Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Н. Ромакина, Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 9, 83–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7836>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 09:20:07

УДК 514.133+514.174.5

Л. Н. Ромакина

Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны

Построены особого вида моноэдральные изотропные разбиения гиперболической плоскости $\hat{H}$ положительной кривизны, обладающие симметриями, ячейкой которых является простой 4-контур. Введен аналог мозаики в построенных разбиениях, названный черепицей. Рассмотрены некоторые фрактальные черепицы. Доказано существование ленточных черепиц каждого гомологического ряда с кодом (m, n) .

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: гиперболическая плоскость $\hat{H}$ положительной кривизны, простое (черепичное и почти черепичное) разбиение плоскости $\hat{H}$, черепица, ленточная черепица.

§ 1. Введение

1.1. В настоящее время теория разбиений в значительной степени развита в классических пространствах постоянной кривизны (евклидовом, эллиптическом и пространстве Лобачевского; см., например, [1]–[6]) и тесно связана с теорией дискретных групп движений этих пространств. Указанные пространства (в частности, плоскости) обладают общей особенностью. Все плоскости одной размерности (в частности, прямые) в каждом из них топологически эквивалентны и наделены метрикой одного типа, фундаментальная группа пространства транзитивна на множестве всех плоскостей одной размерности. В настоящей работе предложены первые разбиения плоскости, содержащей прямые трех топологически различных типов.

Пусть H^2 – расширенная гиперболическая плоскость (см. [7; п. 5.1.1], [8; п. 3.3.1]) с абсолютом γ , т.е. проективная плоскость с фиксированной на ней овальной линией γ . Каждую прямую плоскости H^2 по наличию общих с абсолютом точек можно отнести к одному из трех типов. Прямые, пересекающие абсолют в двух действительных точках, называют *гиперболическими*, пересекающие в двух мнимо сопряженных точках – *эллиптическими*, а касательные к абсолюту, изотропные на H^2 прямые, называют *параболическими*.

В интерпретации Кели–Клейна внутренняя область относительно овальной линии γ является полной плоскостью Лобачевского, или гиперболической плоскостью отрицательной кривизны. На множестве всех внешних относительно абсолюта точек плоскости H^2 , т.е. на идеальной области плоскости Лобачевского, можно строить различные геометрии. Если в качестве прямых принять только гиперболические (эллиптические) прямые, получим так называемую псевдогиперболическую (псевдоэллиптическую) плоскость (см. [7; п. 5.1.1]), для которой

не выполняется первый постулат Евклида: не каждые две точки можно соединить прямой. Если в качестве прямых принять прямые всех трех типов, получим гиперболическую плоскость положительной кривизны (см. [8; п. 4.1.1]), обозначим ее $\hat{H}$. Геометрия плоскости $\hat{H}$ кривизны $1/\rho^2$ может быть также реализована в псевдоевклидовом пространстве R_1^3 на сфере действительного радиуса ρ с отождествленными диаметрально противоположными точками. Число ρ называют *радиусом кривизны* плоскости $\hat{H}$. Плоскость $\hat{H}$ гомеоморфна листу Мёбиуса без границ. Группа G проективных автоморфизмов овальной линии γ является общей для $\hat{H}$, H^2 и плоскости Лобачевского фундаментальной группой преобразований.

1.2. Нас интересуют разбиения плоскости $\hat{H}$, обладающие симметриями. Их построение проводим по следующему плану.

I. Выбор ячейки разбиения.

Наличие на $\hat{H}$ трех типов прямых значительно расширяет возможности при выборе ячейки. В настоящей статье строим изотропные разбиения плоскости $\hat{H}$, все ребра ячеек которых принадлежат параболическим прямым. С целью выбора ячейки изотропного разбиения изучены (см. [9]) конечные замкнутые n -контурные плоскости $\hat{H}$ – упорядоченные совокупности отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ изотропных прямых. Показано, что 3-контурные не имеют внутренних точек и каждые два из них равны, т.е. могут быть переведены друг в друга преобразованием группы G . 4-контурные имеют один независимый инвариант относительно группы G и могут быть двух типов: простыми и составными. Каждый простой 4-контур обладает внутренностью и является выпуклым. Примем простой 4-контур с его внутренностью – ячейкой разбиения.

Моноэдральное разбиение плоскости $\hat{H}$ (фигуры на плоскости $\hat{H}$) простым 4-контуром назовем *простым*.

Доказано (см. [10; теорема 2]), что простое разбиение на плоскости $\hat{H}$ не является нормальным.

II. Построение аналога мозаики.

Как известно, плоскость Лобачевского бесконечным числом способов можно заполнить без пересечений и пустот равными правильными p -угольниками. Если угол при вершине правильного p -угольника равен $2\pi/q$, то каждая пара чисел p, q , удовлетворяющих неравенству

$$(p-2)(q-2) > 4,$$

определяет правильную мозаику (см. [1; п. 5.1]; или, иначе, правильные соты, см. [8; пп. 2.4.4, 3.5.6]), состоящую из q правильных равных между собой p -угольников, сходящихся в общей вершине и смежных по целой стороне. Бесконечные серии правильных мозаик $\{p, q\}$ эллиптической плоскости определены неравенством

$$(p-2)(q-2) < 4,$$

а на евклидовой плоскости существует лишь три типа правильных мозаик $\{3, 6\}, \{4, 4\}, \{6, 3\}$, соответствующих равенству

$$(p-2)(q-2) = 4.$$

Отрицательный ответ на вопрос о существовании правильных мозаик, состоящих из простых 4-контуров плоскости $\hat{H}$, дает доказанная в работе [10] теорема 1. Действительно, через каждую точку плоскости $\hat{H}$ проходят две изотропные прямые, поэтому в каждой вершине простого разбиения на $\hat{H}$, не принадлежащей границе разбиваемой фигуры, сходятся точно четыре ячейки разбиения. Но согласно теореме 1 из [10] на $\hat{H}$ не существует четырех G -эквивалентных простых 4-контуров, сходящихся в общей вершине и смежных по целому ребру.

В настоящей работе (п. 3.1) построена фигура, названная черепицей, которую в простом разбиении плоскости $\hat{H}$ можно считать аналогом мозаики в следующем смысле: существует простое разбиение данной фигуры и существует разбиение плоскости $\hat{H}$ данной фигурой.

Рассмотрены фрактальные черепицы. Построена бесконечная серия фрактальных ленточных черепиц.

III. Построение объекта плоскости $\hat{H}$, обладающего симметрией и порождающего на $\hat{H}$ простое разбиение.

Доказано (пп. 5.1, 5.2), что правильный n -контур, исследованный в работе [10], порождает простые разбиения плоскости $\hat{H}$, инвариантные при сдвиге вдоль эллиптической прямой. При нечетном n ячейкой разбиения может быть произвольный простой 4-контур, а при четном n ячейка разбиения однозначно определена числом n .

Введены два типа изотропных ломаных (см. [11; пп. 6.1, 8.1]), инвариантных при сдвиге вдоль гиперболической и соответственно параболической прямой. Построены (п. 7.1 и § 9) простые разбиения, порожденные этими ломаными.

Автор выражает благодарность А. М. Гурину за полезные дискуссии, в том числе о разбиениях пространства Лобачевского, послужившие отправной точкой представленного исследования.

§ 2. Фундаментальная группа плоскости $\hat{H}$

2.1. Метрические формулы. В работе используем два типа канонических реперов.

Каноническим репером первого типа плоскости $\hat{H}$ назовем проективный репер R^* , вершины которого образуют автополярный трехвершинник первого порядка относительно абсолютной линии γ , а единичная точка принадлежит касательным, проведенным к линии γ из вершин A_1 и A_2 .

Каноническим репером второго типа плоскости $\hat{H}$ назовем проективный репер R , вершины которого образуют автополярный трехвершинник второго порядка относительно абсолютной линии γ , а единичная точка принадлежит абсолюту.

Семейство всех канонических реперов первого (второго) типа плоскости $\hat{H}$ зависит от трех параметров.

В каждом каноническом репере R^* первого типа линия γ задана уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \quad (2.1)$$

В каждом каноническом репере R второго типа линия γ задана уравнением

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0. \quad (2.2)$$

С помощью абсолюта на плоскости $\hat{H}$ можно ввести два типа расстояний между точками, инвариантных относительно всех преобразований группы G .

Если точки A, B принадлежат эллиптической (гиперболической) прямой, то прямая AB содержит две мнимо сопряженные (действительные) точки абсолютной линии γ , обозначим их K_1, K_2 . Сложное отношение (ABK_1K_2) четверки точек прямой является инвариантом группы G .

Пусть для эллиптической (гиперболической) прямой AB

$$\sigma = \frac{\rho}{2\tau} \ln(ABK_1K_2), \quad \tau^2 = -1 \quad (\tau^2 = 1),$$

где ρ – радиус кривизны плоскости $\hat{H}$; $\ln(ABK_1K_2)$ – главное значение логарифмической функции $\text{Ln } z$ комплексного переменного $z = (ABK_1K_2)$.

Если прямая AB эллиптическая, то $(ABK_1K_2) \in \mathbb{C}$. В силу сопряженности точек K_1, K_2 имеем $|(ABK_1K_2)| = 1$. Следовательно, $|\sigma| \in [0, \pi\rho/2]$.

Если прямая AB является гиперболической, то $(ABK_1K_2) \in \mathbb{R}$. Причем для собственных точек A, B гиперболической прямой $(ABK_1K_2) > 0$, т.е. $\sigma \in \mathbb{R}$. Если одна из точек A, B гиперболической прямой является несобственной для $\hat{H}$, но не принадлежит абсолюту, то $(ABK_1K_2) < 0$. Тогда $\sigma \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\sigma) = \pi\rho/2$.

Число $|\sigma|$ назовем *расстоянием* между собственными точками A, B плоскости $\hat{H}$. Число $\sigma = [\rho|\ln|(ABK_1K_2)|| + i\pi\rho]/2$ назовем *расстоянием* между точками A, B такими, что $A \in \hat{H}$, $B \notin \hat{H}$, $B \notin \gamma$.

Пусть точки A, B эллиптической (гиперболической) прямой имеют координаты $(a_i), (b_i)$, $i = 1, 2, 3$; тогда расстояние AB между ними в репере R^* можно выразить формулой

$$\begin{aligned} \cos \frac{AB}{\rho} &= \pm \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - b_3^2}} \\ \left(\text{ch} \frac{AB}{\rho} &= \pm \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - b_3^2}} \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

а в репере R – формулой

$$\begin{aligned} \cos \frac{AB}{\rho} &= \pm \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1 - 2a_3 b_3}{2\sqrt{a_1 a_2 - a_3^2} \sqrt{b_1 b_2 - b_3^2}} \\ \left(\text{ch} \frac{AB}{\rho} &= \pm \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1 - 2a_3 b_3}{2\sqrt{a_1 a_2 - a_3^2} \sqrt{b_1 b_2 - b_3^2}} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Две точки параболической прямой плоскости $\hat{H}$ не имеют инварианта группы G . Удастся выделить некоторые подгруппы группы G , относительно которых инвариант двух точек параболической прямой существует (см., например, [12]). Так как эти подгруппы являются проективными автоморфизмами фигур, содержащих линию γ , но отличных от нее, их нельзя принять в качестве групп движений плоскости $\hat{H}$. В силу этого параболические прямые на $\hat{H}$ являются изотропными, а все преобразования группы G называют движениями.

Различные варианты расположения пары прямых относительно абсолюта определяют 15 типов углов плоскости $\hat{H}$. Углы шести типов измеримы, углы трех типов имеют действительные меры. Прямые, имеющие общую точку, внешнюю (внутреннюю) относительно абсолюта, т.е. собственную (несобственную) для $\hat{H}$, будем называть *пересекающимися* (*расходящимися*). Прямые назовем *параллельными*, если их общая точка принадлежит абсолюту.

Пусть a и b – неизотропные прямые и $a \cap b = K$. Если K является внешней (внутренней) точкой относительно γ , то через нее проходят две действительные (мнимо сопряженные) абсолютные касательные k_1, k_2 . Сложное отношение (abk_1k_2) четверки прямых пучка с центром в точке K – инвариант всех преобразований группы G .

Мерой угла между неизотропными пересекающимися (расходящимися) прямыми a, b одного типа назовем число

$$\hat{ab} = \left| \frac{1}{2\tau} \ln(abk_1k_2) \right|, \quad \tau^2 = 1 \quad (\tau^2 = -1).$$

Мерой угла между неизотропными прямыми a, b различных типов назовем число

$$\hat{ab} = \frac{1}{2} \ln(abk_1k_2) = \frac{1}{2} [\ln |(abk_1k_2)| + i\pi].$$

Пусть неизотропные пересекающиеся (расходящиеся) прямые a, b имеют соответственно координаты $(a_i), (b_i), i = 1, 2, 3$; тогда меру $\hat{ab}$ угла между ними в репере R^* можно выразить формулой

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \hat{ab} &= \pm \frac{a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - b_3^2}} \\ \left(\cos \hat{ab} &= \pm \frac{a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - b_3^2}} \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

а в репере R – формулой

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \hat{ab} &= \pm \frac{2a_1b_2 + 2a_2b_1 - a_3b_3}{\sqrt{4a_1a_2 - a_3^2} \sqrt{4b_1b_2 - b_3^2}} \\ \left(\cos \hat{ab} &= \pm \frac{2a_1b_2 + 2a_2b_1 - a_3b_3}{\sqrt{4a_1a_2 - a_3^2} \sqrt{4b_1b_2 - b_3^2}} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тройка прямых пучка не имеет инварианта проективных преобразований, поэтому если хотя бы одна из прямых a и b является параболической, мера угла между ними не определена. Но формально примененное определение меры угла между неизотропными прямыми к прямым a и b дает бесконечно большое значение числа $\hat{ab}$. Пара неизотропных параллельных прямых также не имеет инварианта относительно группы G .

2.2. Движения точек по двойной изотропной прямой. Фундаментальная группа G преобразований плоскости $\hat{H}$ содержит шесть видов нетождественных преобразований (см. [8; п. 3.6.3]). Среди них – два инволюционных преобразования: отражение от эллиптической прямой (на плоскости Лобачевского – отражение от точки), при котором инвариантны каждая точка оси

отражения и несобственная точка плоскости $\hat{H}$, являющаяся полюсом оси отражения относительно абсолюта; отражение от гиперболической прямой, при котором инвариантны каждая точка оси отражения и собственная точка плоскости $\hat{H}$, являющаяся полюсом оси отражения относительно абсолюта. Неинволюционными преобразованиями группы G являются сдвиги вдоль эллиптической, гиперболической и параболической прямой (на плоскости Лобачевского – поворот вокруг собственной точки, гиперболический и орициклический повороты соответственно) и скользящее отражение – композиция сдвига вдоль гиперболической прямой и отражения от оси сдвига. При каждом сдвиге инвариантны ось сдвига, ее полюс относительно абсолюта и проходящие через него касательные к абсолюту.

В каноническом репере R второго типа группа G может быть задана (см. [13]) невырожденной матрицей с неотрицательными коэффициентами a, b, c, d

$$\begin{pmatrix} a & b & 2\varepsilon\sqrt{ab} \\ c & d & 2\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{cd} \\ \varepsilon_1\sqrt{ac} & \varepsilon_2\sqrt{bd} & \varepsilon\varepsilon_1\sqrt{bc} + \varepsilon\varepsilon_2\sqrt{ad} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, $\varepsilon_1\sqrt{bc} - \varepsilon_2\sqrt{ad} \neq 0$.

Докажем теоремы, характеризующие дискретное перемещение точек по инвариантной параболической прямой при движениях группы G , которые позволяют строить разбиения плоскости $\hat{H}$, обладающие симметриями.

В доказательствах теорем используем определения понятий (луч, направление, простое отношение трех точек параболической прямой) в терминах проективной геометрии (см., например, [9], [14]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть на параболической прямой l плоскости $\hat{H}$ в последовательности точек (T_p) , $p \in \mathbb{Z}$, точка T_{p+1} делит в действительном отношении λ , $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -1$, отрезок $T_p T_{p+2}$. Существует единственное преобразование f группы G :

$$(\forall p) \quad f(T_p) = T_{p+1}. \quad (2.8)$$

Преобразование f является:

- сдвигом вдоль гиперболической прямой при $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$;
- скользящим отражением при $\lambda < 0$;
- орициклическим поворотом при $\lambda = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K – несобственная точка прямой l , а K_p – несобственная точка параболической прямой k_p , проведенной через точку T_p , причем $k_p \neq l$ для любого p . Построим реперы $R = \{K, K_1, T_1, K_2\}$ и $R' = \{K, K_2, T_2, K_3\}$. По основной теореме о проективных преобразованиях существует единственное проективное преобразование f проективной плоскости, которое репер R переводит в репер R' , причем каждая точка X с координатами $(x_1 : x_2 : x_3)$ в репере R переходит в точку X' с теми же координатами $(x_1 : x_2 : x_3)$ в репере R' .

По построению реперы R, R' являются каноническими реперами второго типа плоскости $\hat{H}$, следовательно, абсолютная линия в них имеет уравнение (2.2).

Если некоторая точка M принадлежит линии γ , то ее координаты удовлетворяют уравнению (2.2), следовательно, этому уравнению удовлетворяют и координаты точки M' , образа точки M в преобразовании f . Поэтому в преобразовании f линия γ инвариантна, т.е. f принадлежит G .

По условию теоремы $(T_p T_{p+2}, T_{p+1}) = \lambda$ для любого p , следовательно

$$(\forall p) \quad (T_p T_{p+2} T_{p+1} K) = -\lambda. \quad (2.9)$$

Так как $f(K) = K$, $f(T_1) = T_2$, $f(K_2) = K_3$, то $f(T_2) = T_3$. Как проективное преобразование f сохраняет сложное отношение четырех точек прямой. Поэтому на основании условия (2.9) при $p = 0$ получаем равенство $f(T_0) = T_1$, далее при $p = -1$ – равенство $f(T_{-1}) = T_0$, при $p = 1$ – равенство $f(T_3) = T_4$. Продолжая процесс для $p = \pm 2, \pm 3, \dots$, докажем, что для преобразования f справедливо равенство (2.8).

Таким образом, существование и единственность преобразования f , удовлетворяющего условиям теоремы, доказаны.

Для определения вида преобразования f найдем его аналитическую запись.

Выделим из трехпараметрического семейства U^3 всех канонических реперов второго типа плоскости $\hat{H}$ двухпараметрическое подсемейство U^2 всех реперов, первая вершина A_1 которых совпадает с точкой K . В каждом репере семейства U^2 прямая l задана уравнением $x_2 = 0$. Прямая l инвариантна в преобразовании f , следовательно, в реперах семейства U^2 матрица (2.7) преобразования f принимает вид

$$\begin{pmatrix} a & b & 2\varepsilon\sqrt{ab} \\ 0 & d & 0 \\ 0 & \varepsilon_1\sqrt{bd} & \varepsilon\varepsilon_1\sqrt{ad} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon_1 = \pm 1$, $ad \neq 0$.

Возможны два случая.

I. Преобразование f имеет собственную для плоскости $\hat{H}$ инвариантную точку на прямой l .

По смыслу теоремы преобразование f нетождественное, поэтому имеет на l не более одной неподвижной собственной точки. Из семейства U^2 выделим однопараметрическое подсемейство U_1^1 всех реперов, третья вершина A_3 которых инвариантна в преобразовании f . В реперах семейства U_1^1 матрица (2.10) преобразования f принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

где α – ненулевое действительное число.

Из семейства U_1^1 выберем канонический репер $R_1 = \{K, A_2, A_3, K_1\}$, определенный единственным образом. Точка T_1 в репере R_1 имеет координаты $(2 : 0 : 1)$, а точку T_2 можно задать координатами $(t : 0 : 1)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, $t \neq 2$. Применяя последовательно равенство (2.9), найдем координаты точек T_3 , T_4 :

$$T_3(t\lambda + t - 2 : 0 : \lambda), \quad T_4(t\lambda^2 + (t - 2)(\lambda + 1) : 0 : \lambda^2).$$

Записывая в координатах равенство (2.8) для $p = 1, 2, 3$, определим условия на коэффициент α матрицы (2.11) преобразования f :

$$\alpha = \frac{2}{t}, \quad \alpha = \frac{t\lambda}{t\lambda + t - 2}, \quad \alpha = \frac{t\lambda^2 + t\lambda - 2\lambda}{t\lambda^2 + (t-2)(\lambda+1)}. \quad (2.12)$$

Так как $t \neq 2$, система условий (2.12) совместна тогда и только тогда, когда

$$t\lambda = 2. \quad (2.13)$$

Из равенств (2.12), (2.13) получаем $\alpha = \lambda$. При $\alpha = \lambda \neq 1$ матрица (2.11) определяет единственное нетождественное преобразование f , которое при $\lambda > 0$ является сдвигом вдоль гиперболической прямой ($x_3 = 0$), поляры неподвижной точки преобразования f , на расстояние $|\ln \lambda|$, а при $\lambda < 0$ – композицией сдвига вдоль той же прямой на расстояние $|\ln |\lambda||$ и отражения от оси сдвига.

II. Преобразование f не имеет двойных собственных точек на прямой l .

Тогда f является орициклическим поворотом и не имеет собственных для $\hat{H}$ двойных точек. Найдем его аналитическое задание.

Преобразование плоскости $\hat{H}$, заданное в реперах семейства U^2 матрицей (2.10), не имеет собственных для $\hat{H}$ двойных точек тогда и только тогда, когда $a = d$ и $\varepsilon\varepsilon_1 = 1$. В этом случае матрицу (2.10) можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \beta^2 & 1 & 2\beta \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & \beta & \beta^2 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

где β – ненулевое действительное число.

В реперах семейства U^2 некоторую точку T_i последовательности (T_p) зададим координатами: $(t : 0 : 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Действуя на точку T_i преобразованием f (2.14), найдем координаты точек T_{i+j} : $(t\beta + 2j : 0 : \beta)$, $j \in \mathbb{Z}$. Тогда для любого i точка T_{i+1} является серединой отрезка T_iT_{i+2} :

$$(T_iT_{i+2}T_{i+1}K) = -1.$$

Сравнивая с равенством (2.9), получаем $\lambda = 1$.

Таким образом, преобразование f , удовлетворяющее условию (2.8), является орициклическим поворотом тогда и только тогда, когда $\lambda = 1$.

Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *При орициклическом повороте точки неподвижной прямой движутся в одном направлении.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый орициклический поворот в любом репере семейства U^2 можно задать матрицей (2.14) (см. доказательство теоремы 1). Пусть $A(a : 0 : 1)$ и $B(b : 0 : 1)$ – точки неподвижной прямой орициклического поворота f с неподвижной точкой A_1 абсолюта и $A' = f(A)$, $B' = f(B)$. Тогда в реперах семейства U^2 точки A' , B' имеют следующие координаты: $(a\beta + 2 : 0 : \beta)$, $(b\beta + 2 : 0 : \beta)$. Так как

$$(A'BA A_1)(B'ABA_1) = -\frac{4}{\beta^2(a-b)^2} < 0,$$

то числа $(A'BA A_1)$, $(B'ABA_1)$ разных знаков. Следовательно, одна и только одна из точек A' , B' принадлежит соответственно лучу AA_1 , BA_1 , не содержащему отрезок AB . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. *При сдвиге вдоль гиперболической прямой точки, принадлежащие лучу двойной изотропной прямой с началом в неподвижной точке преобразования, движутся по этому лучу в одном направлении (либо к неподвижной точке, либо от нее).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сдвиг f вдоль гиперболической прямой, заданной в репере R уравнением $x_3 = 0$, задан матрицей (2.11) при $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. На неподвижной прямой l ($x_2 = 0$) преобразования f инвариантна несобственная точка $A_1(1 : 0 : 0)$ и собственная точка $A_3(0 : 0 : 1)$. Точка $A(a : 0 : 1)$ ($a \neq 0$) прямой l в преобразовании f переходит в точку $A'(a : 0 : \alpha)$, точка A' – в точку $A''(a : 0 : \alpha^2)$. В силу того что $(AA'A_3A_1) = \alpha > 0$, каждая точка прямой l принадлежит одному лучу с началом в точке A_3 со своим образом в преобразовании f .

В силу того что $(A_3AA'A'') = 1 + \alpha > 0$, при f точки движутся по лучу A_3A_1 в одном направлении.

Если $\alpha < 1$ ($\alpha > 1$), то число $(A_3AA_1A') = 1 - \alpha$ больше (меньше) нуля. Следовательно, в преобразовании f при $\alpha < 1$ ($\alpha > 1$) точки по лучу A_3A_1 движутся от точки (к точке) A_3 . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *При скользящем отражении точка и ее образ на двойной изотропной прямой принадлежат различным лучам, исходящим из неподвижной точки преобразования.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Скользящее отражение f с двойной прямой l ($x_2 = 0$) и неподвижной точкой $A_3(0 : 0 : 1)$ зададим в репере R матрицей (2.11) при $\alpha < 0$. Тогда точка $A(a : 0 : 1)$ ($a \neq 0$) прямой l в преобразовании f переходит в точку $A'(a : 0 : \alpha)$. Поскольку $(AA'A_3A_1) = \alpha < 0$, любая точка прямой l и ее образ в преобразовании f принадлежат различным лучам с началом в точке A_3 . Теорема доказана.

2.3. Траектории точек при движениях группы G . Каждая точка задает на плоскости $\hat{H}$ четыре связные части, определим их.

Валианой точки X на $\hat{H}$ назовем множество всех внутренних точек того угла между изотропными прямыми l_1 , l_2 ($X \in l_1$, $X \in l_2$), который не содержит абсолютную линию γ . Поляра точки X относительно γ разделяет валиану точки X на две части. Назовем эти части *полувалианами* точки X .

Дополнение валианы точки X до $\hat{H}$ назовем *ковалианой* точки X . Ковалиана точки X состоит из двух связных частей, ограниченных прямыми l_1 , l_2 и линией γ . Каждую из этих частей назовем *полуковалианой* точки X .

Пусть f – нетождественное неинволюционное преобразование группы G .

I. Если f – сдвиг вдоль гиперболической прямой (скользящее отражение), зададим его в репере R матрицей (2.11) при $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ ($\alpha < 0$, $\alpha \neq -1$).

В преобразованиях (2.11) инвариантна каждая овальная линия ω , заданная уравнением

$$x_1x_2 - px_3^2 = 0, \quad p \in \mathbb{R},$$

касающаяся абсолюта в двух действительных точках. При $p > 1$ линия ω лежит внутри линии γ и является эквидистантой плоскости Лобачевского. При $p < 1$ вся линия ω , за исключением точек касания, лежит в плоскости $\hat{H}$. Причем если $p < 0$ ($p > 0$), каждая точка абсолютной линии γ является внешней (внутренней) относительно линии ω .

Дадим метрические определения линиям ω .

Пусть S – собственная точка плоскости $\hat{H}$. Множество всех точек плоскости $\hat{H}$, эллиптическое (гиперболическое) расстояние от которых до точки S равно действительному числу r , назовем *эллиптическим* (*гиперболическим*) *циклом с центром* в точке S и *радиусом* r : $\omega_e(S; r)$ ($\omega_h(S; r)$).

Согласно определению эллиптический (гиперболический) цикл полностью принадлежит валиане (ковалиане) своего центра на плоскости $\hat{H}$.

В репере $R = \{A_1, A_2, S, E\}$ цикл $\omega_e(S; r)$ ($\omega_h(S; r)$) имеет уравнение

$$x_1x_2 + x_3^2 \operatorname{tg}^2 \frac{r}{\rho} = 0 \quad \left(x_1x_2 - x_3^2 \operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho} = 0 \right),$$

где ρ – радиус кривизны плоскости $\hat{H}$.

При $r \neq 0$, $r \neq \pi\rho/2$, $r \neq \pi\rho$ (при $r \neq 0$) эллиптический (гиперболический) цикл – невырожденная линия второго порядка.

Полюсу l центра эллиптического (гиперболического) цикла относительно абсолютной овальной линии γ , заданную в репере R уравнением $x_3 = 0$, назовем *базой* цикла.

Эллиптический (гиперболический) цикл плоскости $\hat{H}$ является (не является) выпуклым и состоит из двух связных ветвей.

При сдвиге вдоль гиперболической прямой l каждая точка некоторой полувалианы (полуковалианы) точки S движется по той ветви проходящего через нее эллиптического (гиперболического) цикла с базой l , которая полностью принадлежит данной полувалиане (полуковалиане).

При скользящем отражении с осью l каждая точка некоторой полувалианы (полуковалианы) точки S переходит в точку проходящего через нее эллиптического (гиперболического) цикла с базой l , не принадлежащую данной полувалиане (полуковалиане).

II. Если f – орициклический поворот, зададим его матрицей (2.11). В каждом преобразовании (2.11) инвариантна каждая овальная линия, заданная в репере R уравнением

$$qx_2^2 + x_1x_2 - x_3^2 = 0, \quad q \in \mathbb{R},$$

имеющая единственную общую точку и общую касательную в этой точке с абсолютом. При $q < 0$ линия является орициклом плоскости Лобачевского. При $q > 0$ линия полностью принадлежит плоскости $\hat{H}$, назовем ее *орициклом* плоскости $\hat{H}$.

Орицикл плоскости $\hat{H}$ – невырожденная линия второго порядка. Каждая точка абсолюта, за исключением точек касания, является внутренней точкой относительно орицикла плоскости $\hat{H}$.

Дополнение внутренности орицикла до $\hat{H}$ является выпуклым.

Метрически определить орицикл на $\hat{H}$ можно по аналогии с орициклом плоскости Лобачевского. Пусть A – собственная точка плоскости $\hat{H}$, а K – точка абсолюта. Множество всех точек M плоскости $\hat{H}$, для которых мера угла AMK равна мере угла MAK , назовем *орициклом*.

III. При сдвигах вдоль эллиптических прямых точки плоскости $\hat{H}$ движутся по гиперциклам, окружностям с несобственным центром, определить которые метрически можно следующим образом.

Пусть $r \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(r) \neq 0$, $\operatorname{Im}(r) = \pi\rho/2$, S – внутренняя точка относительно линии γ . Множество всех точек плоскости $\hat{H}$, удаленных от S на расстояние r , назовем *гиперциклом* плоскости $\hat{H}$ с центром в точке S и радиусом r : $\omega(S; r)$.

Эллиптическую прямую l , полярю центра гиперцикла относительно абсолютной линии, назовем *базой* гиперцикла. Гиперцикл с базой l является множеством всех точек плоскости $\hat{H}$, удаленных от прямой l на действительное расстояние $h = i\pi\rho/2 - r$, которое назовем *высотой* гиперцикла.

В репере $R^* = \{A_1, A_2, S, E\}$ гиперцикл $\omega(S; r)$ задан уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho} = 0.$$

Гиперцикл – невырожденная линия второго порядка, полностью принадлежащая плоскости $\hat{H}$ и пересекающая абсолют в двух мнимо сопряженных точках. Через центр гиперцикла проходят две общие с абсолютом мнимо сопряженные касательные.

Дополнение внутренности гиперцикла до плоскости $\hat{H}$ является выпуклым.

§ 3. Черепицы плоскости $\hat{H}$

3.1. Определение. Пусть на $\hat{H}$ каждые две из точек H, J, L общего положения принадлежат одной изотропной прямой и $K = JL \cap \gamma$. Объединение отрезков HJ, HL и лучей JK, LK назовем *3-контуром с несобственной точкой K* , или, кратко, *3-(1)-контуром*.

С каждым 3-(1)-контуром единственным образом можно связать канонический репер плоскости $\hat{H}$ (см. п. 3.2), следовательно, 3-(1)-контур не имеет инварианта группы G . Можно показать (см. [9]), что 3-(1)-контур обладает внутренностью и является выпуклым. В настоящей работе под 3-(1)-контуром будем понимать сам контур с его внутренностью.

На 3-(1)-контуре можно бесконечным числом способов задать простое разбиение, например, неограниченное число раз отсекая от него изотропными прямыми равные простые 4-контур. Точка N на прямой HJ , принадлежащая секущей изотропной прямой, однозначно определена значением инварианта Δ (см. [9]) разбивающего простого 4-контура: $\Delta = -(JHNA)$, где A – несобственная точка прямой HJ . Так как любые два 3-(1)-контура равны, то после каждого отсечения будем получать 3-(1)-контур, равные данному.

3-(1)-контур с заданным на нем простым разбиением назовем *черепицей*.

Разбиение на плоскости $\hat{H}$, заданной черепицей, назовем *черепичным*, а разбиение, составленное заданной черепицей и разбивающим ее простым 4-контуром, назовем *почти черепичным*.

Покажем, что черепичное разбиение плоскости $\hat{H}$ существует. Изотропные прямые AB , BC , AC (рис. 1, а) разбивают плоскость $\hat{H}$ на три 3-(1)-контура ABK_2C , BCK_3A , CAK_1B и три полуковалианы точек A , B , C . Каждую полуковалиану изотропной прямой разобьем на 3-(1)-контур (например, $AMKN$) и две полуковалианы точек (M и N), каждую из которых также можно разбить на 3-(1)-контур и две полуковалианы. Продолжая процесс разбиения полуковалиан неограниченно, всю плоскость $\hat{H}$ разобьем на 3-(1)-контуры. Построив на каждом из них некоторое простое разбиение $\mathcal{H}$, получим черепичное разбиение плоскости $\hat{H}$.

Рис. 1. Пример черепичного разбиения плоскости $\hat{H}$ (а); построение фрактальной черепицы (б)

Таким образом, черепица является аналогом мозаики в принятом смысле.

Интересно найти *фрактальные черепицы*, которые после каждого отсечения от них некоторой части, одинаковой при каждом отсечении, остаются равными себе. Бесконечную серию фрактальных черепиц построим в п. 3.2.

3.2. Ленточные черепицы.

3.2.1. *Определение.* Пусть в 3-(1)-контуре $HJKL$ с несобственной точкой K изотропные прямые k_b , k_d , проходящие через точки B , D соответственно на ребрах HJ , HL , разбивают данный контур $HJKL$ на три простых 4-контура

$$F = HBH_1D, \quad F_1 = BJJ_1H_1, \quad F_2 = DH_1L_1L$$

и 3-(1)-контур $H_1J_1KL_1$ (рис. 1, б). Выберем некоторое разбиение $\aleph(m, n)$ контуров F_1 , F_2 соответственно на m , n простых контуров, равных контуру F .

Далее повторим все построения для 3-(1)-контура $H_1J_1KL_1$, разбивая его на три простых 4-контура

$$F^1 = H_1B_1H_2D_1, \quad F_1^1 = B_1J_1J_2H_2, \quad F_2^1 = D_1H_2L_2L_1$$

и 3-(1)-контур $H_2J_2KL_2$, задав на контурах F_1^1 , F_2^1 разбиение $\aleph(m, n)$.

Продолжая неограниченно тем же способом процесс разбиения 3-(1)-контуров $H_iJ_iKL_i$ ($i \in \mathbb{N}$), получим фрактальную черепицу $\wp$, определенную парой чисел m , n и выбранным разбиением $\aleph(m, n)$.

Заметим, что при неограниченном числе вложений 3-(1)-контур внутри себя 4-контур F^i переходит в 4-контур F^{i+1} таким образом, что одна из его вершин гиперболической диагональной прямой переходит в противоположную вершину, т.е. выстраивается бесконечная последовательность 4-контуров (F^i) , в которой каждые два соседних контура имеют общую вершину. Назовем последовательность (F^i) *лентой* черепицы $\wp$, а саму черепицу $\wp$, построенную указанным способом, назовем *ленточной*.

Все ленточные черепицы, определенные одной парой чисел (m, n) , назовем *гомологическим рядом* ленточных черепиц, а пару (m, n) назовем *кодом* определенного ею гомологического ряда.

3.2.2. Доказательство существования. Не решая на данном этапе вопроса о числе членов гомологического ряда с кодом (m, n) , докажем, что каждый ряд содержит по крайней мере один член.

ТЕОРЕМА 5. *Существует ленточная черепица $\wp$, определенная парой натуральных чисел (m, n) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование черепицы $\wp$ докажем ее построением.

Прежде всего докажем существование ячейки разбиения (простого 4-контур F). Для этого введем канонический репер $R = \{A_1, A_2, H, K\}$, помещая вершины A_1, A_2 в несобственные точки соответственно сторон HJ, HL данного 3-(1)-контур $HJKL$. В репере R заданные точки имеют координаты

$$\begin{aligned} A_1(1:0:0), \quad A_2(0:1:0), \quad H(0:0:1), \\ K(1:1:1), \quad J(2:0:1), \quad L(0:2:1). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Точки B и D лежат на отрезках HJ, HL координатных изотропных прямых, следовательно, в репере R их можно задать координатами

$$B(b:0:1), \quad 0 < b < 2, \quad D(0:d:1), \quad 0 < d < 2. \quad (3.2)$$

Прямая BD и касательные к абсолюту (2.2) прямые k_b, k_d, JL имеют координаты

$$BD(d:b:-bd), \quad k_b(4:b^2:-4b), \quad k_d(d^2:4:-4d), \quad JL(1:1:-2), \quad (3.3)$$

а точки $N = HJ \cap k_d, P = HL \cap k_b, H_1 = k_b \cap k_d$ имеют координаты

$$N(4:0:d), \quad P(0:4:b), \quad H_1(4b:4d:4+bd).$$

Прямые BD, H_1J, H_1L являются эллиптическими, поэтому для инвариантов $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ соответственно контуров F, F_1, F_2 в репере R выполняются равенства

$$\Delta = -\frac{4-bd}{4}, \quad \Delta_1 = -\frac{2(d-2)}{bd-4}, \quad \Delta_2 = -\frac{2(b-2)}{bd-4}. \quad (3.4)$$

При условиях из (3.2) на координаты точек B, D числа $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ принадлежат промежутку $(-1, 0)$, следовательно контуры F, F_1, F_2 являются простыми (см. [9]).

Пусть $t = |\Delta|$. По теореме 3 из [9] имеем

$$t^m = |\Delta_1|, \quad t^n = |\Delta_2|. \quad (3.5)$$

Исключим из равенств (3.4), (3.5) параметры b, d . Получим уравнение

$$t^{n+m+1} - t^n - t^m + 1 = 0. \quad (3.6)$$

На промежутке $I = (0, 1)$ допустимых значений t уравнение (3.6) равносильно уравнению

$$t^{n+m} + t^{n+m-1} + \dots + t^{n+1} + t^n - t^{m-1} - t^{m-2} - \dots - 1 = 0, \quad n > m, \quad (3.7)$$

которое при любых значениях m, n имеет хотя бы один корень t_0 на I .

Таким образом, каждая пара натуральных чисел (m, n) определяет по крайней мере один инвариант $\Delta = -t_0$ простого 4-контура F . Следовательно, контур F , ячейка простого разбиения ленточной черепицы с кодом (m, n) , существует.

Далее, пусть $HJKL$ – произвольный 3-(1)-контур, t_0 – корень уравнения (3.7) на промежутке I , $\Delta = -t_0$.

На сторонах HJ, HL 3-(1)-контура $HJKL$ построим соответственно точки N, P так, чтобы выполнялись равенства

$$(JHNA_1) = |\Delta|^{m+1}, \quad (LHPA_2) = |\Delta|^{n+1}.$$

Тогда изотропные прямые, проходящие через точки N, P , не содержащие вершин контура $HJKL$, отсекут от этого контура простые 4-контуры

$$F = HBH_1D, \quad F_1 = BJJ_1H_1, \quad F_2 = DLL_1H_1$$

соответственно с инвариантами $\Delta, -|\Delta|^m, -|\Delta|^n$.

Разбиение $\aleph(m, n)$ зададим следующим образом. На прямой HA_1 построим последовательность точек $(N_i), i = 1, \dots, m-1$, однозначно определенных условием

$$(JBN_iA_1) = |\Delta|^i.$$

Через каждую точку N_i проведем изотропную прямую k_i такую, что $k_i \neq HJ$ для любого p , которая отсечет от контура F_1 простой 4-контур BJU_iV_i с инвариантом $-|\Delta|^i$. Тогда по теореме 3 из [9] инвариант каждого из $m-1$ контуров

$$BJU_1V_1, V_1U_1U_2V_2, \dots, V_{m-2}U_{m-2}U_{m-1}V_{m-1}$$

равен Δ . С учетом этого и первого условия (3.5) инвариант оставшегося от контура F_1 4-контура $V_{m-1}U_{m-1}J_1H_1$ равен Δ . Следовательно, контур F_1 разбит на m равных контуру F простых 4-контуров.

Аналогично, на n 4-контуров, равных контуру F , разобьем контур F_2 .

Повторяя проведенные построения неограниченно для 3-(1)-контуров

$$H_1J_1KL_1, \dots, H_iJ_iKL_i, \dots,$$

построим на 3-(1)-контуре $HJKL$ ленточную черепицу с кодом (m, n) . Теорема доказана.

3.2.3. Свойства ленточной черепицы.

ТЕОРЕМА 6. При неограниченном вложении ленточной черепицы $HJKL$ с кодом (m, n) и несобственной точкой K внутрь себя ее вершина H при $m \neq n$ перемещается по эллиптическому циклу, при $m = n$ – по прямой HK .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть при вложении внутрь себя ленточная черепица $HJKL$ последовательно переходит в черепицы

$$H_1 J_1 K L_1, \dots, H_i J_i K L_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

В силу равенства черепиц $H_i J_i K L_i$ существует единственное преобразование f группы G такое, что

$$(\forall i) \quad f(H_i J_i K L_i) = H_{i+1} J_{i+1} K L_{i+1}.$$

Преобразование f не является инволюционным и параболическая прямая JL инвариантна в нем, следовательно, f – либо сдвиг вдоль гиперболической прямой, либо орициклический поворот, либо скользящее отражение.

С 3-(1)-контуром $HJKL$ свяжем канонический репер R , используемый при доказательстве теоремы 5. Точка $J_1 = k_d \cap JL$ в репере R имеет координаты $(4 : 2d : d + 2)$ (см. (3.1)–(3.3)). В силу условий

$$(JL J_1 K) = \frac{d}{2} > 0, \quad (JK J_1 L) = \frac{d}{d - 2} < 0$$

точка J_1 принадлежит лучу JK , не содержащему отрезок JL .

Из равенства черепиц $H_i J_i K L_i$ следует, что в ленточной черепице каждая точка $J_{i+1} (L_{i+1})$ принадлежит лучу $J_i K (L_i K)$, не содержащему отрезок $J_i L_i$. Поэтому на основании теорем 2–4 f является сдвигом вдоль гиперболической прямой, полюс S которой относительно абсолюта находится на отрезке JL .

Каждая прямая $H_i S$ принадлежит валиане точки H_i , следовательно является эллиптической. Таким образом, точки H_i принадлежат либо одному эллиптическому циклу с центром в точке S , либо базе этого цикла.

Из равенств (3.4), (3.5) следует равносильность условий $b = d$ и $m = n$. В то же время условие $b = d$ равносильно условию принадлежности точки H_1 прямой HK . Следовательно, при неограниченном вложении ленточной черепицы $HJKL$ с кодом (m, n) внутрь себя ее вершина H перемещается по прямой HK тогда и только тогда, когда $m = n$. Теорема доказана.

3-(1)-контур $HJKL$ симметричен относительно прямой HK . Точки B и D симметричны относительно прямой HK тогда и только тогда, когда $b = d$ (т.е. когда $m = n$). В этом случае можно так подобрать разбиение $\aleph$, что симметричной относительно HK окажется и черепица, построенная на контуре $HJKL$. Так как K – единственная бесконечно удаленная точка контура $HJKL$, то симметрия относительно прямой HK – единственно возможная симметрия данного контура. Таким образом, гомологические ряды с кодом (m, m) и только они содержат симметричные черепицы.

В доказательстве теоремы 5 установлено, что модуль инварианта Δ ячейки простого разбиения ленточной черепицы с кодом (m, n) является корнем уравнения (3.7). Заметим, инвариант Δ ячейки разбиения в черепице с кодом $(1, 1)$

равен золотому сечению: $(1 - \sqrt{5})/2$. В дальнейшем предполагается показать, что такая черепица обладает некоторыми особыми свойствами.

§ 4. Правильный n -контур плоскости $\hat{H}$

В данном параграфе приведем результаты работы [10], которые потребуются для построения разбиений, инвариантных при сдвиге вдоль эллиптической прямой.

4.1. Построение правильного n -контура. Через внутреннюю относительно абсолюта плоскости $\hat{H}$ точку S проведем n , $n > 4$, лучей SK_i :

$$\angle K_i SK_{i+1} = \frac{2\pi}{n}, \quad K_i \in \gamma, \quad i = 1, \dots, n.$$

Построим последовательность (k_n) изотропных прямых k_i , касательных к абсолюту соответственно в точках K_i . Так как $K_{nt+i} = K_i$, $t \in \mathbb{N}$, то

$$k_{nt+i} = k_i. \quad (4.1)$$

Каждая прямая k_i содержит $n - 1$ точек ее пересечения прямыми последовательности (k_n) . Введем обозначения

$$k_i \cap k_{i+m} = A_i^m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Упорядоченную последовательность отрезков $A_1^1 A_2^1, A_2^1 A_3^1, \dots, A_n^1 A_1^1$ изотропных прямых назовем *правильным n -контуром* и обозначим F . Число n назовем *размерностью*, точку S — *центром*, поляр l точки S относительно абсолюта — *базой*, точки $A_1^m, A_2^m, \dots, A_n^m$ — *вершинами порядка m контура F* .

4.2. Свойства правильного n -контура. Из равенств (4.1), (4.2) получаем

$$A_i^m = k_i \cap k_{i+m} = k_{i+m-n+(n-m)} \cap k_{i+m-n} = A_{i+m-n}^{n-m}. \quad (4.3)$$

Следовательно, порядок m вершин контура F совпадает с порядком $n - m$. Условимся, что $m = 1, \dots, (n - 1)/2$, если $n = 2l + 1$, и $m = 1, \dots, n/2$, если $n = 2l$, $l \in \mathbb{N}$.

Правильные n -контуры при нечетных и четных значениях n имеют различное строение. Каждая последовательность $A_1^m, A_2^m, \dots, A_n^m$ вершин порядка m контура нечетной размерности состоит из n различных точек, и на каждой прямой последовательности (k_n) имеется по две вершины каждого порядка m .

Если число n четное, то при $m < n/2$ последовательность $A_1^m, A_2^m, \dots, A_n^m$ состоит из n различных точек, а при $m = n/2$ согласно равенствам (4.3) имеем $A_i^m = A_{i+m}^m$, следовательно, количество различных точек в последовательности $A_1^m, A_2^m, \dots, A_n^m$ при $m = n/2$ равно $n/2$. Каждая прямая последовательности (k_n) при четном n содержит одну вершину порядка $n/2$.

ТЕОРЕМА 7. *Вершина порядка m правильного n -контура принадлежит базе контура тогда и только тогда, когда $m = n/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению

$$\angle K_i S K_{i+1} = \frac{2\pi}{n},$$

следовательно,

$$\angle K_i S K_{i+m} = \frac{2\pi m}{n}.$$

Точка S принадлежит прямой $K_i K_{i+m}$ тогда и только тогда, когда величина $2\pi m/n$ равна π , т.е. когда число n четное и $m = n/2$. Но согласно обозначениям (4.2) прямая $K_i K_{i+m}$ является полярной точки A_i^m относительно абсолюта. В силу взаимности поляритета при $m = n/2$ точка A_i^m , совпадающая с A_{i+m}^m , принадлежит полярной точке S относительно линии γ , т.е. принадлежит базе контура. Теорема доказана.

4.3. Семейство гиперциклов правильного n -контура.

4.3.1. *Определение.* Все точки A_i^m являются внешними по отношению к абсолюту. Поэтому расстояние от каждой из них до точки S является комплексной величиной с ненулевой действительной частью и мнимой частью $\pi\rho/2$. Рассмотрим поворот плоскости $\hat{H}$ вокруг точки S на угол $2\pi/n$, при котором каждая точка K_i перейдет в точку K_{i+1} . При этом повороте каждая точка A_i^m перейдет в точку A_{i+1}^m . Следовательно, все вершины одного порядка контура F удалены от S на одинаковое расстояние:

$$(\forall i, j) \quad SA_i^m = SA_j^m, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Таким образом, для последовательности $A_1^m, A_2^m, \dots, A_n^m$ вершин порядка m контура F на плоскости $\hat{H}$ существует единственный гиперцикл, содержащий эти вершины. Следовательно, правильный n -контур порождает на $\hat{H}$ семейство (ω_q) концентрических гиперциклов.

Гиперцикл ω_m с центром в точке S , содержащий вершины порядка m правильного контура F , назван *гиперциклом порядка m контура F* .

При нечетном n семейство (ω_q) состоит из $(n-1)/2$ невырожденных гиперциклов, при четном n состоит из $(n-2)/2$ невырожденных гиперциклов и одной прямой, базы контура F , которую можно рассматривать как вырожденный гиперцикл нулевой высоты.

4.3.2. Вычисление радиуса гиперцикла порядка m .

ТЕОРЕМА 8. На плоскости $\hat{H}$ радиуса кривизны ρ радиус r_m гиперцикла ω_m порядка m правильного n -контура определен равенством

$$\operatorname{ch}^2 \frac{r_m}{\rho} = -\operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{n}. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем канонический репер R^* , линия γ в котором задана уравнением (2.1). Центр S правильного n -контура F совместим с третьей координатной вершиной, а точку K_1 — с точкой $E_{13}(1:0:1)$ на γ . Тогда уравнение изотропной прямой k_1 примет вид

$$x_1 - x_3 = 0. \quad (4.5)$$

По крайней мере одна из вершин порядка m контура F , принадлежащая прямой k_1 (пусть A_1^m), отлична от вершины A_2 репера R^* и может быть задана координатами $(1 : a_m : 1)$, $a_m \neq 0$. Тогда прямые SK_1 и SA_1^m в репере R^* заданы соответственно координатами $(0 : 1 : 0)$ и $(a_m : -1 : 0)$.

При симметрии относительно гиперболической прямой SA_1^m изотропная прямая k_1 переходит в изотропную прямую k_{m+1} . Следовательно,

$$\angle A_1^m SK_1 = \angle A_1^m SK_{m+1}.$$

Но $\angle K_1 SK_{m+1} = 2m\pi/n$. Поэтому $\angle A_1^m SK_1 = m\pi/n$.

Учитывая, что $m \leq n/2$, т.е. $0 \leq m\pi/n \leq \pi/2$, по формуле (2.5) получаем

$$\cos \frac{m\pi}{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + a_m^2}}. \quad (4.6)$$

Для расстояния r_m между точками S и A_1^m гиперболической прямой

$$\operatorname{ch}^2 \frac{r_m}{\rho} = -\frac{1}{a_m^2}. \quad (4.7)$$

Из равенств (4.6), (4.7) получаем формулу (4.4). Теорема доказана.

4.4. Инварианты и составляющие правильного n -контура.

4.4.1. *Определение.* Для правильного n -контура F построим последовательность (Δ_p) чисел

$$\Delta_p = -(A_\lambda^{p+1} A_\lambda^{p+2} A_\lambda^1 K_\lambda), \quad (4.8)$$

где $\lambda = 1, \dots, n$; $p = 1, \dots, (n-3)/2$ при $n = 2l + 1$ и $p = 1, \dots, (n-2)/2$ при $n = 2l$, $l \in \mathbb{N}$.

Значения чисел (Δ_p) не зависят от значения λ , так как поворотом вокруг точки S на угол, кратный $2\pi/n$, любые две прямые последовательности (k_n) могут быть переведены друг в друга. Числа (Δ_p) имеют геометрический смысл. По определению простого отношения трех точек параболической прямой

$$-(A_\lambda^{p+1} A_\lambda^{p+2} A_\lambda^1 K_\lambda) = (A_\lambda^{p+1} A_\lambda^{p+2}, A_\lambda^1),$$

поэтому Δ_p есть отношение, в котором вершина A_λ^1 делит отрезок $A_\lambda^{p+1} A_\lambda^{p+2}$ прямой k_λ , заключенный между двумя соседними в семействе (ω_q) гиперциклами порядков $p+1$ и $p+2$. Простое отношение трех точек параболической прямой инвариантно относительно группы G , следовательно, относительно G инвариантно каждое из чисел последовательности (Δ_p) .

Число Δ_p названо *инвариантом порядка p контура F* .

Рассмотрим конечный замкнутый 4-контур $F_\lambda^p = A_\lambda^{p+1} A_\lambda^{p+2} A_{\lambda+1}^{p+1} A_{\lambda+1}^p$. Число Δ_p – единственный независимый инвариант этого контура относительно группы G . Согласно построению (4.2) точка A_λ^1 не принадлежит отрезку $A_\lambda^{p+1} A_\lambda^{p+2}$, т.е. $(A_\lambda^{p+1} A_\lambda^{p+2}, A_\lambda^1) < 0$, следовательно, все числа последовательности (Δ_p) меньше нуля. Это означает, что каждый контур F_λ^p является простым (см. [9]).

Контур F_λ^p будем называть *составляющим порядка p контура F* , а совокупность контуров $F_1^p, F_2^p, \dots, F_n^p$ – *кольцом порядка p контура F* .

4.4.2. Вычисление инварианта порядка p .

ТЕОРЕМА 9. *Инвариант Δ_p правильного n -контура однозначно определен парой чисел (p, n) :*

$$\Delta_p = \frac{\cos \frac{2(p+1)\pi}{n} - \cos \frac{2\pi}{n}}{2 \sin^2 \frac{(p+1)\pi}{n}}. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для правильного n -контура F изотропную прямую k_λ зададим в репере R^* уравнением (4.5). Тогда точка K_λ имеет в R^* координаты $(1 : 0 : 1)$, а точки $A_\lambda^1, A_\lambda^{p+1}, A_\lambda^{p+2}$ можно задать соответственно координатами

$$(1 : a_1 : 1), \quad (1 : a_{p+1} : 1), \quad (1 : a_{p+2} : 1),$$

где $a_1 a_{p+1} a_{p+2} \neq 0$.

Согласно рассуждениям доказательства теоремы 8 числа a_1, a_{p+1}, a_{p+2} удовлетворяют равенству (4.6). Записывая это равенство для $m = 1, m = p + 1, m = p + 2$, выразим значения a_1, a_{p+1}, a_{p+2} через p и n :

$$a_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}, \quad a_{p+1} = \operatorname{tg} \frac{(p+1)\pi}{n}, \quad a_{p+2} = \operatorname{tg} \frac{(p+2)\pi}{n}. \quad (4.10)$$

По формуле (4.8) выразим значение Δ_p через параметры a_1, a_{p+1}, a_{p+2} :

$$\Delta_p = \frac{a_{p+2}(a_1 - a_{p+1})}{a_{p+1}(a_{p+2} - a_1)}. \quad (4.11)$$

Из равенств (4.10), (4.11) получаем формулу (4.9). Теорема доказана.

4.5. Последнее кольцо правильного n -контура.

4.5.1. *Звезда правильного n -контура нечетной размерности.* Пусть F – правильный n -контур, где n – нечетное число. Кольцо K^* порядка $(n - 3)/2$, последнее в цепочке колец правильного n -контура F , образовано составляющими

$$F_\lambda^{(n-3)/2} = A_\lambda^{(n-1)/2} A_\lambda^{(n+1)/2} A_{\lambda+1}^{(n-1)/2} A_{\lambda+1}^{(n-3)/2}.$$

Применяя к вершинам $A_\lambda^{(n+1)/2}$ тождество (4.3), получим

$$F_\lambda^{(n-3)/2} = A_\lambda^{(n-1)/2} A_{\lambda+(1-n)/2}^{(n-1)/2} A_{\lambda+1}^{(n-1)/2} A_{\lambda+1}^{(n-3)/2}.$$

Заметим, что кольцо K^* образовано простыми 4-контурами, три вершины которых являются вершинами одного порядка $(n - 1)/2$ контура F , а следовательно, принадлежат последнему гиперциклу $\omega_{(n-1)/2}$. Дополнение внутренности гиперцикла $\omega_{(n-1)/2}$ до $\hat{H}$ оказывается полностью покрытым кольцом K^* .

Кольцо K^* называется *звездой* контура F .

На рис. 2, а изображен правильный 9-контур F с центром S , базой l и последним гиперциклом ω . Составляющие 4-контуры первого (второго) кольца контура F закрашены в светло-серый (серый) цвет, а каждый из девяти 4-контуров, составляющих звезду, покрыт узором, причем каждому 4-контурю звезды соответствует определенный узор.

Рис. 2. Правильный 9-контур (а), 6-контур (б) и порожденные ими разбиения плоскости $\hat{H}$

По построению точки $A_\lambda^{(n-1)/2}$, $A_\lambda^{(n+1)/2}$ симметричны относительно прямой SK_λ . Следовательно, отрезок $A_\lambda^{(n-1)/2}A_\lambda^{(n+1)/2}$ прямой k_λ , являющийся ребром контура $F_\lambda^{(n-3)/2}$, инвариантен при симметрии f относительно SK_λ . Точка S неподвижна при f , поэтому неподвижна и ее поляр l . Следовательно, середина отрезка $A_\lambda^{(n-1)/2}A_\lambda^{(n+1)/2}$ принадлежит l .

Таким образом, база контура F проходит через середины двух смежных ребер с вершинами на гиперцикле $\omega_{(n-1)/2}$ каждого контура $F_\lambda^{(n-3)/2}$, входящего в звезду контура F .

По формуле (4.9) находим инвариант Δ^* 4-контуров звезды контура F :

$$\Delta^* = 1 - 2 \cos \frac{\pi}{n}.$$

4.5.2. *Пояс правильного n -контура четной размерности.* При четном n кольцо K^0 порядка $(n-2)/2$, последнее в цепочке колец правильного n -контура F , образовано $n/2$ составляющими

$$F_\lambda^{(n-2)/2} = A_\lambda^{n/2} A_\lambda^{(n+2)/2} A_{\lambda+1}^{n/2} A_{\lambda+1}^{(n-2)/2}$$

контура F , вершины $A_\lambda^{n/2}$, $A_{\lambda+1}^{n/2}$ эллиптических диагональных прямых которых согласно теореме 7 принадлежат базе контура F .

Кольцо K^0 называется *поясом* контура F .

По формуле (4.9) найдем инвариант контуров $F_\lambda^{(n-2)/2}$ пояса контура F :

$$\Delta^0 = -\cos^2 \frac{\pi}{n}. \quad (4.12)$$

На рис. 2, б изображен правильный 6-контур; три 4-контура, составляющие его пояс, покрыты узором, каждому 4-контуру соответствует определенный узор. Серым и светло-серым цветом закрашены шесть составляющих 4-контуров первого кольца.

§ 5. Простые разбиения, инвариантные при сдвигах вдоль эллиптической прямой

5.1. Разбиения, порожденные правильным n -контуром нечетной размерности. Для правильного n -контура F нечетной размерности сохраним обозначения из § 4.

При нечетном n каждый 3-(1)-контур

$$J_\lambda = A_\lambda^{(n-1)/2} A_{\lambda+(n-1)/2}^{(n-1)/2} A_{\lambda-1}^1 K_\lambda, \quad \lambda = 1, \dots, n,$$

образован составляющими $F_{\lambda-1}^p$ каждого порядка p и 3-(1)-контуром

$$A_{\lambda-1}^1 A_{\lambda-1}^2 A_\lambda^1 K_\lambda.$$

На рис. 2, а для $n = 9$ один из 3-(1)-контуров J_λ обведен штриховой линией.

Объединение всех 3-(1)-контуров J_λ , не имеющих общих внутренних точек, покрывает дополнение внутренности гиперцикла ω_1 контура F до плоскости $\hat{H}$. Непокрытыми на $\hat{H}$ остаются n полуковалиан $K_\lambda A_\lambda^1 K_{\lambda+1}$ вершин первого порядка контура F , принадлежащих внутренности ω_1 . Каждую из этих полуковалиан изотропной прямой, проходящей через несобственную точку прямой, содержащей вершину полуковалианы и точку S , разобьем на 3-(1)-контур и две полуковалианы, каждую из которых в свою очередь также разобьем на 3-(1)-контур и две полуковалианы.

Продолжая неограниченно процесс, разобьем всю плоскость $\hat{H}$ на 3-(1)-контуры. Зададим на всех 3-(1)-контурах некоторое простое разбиение, превращая их в равные черепицы.

Итак, доказана основная теорема о разбиении плоскости $\hat{H}$, порожденном правильным n -контуром нечетной размерности.

ТЕОРЕМА 10. *Правильный n -контур нечетной размерности порождает на $\hat{H}$ черепичное разбиение.*

Отсекая от черепиц, построенных на 3-(1)-контурах J_λ , 4-контуры, составляющие звезду контура F , получим почти черепичное разбиение плоскости $\hat{H}$ с фиксированной ячейкой. На рис. 2, а для $n = 9$ одна из черепиц почти черепичного разбиения, порожденного правильным 9-контуром, обведена пунктиром.

5.2. Разбиения, порожденные правильным n -контуром четной размерности. Сохраним обозначения из § 4. Выделим $n/2$ контуров $F_\lambda^{(n-2)/2}$, образующих пояс правильного n -контура F . Оставшаяся часть плоскости $\hat{H}$ есть объединение n 3-(1)-контуров

$$L_\lambda = A_{\lambda+1}^{(n-2)/2} A_\lambda^{n/2} A_\lambda^1 K_{\lambda+1}$$

и n полуковалиан вершин первого порядка контура F , принадлежащих внутренности гиперцикла ω_1 . На рис. 2, б для $n = 6$ один из 3-(1)-контуров L_λ выделен пунктиром.

Каждую полуковалиану изотропной прямой, проходящей через несобственную точку прямой, соединяющей точку S с вершиной полуковалианы, разобьем на 3-(1)-контур и две полуковалианы.

Процесс разбиения полуковалиан продолжим неограниченно. На всех 3-(1)-контурах зададим некоторое простое разбиение с ячейкой, равной контурам $F_\lambda^{(n-2)/2}$ (инвариант ячейки равен Δ^0 из (4.12)). Получим почти черепичное разбиение плоскости $\hat{H}$.

Итак, доказана основная теорема о разбиении плоскости $\hat{H}$, порожденном правильным n -контуром четной размерности.

ТЕОРЕМА 11. *Правильный n -контур четной размерности порождает на $\hat{H}$ почти черепичное разбиение, инвариант ячейки которого равен*

$$\Delta^0 = -\cos^2 \frac{\pi}{n}.$$

Правильный n -контур инвариантен при повороте вокруг точки S на угол $2\pi/n$ (сдвиге вдоль прямой l на расстояние $\pi\rho/n$), следовательно, описанные в данном параграфе разбиения плоскости $\hat{H}$, порожденные правильным n -контуром, инвариантны при сдвиге вдоль эллиптической прямой.

§ 6. Правильная изотропная h -ломаная плоскости $\hat{H}$

Для построения простых разбиений, инвариантных при сдвигах вдоль гиперболической прямой, опишем особого вида ломаные плоскости $\hat{H}$, исследованные в работе [11].

6.1. Построение h -ломаной.

6.1.1. *Вершины h -ломаной.* Пусть S – собственная точка плоскости $\hat{H}$, l – ее поляра относительно абсолютной линии γ , $l \cap \gamma = \{H_1, H_2\}$; α – некоторый угол между пересекающимися гиперболическими прямыми; V, U – полуковалианы точки S , а γ_v, γ_u – абсолютные дуги полуковалиан V, U соответственно. Построим бесконечную последовательность лучей (SK_i) , для которых

$$\angle K_i SK_{i+1} = \alpha, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (6.1)$$

а точки K_i принадлежат γ_v , причем

$$((SK_i)(SH_2)(SK_{i+1})(SH_1)) < 0. \quad (6.2)$$

Условием (6.2) мы определили направление следования точек последовательности (K_i) по дуге γ_v .

Через каждую точку K_i проведем параболическую прямую k_i . Введем обозначения

$$SK_i \cap l = T_i, \quad k_i \cap k_{i+m} = A_i^m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (6.3)$$

Упорядоченную последовательность всех отрезков $(A_i^1 A_{i+1}^1)$ параболических прямых назовем *правильной изотропной h -ломаной с углом α* , или, кратко, *h -ломаной*, и обозначим hL . Точку S назовем *центром*, прямую l – *базой*, а точки A_i^m – *вершинами порядка m ломаной hL* .

Вершина A_i^m ломаной hL является полюсом относительно абсолютной линии γ гиперболической прямой, соединяющей точки K_i, K_{i+m} одной дуги γ_v . Следовательно, все точки A_i^m являются внешними по отношению к абсолюту и принадлежат одной полуковалиане V точки S . Гиперболическое расстояние от каждой из них до точки S является действительной величиной.

Каждые две точки (каждые две гиперболические прямые) могут быть переведены друг в друга преобразованиями фундаментальной группы G плоскости $\hat{H}$. Поэтому согласно построению каждые две h -ломанные с равными углами G -эквивалентны.

6.1.2. Вторичные вершины h -ломаной. Для каждой точки K_i построим симметричную ей относительно S точку K'_i :

$$SK_i \cap \gamma_u = K'_i, \quad K'_i \neq K_i. \quad (6.4)$$

Через каждую точку K'_i проведем изотропную прямую k'_i . Правильная h -ломаная hL' с вершинами

$$\bar{A}_i^m = k'_i \cap k'_{i+m}$$

симметрична ломаной hL относительно точки S и имеет общие с hL центр и базу. Точки K'_i (6.4) принадлежат дуге γ_u , поэтому вершины $\bar{A}_i^m$ принадлежат полуковалиане U .

Обозначим

$$k_i \cap k'_i = B_i^0, \quad k_i \cap k'_{i+m} = B_i^m, \quad k'_i \cap k_{i+m} = \bar{B}_i^m. \quad (6.5)$$

Точки из (6.5) назовем *вторичными вершинами* ломаной hL .

6.2. Гиперболические и эллиптические циклы h -ломаной.

6.2.1. Определения. При повороте вокруг точки S на угол α (на плоскости Лобачевского этому повороту соответствует сдвиг вдоль прямой l на отрезок $T_i T_{i+1}$) точка K_i перейдет в точку K_{i+1} , прямая k_i – в прямую k_{i+1} . Тогда точка A_i^m перейдет в точку A_{i+1}^m . Следовательно, все вершины одного порядка ломаной hL удалены от S на одинаковое расстояние:

$$(\forall i, j, m) \quad SA_i^m = SA_j^m. \quad (6.6)$$

Каждые две вершины порядка m последовательности $(\bar{A}_i^m)$ могут быть совмещены поворотом вокруг точки S на угол, кратный α , а каждые две точки, взятые по одной из последовательностей (A_i^m) и $(\bar{A}_i^m)$ порядка m , могут быть совмещены композицией указанного поворота и симметрии относительно S . Таким образом, вершины одного порядка ломаных hL и hL' одинаково удалены от S :

$$(\forall i, j, m) \quad SA_i^m = S\bar{A}_j^m. \quad (6.7)$$

По построению точки B_i^0 принадлежат базе ломаной. Симметричные относительно S точки B_i^m и $\bar{B}_i^m$, полюсы гиперболических прямых, соединяющих соответственно точки K_i, K'_{i+m} и K'_i, K_{i+m} различных дуг γ_v и γ_u линии γ ,

принадлежат различным полуэллипсам точки S . Следовательно, прямые SB_i^m и $S\bar{B}_i^m$ являются эллиптическими, причем все вершины B_i^m и $\bar{B}_i^m$ одного порядка m одинаково удалены от точки S :

$$(\forall i, j, m) \quad SB_i^m = SB_j^m = S\bar{B}_i^m = S\bar{B}_j^m. \quad (6.8)$$

По свойствам (6.6), (6.7) для последовательностей (A_i^m) , $(\bar{A}_i^m)$ вершин порядка m ломаных hL и hL' на плоскости $\hat{H}$ существует единственный гиперболический цикл, содержащий эти вершины. Соответственно порядку m принадлежащих циклу вершин ломаной hL назовем его *гиперболическим циклом порядка m ломаной hL* .

По свойству (6.8) каждые две последовательности вторичных вершин B_i^m и $\bar{B}_i^m$ порядка m ломаной hL принадлежат одному эллиптическому циклу с центром в точке S , который назовем *эллиптическим циклом порядка m ломаной hL* .

Итак, каждая h -ломаная порождает на $\hat{H}$ счетное семейство (ω_h^i) (семейство (ω_e^i)) концентрических гиперболических (эллиптических) циклов.

6.2.2. Вычисление радиусов циклов порядка m .

ТЕОРЕМА 12. На плоскости $\hat{H}$ радиуса кривизны ρ радиус r_m гиперболического цикла ω_h^m (эллиптического цикла ω_e^m) порядка m ломаной hL с углом α определен равенством

$$\operatorname{ch} \frac{r_m}{\rho} = \operatorname{cth} \frac{m\alpha}{2} \quad \left(\cos \frac{r_m}{\rho} = \operatorname{th} \frac{m\alpha}{2} \right). \quad (6.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – центр цикла ω_h^m (цикла ω_e^m). Для ломаных hL и hL' примем обозначения (6.1)–(6.3), (6.5). Совместим точку K_i с единичной точкой $E(1 : 1 : 1)$ канонического репера $R = \{A_1, A_2, S, E\}$ второго типа, абсолютная линия γ в котором задана уравнением (2.2). Тогда координаты изотропной прямой k_i в репере R примут вид $k_i(1 : 1 : -2)$.

По построению точки K_i , K_{i+m} принадлежат одной дуге γ_v , а точки K_i , K'_{i+m} – различным дугам γ_v , γ_u соответственно. Поэтому точке K_{i+m} (точке K'_{i+m}) в репере R можно присвоить координаты $(1 : q^2 : q)$, где $q > 0$ ($q < 0$). Соответствующая точке K_{i+m} (K'_{i+m}) параболическая прямая k_{i+m} (k'_{i+m}) будет иметь координаты $(q^2 : 1 : -2q)$. Тогда точки T_i , T_{i+m} , A_i^m , B_i^m будут заданы в репере R координатами

$$\begin{aligned} &T_i(1 : 1 : 0); \quad T_{i+m}(1 : q^2 : 0); \\ &A_i^m(2 : 2q : q + 1), \quad q > 0; \quad B_i^m(2 : 2q : q + 1), \quad q < 0. \end{aligned}$$

По формуле (2.4) находим

$$\operatorname{ch} \frac{r_m}{\rho} = \operatorname{ch} \frac{SA_i^m}{\rho} = \pm \frac{q + 1}{q - 1} \quad \left(\cos \frac{r_m}{\rho} = \cos \frac{SB_i^m}{\rho} = \pm \frac{q + 1}{q - 1} \right). \quad (6.10)$$

В силу условий (6.1), так как $m\alpha$ – действительная положительная величина и $q > 0$ ($q < 0$), по формулам (2.4), (2.6) получаем

$$\operatorname{ch} m\alpha = \operatorname{ch} \frac{T_i T_{i+m}}{\rho} = \frac{1 + q^2}{2q} \quad \left(\operatorname{ch} m\alpha = \operatorname{ch} \frac{T_i T_{i+m}}{\rho} = -\frac{1 + q^2}{2q} \right). \quad (6.11)$$

Требование (6.2) приводит к условию $1 - q^2 < 0$, в соответствии с которым из равенства (6.11) находим значение q :

$$q = e^{m\alpha} \quad (q = -e^{m\alpha}). \quad (6.12)$$

Из выражений (6.10), (6.12) при условии $\text{ch}(r_m/\rho) > 0$ ($\cos(r_m/\rho) > 0$) получаем формулу (6.9). Теорема доказана.

6.3. Ленты h -ломаной.

6.3.1. *Гиперболические ленты h -ломаной.* Для h -ломаной hL , сохраняя обозначения п. 6.1, построим последовательность конечных замкнутых 4-контуров

$$F_\lambda^p = A_{\lambda+1}^p A_\lambda^{p+1} A_\lambda^{p+2} A_{\lambda+1}^{p+1}$$

и последовательность чисел Δ_p , определенных равенством

$$\Delta_p = -(A_\lambda^{p+1} A_\lambda^{p+2} A_\lambda^1 K_\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{Z}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (6.13)$$

Значения чисел последовательности (Δ_p) не зависят от значения λ , так как поворотом вокруг точки S на угол, кратный α , любые две прямые последовательности (k_i) могут быть переведены друг в друга. Число Δ_p является единственным независимым инвариантом относительно группы G каждого контура последовательности (F_λ^p) . Согласно построению (6.3) точка A_λ^1 не принадлежит отрезку $A_\lambda^{p+1} A_\lambda^{p+2}$, следовательно $\Delta_p < 0$. Таким образом, каждый контур F_λ^p простой (см. [9]).

Число Δ_p назовем *инвариантом порядка p* , а контуры F_λ^p – *составляющими порядка p ломаной hL* . Совокупность всех контуров F_λ^p одного порядка p назовем *гиперболической лентой порядка p ломаной hL* .

Рис. 3. Гиперболические и эллиптические ленты h -ломаной

Гиперболическая лента любого порядка может быть неограниченно продолжена в обе стороны (рис. 3) и полностью принадлежит полуковалиане V точки S , так как каждая вершина A_i^m принадлежит V . Каждый гиперболический цикл порядка m h -ломаной принадлежит внутренности ее гиперболического цикла порядка $m + 1$. Поэтому каждая гиперболическая лента порядка p h -ломаной принадлежит замыканию гиперболического цикла порядка $p + 2$ этой ломаной.

6.3.2. Эллиптические ленты h -ломаной. Используя вторичные вершины ломаной hL , построим последовательности конечных замкнутых 4-контуров

$$F_\lambda^0 = \overline{B}_\lambda^1 B_{\lambda+1}^0 B_\lambda^1 B_\lambda^0, \quad \overline{F}_\lambda^p = B_{\lambda+1}^{p-1} B_{\lambda+1}^p B_\lambda^{p+1} B_\lambda^p$$

и последовательность чисел, определенных равенствами

$$\Delta_0 = -(B_\lambda^1 B_\lambda^0 A_\lambda^1 K_\lambda), \quad \overline{\Delta}_p = -(B_\lambda^{p+1} B_\lambda^p A_\lambda^1 K_\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{Z}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (6.14)$$

Значения чисел $\Delta_0, \overline{\Delta}_p$, очевидно, не зависят от λ . Каждое из чисел $\Delta_0, \overline{\Delta}_p$ меньше нуля, так как согласно обозначениям (6.3), (6.5) точка A_λ^1 не принадлежит отрезкам $B_\lambda^1 B_\lambda^0, B_\lambda^{p+1} B_\lambda^p$. Число $\overline{\Delta}_p$ (Δ_0) – единственный независимый инвариант относительно группы G каждого простого контура $\overline{F}_\lambda^p$ (F_λ^0).

Число $\overline{\Delta}_p$ назовем *вторичным инвариантом порядка p* , а контуры $\overline{F}_\lambda^p$ – *вторичными составляющими порядка p ломаной hL* . Совокупность всех контуров $\overline{F}_\lambda^p$ одного порядка p назовем *эллиптической лентой порядка p ломаной hL* .

Каждая эллиптическая лента может быть неограниченно продолжена в обе стороны (см. рис. 3) и полностью принадлежит одной полуковалиане точки S . Кроме того, так как каждый эллиптический цикл порядка m ломаной hL принадлежит внутренности ее эллиптического цикла порядка $m + 1$, каждая эллиптическая лента порядка p ломаной hL принадлежит замыканию эллиптического цикла порядка $p + 1$ этой ломаной.

Гиперболические вершины контуров F_λ^0 принадлежат базе ломаной, а эллиптические вершины симметричны относительно l , т.е. относительно l симметричны и сами контуры. Контуры F_λ^0 назовем *базовыми составляющими ломаной hL* . Число Δ_0 назовем *базовым инвариантом*, а совокупность всех базовых контуров F_λ^0 – *базовой лентой ломаной hL* . Базовая лента полностью покрывает базу ломаной и принадлежит замыканию эллиптического цикла первого порядка.

6.3.3. Вычисление инвариантов ломаной.

ТЕОРЕМА 13. *Инвариант Δ_p и вторичный инвариант $\overline{\Delta}_p$ порядка p ломаной hL с углом α однозначно определены парой чисел (p, α) :*

$$\Delta_p = -\frac{(1 - e^{\alpha(p+2)})(1 - e^{\alpha p})}{(1 - e^{\alpha(p+1)})^2}, \quad (6.15)$$

$$\overline{\Delta}_p = -\frac{(1 + e^{\alpha p})^2}{(1 + e^{\alpha(p-1)})(1 + e^{\alpha(p+1)})}. \quad (6.16)$$

Базовый инвариант Δ_0 ломаной hL определен равенством

$$\Delta_0 = -\frac{2}{1 + \operatorname{ch} \alpha}. \quad (6.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для ломаной hL с углом α сохраним обозначения из пп. 6.1, 6.2. Прямую k_λ последовательности (k_i) зададим в присоединенном репере $R = \{A_1, A_2, S, E\}$ координатами $(1 : 1 : -2)$. Тогда в репере R точка K_λ имеет координаты $(1 : 1 : 1)$. Пусть точка $K_{\lambda+m}$ задана координатами $(1 : q_m^2 : q_m)$, где $q_m > 1$ в силу того, что согласно построению точки K_λ и $K_{\lambda+m}$ принадлежат одной дуге γ_v , и выполняется условие (6.2). Тогда параболическая прямая $k_{\lambda+m}$ задана координатами $(q_m^2 : 1 : -2q_m)$. Выражение q_m через m получим из равенства (6.12), согласно которому

$$q_m = e^{m\alpha}. \quad (6.18)$$

Отражение плоскости $\hat{H}$ от точки $S(0 : 0 : 1)$ определено формулами

$$\mu \bar{x}_1 = x_1, \quad \mu \bar{x}_2 = x_2, \quad \mu \bar{x}_3 = -x_3, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad \mu \neq 0.$$

Следовательно, прямые k'_λ и $k'_{\lambda+m}$ имеют координаты

$$k'_\lambda(1 : 1 : 2), \quad k'_{\lambda+m}(q_m^2 : 1 : 2q_m).$$

Найдем координаты точек $A_\lambda^1, A_\lambda^{p+1}, A_\lambda^{p+2}, B_\lambda^0, B_\lambda^1, B_\lambda^p, B_\lambda^{p+1}, K_{\lambda+1}$:

$$\begin{aligned} A_\lambda^1(2 : 2q_1 : 1 + q_1) &= k_\lambda \cap k_{\lambda+1}, & A_\lambda^{p+1}(2 : 2q_{p+1} : 1 + q_{p+1}) &= k_\lambda \cap k_{\lambda+(p+1)}, \\ A_\lambda^{p+2}(2 : 2q_{p+2} : 1 + q_{p+2}) &= k_\lambda \cap k_{\lambda+(p+2)}, & B_\lambda^0(1 : -1 : 0) &= k_\lambda \cap k'_\lambda, \\ B_\lambda^1(2 : -2q_1 : 1 - q_1) &= k_\lambda \cap k'_{\lambda+1}, & B_\lambda^p(2 : -2q_p : 1 - q_p) &= k_\lambda \cap k'_{\lambda+p}, \\ B_\lambda^{p+1}(2 : -2q_{p+1} : 1 - q_{p+1}) &= k_\lambda \cap k'_{\lambda+p+1}, & K_{\lambda+1}(1 : q_1^2 : q_1) &. \end{aligned}$$

По формулам (6.13), (6.14) выразим значения инвариантов $\Delta_p, \bar{\Delta}_p, \Delta_0$ через $q_1, q_p, q_{p+1}, q_{p+2}$:

$$\begin{aligned} \Delta_p &= \frac{(q_{p+2} - 1)(q_1 - q_{p+1})}{(1 - q_{p+1})(q_1 - q_{p+2})}, & \bar{\Delta}_p &= -\frac{(1 + q_p)(q_1 + q_{p+1})}{(1 + q_{p+1})(q_1 + q_p)}, \\ \Delta_0 &= \frac{-4q_1}{(1 + q_1)^2}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Записывая равенство (6.18) для $m = 1, m = p, m = p + 1, m = p + 2$, найдем значения $q_1, q_p, q_{p+1}, q_{p+2}$, при которых равенства (6.19) примут соответственно вид (6.15)–(6.17). Теорема доказана.

Заметим, что значение базового инварианта Δ_0 может быть получено формально по формуле (6.16) при $p = 0$.

§ 7. Простые разбиения, инвариантные при сдвиге вдоль гиперболической прямой

7.1. Разбиения, порожденные h -ломаной. Приведем пример (см. [11]) простого разбиения плоскости $\widehat{H}$, порожденного h -ломаной.

Пусть на $\widehat{H}$ задана некоторая ломаная hL . Используя обозначения из § 6, для $\lambda \in \mathbb{Z}$, $q = 0$ или $q \in \mathbb{N}$ построим совокупности 3-(1)-контуров

$$J_\lambda^q = A_\lambda^1 B_\lambda^{q+1} B_{\lambda+1}^q K_{\lambda+1}, \quad (7.1)$$

$$I_\lambda^q = \overline{A}_{\lambda+q}^1 B_\lambda^q B_{\lambda+q+1}^{q+1} K'_{\lambda+q+1}, \quad (7.2)$$

$$T_\lambda^q = \overline{A}_{\lambda+q}^1 B_{\lambda+1}^{q-1} B_{\lambda+1}^q K'_{\lambda+q+1}. \quad (7.3)$$

Зафиксируем некоторое значение q и построим простое разбиение $\mathcal{H}$ 3-(1)-контуров (7.1), (7.2) произвольно заданным 4-контуром. Неразбитыми после этого на $\widehat{H}$ оказываются полуковалианы всех вершин A_λ^1 , $\overline{A}_\lambda^1$ ломаных hL , hL' , принадлежащие замыканию $\overline{\omega}_h^1$ гиперболического цикла первого порядка. Для разбиения указанных полуковалиан отсечем от них 3-(1)-контур с несобственной точкой

$$N_\lambda = SA_\lambda^1 \cap \gamma, \quad \overline{N}_\lambda = S\overline{A}_\lambda^1 \cap \gamma$$

соответственно и зададим на этих 3-(1)-контурах разбиение $\mathcal{H}$. После отсечения 3-(1)-контура от каждой полуковалианы остаются две G -эквивалентные ей полуковалианы, полностью принадлежащие $\overline{\omega}_h^1$. Продолжим тем же образом неограниченно процесс разбиения оставшихся полуковалиан. На каждом отсеченном 3-(1)-контуре зададим разбиение $\mathcal{H}$, получим черепичное разбиение плоскости $\widehat{H}$, соответствующее заданному значению q .

Для построения почти черепичного разбиения плоскости $\widehat{H}$ выберем некоторую эллиптическую ленту ломаной hL , предположим, порядка q . Все вторичные составляющие 4-контуров $\overline{F}_\lambda^q$ этой ленты включим в разбиение. На всех 3-(1)-контурах (7.1), (7.3) при данном q зададим некоторое простое разбиение контуром с инвариантом $\overline{\Delta}_q$. Оставшиеся полуковалианы вершин первого порядка ломаных hL и hL' , принадлежащие $\overline{\omega}_h^1$, разобьем контуром с инвариантом $\overline{\Delta}_q$ так же, как при построении черепичного разбиения.

При $q = 0$ в качестве разбивающего выберем простой 4-контур F_λ^0 базовой ленты и черепицы, построенные на 3-(1)-контурах

$$J_\lambda^0 = A_\lambda^1 B_\lambda^1 B_{\lambda+1}^0 K_{\lambda+1}, \quad T_\lambda^0 = \overline{A}_\lambda^1 \overline{B}_{\lambda+1}^1 B_{\lambda+1}^0 K'_{\lambda+1}.$$

Итак, доказана основная теорема о разбиениях плоскости $\widehat{H}$, порожденных h -ломаной.

ТЕОРЕМА 14. *Правильная изотропная h -ломаная порождает счетное семейство черепичных разбиений плоскости $\widehat{H}$ с произвольной ячейкой и счетное семейство почти черепичных разбиений, ячейкой которых является вторичный составляющий 4-контур заданного порядка h -ломаной.*

Описанные разбиения инвариантны при сдвиге вдоль гиперболической прямой l на расстояние $\alpha\rho$.

7.2. Разбиения, порожденные ленточной черепицей. Пусть ленточная черепица $HJKL$ с кодом (m, n) и инвариантом ячейки Δ (см. п. 3.2) при неограниченном вложении внутрь себя переходит последовательно в черепицы

$$H_1 J_1 K L_1, \dots, H_i J_i K L_i, \dots, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Согласно теореме 6 точки $H, H_1, \dots, H_i$ принадлежат либо одному эллиптическому циклу ω_e (при $m \neq n$), либо одной прямой HK (при $m = n$).

Пусть S – центр, l – база цикла ω_e , а l_1, l_2 – изотропные прямые, проходящие через точку S , $l_1 \cap \gamma = K$, $l_2 \cap \gamma = Q$.

При доказательстве теоремы 6 показано, что существует единственный сдвиг f вдоль гиперболической прямой l с неподвижной точкой S , удовлетворяющий условию

$$(\forall i) \quad f(H_i J_i K L_i) = H_{i+1} J_{i+1} K L_{i+1}.$$

Применяя последовательно к черепице $HJKL$ преобразование f^{-1} , обратное к преобразованию f , “нарастим” черепицу $HJKL$ до черепицы

$$H_{-1} J_{-1} K L_{-1}, \dots, H_{-i} J_{-i} K L_{-i}, \dots$$

С увеличением i при неограниченном “наращивании” черепицы точки H_{-i} будут по циклу ω_e двигаться к точке Q , а точки J_{-i}, L_{-i} – к точке S по лучам SJK, SLK соответственно. Таким образом, при неограниченном вложении внутрь себя и неограниченном “наращивании” черепица $HJKL$ заполнит всю ковалиану точки S , порождая на ней простое разбиение.

Для разбиения ковалианы точки S на одной из прямых l_1, l_2 (пусть, например, на l_2) построим последовательности точек $(U_j), (V_j)$, $j \in \mathbb{Z}$, принадлежащие различным лучам, исходящим из точки S , так, чтобы

$$(\forall j) \quad f(U_j) = U_{j+1}, \quad f(V_j) = V_{j+1}.$$

Так как f – сдвиг вдоль гиперболической прямой, то согласно теореме 3 последовательности $(U_j), (V_j)$ существуют и точки в них движутся в одном направлении по заданному лучу.

Через каждую точку U_j, V_j проведем изотропную прямую u_j, v_j соответственно. Пусть

$$u_j \cap \gamma = U^j, \quad v_j \cap \gamma = V^j, \quad u_j \cap u_{j+1} = A_j, \quad v_j \cap v_{j+1} = B_j.$$

На всех 3-(1)-контурах $U_{j+1} U_j U^j A_j, V_{j+1} V_j V^j B_j$ зададим некоторое простое разбиение $\mathcal{H}$ с инвариантом ячейки Δ .

На отрезке $U_j U_{j+1} (V_j V_{j+1})$ построим точку $M_j (N_j)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$(U_j U_{j+1} M_j Q) = \mu \quad ((V_j V_{j+1} N_j Q) = \mu),$$

где $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu < 0$. Через точку $M_j (N_j)$ проведем изотропную прямую $m_j (n_j)$. Полуковалиану точки $A_j (B_j)$, не имеющую общих внутренних точек с 3-(1)-контуром $U_{j+1} U_j U^j A_j (V_{j+1} V_j V^j B_j)$, прямой $m_j (n_j)$ разобьем на две полуковалианы и один 3-(1)-контур. Каждую из двух полученных полуковалиан

одинаково для всех j вновь разобьем на две полуковалианы и 3-(1)-контур. Продолжая процесс неограниченно, получим разбиение полуковалиан точек A_j, B_j на 3-(1)-контур.

На всех 3-(1)-контурах зададим разбиение $\mathcal{H}$. Получим черепичное разбиение ковалианы точки S .

Итак, почти черепичное разбиение плоскости $\hat{H}$, порожденное ленточной черепицей и инвариантное при сдвиге f вдоль гиперболической прямой, построено.

§ 8. Орициклическая ломаная

8.1. Построение. На параболической прямой l с несобственной точкой K построим последовательность точек (T_p) , $p \in \mathbb{Z}$, так, чтобы точка T_{p+1} для любого p являлась серединой отрезка $T_p T_{p+2}$:

$$(\forall p) \quad (T_p T_{p+2} T_{p+1} K) = -1. \quad (8.1)$$

Через каждую точку T_p проведем изотропную прямую k_p , отличную от прямой l . Введем обозначения

$$k_p \cap \gamma = K_p, \quad k_p \cap k_{p+m} = A_p^m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (8.2)$$

Упорядоченную бесконечную последовательность $(A_p^1 A_{p+1}^1)$ отрезков параболических прямых назовем *орициклической ломаной* или, кратко, *о-ломаной* и обозначим oL . Прямую l назовем *базой*, точку K – *центром*, а точки последовательности (A_p^m) – *вершинами порядка m ломаной oL* .

8.2. Орициклические ленты и базовые 4-контур о-ломаной. По теореме 1 существует единственное преобразование f группы G , являющееся орициклическим поворотом, удовлетворяющее условию

$$(\forall p) \quad f(T_p) = T_{p+1}. \quad (8.3)$$

На основании равенств (8.2), (8.3) получаем

$$(\forall p, m) \quad f(k_p) = k_{p+1}, \quad f(A_p^m) = A_{p+1}^m. \quad (8.4)$$

При орициклическом повороте точки плоскости $\hat{H}$ смещаются по орициклу, поэтому из равенств (8.4) следует, что все вершины одного порядка m ломаной oL принадлежат одному орициклу. Назовем его *орициклом порядка m ломаной oL* и обозначим ω_m .

Рассмотрим последовательности конечных замкнутых 4-контуров

$$F_p^m = A_p^{m+1} A_p^{m+2} A_{p+1}^{m+1} A_{p+1}^m. \quad (8.5)$$

При фиксированном значении m все контуры последовательности (F_p^m) равны, так как могут быть переведены друг в друга некоторой степенью орициклического поворота f . Каждый 4-контур F_p^m назовем *составляющим порядка m* , а последовательность (F_p^m) – *орициклической лентой порядка m о-ломаной* (рис. 4).

 Рис. 4. Орициклические ленты o -ломаной

Построим последовательности конечных замкнутых 4-контуров

$$Q_p^n = T_p T_{p+1} A_{p-n}^{n+1} A_{p-n}^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8.6)$$

Любые два 4-контур из (8.6) согласно равенствам (8.2)–(8.4) при равных значениях n могут быть совмещены орициклическим поворотом f , следовательно являются равными. Учитывая, что одно ребро каждого контура из (8.6) принадлежит базе ломаной oL , назовем контур Q_p^n базовым контуром порядка n ломаной oL .

ТЕОРЕМА 15. *Инвариант Δ_m составляющего порядка m 4-контура F_p^m и инвариант $\bar{\Delta}_n$ базового контура Q_p^n порядка n o -ломаной однозначно определены порядком 4-контура:*

$$\Delta_m = -\frac{m(m+2)}{(m+1)^2}, \quad (8.7)$$

$$\bar{\Delta}_n = -\frac{n}{n+1}. \quad (8.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем канонический репер $R = \{K, A_2, T_0, K_2\}$ второго типа. Согласно условиям (8.1), (8.2) координаты точек T_p , A_p^m , K_p и прямых k_p в репере R имеют вид

$$T_p(p : 0 : 1), \quad A_p^m(p(p+m) : 4 : 2p+m), \quad K_p(p^2 : 4 : 2p), \quad k_p(4 : p^2 : -4p). \quad (8.9)$$

Диагональная прямая $A_p^{m+1} A_{p+1}^{m+1}$ ($A_p^{m+2} A_{p+1}^{m+2}$) в каждом 4-контуре (8.5) является эллиптической (гиперболической) и проходит через точку K , следовательно, составляющие 4-контуры o -ломаной являются простыми (см. [9; теорема 2, 2])). По определению число Δ_m равно отношению, в котором точка

пересечения противоположных сторон контура F_p^m делит его ребро, считая от вершины эллиптической диагональной прямой. Следовательно,

$$\Delta_m = -(A_p^{m+1} A_p^{m+2} A_p^1 K_p). \quad (8.10)$$

Из равенства (8.10) в координатах точек (8.9) получим формулу (8.7).

Аналогично, в контуре Q_p^n эллиптической является диагональная прямая $T_p A_{p-n}^{n+1}$, поэтому контур Q_p^n простой и

$$\bar{\Delta}_m = -(T_p T_{p+1} T_{p-n} K). \quad (8.11)$$

Вычисляя инвариант $\bar{\Delta}_m$ в координатах (8.9), получим формулу (8.8). Теорема доказана.

Рассмотрим два базовых контура Q_p^n и $Q_p^{n+1} = T_p T_{p+1} A_{p-n-1}^{n+2} A_{p-n-1}^{n+1}$. Для точек T_p , A_{p-n}^n , A_{p-n-1}^{n+1} , K_p прямой k_p выполняется условие

$$(T_p A_{p-n}^n A_{p-n-1}^{n+1} K_p) = -n < 0.$$

Следовательно, точка A_{p-n-1}^{n+1} принадлежит отрезку $T_p A_{p-n}^n$.

Согласно [9; теорема 2, 8)] прямая k_{p-n-1} разбивает контур Q_p^n на два не имеющих общих внутренних точек простых 4-контура

$$Q_p^{n+1}, \quad A_{p-n-1}^{n+2} A_{p-n}^{n+1} A_{p-n}^n A_{p-n-1}^{n+1}$$

так, что $\text{int } Q_p^n = \text{int } Q_p^{n+1} \cup \text{int}(A_{p-n-1}^{n+2} A_{p-n}^{n+1} A_{p-n}^n A_{p-n-1}^{n+1})$. Таким образом,

$$(\forall p, n) \quad \text{int } Q_p^{n+1} \subset \text{int } Q_p^n.$$

§ 9. Простые разбиения, инвариантные при орициклических поворотах

Сохраним обозначения из § 8. На 3-(1)-контурах

$$J_p = T_{p+1} T_p K_p A_p^1 \quad (9.1)$$

зададим некоторое простое разбиение $\mathcal{H}$ (рис. 5).

Контур (9.1), не имея общих внутренних точек, покрывают дополнение до плоскости $\hat{H}$ орицикла ω_1 первого порядка орициклической ломаной oL . Неразбитыми на $\hat{H}$ остаются полуковалианы V_p вершин A_p^1 первого порядка o -ломаной, принадлежащие замыканию орицикла ω_1 .

На отрезках $T_p T_{p+1}$ выберем точки U_p^1 так, чтобы

$$(T_p T_{p+1} U_p^1 K) = \mu_1, \quad \mu_1 \in \mathbb{R}, \quad \mu_1 < 0. \quad (9.2)$$

Изотропные прямые u_p^1 , проходящие через точки U_p^1 соответственно, разбивают полуковалиану V_p на две полуковалианы и 3-(1)-контур. Каждую из полученных полуковалиан разобьем изотропной прямой u_p^{2i} , $i = 1, 2$, проходящей через точку U_p^{2i} , такую, что

$$(T_p U_p^1 U_p^{21} K) = \mu_{21}, \quad (U_p^1 T_{p+1} U_p^{22} K) = \mu_{22}, \quad \mu_{2i} \in \mathbb{R}, \quad \mu_{2i} < 0, \quad (9.3)$$

на две полуковалианы и 3-(1)-контур.

Рис. 5. Черепичное разбиение, порожденное ломаной oL

Процесс разбиения полуковалиан продолжим неограниченно. На каждом отсеченном 3-(1)-контуре построим разбиение $\mathcal{H}$. Получим черепичное разбиение плоскости $\hat{H}$, в силу равенств (8.3), (9.2), (9.3) инвариантное при орициклическом повороте f .

Для построения почти черепичных разбиений, порожденных o -ломаной, от каждого 3-(1)-контура J_p (9.1) отсечем базовый 4-контур Q_p^n (8.6) некоторого порядка n . Получим 3-(1)-контур $J_p^n = A_{p-n}^{n+1} A_{p-n}^n K_p A_p^1$. Полуковалианы вершин первого порядка ломаной oL разобьем, как при построении черепичного разбиения. На всех 3-(1)-контурах зададим простое разбиение, инвариант ячейки которого равен $\bar{\Delta}_n$ (8.8).

Итак, доказана основная теорема о разбиениях плоскости $\hat{H}$, порожденных o -ломаной.

ТЕОРЕМА 16. *Орициклическая ломаная порождает черепичное разбиение плоскости $\hat{H}$ с произвольной ячейкой и счетное семейство почти черепичных разбиений, ячейкой которых является базовый 4-контур заданного порядка o -ломаной.*

Список литературы

- [1] Г. С. М. Коксетер, У. О. Дж. Мозер, *Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп*, Наука, М., 1980; пер. с англ.: H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser, *Generators and relations for discrete groups*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.
- [2] Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман, “Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны”, *Геометрия* – 2, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **29**, ВИНТИ, М., 1988, 147–259; англ. пер.: Eh. B. Vinberg, O. V. Shvartsman, “Discrete groups of motions of spaces of constant

- curvature", *Geometry. II: Spaces of constant curvature*, Encyclopaedia Math. Sci., **29**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 139–248.
- [3] Н. П. Долбиллин, В. С. Макаров, "Теорема о продолжении в теории правильных разбиений и ее приложения", *Дискретная геометрия и геометрия чисел*, Тр. МИАН, **239**, Наука, М., 2002, 146–169; англ. пер.: N. P. Dolbilin, V. S. Makarov, "Extension theorem in the theory of isohedral tilings and its applications", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **239** (2002), 136–158.
- [4] В. С. Макаров, "Геометрические методы построения дискретных групп движений пространства Лобачевского", *Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом.*, **15**, ВИНТИ, М., 1983, 3–59; англ. пер.: V. S. Makarov, "Geometric methods of constructing discrete groups of motions of Lobachevskii space", *J. Soviet Math.*, **29**:5 (1985), 1519–1550.
- [5] П. В. Макаров, "О кельвиновских разбиениях трехмерного пространства Лобачевского правильными многогранниками", *УМН*, **45**:1 (1990), 179–180; англ. пер.: V. S. Makarov, "Kelvin decompositions of three-dimensional Lobachevskii space by regular polyhedra", *Russian Math. Surveys*, **45**:1 (1990), 216–217.
- [6] В. С. Макаров, "Об одном неправильном разбиении n -мерного пространства Лобачевского конгруэнтными многогранниками", *Дискретная геометрия и топология*, Тр. МИАН СССР, **196**, Наука, М., 1991, 93–96; англ. пер.: V. S. Makarov, "On a nonregular partitioning of n -dimensional Lobachevskij space by congruent polytopes", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **196** (1992), 103–106.
- [7] Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский, *Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства*, МЦНМО, М., 2003.
- [8] Б. А. Розенфельд, *Неевклидовы пространства*, Наука, М., 1969.
- [9] Л. Н. Ромакина, "Конечные замкнутые $3(4)$ -контуры расширенной гиперболической плоскости", *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **10**:3 (2010), 14–26.
- [10] Л. Н. Ромакина, "Разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны, порожденные правильным n -контуром", *Теория относительности, гравитация и геометрия*, Труды межд. конф. "Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation" (Казань, 2010), Казан. ун-т, Казань, 2010, 227–232.
- [11] Л. Н. Ромакина, "Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны, порожденные h -ломаной", *Современные проблемы математики и механики*, **6**, №3, Изд-во Моск. ун-та, М., 2011, 131–138.
- [12] Л. Н. Ромакина, "Инвариант группы симметрий эквидистанты расширенной гиперболической плоскости", *Сб. науч. тр. Механика. Математика*, Изд-во Саратов. ун-та, Саратов, 2009, 58–60.
- [13] Л. Н. Ромакина, "К вопросу изложения гиперболической геометрии в рамках дисциплины специализации", *Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки*, т. 8, Сб. научно-метод. трудов, Наука, Саратов, 2010, 52–60.
- [14] Л. Н. Ромакина, *Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей*, Научная книга, Саратов, 2008.

Л. Н. Ромакина (L. N. Romakina)
 Саратовский государственный университет
 им. Н. Г. Чернышевского
 E-mail: romakinaln@mail.ru

Поступила в редакцию
 25.12.2010 и 18.04.2012