geq 0 \end{aligned}$$

(последнее равенство следует из замечания 3.2, а неравенство – из определения Q). Пришли к противоречию с отрицательностью T .

Таким образом, имеем $Q \geq \text{mpf}_-(\mathcal{M}, G) \geq P \geq Q$, откуда $P = Q = \text{mpf}_-(\mathcal{M}, G)$, т.е. $\sup_{\pi \in \mathcal{T}(G)} p(\mathcal{M}, \pi)$ достигается на каком-то из π_k ; поэтому запись $\max_{\pi \in \mathcal{T}(G)} p(\mathcal{M}, \pi)$ правомерна и $\text{mpf}_-(\mathcal{M}, G) = \max_{\pi \in \mathcal{T}(G)} p(\mathcal{M}, \pi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Из доказательства видно, что $\max_{\mathcal{T}(G)}$ может быть заменен на максимум только по неприводимым мультиобходам G .

Из теоремы 4.1 сразу следует формула для вычисления веса обобщенного минимального заполнения ρ -пространства.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – ρ -пространство. Тогда $\text{mf}_-(\mathcal{M}) = \min_G \max_{\pi \in \mathcal{T}(G)} p(\mathcal{M}, \pi)$, где минимум берется по всем бинарным деревьям G с границей M . Если при этом $\mathcal{M}$ является и псевдометрическим пространством, то

$$\text{mf}(\mathcal{M}) = \min_G \max_{\pi \in \mathcal{T}(G)} p(\mathcal{M}, \pi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\text{mf}_-(\mathcal{M}) = \min_G \text{mpf}_-(\mathcal{M}, G) = \min_G \max_{\pi \in \mathcal{T}(G)} p(\mathcal{M}, \pi).$$

Если же $\mathcal{M}$ является псевдометрическим пространством, то по теореме 1.2, доказанной в [4], $\text{mf}_-(\mathcal{M}) = \text{mf}(\mathcal{M})$, поэтому верно и второе равенство.

Приведем пример, доказывающий, что в условии следствия 4.4 максимизация по мультиобходам не может быть ослаблена до максимизации по 1-обходам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Пусть G – бинарное дерево. Назовем *усами* пару висячих вершин таких, что инцидентные им ребра смежны.

Рис. 1. Метрика пространства и его минимальное заполнение (штриховой линией изображена ось симметрии)

ПРИМЕР 4.6. Рассмотрим метрическое пространство на шести точках $1, \dots, 6$; метрика задана матрицей расстояний

$$\begin{pmatrix} 0 & 100 & 98 & 98 & 102 & 80 \\ 100 & 0 & 80 & 98 & 102 & 98 \\ 98 & 80 & 0 & 100 & 98 & 102 \\ 98 & 98 & 100 & 0 & 80 & 102 \\ 102 & 102 & 98 & 80 & 0 & 100 \\ 80 & 98 & 102 & 102 & 100 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть G – бинарное дерево с усами $\{6, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}$ (рис. 1). У него есть 2-обход $\pi = (1, 6, 3, 2, 5, 4, 3, 2, 1, 5, 4, 6)$. Имеем

$$\begin{aligned} p(\mathcal{M}, \pi) &= \frac{1}{4} (80 + 102 + 80 + 102 + 80 + 100 + 80 + 100 + 102 + 80 + 102 + 80) \\ &= \frac{1200 - 120 + 8}{4} = 272. \end{aligned}$$

Также существует заполнение типа G с весом 272 (см. рис. 1). Таким образом, $\text{mpf}_-(\mathcal{M}, G) = 272$. Вычислим периметры всех 1-обходов G :

$$\begin{aligned}\pi_1 &= (1, 2, 3, 4, 5, 6), & p(\mathcal{M}, \pi_1) &= \frac{1}{2}(100 + 80 + 100 + 80 + 100 + 80) = 270; \\ \pi_2 &= (1, 5, 4, 3, 2, 6), & p(\mathcal{M}, \pi_2) &= \frac{1}{2}(102 + 80 + 100 + 80 + 98 + 80) = 270; \\ \pi_3 &= (1, 3, 2, 4, 5, 6), & p(\mathcal{M}, \pi_3) &= \frac{1}{2}(98 + 80 + 98 + 80 + 100 + 80) = 268; \\ \pi_4 &= (1, 5, 4, 2, 3, 6), & p(\mathcal{M}, \pi_4) &= \frac{1}{2}(102 + 80 + 98 + 80 + 102 + 80) = 271; \\ \pi_5 &= (1, 2, 3, 5, 4, 6), & p(\mathcal{M}, \pi_5) &= \frac{1}{2}(100 + 80 + 98 + 80 + 102 + 80) = 270; \\ \pi_6 &= (1, 4, 5, 3, 2, 6), & p(\mathcal{M}, \pi_6) &= \frac{1}{2}(98 + 80 + 98 + 80 + 98 + 80) = 267; \\ \pi_7 &= (1, 3, 2, 5, 4, 6), & p(\mathcal{M}, \pi_7) &= \frac{1}{2}(98 + 80 + 102 + 80 + 102 + 80) = 271; \\ \pi_8 &= (1, 4, 5, 2, 3, 6), & p(\mathcal{M}, \pi_8) &= \frac{1}{2}(98 + 80 + 102 + 80 + 102 + 80) = 271.\end{aligned}$$

Таким образом, $\text{mpf}_-(\mathcal{M}, G) > \max_{\pi \in \mathcal{O}(G)} p(\mathcal{M}, \pi)$, где $\mathcal{O}(G)$ – множество всех 1-обходов графа G (т.е. планарных обходов в обозначениях [1]).

Пусть теперь G' – другое бинарное дерево с границей M . Хотя бы одна из пар $\{6, 1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5\}$ не является в нем усами, поэтому существует 1-обход σ , проходящий не более чем через два пути из $1 - 6$, $2 - 3$, $4 - 5$. Заметим, что все расстояния, кроме $\rho(1, 6)$, $\rho(2, 3)$ и $\rho(4, 5)$, не меньше, чем 98. Поэтому

$$\text{mpf}_-(\mathcal{M}, G') \geq p(\mathcal{M}, \sigma) \geq \frac{1}{2}(2 \cdot 80 + 4 \cdot 98) = 276 > \text{mpf}_-(\mathcal{M}, G).$$

Имеем

$$\begin{aligned}\text{mf}(\mathcal{M}) &= \min_F \text{mpf}_-(\mathcal{M}, F) = \text{mpf}_-(\mathcal{M}, G) \\ &> \max_{\pi \in \mathcal{O}(G)} p(\mathcal{M}, \pi) \geq \min_F \max_{\pi \in \mathcal{O}(F)} p(\mathcal{M}, \pi).\end{aligned}$$

Таким образом, гипотеза о том, что $\text{mf}(\mathcal{M}) = \min_F \max_{\pi \in \mathcal{O}(F)} p(\mathcal{M}, \pi)$, высказанная в [1], неверна.

§ 5. Следствия

В этом параграфе мы применим полученные результаты для доказательства некоторых свойств обобщенных минимальных заполнений. В частности, будут доказаны некоторые утверждения, связанные с точными граничными путями, и изучены свойства обобщенных минимальных заполнений метрических пространств, находящихся в общем положении.

Пусть заданы ρ -пространство $\mathcal{M} = (M, \rho)$ и бинарное дерево G с границей M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Назовем мультиобход σ дерева G *максимальным*, если

$$p(\mathcal{M}, \sigma) = \max_{\pi \in \mathcal{T}(G)} p(\mathcal{M}, \pi).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Пусть $\mathcal{G} = (G, w)$ – обобщенное заполнение пространства $\mathcal{M}$. Назовем m -обход σ дерева G *точным*, если все пути $\Gamma_{\sigma(k)\sigma(k+1)}$, $0 \leq k < mn$, точны (т.е. $w(\Gamma_{\sigma(k)\sigma(k+1)}) = \rho(\sigma(k), \sigma(k+1))$). Более подробно о точных путях и ребрах см. в [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть σ – мультиобход дерева G . Тогда следующие утверждения равносильны.

1. Мультиобход σ является максимальным.
2. Для любого обобщенного минимального параметрического заполнения пространства M типа G мультиобход σ является точным.
3. Для какого-то обобщенного минимального параметрического заполнения пространства M типа G мультиобход σ является точным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{G} = (G, w)$ – какое-то обобщенное минимальное параметрическое заполнение, σ – любой m -обход G . Тогда выполнено

$$\begin{aligned} \text{mpf}_-(\mathcal{M}, G) = w(G) = \langle w, \gamma \rangle &= \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{nm-1} \langle w, \gamma_{\sigma(k)\sigma(k+1)} \rangle \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{nm-1} w(\Gamma_{\sigma(k)\sigma(k+1)}) \geq \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{nm-1} \rho(\sigma(k), \sigma(k+1)) = p(\mathcal{M}, \sigma). \end{aligned} \quad (4)$$

Докажем, что из утверждения 1 следует 2. В силу того, что обход σ является максимальным, имеем

$$\text{mpf}_-(\mathcal{M}, G) = \max_{\pi \in \mathcal{T}(G)} p(\mathcal{M}, \pi) = p(\mathcal{M}, \sigma);$$

поэтому в (4) все неравенства $w(\Gamma_{\sigma(k)\sigma(k+1)}) \geq \rho(\sigma(k), \sigma(k+1))$ на самом деле являются равенствами, таким образом, σ является точным мультиобходом.

Утверждение 3 следует из 2 очевидным образом.

Осталось вывести утверждение 1 из 3. Пусть $\mathcal{G} = (G, w)$ – обобщенное минимальное параметрическое заполнение, в котором σ точен. Тогда в (4) неравенство обращается в равенство, значит,

$$\max_{\pi \in \mathcal{T}(G)} p(\mathcal{M}, \pi) = \text{mpf}_-(\mathcal{M}, G) = p(\mathcal{M}, \sigma),$$

т.е. σ является максимальным мультиобходом.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Если G – бинарное дерево, то у обобщенного минимального параметрического заполнения типа G (и тем более у минимального заполнения, обобщенного или нет) есть хотя бы один точный неприводимый мультиобход.

Из предложения 5.3 следует, что любой граничный путь, лежащий хотя бы в одном максимальном обходе бинарного дерева G , является точным в любом обобщенном минимальном заполнении типа G . Оказывается, это утверждение допускает естественное обращение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Пусть граничный путь Γ_{ab} не входит ни в один максимальный мультиобход бинарного дерева G . Тогда существует обобщенное минимальное заполнение типа G , в котором он не является точным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Π – все неприводимые мультиобходы дерева G , а $\Pi' \subset \Pi$ – подмножество мультиобходов, не являющихся максимальными. Возьмем ε такое, что

$$0 < \varepsilon < \max_{\pi \notin \Pi'} p(\mathcal{M}, \pi) - \max_{\pi \in \Pi'} p(\mathcal{M}, \pi).$$

Рассмотрим ρ -пространство $\mathcal{M}' = (M, \rho')$, где ρ' совпадает с ρ на всех парах, кроме (a, b) , а $\rho'(a, b) = \rho(a, b) + \varepsilon$. Пусть $\mathcal{G} = (G, w)$ – его обобщенное минимальное параметрическое заполнение; очевидно, оно является обобщенным заполнением и для $\mathcal{M}$. При этом имеем

$$\begin{aligned} w(G) = \text{mpf}_-(\mathcal{M}', G) &= \max_{\pi \in \Pi} p(\mathcal{M}', \pi) \leq \max\left\{\max_{\pi \in \Pi'} p(\mathcal{M}', \pi), \max_{\pi \notin \Pi'} p(\mathcal{M}', \pi)\right\} \\ &\leq \max\left\{\max_{\pi \in \Pi'} p(\mathcal{M}, \pi) + \varepsilon, \max_{\pi \notin \Pi'} p(\mathcal{M}, \pi)\right\} = \max_{\pi \notin \Pi'} p(\mathcal{M}, \pi) = \text{mpf}_-(\mathcal{M}, G), \end{aligned}$$

т.е. $\mathcal{G}$ является обобщенным минимальным параметрическим заполнением и для $\mathcal{M}$. При этом $w(\Gamma_{ab}) \geq \rho'(a, b) > \rho(a, b)$, поэтому путь Γ_{ab} в нем не является точным.

У предложения 5.5 есть интересное следствие, дающее некоторый критерий единственности обобщенного минимального параметрического заполнения, т.е. критерий граничной жесткости для обобщенных минимальных параметрических заполнений данного типа.

ТЕОРЕМА 5.6. Пусть $\mathcal{M} = (M, G)$ – ρ -пространство, G – бинарное дерево с границей M . Тогда следующие утверждения равносильны.

1. Обобщенное минимальное параметрическое заполнение пространства $\mathcal{M}$ типа G единственно.
2. Существует набор граничных путей $\{\Gamma_{i_l j_l} \mid 1 \leq l \leq |E|\}$ такой, что каждый из них входит в какой-либо максимальный мультиобход, и соответствующие им векторы $\{\gamma_{i_l j_l} \mid 1 \leq l \leq |E|\}$ линейно независимы (т.е. являются базисом пространства $\mathbb{R}^{|E|}$, их содержащего).
3. Существует максимальный обход π такой, что $\dim \text{Lin}(\gamma_{\pi(k)\pi(k+1)}) = |E|$ (где через $\text{Lin}(\dots)$ обозначена линейная оболочка системы векторов).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что из утверждения 1 следует 2. Предположим противное. Тогда для любых линейно независимых векторов $\{\gamma_{i_l j_l} \mid 1 \leq l \leq |E|\}$ хотя бы один из путей $\Gamma_{i_l j_l}$ не входит ни в один максимальный мультиобход.

Отожествим весовые функции на G с векторами в $\mathbb{R}^{|E|}$. Множество обобщенных заполнений типа G задается неравенствами $\langle \gamma_{ij}, w \rangle \geq \rho(i, j)$, поэтому является (неограниченным) выпуклым многогранником P . В силу линейности функции $\langle \gamma, w \rangle$ существует вершина многогранника P , в которой достигается минимум этой функции; пусть это $q \in \mathbb{R}^{|E|}$. Точка q является пересечением $|E|$ независимых плоскостей, задающих P , т.е.

$$q = \bigcap_{l=1}^{|E|} \{\langle \gamma_{i_l j_l}, w \rangle = \rho(i_l, j_l)\},$$

где векторы $\{\gamma_{i_l j_l} \mid 1 \leq l \leq |E|\}$ линейно независимы. Другими словами, существует обобщенное минимальное параметрическое заполнение $\mathcal{G}_1 = (G, w_1)$

такое, что пути $\Gamma_{i_l j_l}$, $l = 1, \dots, |E|$, в нем точны. С другой стороны, в силу линейной независимости $\{\gamma_{i_l j_l} \mid 1 \leq l \leq |E|\}$ хотя бы один из путей $\Gamma_{i_l j_l}$ не входит ни в один максимальный мультиобход; поэтому в соответствии с предложением 5.5 существует обобщенное минимальное параметрическое заполнение $\mathcal{G}_2 = (G, w_2)$, в котором он не является точным. Таким образом, $\mathcal{G}_1 \neq \mathcal{G}_2$, и, значит, обобщенное минимальное параметрическое заполнение не единственно. Таким образом, пришли к противоречию.

Выведем утверждение 3 из 2. Возьмем набор путей, удовлетворяющий условию; пусть $\pi_1, \dots, \pi_{|E|}$ – содержащие их максимальные мультиобходы. Тогда мультиобход $\pi_1 + \dots + \pi_{|E|}$ удовлетворяет утверждению 3 (его максимальность следует из замечания 3.13). Также очевидно, что из утверждения 3 следует 2.

Теперь достаточно вывести утверждение 1 из 2. В силу того, что каждый из путей $\{\Gamma_{i_l j_l} \mid 1 \leq l \leq |E|\}$ входит в какой-либо максимальный мультиобход, все они являются точными в любом обобщенном минимальном параметрическом заполнении (см. предложение 5.3). Поэтому вектор $w \in \mathbb{R}^{|E|}$, соответствующий весовой функции заполнения, удовлетворяет системе линейных уравнений $\langle \gamma_{i_l j_l}, w \rangle = \rho(i_l, j_l)$, $l = 1, \dots, |E|$. В силу линейной независимости векторов $\gamma_{i_l j_l}$, $l = 1, \dots, |E|$, матрица системы невырождена, и поэтому ее решение единственно, откуда немедленно следует единственность обобщенного минимального параметрического заполнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.7. Пусть дано псевдометрическое пространство $\mathcal{M} = (M, \rho)$. Множество

$$[\mathcal{M}] = \{\mathcal{M} + \lambda = (M, \rho + \lambda) \mid \lambda \geq \lambda_{\mathcal{M}}\},$$

где $\lambda_{\mathcal{M}} = -\min_{a,b,c \in M} (\rho(a,b) + \rho(b,c) - \rho(a,c))$, а $(\rho + \lambda)(a,b) = \rho(a,b) + \lambda$, называется *аддитивным лучом* (см. [1]).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.8. Из условия $\lambda \geq \lambda_{\mathcal{M}}$ следует, что все $\mathcal{M} + \lambda \in [\mathcal{M}]$ – псевдометрические пространства.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.9. Очевидно, что $[\mathcal{M} + \lambda] = [\mathcal{M}]$ при $\lambda \geq \lambda_{\mathcal{M}}$.

Следующее утверждение было сформулировано и доказано в [1], но с использованием формулы для веса минимального заполнения (теоремы 4.4) может быть получено более простое его доказательство.

ТЕОРЕМА 5.10. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – метрическое пространство. Тогда для всех $\mathcal{M} + \lambda \in [\mathcal{M}]$ выполнено $\text{mf}(\mathcal{M} + \lambda) = \text{mf}(\mathcal{M}) + \lambda|M|/2$, и множества типов минимальных заполнений, являющихся деревьями, у которых множество висячих вершин есть множество граничных, совпадают при всех $\mathcal{M} + \lambda \in [\mathcal{M}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = |M|$. Заметим, что для любого мультициклического порядка π кратности m на множестве M выполнено

$$\begin{aligned} p(\mathcal{M} + \lambda, \pi) &= \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{nm-1} \rho_{\lambda}(\pi(k), \pi(k+1)) \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{nm-1} (\rho(\pi(k), \pi(k+1)) + \lambda) = p(\mathcal{M}, \pi) + \frac{\lambda n}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \text{mf}(\mathcal{M} + \lambda) &= \min_G \max_{\pi \in \mathcal{T}(G)} p(\mathcal{M} + \lambda, \pi) \\ &= \min_G \max_{\pi \in \mathcal{T}(G)} \left(p(\mathcal{M}, \pi) + \frac{\lambda n}{2} \right) = \text{mf}(\mathcal{M}) + \frac{\lambda n}{2}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\mathcal{G} = (G, w)$ – минимальное заполнение для $\mathcal{M}$ (G – дерево, у которого множество висячих вершин совпадает с множеством граничных). Построим минимальное заполнение для $\mathcal{M} + \lambda \in [\mathcal{M}]$, также имеющее тип G .

Будем называть *граничными* ребра графа G , инцидентные граничным вершинам; остальные ребра назовем *неграничными*. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – граничные ребра дерева G , инцидентные граничным вершинам $v_1, v_2, \dots, v_n$ соответственно, $e_{n+1}, \dots, e_{|E|}$ – остальные ребра. Определим w' :

$$w'(e_j) = \begin{cases} w(e_j) + \frac{\lambda}{2}, & \text{если } 1 \leq j \leq n, \\ w(e_j), & \text{если } n < j \leq |E|. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathcal{G}' = (G, w')$ является обобщенным минимальным заполнением пространства $\mathcal{M} + \lambda$. Проверим, что это заполнение. Имеем

$$w'(\Gamma_{pq}) = w(\Gamma_{pq}) + \lambda \geq \rho(p, q) + \lambda = (\rho + \lambda)(p, q).$$

Также

$$w'(G) = w(G) + \frac{n\lambda}{2} = \text{mf}(\mathcal{M}) + \frac{n\lambda}{2} = \text{mf}(\mathcal{M} + \lambda) = \text{mf}_-(\mathcal{M} + \lambda),$$

поэтому $\mathcal{G}'$ является обобщенным минимальным заполнением.

Веса неграничных ребер в нем неотрицательны, так как совпадают с весами заполнения (G, w) , а веса граничных неотрицательны в силу утверждения, доказанного в [4; §3]. Поэтому (G, w') является и необобщенным минимальным заполнением пространства $\mathcal{M} + \lambda$.

Получаем, что для всех деревьев G , у которых множество висячих вершин совпадает с множеством граничных и для которых существует минимальное заполнение пространства $\mathcal{M}$ типа G , существует минимальное заполнение типа G для каждого $\mathcal{M}_\lambda \in [\mathcal{M}]$. Но вместо $\mathcal{M}$ можно взять любое из $\mathcal{M}_\lambda \in [\mathcal{M}]$ (см. замечание 5.9), откуда получаем искомое.

Рассмотрим пространство U^* , сопряженное к U , с сопряженным базисом $\{u^{ij}\}$ и координатами α_{ij} . Любое псевдометрическое пространство $\mathcal{M} = (M, \rho)$ на n точках можно отождествить с элементом $u^* \in U^*$ с помощью отображения $\mathcal{M} \mapsto u^* = \sum_{i,j} \rho(i, j) u^{ij}$. Множество всех псевдометрических пространств на n точках является выпуклым конусом в U^* , так как является пересечением полупространств вида $\alpha_{ij}(u^*) + \alpha_{jk}(u^*) - \alpha_{ik}(u^*) \geq 0$. Приведенное отождествление позволяет говорить про топологические свойства семейств метрических пространств, составленных из фиксированного числа точек.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для псевдометрического пространства, *находящегося в общем положении*, если при каждом n оно выполняется для открытого всюду плотного множества n -точечных псевдометрических пространств.

В статье [1] выдвигается гипотеза, что минимальное заполнение псевдометрического пространства, находящегося в общем положении, представляет собой невырожденное (т.е. не имеющее ребер нулевого веса) бинарное дерево. В статье [4] доказывается теорема 1.2, фактически утверждающая, что для любого обобщенного минимального заполнения псевдометрического пространства существует необобщенное заполнение того же веса (разумеется, являющееся минимальным заполнением). Докажем утверждение, которое одновременно доказывает упомянутую гипотезу и усиливает указанную теорему в случае псевдометрического пространства общего положения.

ТЕОРЕМА 5.11. *Для псевдометрического пространства, находящегося в общем положении, всякое обобщенное минимальное заполнение представляет собой бинарное дерево с ребрами положительного веса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q = \{\pi_i\}$ – множество, состоящее из всех мультициклических порядков на множестве M таких, что для каждого из них существует бинарное дерево G_i с границей M , для которого π_i является неприводимым мультиобходом.

Предположим, что найдутся $\tilde{\pi}_a, \tilde{\pi}_b \in Q$ такие, что выполнено $\tilde{\pi}_a = \alpha \tilde{\pi}_b$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. В силу того, что $\tilde{\pi}_a, \tilde{\pi}_b \in U_{\mathbb{Z}_+}$, число α рационально, поэтому умножением на натуральное число равенство можно привести к виду $p\tilde{\pi}_a = q\tilde{\pi}_b$. Тогда уберем из множества Q мультициклические порядки π_a, π_b и заменим их на мультициклический порядок $p\pi_a$. Заметим, что он будет мультиобходом относительно любого из бинарных деревьев, относительно которого π_1 или π_2 – неприводимый мультиобход. Заметим также, что $p(\mathcal{M}, p\pi_a) = p(\mathcal{M}, \pi_a) = p(\mathcal{M}, \pi_b)$. Повторяя эти операции дальше, придем к множеству $P = \{\pi_i\}$, для которого $\tilde{\pi}_a \neq \alpha \tilde{\pi}_b$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} \subset U^*$, состоящее из всех псевдометрических пространств $\mathcal{M}$, для которых:

- 1) псевдометрическое пространство $\mathcal{M}$ невырожденно (т.е. все неравенства треугольника являются строгими);
- 2) для любых различных $\pi_i, \pi_j \in P$ числа $p(\mathcal{M}, \pi_1)$ и $p(\mathcal{M}, \pi_2)$ различны.

Заметим, что каждое уравнение вида $\rho(a, b) + \rho(b, c) = \rho(a, c)$ задает гиперплоскость в пространстве U^* . Рассмотрим уравнение $p(\mathcal{M}, \pi_1) = p(\mathcal{M}, \pi_2)$. Преобразуем его, пользуясь отображением $p: u_{ij} \mapsto \rho(i, j)$ и замечанием 3.2. Уравнение принимает вид $p(\tilde{\pi}_1 - \frac{k_1}{k_2} \tilde{\pi}_2) = 0$, что в силу $\tilde{\pi}_1 \neq \frac{k_1}{k_2} \tilde{\pi}_2$ также задает гиперплоскость в пространстве U^* .

Таким образом, $\mathfrak{M}$ – открытое всюду плотное множество в множестве всех псевдометрических пространств. Докажем, что для $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ любое обобщенное минимальное заполнение представляет собой бинарное дерево с положительными ребрами.

Любое обобщенное минимальное заполнение пространства $\mathcal{M}$ с помощью расщепления вершин степени более 3 путем добавления ребер нулевого веса можно привести к обобщенному минимальному заполнению типа бинарного дерева. Пусть $\mathcal{G} = (G, w)$ – полученное обобщенное минимальное заполнение типа бинарного дерева. Предположим, оно содержит ребро e нулевого или отрицательного веса $-w_0$. В силу доказанной в [4; § 3] леммы это ребро не может

быть граничным (так как $\mathcal{M}$ невырожденно), поэтому оно смежно ровно с четырьмя ребрами, обозначим их e_1, e_2, e_3, e_4 ; их концы, не принадлежащие e , есть v_1, v_2, v_3, v_4 , а веса есть w_1, w_2, w_3, w_4 соответственно.

Рис. 2. Перестройка ребра e

Факторизуем G по ребру e , а потом разделим полученную вершину степени 4 с помощью вклейки ребра (рис. 2; не изображенные ребра и их веса остаются прежними). (Впервые такая перестройка ребер и весов была предложена в статье [4].) Заметим, что полученные взвешенные деревья также будут обобщенными заполнениями (так как длины граничных путей не уменьшились), причем минимальными (так как при перестройке суммарный вес не изменился). Имеем $\mathcal{G}_i = (G_i, w_i)$, $i = 1, 2, 3$, – три обобщенных минимальных заполнения разных типов. По следствию 5.4 у каждого из них существует точный неприводимый мультиобход π_i . В силу построения множества P оно содержит мультиобходы $\sigma_i \sim m_i \pi_i$. Поскольку каждый из σ_i проходит по тем же путям, что и соответствующий ему π_i , он также точен. Таким образом, имеем $\text{mf}_-(\mathcal{M}) = w_i(G_i) = p(\mathcal{M}, \sigma_i)$, $i = 1, 2, 3$; при этом $\sigma_i \in P$, откуда в силу построения $\mathfrak{M}$ имеем $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, т.е. мультициклический порядок σ_1 планарен относительно всех трех деревьев G_1, G_2, G_3 . Пусть σ_1 имеет кратность l .

По предложению 2.5 среди путей $\Gamma_{\sigma_1(i)\sigma_1(i+1)}$, $0 \leq i < nl$, в графе G_1 ровно l проходят через пару ребер (e_1, e_4) (так как σ_1 – мультиобход дерева G_1). Заметим, что множество граничных путей, проходящих через пару ребер (e_1, e_4) , совпадает с множеством граничных путей, проходящих через пару вершин (v_1, v_4) . Среди путей $\Gamma_{\sigma_1(i)\sigma_1(i+1)}$, $0 \leq i < nl$, ровно l проходят через пару вершин (v_1, v_4) (причем в такой формулировке нам неважно, в каком из G_i выбраны эти пути). Но абсолютно аналогично (пользуясь тем, что σ_1 – мультиобход G_2 и G_3) получаем, что среди них ровно по l проходят через пары вершин (v_1, v_2) и (v_1, v_3) .

Заметим, что граничный путь в графе G_1 не может проходить через v_1 и одновременно через какие-то две вершины из v_2, v_3, v_4 ; более того, граничный путь в графе G_1 проходит через e_1 тогда и только тогда, когда он проходит через v_1 и еще какую-то вершину из v_2, v_3, v_4 .

Итак, среди путей $\Gamma_{\sigma_1(i)\sigma_1(i+1)}$, $0 \leq i < nl$, в графе G_1 ровно $3l$ проходят через ребро e_1 . Но σ_1 – мультиобход G_1 , поэтому это число должно быть равно $2l$. Таким образом, пришли к противоречию.

В качестве дальнейшего развития этого направления интересно было бы изучить минимальные заполнения, обладающие группами симметрий. Как

показано в работах [7]–[10], в этом случае возникает редукция к минимизации функционала на факторпространстве.

Список литературы

- [1] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении”, *Матем. сб.*, **203**:5 (2012), 65–118; англ. пер.: А. О. Ivanov, A. A. Tuzhilin, “One-dimensional Gromov minimal filling problem”, *Sb. Math.*, **203**:5 (2012), 677–726.
- [2] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато”, *УМН*, **47**:2 (1992), 53–115; англ. пер.: А. О. Ivanov, A. A. Tuzhilin, “Geometry of minimal networks and the one-dimensional Plateau problem”, *Russian Math. Surveys*, **47**:2 (1992), 59–131.
- [3] М. Gromov, “Filling Riemannian manifolds”, *J. Differential Geom.*, **18**:1 (1983), 1–147.
- [4] А. О. Иванов, З. Н. Овсянников, Н. П. Стрелкова, А. А. Тужилин, “Одномерные минимальные заполнения с ребрами отрицательного веса”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2012, № 5, 3–8; англ. пер.: А. О. Ivanov, Z. N. Ovsyannikov, N. P. Strelkova, A. A. Tuzhilin, “One-dimensional minimal fillings with negative edge weights”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **67**:5–6 (2012), 189–194.
- [5] В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тупшкевич, *Лекции по теории графов*, Наука, М., 1990; англ. пер.: О. Melnikov, R. I. Tyshkevich, V. A. Yemelichev, V. I. Sarvanov, *Lectures on graph theory*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994.
- [6] А. С. Солодовников, “Системы линейных неравенств”, *Популярные лекции по математике*, вып. 48, Наука, М., 1977, 65–70.
- [7] А. Т. Фоменко, “О минимальных объемах топологических глобально минимальных поверхностей в кобордизмах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:1 (1981), 187–213; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “On minimal volumes of topological globally minimal surfaces in cobordisms”, *Math. USSR-Izv.*, **18**:1 (1982), 163–183.
- [8] А. Т. Фоменко, “Многомерные вариационные методы в топологии экстремалей”, *УМН*, **36**:6 (1981), 105–135; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “Multi-dimensional variational methods in the topology of extremals”, *Russian Math. Surveys*, **36**:6 (1981), 127–165.
- [9] А. Т. Фоменко, “Минимальные компакты в римановых многообразиях и гипотеза Райфенберга”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:5 (1972), 1049–1079; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “Minimal compacta in riemannian manifolds and reifenberg’s conjecture”, *Math. USSR-Izv.*, **6**:5 (1972), 1037–1066.
- [10] А. Т. Фоменко, “Многомерная задача Плато в римановых многообразиях”, *Матем. сб.*, **89**(131):3(11) (1972), 475–519; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “The multidimensional plateau problem in riemannian manifolds”, *Math. USSR-Sb.*, **18**:3 (1972), 487–527.

А. Ю. Еремин (A. Y. Eremin)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова;
Лаборатория дискретной и вычислительной
геометрии им. Б. Н. Делоне
Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова
E-mail: a.eremin.msu@gmail.com

Поступила в редакцию
21.12.2010 и 07.05.2013