Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Нессонов, Представления $\mathfrak{S}_\infty$, допустимые относительно подгрупп Юнга, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 3, 127–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7837>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:36:36

УДК 517.986

Н. И. Нессонов

Представления $\mathfrak{S}_\infty$, допустимые относительно подгрупп Юнга

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, а $\mathfrak{S}_\infty$ – множество конечных перестановок $\mathbb{N}$. Для разбиения $\mathbb{N}$ множества $\mathbb{N}$ на бесконечные части $A_1, A_2, \dots$ обозначим через $\mathfrak{S}_\Pi$ подгруппу в $\mathfrak{S}_\infty$, элементы которой оставляют каждое из A_j инвариантным. Положим $\mathfrak{S}_\infty^{(N)} = \{s \in \mathfrak{S}_\infty : s(i) = i \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, N\}$. Факторпредставление T группы $\mathfrak{S}_\infty$ называется Π -допустимым, если для некоторого N оно содержит нетривиальное единичное подпредставление подгруппы $\mathfrak{S}_\Pi \cap \mathfrak{S}_\infty^{(N)}$. В статье получена полная классификация Π -допустимых факторпредставлений группы $\mathfrak{S}_\infty$.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: факторпредставление, подгруппа Юнга, Π -допустимое представление.

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел и $\mathfrak{S}_\infty$ – множество конечных¹ перестановок $\mathbb{N}$. Эта группа на данный момент есть наиболее изученный представитель класса “диких” групп, для которых классическая задача описания множества всех неприводимых представлений является необозримой в том смысле, что на нем не существует структуры стандартного борелевского пространства. А неоднозначность разложения регулярного представления $\mathfrak{S}_\infty$ на неприводимые приводит к мысли, что в этом случае вместо неприводимых следует рассматривать факторпредставления в смысле фон Неймана. Это было высказано Э. Тома (см. [1]) и подтверждено его замечательными результатами по классификации факторпредставлений типа Π_1 группы $\mathfrak{S}_\infty$. Если T – такое представление, а tr – нормированный на единицу след на факторе, порожденном операторами из $T(\mathfrak{S}_\infty)$, то функция τ , определяемая формулой $\tau(s) = \text{tr}(T(s))$, $s \in \mathfrak{S}_\infty$, называется *неразложимым* характером и удовлетворяет условию *инвариантности*, или *центральности*

$$\tau(s) = \tau(tst^{-1}) \quad \text{для всех } s, t \in \mathfrak{S}_\infty. \quad (1.1)$$

Согласно Э. Тома, характер на группе G – это положительно определенная функция f , равная единице на единице группы и удовлетворяющая приведенному выше условию центральности. Алгебра Неймана, порожденная операторами представления π_f , получаемого по f с помощью ГНС-конструкции, является прямым интегралом факторов типа Π_1 . При этом крайним точкам выпуклого множества характеров (неразложимым характерам) соответствуют факторпредставления.

¹ $s \in \mathfrak{S}_\infty$, если $s(i) = i$ для всех достаточно больших i .

Важный класс неприводимых представлений группы $\mathfrak{S}_\infty$, близких по своим свойствам к классическим и названных ручными, был введен Либерманом. Ручные представления выделяются тем условием, что содержат для некоторого N единичное подпредставление подгруппы $\mathfrak{S}_\infty^{(N)} = \{s \in \mathfrak{S}_\infty : s(i) = i \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, N\}$. В частности, они имеют тип I. Понятно, что каждое ручное неприводимое представление можно получить, применяя ГНС-конструкцию к положительно определенной функции f , удовлетворяющей для некоторого натурального N условию двухсторонней инвариантности относительно подгруппы $\mathfrak{S}_\infty^{(N)}$:

$$f(s) = f(t_1 s t_2) \quad \text{при всех } s \in \mathfrak{S}_\infty, t_1, t_2 \in \mathfrak{S}_\infty^{(N)}.$$

Для ручных представлений в работах [2] и [3] (см. также [4]) разными методами была построена полная классификация. Эти представления – один из примеров допустимых представлений, введенных Г. И. Ольшанским для большого класса бесконечномерных аналогов классических групп.

Заметим, что предложенное Г. И. Ольшанским понятие допустимости представления T группы G относится к паре (G, K) , где K – подгруппа группы G . Суть его в том, что сужение T_K представления T группы G на подгруппу K должно иметь “хорошие” свойства. Обычно они сводятся к условиям существования некоторых инвариантов. В свою очередь последние, как правило, эквивалентны определенным топологическим свойствам представления T_K .

Выделим класс представлений, для которых получена классификация в этой работе.

Рассмотрим разбиение $\Pi = (\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n)$ множества $\mathbb{N}$ на дизъюнктные подмножества, где $|\mathbb{A}_i| = \infty$ для всех i , а n может быть бесконечным. Положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_\Pi &= \{s \in \mathfrak{S}_\infty \mid s(\mathbb{A}_i) = \mathbb{A}_i \text{ для всех } i\}, \\ \mathfrak{S}_N &= \{s \in \mathfrak{S}_\infty : s(i) = i \text{ для всех } i = N + 1, N + 2, \dots\}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathfrak{A}_\Pi$ класс унитарных факторпредставлений группы $\mathfrak{S}_\infty$, удовлетворяющих условию: если $T \in \mathfrak{A}_\Pi$ действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_T$, то существует $N \in \mathbb{N}$, для которого найдется ненулевой вектор $\xi \in \mathcal{H}_T$ такой, что $T(s)\xi = \xi$ для всех $s \in \mathfrak{S}_\Pi \cap \mathfrak{S}_\infty^{(N)}$. Представления из $\mathfrak{A}_\Pi$ будем называть Π -допустимыми. В $\mathfrak{A}_\Pi$ выделим класс $\mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$ сферических представлений условием

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}} &= \{T \in \mathfrak{A}_\Pi : \text{в } \mathcal{H}_T \text{ существует ненулевой вектор } \xi, \\ &\quad \text{для которого } T(s)\xi = \xi \text{ при всех } s \in \mathfrak{S}_\Pi\}. \end{aligned}$$

В определении допустимости (сферичности) используется пара (группа $\mathfrak{S}_\infty$, подгруппа $\mathfrak{S}_\Pi$). Поэтому удобно говорить о допустимом или сферическом представлении пары $(\mathfrak{S}_\infty, \mathfrak{S}_\Pi)$.

Традиционное определение Π -допустимости представления можно дать и в общем случае, отказавшись от факторности. Для этого в пространстве $\mathcal{H}_T$ рассмотрим подпространства

$$\mathcal{H}_n = \{\eta \in \mathcal{H}_T : T(s)\eta = \eta \text{ для всех } s \in \mathfrak{S}_\infty^{(n)} \cap \mathfrak{S}_\Pi\}.$$

Тогда Π -допустимость T – это плотность $\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{H}_n$ в $\mathcal{H}_T$. Нетрудно убедиться, что для факторпредставлений эти определения эквивалентны.

Опираясь на полученную в этой работе классификацию Π -допустимых факторпредставлений, можно показать, что компоненты произвольного Π -допустимого представления – также Π -допустимые представления. А так как Π -допустимые факторпредставления имеют тип I (следствие 4), то легко понять, что Π -допустимое представление однозначно разлагается на неприводимые.

Если разбиение Π состоит из одного блока, то класс Π -допустимых представлений совпадает с множеством ручных, которые изучались в [2] и [3]. Теория допустимых представлений пары $(\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty, \text{diag } \mathfrak{S}_\infty)$, где $\text{diag } \mathfrak{S}_\infty = \{(s, s) \in \mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty\}$, развитая Г. И. Ольшанским в [5] и А. Ю. Окуньковым в [6], [7], содержит в ее сферической части классификацию конечных характеров Э. Тома (см. [1]). Соответствующие им Π_1 -факторпредставления получаются сужением неприводимого сферического представления группы $\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty$ на один из сомножителей $\mathfrak{S}_\infty \times e$ или $e \times \mathfrak{S}_\infty$, где e – единица группы $\mathfrak{S}_\infty$.

Весьма интересной является аналогичная задача для пары $(\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty, \text{diag } \mathfrak{S}_\Pi)$, которая приводит к новым факторпредставлениям для $\mathfrak{S}_\infty$ уже полуконечного (Π_∞) и чисто бесконечного (III) типа. В частности, сферические функции пары $(\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty, \text{diag } \mathfrak{S}_\Pi)$ при ограничении на компоненты $\mathfrak{S}_\infty \times e$ или $e \times \mathfrak{S}_\infty$ определяют положительно определенные функции ψ на $\mathfrak{S}_\infty$, которые удовлетворяют условию $\mathfrak{S}_\Pi$ -центральности, или $\mathfrak{S}_\Pi$ -инвариантности

$$\psi(st) = \psi(ts) \quad \text{для всех } s \in \mathfrak{S}_\infty, t \in \mathfrak{S}_\Pi. \quad (1.2)$$

В случае $\Pi = (\mathbb{N})$ получается обычное условие центральности для следа (1.1).

Но в этой работе мы ограничиваемся лишь детальным изучением множества $\mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$ сферических представлений пары $(\mathfrak{S}_\infty, \mathfrak{S}_\Pi)$ и получаем их полную классификацию. Представления из $\mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$ имеют тип I (следствие 1), а ГНС-конструкция устанавливает взаимно однозначное соответствие между представлениями $T \in \mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$ и множеством положительно определенных функций φ на $\mathfrak{S}_\infty$, удовлетворяющих условиям двухсторонней инвариантности (ср. с (1.2)) и нормировки

$$\varphi(rst) = \varphi(s) \quad \text{для всех } s \in \mathfrak{S}_\infty, r, t \in \mathfrak{S}_\Pi; \quad \varphi(e) = 1 \quad (1.3)$$

(см. предложение 6). Это множество характеризуется свойством мультипликативности, которое точно сформулировано в теореме 3. Понятно, что при $\Pi = (\mathbb{N})$ сферические представления становятся единичными.

Опираясь на описание класса $\mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$, далее мы получаем классификацию общих Π -допустимых факторпредставлений (см. теорему 7, предложения 11 и 12, теорему 9). В частности, они также имеют тип I (следствие 4). Отметим, что для двухблочных подгрупп Юнга классификация допустимых представлений была получена Г. И. Ольшанским (не опубликовано).

Логика настоящей работы и возможного ее развития следует пути, наметченному цепочкой результатов А. Либермана [2], Г. И. Ольшанского [5] и А. Ю. Окунькова [6]. А именно, после классификации Либерманом ручных представлений группы $\mathfrak{S}_\infty$ появилась статья Г. И. Ольшанского, где были введены и изучены допустимые представления пары $(\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty, \text{diag } \mathfrak{S}_\infty)$. Классификация неприводимых допустимых представлений была завершена А. Ю. Окуньковым. Одновременно им было найдено еще одно доказательство классической теоремы Э. Тома. Более того, ограничение допустимых представлений пары $(\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty, \text{diag } \mathfrak{S}_\infty)$ на сомножители дает, кроме представлений Тома, ранее не известные факторпредставления полуконечного типа (см. [8], [9]).

Таким образом, классификацию Π -допустимых представлений, которой посвящена эта работа, естественно рассматривать как аналог первого звена (ручные представления; Либерман) описанной цепочки. Следующим этапом может стать изучение сферических представлений пары $(\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty, \text{diag } \mathfrak{S}_\Pi)$, а далее – допустимых.

Мотивацией этих исследований были также статьи А. М. Вершика и Н. В. Цилевич [10], [11], в которых изучались представления $\mathfrak{S}_\infty$, индуцированные с единичного представления подгрупп Юнга. Понятно, что они содержат сферические компоненты. Предлагаемая в § 4 конструкция полного набора сферических представлений совпадает в случае взаимно ортогональных векторов из набора данных с индуцированием с единичного представления подгруппы $\mathfrak{S}_\Pi$.

Важной особенностью представления, которое строится согласно конструкции Гельфанда–Найма–Сигала (ГНС) по положительно определенной функции ψ , удовлетворяющей (1.2), является существование некоторых асимптотических операторов, введенных А. Ю. Окуньковым, которые успешно использовались им в [6], [7] для классификации допустимых представлений пары $(\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty, \text{diag } \mathfrak{S}_\infty)$. А именно, если $(k \ n)$ – транспозиция, а π_ψ – ГНС-представление, то при условии (1.2) существуют слабые пределы

$$\mathcal{O}_k^{(j)} = w\text{-}\lim_{A_j \ni n \rightarrow \infty} \pi_\psi((k \ n)).$$

Из этого определения видно, что при разных k семейства операторов $\{\mathcal{O}_k^{(j)}\}_{j=1}^n$ унитарно эквивалентны. Заметим, что пара $(\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty, \text{diag } \mathfrak{S}_\infty)$ соответствует разбиению с одним блоком ($n = 1$), а соответствующее семейство $\{\mathcal{O}_k^{(j)}\}_{j=1}^n$ состоит из одного оператора $\mathcal{O}_k$. В работах [6], [7] было установлено, что сферическое представление пары $(\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty, \text{diag } \mathfrak{S}_\infty)$ (характер Тома группы $\mathfrak{S}_\infty$) однозначно восстанавливается по спектральным параметрам оператора $\mathcal{O}_k$. В § 3 мы покажем, что операторы $\mathcal{O}_k^{(j)}$ в случае (1.3) являются проекторами (предложение 7) и однозначно определяют представление из $\mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$ (предложение 6).

В более общем случае (1.2), который не рассматривается в этой работе, при фиксированном k семейство $\{\mathcal{O}_k^{(j)}\}_{j=1}^n$ состоит из n самосопряженных операторов с дискретным спектром в интервале $[-1, 1]$, которые удовлетворяют некоторым спектральным и коммутационным условиям. Весьма интересным является вопрос о классификации $\mathfrak{S}_\Pi$ -центральных состояний на $\mathfrak{S}_\infty$ в терминах таких семейств. Возможные результаты можно будет рассматривать как обобщение подхода А. Ю. Окунькова (см. [6]) к классификации характеров Тома.

1.1. Структура работы. В § 2 приведены ключевые результаты работы. Предложена конструкция примеров Π -допустимых представлений и даны формулировки классификационных теорем.

Изучению сферических представлений пары $(\mathfrak{S}_\infty, \mathfrak{S}_\Pi)$ посвящен § 3. В предложении 6 доказывается, что циклическое представление $T \in \mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$ содержит единичное подпредставление подгруппы $\mathfrak{S}_\Pi$ с единичной кратностью. Следовательно, T имеет тип I. В предложении 7 определяется асимптотический инвариант представлений – семейство проекторов $\{P_i^{(k)}\}_{k=1}^n$. В теореме 4 получена формула для сферической функции представления в терминах $\{P_i^{(k)}\}_{k=1}^n$.

Конструктивное доказательство классификации представлений из $\mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$ содержится в п. 3.4. Здесь произвольное представление $T \in \mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$ мы с помощью унитарных преобразований приводим к конкретной реализации (теорема 7).

Конструкция примеров Π -допустимых представлений дана в § 4.

В § 5 изложено доказательство полноты списка Π -допустимых факторпредставлений, построенных в § 4. Пункт 3.4 содержит конструктивное доказательство классификации представлений из $\mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$. Оно заключается в приведении с помощью унитарных преобразований произвольного представления $T \in \mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$ к конкретной реализации (теорема 7).

В § 6 обсуждаются условия унитарной эквивалентности Π -допустимых факторпредставлений.

1.2. Квазиэквивалентность. При изучении факторпредставлений иногда оказывается полезным понятие квазиэквивалентности. Два представления T_1 и T_2 группы G квазиэквивалентны, если существует изоморфизм θ алгебры Неймана, порожденной операторами $T_1(G)$, на w^* -алгебру, порожденную операторами $T_2(G)$, такой, что $\theta(T_1(g)) = T_2(g)$ для всех $g \in G$. В случае факторпредставлений типа I квазиэквивалентность представлений означает, что они кратны одному и тому же неприводимому. Понятно, что свойство представления быть Π -допустимым инвариантно относительно унитарной эквивалентности: унитарно эквивалентные представления T_1 и T_2 оба или Π -допустимы, или нет. Почти очевидным является следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если факторпредставления T_1 и T_2 группы $\mathfrak{S}_\infty$ квазиэквивалентны и одно из них Π -допустимо, то второе также Π -допустимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{H}_{T_i}$ гильбертово пространство, где действует T_i . Пусть $T_i(\mathfrak{S}_\infty)''$ – алгебра Неймана, порожденная операторами $T_i(\mathfrak{S}_\infty)$, а θ – изоморфизм фактора $T_1(\mathfrak{S}_\infty)''$ на $T_2(\mathfrak{S}_\infty)''$, для которого $\theta(T_1(g)) = T_2(g)$ при всех $g \in \mathfrak{S}_\infty$. Если T_1 – допустимое представление, то найдется натуральное n , для которого

$$\mathcal{H}_{T_1}^{(n)} = \{\eta \in \mathcal{H}_{T_1} : T(s)\eta = \eta \text{ для всех } s \in \mathfrak{S}_\infty^{(n)} \cap \mathfrak{S}_\Pi\} \neq 0.$$

Пусть E – оператор проектирования на $\mathcal{H}_{T_1}^{(n)}$. Понятно, что E – предел в сильной операторной топологии операторов

$$E_N = |\mathfrak{S}_\infty^{(n)} \cap \mathfrak{S}_\Pi \cap \mathfrak{S}_N|^{-1} \sum_{s \in \mathfrak{S}_\infty^{(n)} \cap \mathfrak{S}_\Pi \cap \mathfrak{S}_N} T_1(s),$$

где $|S|$ обозначает количество элементов множества S . Следовательно, $\theta(E)$ является пределом убывающей цепочки проекторов

$$\theta(E_N) = |\mathfrak{S}_\infty^{(n)} \cap \mathfrak{S}_\Pi \cap \mathfrak{S}_N|^{-1} \sum_{s \in \mathfrak{S}_\infty^{(n)} \cap \mathfrak{S}_\Pi \cap \mathfrak{S}_N} T_2(s).$$

Отсюда получаем, что $\theta(E)$ – проектор на подпространство векторов, неподвижных относительно операторов из $T_2(\mathfrak{S}_\infty^{(n)} \cap \mathfrak{S}_\Pi)$. Так как $\theta(E) \neq 0$, то наше утверждение доказано.

Автор благодарен рецензентам за большое число принципиальных замечаний.

§ 2. Основные результаты работы

В этом параграфе сформулируем основные результаты работы и опишем конструкции примеров Π -допустимых представлений. Как и ранее, $\Pi = (\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n)$ – разбиение натурального ряда на конечное или бесконечное число бесконечных частей, $\mathfrak{S}_\Pi$ – соответствующая подгруппа Юнга. Исходными данными для построения Π -допустимых представлений являются гильбертово пространство $\mathbf{H}$ и отображение $u: \mathbb{N} \mapsto \mathbf{H}$, удовлетворяющее условиям:

- а) если a и b принадлежат одной и той же части $\mathbb{A}_j$ разбиения Π , то $u(a) = u(b)$;
- б) если a и b лежат в разных частях разбиения Π , то $u(b) \notin \mathbb{C}u(a)$;
- с) $\|u(n)\| = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

2.1. Результаты о представлениях из $\mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$. При конструировании всех примеров сферических представлений пары $(\mathfrak{S}_\infty, \mathfrak{S}_\Pi)$ можно ограничиться данными, для которых множество $\{u(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ тотально в $\mathbf{H}$.

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbf{H}_u^{\otimes \infty}$, являющееся пополнением комплексной линейной оболочки векторов вида $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_k \otimes \dots$ таких, что $v_k = u(k)$ при всех достаточно больших k , в топологии, определяемой скалярным произведением:

$$(f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_k \otimes \dots, g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_k \otimes \dots) = \prod_{j=1}^{\infty} (f_j, g_j).$$

Представление $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ зададим согласно формуле

$$T_{\mathbf{H}}^{(u)}(s)(f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_k \otimes \dots) = f_{s^{-1}(1)} \otimes f_{s^{-1}(2)} \otimes \dots \otimes f_{s^{-1}(k)} \otimes \dots, \quad s \in \mathfrak{S}_\infty.$$

Если $\xi^{(u)} = u(1) \otimes u(2) \otimes \dots$, то $T_{\mathbf{H}}^{(u)}(s)\xi^{(u)} = \xi^{(u)}$ при всех $s \in \mathfrak{S}_\Pi$.

Представление $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ разлагается в прямую сумму неприводимых. Сферическое неприводимое (главное) представление пары $(\mathfrak{S}_\infty, \mathfrak{S}_\Pi)$ получается сужением $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ на подпространство $[T_{\mathbf{H}}^{(u)}(\mathfrak{S}_\infty)\xi^{(u)}]$, являющееся замыканием линейной оболочки векторов $T_{\mathbf{H}}^{(u)}(\mathfrak{S}_\infty)\xi^{(u)}$. Обозначим эту главную компоненту через $T_c^{(u)}$. В предложении 10 мы даем необходимые и достаточные условия унитарной эквивалентности представлений $T_c^{(u)}$ и $T_c^{(\tilde{u})}$ при разных u и $\tilde{u}$, связанных с одним и тем же разбиением Π (см. условия а)–с)). Полное описание класса $\mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$ будет дано в § 3, оно содержится в следующем утверждении, которое является менее “технической” формой теоремы 7.

ТЕОРЕМА 1. *Любое представление $T \in \mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$ квазиэквивалентно $T_c^{(u)}$ для некоторой функции $\tilde{u}$ с тотальным в $\mathbf{H}$ множеством значений.*

2.2. Разложение представления $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ на неприводимые. Оставшиеся (помимо главного) неприводимые компоненты представления $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ также являются сферическими, но для других пар $(\mathfrak{S}_\infty, \mathfrak{S}_{\tilde{\Pi}})$. Можно сформулировать необходимые и достаточные условия на разбиение $\tilde{\Pi}$, при которых $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ содержит соответствующую ему неприводимую компоненту. Но перед этим мы остановимся на двух крайних случаях.

Первый из них вытекает из общего предложения 12.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Обозначим через $p_j^{(u)}$ ортогональный проектор на одномерное подпространство $\mathcal{C}u(a)$, где $a \in \mathbb{A}_j$. Если w^* -алгебра, порожденная проекторами $p_j^{(u)}$, где $j = 1, 2, \dots, n$, неприводима, то $T_{\mathcal{C}}^{(u)} = T_{\mathbf{H}}^{(u)}$. То есть вектор $\xi^{(u)}$ является циклическим для представления $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$.

Во втором случае предположим, что проекторы $p_j^{(u)}$ попарно ортогональны. Для описания неприводимых компонент введем на множестве разбиений отношение эквивалентности. Скажем, что разбиение $\check{\Pi} = (\check{\mathbb{A}}_1, \dots, \check{\mathbb{A}}_n)$ эквивалентно исходному разбиению $\Pi = (\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n)$ (обозначение: $\check{\Pi} \sim \Pi$), если существует натуральное N , для которого

$$\mathbb{A}_i \cap \{N+1, N+2, \dots\} = \check{\mathbb{A}}_i \cap \{N+1, N+2, \dots\} \quad \text{при всех } i = 1, 2, \dots, n.$$

Положим $\mathbb{A}_i^{(N)} = \mathbb{A}_i \cap \{1, 2, \dots, N\}$. Если $\check{\Pi} \sim \Pi$, то для всех достаточно больших K и L имеют место равенства

$$|\check{\mathbb{A}}_j^{(K)}| - |\mathbb{A}_j^{(K)}| = |\check{\mathbb{A}}_j^{(L)}| - |\mathbb{A}_j^{(L)}|, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, корректно определяется целочисленный вектор

$$w(\check{\Pi}) = \lim_{L \rightarrow \infty} (|\check{\mathbb{A}}_1^{(L)}| - |\mathbb{A}_1^{(L)}|, |\check{\mathbb{A}}_2^{(L)}| - |\mathbb{A}_2^{(L)}|, \dots, |\check{\mathbb{A}}_n^{(L)}| - |\mathbb{A}_n^{(L)}|),$$

у которого конечное число ненулевых координат с нулевой суммой. Он называется u -весом разбиения $\check{\Pi}$ (см. определение 1). Зафиксируем целочисленный n -мерный вектор $\mathfrak{w}$, у которого конечное число ненулевых координат с нулевой суммой, и обозначим через $\mathcal{S}_{\mathfrak{w}}$ множество разбиений $\check{\Pi}$, эквивалентных Π , таких, что $w(\check{\Pi}) = \mathfrak{w}$. Пусть $\mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})}$ — подпространство в $\mathbf{H}_u^{\otimes \infty}$, порожденное векторами $\xi_{\check{\Pi}}$ вида $\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \in \mathbf{H}_u^{\otimes \infty}$ такими, что $\xi_k = u(a)$ при $k \in \check{\mathbb{A}}_j$, где $a \in \check{\mathbb{A}}_j \cap \mathbb{A}_j$. Следующее утверждение является главной содержательной частью более общего предложения 11.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Подпространство $\mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})}$ инвариантно по отношению к операторам из $T_{\mathbf{H}}^{(u)}(\mathfrak{S}_\infty)$, а сужение $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ на $\mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})}$ неприводимо.

В общем случае, который рассмотрен в п. 4.3, w^* -алгебра $\mathfrak{U}$, порожденная $p_u^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, n$, имеет нетривиальный центр $\mathcal{C}(\mathfrak{U})$. Так как $p_u^{(j)}$ — одномерный проектор для любого j , то в $\mathcal{C}(\mathfrak{U})$ существует семейство $\{E_l\}_{l=1}^i$, $i \leq n$, минимальных попарно ортогональных проекторов со свойствами:

- (i) при всех $l = 1, 2, \dots, i$ алгебры $E_l \mathfrak{U} E_l$ неприводимы;
- (ii) для каждого $p_u^{(j)}$ существует единственный проектор $E_{l(j)}$, удовлетворяющий условию $p_u^{(j)} E_{l(j)} = p_u^{(j)}$.

По разбиению $\check{\Pi} = (\check{\mathbb{A}}_1, \dots, \check{\mathbb{A}}_n)$, эквивалентному $\Pi = (\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n)$, определим новое разбиение $\check{\Pi}^{(c)} = (\check{\mathbb{B}}_1, \dots, \check{\mathbb{B}}_i)$ (укрупнение разбиения $\check{\Pi}$), полагая $\check{\mathbb{B}}_k = \bigcup_{j: l(j)=k} \check{\mathbb{A}}_j$. Понятно, что $\check{\Pi}^{(c)} \sim \Pi^{(c)}$. Определим cu -вес разбиения $\check{\Pi} = (\check{\mathbb{A}}_1, \dots, \check{\mathbb{A}}_n)$ как

$$w^{(c)}(\check{\Pi}) = \lim_{L \rightarrow \infty} (|\check{\mathbb{B}}_1^{(L)}| - |\mathbb{B}_1^{(L)}|, |\check{\mathbb{B}}_2^{(L)}| - |\mathbb{B}_2^{(L)}|, \dots, |\check{\mathbb{B}}_i^{(L)}| - |\mathbb{B}_i^{(L)}|).$$

Подпространство $\mathbf{H}_{cu}^{(w)}$ по аналогии с $\mathbf{H}_u^{(w)}$ порождено векторами вида $\xi_{\check{\Pi}}$, где $\check{\Pi}$ пробегает множество всех разбиений, эквивалентных Π , на которых cu -вес принимает значение $w^{(c)}(\check{\Pi}) = w$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Сужение $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ на $\mathbf{H}_{cu}^{(w)}$ неприводимо (см. предложение 12). В частности, если w^* -алгебра, порожденная проекторами $p_u^{(j)}$, неприводима, то представление $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ также неприводимо (см. предложение 2).

2.3. Описание общих Π -допустимых представлений. При условии тотальности системы векторов $\{u(j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ в $\mathbf{H}$ каждая неприводимая компонента представления $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ содержит ненулевые векторы, неподвижные относительно операторов из $T_{\mathbf{H}}^{(u)}(\mathfrak{S}_{\check{\Pi}})$, где $\check{\Pi}$ – некоторое разбиение, эквивалентное исходному разбиению Π . Для того чтобы в $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ были компоненты, которые не являются сферическими по отношению к любым подгруппам $\mathfrak{S}_{\check{\Pi}}$, где $\check{\Pi}$ пробегает множество эквивалентных Π разбиений, надо отказаться от условия тотальности $\{u(j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ в $\mathbf{H}$. В этом случае $\{u(j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ порождает собственное подпространство $H \subset \mathbf{H}$.

Пусть $\mathfrak{R}^{(k)}$ – действие группы $\mathfrak{S}_k$ на $(\mathbf{H} \ominus H)^{\otimes k}$ перестановками компонент, а λ – диаграмма Юнга из k клеток. Если число строк диаграммы λ не превосходит размерности $\mathbf{H} \ominus H$, то в $(\mathbf{H} \ominus H)^{\otimes k}$ существует $\mathfrak{R}^{(k)}(\mathfrak{S}_k)$ -инвариантное подпространство $\mathcal{H}_{\lambda}$ такое, что сужение $\mathfrak{R}^{(k)}$ на $\mathcal{H}_{\lambda}$ унитарно эквивалентно неприводимому представлению, определяемому λ . Рассмотрим вектор

$$\xi_{\Pi}^{\lambda} = \eta \otimes u(k+1) \otimes u(k+2) \otimes \cdots, \quad \eta \in \mathcal{H}_{\lambda},$$

и обозначим через $\mathbf{H}_u^{(\lambda \ 0)}$ подпространство $[T_{\mathbf{H}}^{(u)}(\mathfrak{S}_{\infty})\xi_{\Pi}^{\lambda}]$. Пусть $T_u^{(\lambda \ 0)}$ – сужение $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ на $\mathbf{H}_u^{(\lambda \ 0)}$. (Комментарии к следующему утверждению даны в п. 4.4.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Представление $T_u^{(\lambda \ 0)}$ неприводимо.

Полезным инвариантом Π -допустимого представления T является понятие глубины $\text{depth } T$ (см. определение 2). На него существенно опирается техника, которая используется в § 5 для классификации общих Π -допустимых факторпредставлений. Глубина представления T – это наименьшее неотрицательное целое d , для которого можно найти разбиение $\check{\Pi} \sim \Pi$ такое, что существуют ненулевые векторы, неподвижные относительно операторов из $T(\mathfrak{S}_{\infty}^{(d)} \cap \mathfrak{S}_{\check{\Pi}})$.

Нетрудно убедиться, что $\text{depth } T_u^{(\lambda \ 0)} = k$.

Следующее утверждение вытекает из теоремы 9, которая будет приведена в § 5.

ТЕОРЕМА 2. Для произвольного представления T из $\mathfrak{A}_{\Pi}$ существуют диаграмма λ и функция u со свойствами а)–с) такие, что T квазиэквивалентно представлению $T_u^{(\lambda \ 0)}$.

§ 3. Описание сферических представлений

3.1. Общие свойства сферических представлений. Зафиксируем разбиение $\Pi = (\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n)$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на дизъюнктные подмножества такое, что $|\mathbb{A}_i| = \infty$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть T из $\mathfrak{A}_{\Pi}^{\text{sph}}$

действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_T$ и ξ_T – единичный $T(\mathfrak{S}_\Pi)$ -неподвижный вектор из $\mathcal{H}_T$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Если замыкание $[T(\mathfrak{S}_\infty)\xi_T]$ линейной оболочки векторов $T(\mathfrak{S}_\infty)\xi_T$ совпадает с $\mathcal{H}_T$, то*

$$\{\eta \in \mathcal{H}_T : T(s)\eta = \eta \text{ для всех } s \in \mathfrak{S}_\Pi\} = \mathbb{C}\xi_T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует единичный $T(\mathfrak{S}_\Pi)$ -неподвижный вектор η такой, что

$$(\eta, \xi_T) = 0. \quad (3.1)$$

По условиям предложения для произвольного $\varepsilon > 0$ при некотором натуральном n существуют $s_1, s_2, \dots, s_n$ из $\mathfrak{S}_\infty$ и комплексные числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ со свойством

$$\left\| \eta - \sum_{j=1}^n c_j T(s_j) \xi_T \right\| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Зафиксируем растущую последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, для которой можно найти элементы $\omega_k \in \mathfrak{S}_\Pi$, $k \in \mathbb{N}$, со свойствами

$$\omega_k \omega_{k-1}^{-1} \in \mathfrak{S}_{n_{k-1}\infty}, \quad s_j^{(k)} = \omega_k s_j \omega_k \in \mathfrak{S}_{n_k\infty} \quad \text{для всех } j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

Отсюда и из (3.2), учитывая $T(\mathfrak{S}_\Pi)$ -неподвижность векторов η и ξ_T , получаем

$$\left\| \eta - \sum_{j=1}^n c_j T(s_j^{(k)}) \xi_T \right\| < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Эту оценку, полагая $A_k = \sum_{j=1}^n c_j T(s_j^{(k)})$, перепишем в виде

$$1 + (A_k^* A_k \xi_T, \xi_T) - 2 \operatorname{Re}(A_k \xi_T, \eta) < \varepsilon^2. \quad (3.5)$$

Теперь замечаем, что при любых $g, h \in \mathfrak{S}_\infty$ в силу (3.3) последовательность $(A_k T(g) \xi_T, T(h) \xi_T)$ стабилизируется: существует натуральное N такое, что

$$(A_k T(g) \xi_T, T(h) \xi_T) = (A_l T(g) \xi_T, T(h) \xi_T) \quad \text{при всех } k, l \geq N.$$

Отсюда и из цикличности ξ_T вытекает существование слабого предела

$$A = w\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} A_k. \quad (3.6)$$

Так как T – факторпредставление, то, опираясь на (3.3), получаем, что A – скалярный оператор. А именно,

$$A = \left(\sum_{j=1}^n c_j T(s_j) \xi_T, \xi_T \right) \mathcal{J}, \quad \text{где } \mathcal{J} \text{ – единичный оператор в } \mathcal{H}_T.$$

Отсюда в силу произвольности ε , сравнивая (3.1) и (3.5), получаем противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Представления из $\mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$ имеют тип I.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неприводимое представление $T \in \mathfrak{A}_{\Pi}^{\text{sph}}$ унитарно эквивалентно ГНС-представлению, построенному по сферической функции φ_T , определяемой формулой $\varphi_T(s) = (T(s)\xi_T, \xi_T)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $(m \ k)$ – транспозиция, переставляющая m и k , а $\Pi = (\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n)$ – разбиение множества $\mathbb{N}$ на бесконечные подмножества. Если $T \in \mathfrak{A}_{\Pi}$, то существуют слабые пределы

$$P_m^{(j)} = w\text{-}\lim_{\mathbb{A}_j \ni k \rightarrow \infty} T((m \ k)), \quad (3.7)$$

которые являются ортопроекторами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности мы можем предположить, что в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_T$, где действует T , существует единичный циклический вектор ξ со свойством

$$T(s)\xi = \xi \quad \text{для всех } s \in \mathfrak{S}_{\Pi} \cap \mathfrak{S}_{\infty}^{(N)} \quad \text{при некотором } N \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Теперь зафиксируем произвольные элементы $g, h \in \mathfrak{S}_{\infty}$ и положим

$$M = \min\{i \in \mathbb{N} : g(j) = h(j) = j \text{ для всех } j \geq i\}.$$

Если l, k принадлежат одному и тому же элементу разбиения и, кроме того, $l, k > \max\{M, N\}$, то

$$(T((m \ l))T(g)\xi, T(h)\xi) = (T((m \ k))T(g)\xi, T(h)\xi).$$

Отсюда и из цикличности ξ вытекает существование пределов в (3.7).

Теперь докажем равенство

$$P_m^{(j)} = (P_m^{(j)})^2. \quad (3.9)$$

Для любого $\varepsilon > 0$, опираясь на (3.7), найдем натуральное $K > \max\{M, N\}$ такое, что при всех $k \in \mathbb{A}_j \cap \{i : i > K\}$ имеет место неравенство

$$|((P_m^{(j)})^2 T(g)\xi, T(h)\xi) - (T((m \ k))P_m^{(j)} T(g)\xi, T(h)\xi)| < \varepsilon.$$

Теперь, зафиксировав $k_1 \in \mathbb{A}_j \cap \{i : i > K\}$, укажем натуральное $L > K$ такое, что для всех $l \in \mathbb{A}_j \cap \{i : i > L\}$

$$|((P_m^{(j)})^2 T(g)\xi, T(h)\xi) - (T((m \ k_1))T((m \ l))T(g)\xi, T(h)\xi)| < 2\varepsilon.$$

Так как $(m \ k_1)(m \ l) = (m \ l)(l \ k_1)$ и $l, k_1 > \max\{M, N\}$, то

$$|((P_m^{(j)})^2 T(g)\xi, T(h)\xi) - (T((m \ l))T(g)\xi, T(h)\xi)| < 2\varepsilon.$$

Теперь, замечая, что

$$(T((m \ l))T(g)\xi, T(h)\xi) = (P_m^{(j)} T(g)\xi, T(h)\xi),$$

получаем (3.9). Самосопряженность операторов $P_m^{(j)}$ вытекает из (3.7).

Теперь сформулируем следующее простое, но многократно используемое далее свойство.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для всех $j = 1, 2, \dots, n$ справедливо соотношение $T(s)P_m^{(j)} = P_{s(m)}^{(j)} T(s)$. В частности, если $s(m) = m$, то $P_m^{(j)} T(s) = T(s)P_m^{(j)}$ при всех j .

3.2. Формула для сферической функции.

Для $s \in \mathfrak{S}_\infty$ положим

$$\text{supp } s = \{k \in \mathbb{N} : s(k) \neq k\}.$$

Циклическую подстановку $c \in \mathfrak{S}_\infty$ будем записывать в виде $c = (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_{p(c)})$, где $\{k_i\}_{i=1}^{p(c)} = \text{supp } c$ и $c(k_i) = k_{i+1}$ при $i < p(c)$.

Элементы $t, s \in \mathfrak{S}_\infty$ будем называть *независимыми*, если $\text{supp } s \cap \text{supp } t = \emptyset$.

Обоснование следующего важного утверждения опирается на те же самые соображения, которые использовались в доказательстве предложения 6, и мы его опускаем.

ТЕОРЕМА 3 (теорема мультипликативности). *Пусть φ – положительно определенной функцией на группе $\mathfrak{S}_\infty$, удовлетворяющая при всех $g, h \in \mathfrak{S}_\Pi$ и $s \in \mathfrak{S}_\infty$ условию $\varphi(ghs) = \varphi(s)$, а T_φ – соответствующее ГНС-представление. Для принадлежности T_φ к $\mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$ необходимо и достаточно, чтобы при всех независимых t и s из $\mathfrak{S}_\infty$ выполнялось равенство $\varphi(t \cdot s) = \varphi(t)\varphi(s)$. В частности, если $T_\varphi \in \mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$, то оно неприводимо.*

Аналоги этого утверждения для других бесконечномерных групп можно найти в [4]. Но здесь проще применить метод доказательства подобного утверждения из [12].

Теперь по разбиению $\Pi = (\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n)$ определим функцию i_Π на $\mathbb{N}$ (индикатор разбиения) условием: при $k \in \mathbb{A}_j$ значение $i_\Pi(k)$ равно j .

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $T \in \mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$, φ_T – его сферическая функция и ξ_T – соответствующий единичный циклический вектор. Тогда на цикле $c = (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_{p(c)})$ значение $\varphi_T(c)$ вычисляется по формуле*

$$\varphi_T(c) = (P_{k_1}^{(i_\Pi(k_{p(c)}))}) \cdot P_{k_1}^{(i_\Pi(k_{p(c)-1}))} \dots P_{k_1}^{(i_\Pi(k_2))} \xi_T, \xi_T). \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого k_j зафиксируем растущую последовательность $n_1^{(j)} < n_2^{(j)} < \dots$ из $\mathbb{A}_{i_\Pi(k_j)}$. Так как $c = (k_1 \ k_{p(c)}) \cdot (k_1 \ k_{p(c)-1}) \dots (k_1 \ k_2)$, то из $T(\mathfrak{S}_\Pi)$ -неподвижности вектора ξ_T получаем

$$\begin{aligned} \varphi_T(c) &= (T((k_1 \ n_1^{(p(c))})) \cdot T((k_1 \ k_{p(c)-1})) \dots T((k_1 \ k_2)) \xi_T, \xi_T) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} (T((k_1 \ n_l^{(p(c))})) \cdot T((k_1 \ k_{p(c)-1})) \dots T((k_1 \ k_2)) \xi_T, \xi_T) \\ &\stackrel{(3.7)}{=} (P_{k_1}^{(i_\Pi(k_{p(c)}))}) \cdot T((k_1 \ k_{p(c)-1})) \dots T((k_1 \ k_2)) \xi_T, \xi_T). \end{aligned}$$

Повторяя эти рассуждения для других операторов $T((k_1 \ k_i))$ и учитывая при этом следствие 2, мы приходим к (3.10).

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть T , φ_T , ξ_T такие же, как в теореме 4. Предположим, что существуют j_1 и j_2 , для которых $P_i^{(j_1)} = P_i^{(j_2)}$ при некотором i . Если разбиение $\tilde{\Pi}$ получено из разбиения $\Pi = (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_n)$ с помощью объединения множеств $\mathbb{A}_{j_1}$ и $\mathbb{A}_{j_2}$, то $\varphi_T(tgs) = \varphi_T(g)$ для всех $t, s \in \mathfrak{S}_{\tilde{\Pi}}$ и $g \in \mathfrak{S}_\infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 2 $P_i^{(j_1)} = P_i^{(j_2)}$ при всех i . Поэтому для произвольных $i_1 \in \mathbb{A}_{j_1}$ и $i_2, \tilde{i}_2 \in \mathbb{A}_{j_2}$ имеем

$$\begin{aligned} (T((i_1 \ i_2)) \xi_T, \xi_T) &= (T((i_1 \ i_2)) T((i_2 \ \tilde{i}_2)) \xi_T, T((i_2 \ \tilde{i}_2)) \xi_T) \\ &= \lim_{\mathbb{A}_{j_2} \ni \tilde{i}_2 \rightarrow \infty} (T((i_1 \ \tilde{i}_2)) \xi_T, \xi_T) \stackrel{(3.7)}{=} (P_{i_1}^{(j_2)} \xi_T, \xi_T) = (P_{i_1}^{(j_1)} \xi_T, \xi_T) = (\xi_T, \xi_T). \end{aligned}$$

Следовательно, $T((i_1 \ i_2)) \xi_T = \xi_T$.

3.3. Свойства проекторов $P_i^{(k)}$. Для данного неприводимого представления $T \in \mathfrak{A}_{\Pi}^{\text{sph}}$ рассмотрим w^* -алгебру $\mathcal{U}_i$, порожденную проекторами $\{P_i^{(k)}\}_{k=1}^n$, где n – количество частей разбиения Π .

ЛЕММА 1. Пусть ξ_T – вектор, неподвижный относительно операторов из $T(\mathfrak{S}_{\Pi})$. Если $i \in \mathbb{A}_k$, $a \in P_i^{(k)}\mathcal{U}_iP_i^{(k)}$ и $a\xi_T = 0$, то $a = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что

$$(a^*T(g)\xi_T, T(h)\xi_T) = 0 \quad \text{для всех } g, h \in \mathfrak{S}_{\infty}. \quad (3.11)$$

Для любого $N > \max\{i, j : j \in \{\text{supp } g \cup \text{supp } h\}\}$ из $\mathbb{A}_k$ имеем

$$(a^*T(g)\xi_T, T(h)\xi_T) = (P_i^{(k)}a^*T(g)\xi_T, T(h)\xi_T) \stackrel{(3.7)}{=} (T((i \ N))a^*T(g)\xi_T, T(h)\xi_T).$$

Отсюда, опираясь на следствие 2 и на условия выбора i , N , получаем

$$(a^*T(g)\xi_T, T(h)\xi_T) = (T((i \ N))T(g)\xi_T, T(h)T((i \ N))aT((i \ N))\xi_T).$$

Теперь из $\mathfrak{S}_{\Pi}$ -неподвижности вектора ξ_T и условий леммы вытекает (3.11).

ЛЕММА 2. Пусть $T \in \mathfrak{A}_{\Pi}$, а вектор $\xi \in \mathcal{H}_T$ неподвижен относительно операторов $T(s)$ при всех $s \in \mathfrak{S}_{\infty}^{(j)} \cap \mathfrak{S}_{\Pi}$. Если $i \leq j$, то вектор $P_i^{(k)}\xi$ неподвижен относительно операторов $T(s)$ для всех s , удовлетворяющих одновременно условиям:

- (i) $s(i \cup \mathbb{A}_k) = i \cup \mathbb{A}_k$;
- (ii) для каждого $l \in \{1, 2, \dots, j\} \setminus i$ выполняется соотношение $s(l) = l$;
- (iii) при $m \neq k$ все множества $\{l > j : l \in \mathbb{A}_m\}$ s -инвариантны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понятно, что множество элементов из $\mathfrak{S}_{\infty}$, удовлетворяющих условиям (i)–(iii), является подгруппой, порожденной транспозицией $(i \ p)$, где $p \in \{l \in \mathbb{A}_k : l > j\}$ и $s \in \mathfrak{S}_{\infty}^{(j)} \cap \mathfrak{S}_{\Pi}$. В силу следствия 2 имеем

$$T(s)P_i^{(k)}\xi = P_i^{(k)}\xi \quad \text{для всех } s \in \mathfrak{S}_{j\infty} \cap \mathfrak{S}_{\Pi}. \quad (3.12)$$

Далее, учитывая (3.7), получаем

$$\begin{aligned} T((i \ p))P_i^{(k)}\xi &= w\text{-}\lim_{\mathbb{A}_k \ni N \rightarrow \infty} T((i \ p))T((i \ N))\xi \\ &= w\text{-}\lim_{\mathbb{A}_k \ni N \rightarrow \infty} T((i \ N))T((p \ N))\xi = w\text{-}\lim_{\mathbb{A}_k \ni N \rightarrow \infty} T((i \ N))\xi = P_i^{(k)}\xi. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.12) вытекает утверждение леммы.

Теперь сформулируем главный результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 5. Пусть неприводимое представление $T \in \mathfrak{A}_{\Pi}^{\text{sph}}$. Тогда для каждого i любой из проекторов $\{P_i^{(k)}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, является минимальным в w^* -алгебре $\mathcal{U}_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 2 для всех $i, l \in \mathbb{N}$ имеют место соотношения

$$\mathcal{U}_i = T((i \ l))\mathcal{U}_lT((i \ l)), \quad P_i^{(k)} = T((i \ l))P_l^{(k)}T((i \ l)), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому теореме достаточно доказать при условии, что $i \in \mathbb{A}_k$.

Предположим, что в w^* -алгебре $P_i^{(k)} \mathcal{U}_i P_i^{(k)}$ существуют ненулевые взаимно ортогональные проекторы F и Q . В силу леммы 1

$$F\xi_T \neq 0, \quad Q\xi_T \neq 0, \quad F\xi_T \perp Q\xi_T. \quad (3.13)$$

Обращаясь к следствию 2, получаем

$$T(s)F\xi_T = F\xi_T, \quad T(s)Q\xi_T = Q\xi_T \quad \text{при всех } s \in \mathfrak{S}_\Pi, \text{ для которых } s(i) = i.$$

Отсюда, опираясь на (3.13) и лемму 2, получаем противоречие с предложением 6.

3.4. Классификационные результаты. Следующее утверждение дает необходимые и достаточные условия для унитарной эквивалентности представлений из $\mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть наборы проекторов $\{P_i^{(k)}\}_{k=1}^n$ и $\{Q_i^{(k)}\}_{k=1}^n$ построены соответственно по представлениям T_P и T_Q из $\mathfrak{A}_\Pi^{\text{sph}}$ согласно предложению 7. Если $\mathfrak{P}_i = \{P_i^{(k)}\}''$ и $\mathfrak{Q}_i = \{Q_i^{(k)}\}''$, то T_P и T_Q тогда и только тогда унитарно эквивалентны, когда существует изоморфизм $\theta_1: \mathfrak{P}_1 \rightarrow \mathfrak{Q}_1$, для которого $\theta_1(P_1^{(k)}) = Q_1^{(k)}$ при всех k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что T_P и T_Q унитарно эквивалентны и действуют в пространствах $\mathcal{H}_{T_P}$ и $\mathcal{H}_{T_Q}$ соответственно. Из предложения 7 вытекает, что сплетающая изометрия $\mathcal{U}: \mathcal{H}_{T_P} \rightarrow \mathcal{H}_{T_Q}$ удовлетворяет условию $\mathcal{U} P_1^{(k)} \mathcal{U}^{-1} = Q_1^{(k)}$.

Для доказательства обратного утверждения по θ_1 , удовлетворяющему условиям теоремы, опираясь на следствие 2, определим изоморфизм $\theta_i: \mathfrak{P}_i \rightarrow \mathfrak{Q}_i$, который на $p \in \mathfrak{P}_i$ действует согласно формуле

$$\theta_i(p) = T_Q((1 \ i))\theta_1(T_P((1 \ i))pT_P((1 \ i)))T_Q((1 \ i)).$$

Понятно, что

$$\theta_i(P_i^{(k)}) = Q_i^{(k)} \quad \text{для всех } k. \quad (3.14)$$

Обозначим через ξ_P и ξ_Q единичные векторы из $\mathcal{H}_{T_P}$ и $\mathcal{H}_{T_Q}$ соответственно, неподвижные относительно операторов из $T_P(\mathfrak{S}_\Pi)$ и $T_Q(\mathfrak{S}_\Pi)$. Покажем, что

$$(T_P(s)\xi_P, \xi_P) = (T_Q(s)\xi_Q, \xi_Q) \quad \text{для всех } s \in \mathfrak{S}_\infty. \quad (3.15)$$

Это соотношение является следствием теоремы 4, теоремы мультипликативности (см. п. 3.2) и равенств

$$(P_i^{(k_1)} P_i^{(k_2)} \dots P_i^{(k_l)} \xi_P, \xi_P) = (Q_i^{(k_1)} Q_i^{(k_2)} \dots Q_i^{(k_l)} \xi_Q, \xi_Q), \quad (3.16)$$

где l и упорядоченные наборы $\{k_1, k_2, \dots, k_l\}$ произвольны. Для доказательства (3.16) предположим, что $i \in \mathbb{A}_k$. Тогда $P_i^{(k)} \xi_P = \xi_P$ и $Q_i^{(k)} \xi_Q = \xi_Q$. Кроме того в силу теоремы 5 имеем

$$P_i^{(k)} P_i^{(k_1)} P_i^{(k_2)} \dots P_i^{(k_l)} P_i^{(k)} = c_P P_i^{(k)}, \quad Q_i^{(k)} Q_i^{(k_1)} Q_i^{(k_2)} \dots Q_i^{(k_l)} Q_i^{(k)} = c_Q Q_i^{(k)},$$

где $c_P, c_Q \in \mathbb{C}$. Отсюда, применяя (3.14), получаем, что $c_P = c_Q$. Следовательно, справедливо равенство (3.16), из которого вытекает (3.15).

Теперь мы зафиксируем неприводимое представление $T \in \mathfrak{A}_{\Pi}^{\text{sph}}$, действующее в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_T$. Пусть ξ – единичный $T(\mathfrak{S}_{\Pi})$ -неподвижный вектор. Дальнейшие результаты – это приведение представления T к явной реализации, которая будет сделана в теореме 7.

Напомним, что через $\mathcal{U}_i$ мы обозначаем алгебру фон Неймана, порожденную проекторами $\{P_i^{(k)}\}_{k=1}^n$, определенными в предложении 7, и положим $\mathcal{H}_i = [\mathcal{U}_i \xi]$. Тогда сужение оператора $a \in \mathcal{U}_i$ на подпространство $\mathcal{H}_i$ задает циклическое представление $\mathfrak{R}_i$ алгебры $\mathcal{U}_i$. В силу следствия 2 отображение

$$a \ni \mathcal{U}_1 \xrightarrow{\pi_i} \mathfrak{R}_i(T((1 \ i))aT((1 \ i))) \quad (3.17)$$

является представлением w^* -алгебры $\mathcal{U}_1$ в пространстве $\mathcal{H}_i$ с циклическим вектором ξ .

ЛЕММА 3. *Представление π_i неприводимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор A' , действующий в $\mathcal{H}_i$ и удовлетворяющий условию

$$aA'\eta = A'a\eta \quad \text{для всех } \eta \in \mathcal{H}_i, a \in \mathcal{U}_i. \quad (3.18)$$

Докажем, что

$$A' = cI_{\mathcal{H}_i} \quad \text{при некотором } c \in \mathbb{C},$$

где $I_{\mathcal{H}_i}$ – единичный оператор в $\mathcal{H}_i$. Так как $\mathcal{H}_i = [\mathcal{U}_i \xi]$, то в силу (3.18) последнее равенство будет следовать из соотношения

$$A'\xi = c\xi.$$

Для доказательства этого свойства достаточно показать, что

$$T(s)A'\xi = A'\xi \quad \text{при всех } s \in \mathfrak{S}_{\Pi}, \quad (3.19)$$

и воспользоваться предложением 6.

В силу следствия 2 справедливо соотношение

$$T(s)A'\xi = A'\xi \quad \text{при всех } s \in \mathfrak{S}_{\Pi}, \text{ для которых } s(i) = i. \quad (3.20)$$

Кроме того, если $i \in \mathbb{A}_j$, то при любом $k \in \mathbb{A}_j$ имеем

$$\begin{aligned} T((i \ k))A'\xi &\stackrel{(3.18)}{=} T((i \ k))P_i^{(j)}A'\xi \stackrel{(3.7)}{=} T((i \ k))\left(w\text{-}\lim_{\mathbb{A}_j \ni l \rightarrow \infty} T((i \ l))A'\xi\right) \\ &= w\text{-}\lim_{\mathbb{A}_j \ni l \rightarrow \infty} T((i \ k))T((i \ l))A'\xi = w\text{-}\lim_{\mathbb{A}_j \ni l \rightarrow \infty} T((i \ l))T((k \ l))A'\xi \\ &= w\text{-}\lim_{\mathbb{A}_j \ni l \rightarrow \infty} T((i \ l))A'\xi \stackrel{(3.7)}{=} P_i^{(j)}A'\xi \stackrel{(3.18)}{=} A'\xi. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.20) получаем (3.19).

В силу теоремы 5 каждая из w^* -алгебр $\mathcal{U}_j$, $j = 1, 2, \dots$, является прямой суммой факторов типа I. Пусть $\{E_l\}_{l=1}^M$ – полный набор минимальных попарно ортогональных проекторов из центра алгебры $\mathcal{U}_1$. Отсюда, опираясь на лемму 3, получаем, что для каждого из представлений π_i (см. (3.17)) существует единственный проектор E_{l_i} , для которого

$$\pi_i(E_{l_i}) = I_{\mathcal{H}_i}, \quad \pi_i(I_{\mathcal{H}_T} - E_{l_i}) = 0. \quad (3.21)$$

Следовательно, определено отображение

$$i \ni \mathbb{N} \xrightarrow{l} l_i \in \{1, 2, \dots, M\}. \quad (3.22)$$

По любому проектору E_l найдем, опираясь на теорему 5, проектор $P_1^{(k_l)} \in \{P_1^{(k)}\}_{k=1}^n$ со свойством $E_l P_1^{(k_l)} = P_1^{(k_l)}$. Отсюда, используя определение представления π_i (см. (3.17)) и опираясь на лемму 1, получаем, что при $i \in \mathbb{A}_{k_l}$ справедливо соотношение

$$\pi_i(E_l P_1^{(k_l)}) = P_i^{(k_l)} \neq 0.$$

В силу (3.21) $\pi_i(E_l) = I_{\mathcal{H}_i}$ при $i \in \mathbb{A}_{k_l}$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\{E_l\}_{l=1}^M$ – полный набор минимальных попарно ортогональных проекторов из центра алгебры $\mathcal{U}_1$, а отображение $l: \mathbb{N} \mapsto \{1, 2, \dots, M\}$ задано согласно (3.21) и (3.22). Тогда:

- (i) при каждом l w^* -алгебра $E_l \mathcal{U}_1 E_l$ – фактор типа I;
- (ii) для каждого i существует l_i такое, что $\pi_i(E_{l_i}) = I_{\mathcal{H}_i}$ и $\pi_i(E_l) = 0$ при $l \neq l_i$;
- (iii) $l(\mathbb{N}) = \{1, 2, \dots, M\}$ (см. (3.22));
- (iv) если $l(i) = l(j)$, то представления π_i и π_j унитарно эквивалентны.

Рассмотрим разбиение Π^c множества $\mathbb{N}$ на попарно непересекающиеся подмножества

$$\mathbb{B}_m = \{i \in \mathbb{N} : \pi_i(E_m) = I_{\mathcal{H}_i}\}. \quad (3.23)$$

Понятно, что каждое множество $\mathbb{A}_j$ разбиения $\Pi = (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_n)$ лежит в некотором $\mathbb{B}_m$. Если $\mathcal{J}_m = \{j : \mathbb{A}_j \in \mathbb{B}_m\}$, то $\mathbb{B}_m = \bigsqcup_{j \in \mathcal{J}_m} \mathbb{A}_j$.

ЛЕММА 4. Для $\mathbb{A} \subset \mathbb{N}$ положим $\mathfrak{S}_{\mathbb{A}} = \{s \in \mathfrak{S}_\infty : \text{supp } s \subset \mathbb{A}\}$. Тогда справедливы следующие свойства:

- а) если $i \in \mathbb{B}_m$, то при $j \in \mathcal{J}_m$ будет $\pi_i(P_1^{(j)}) \neq 0$ и $\pi_i(P_1^{(j)}) = 0$, когда $j \notin \mathcal{J}_m$;
- б) $[T(\mathfrak{S}_{\mathbb{B}_m})\xi] = [\{P_i^{(j)}\}_{i \in \mathbb{B}_m, j \in \mathcal{J}_m}'' \xi]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства а) зафиксируем $i_1 \in \mathbb{A}_j \subset \mathbb{B}_m$. Если $i \in \mathbb{B}_m$, то из определения $\mathbb{B}_m$ и предложения 8, (iv) вытекает существование изометрии $\mathcal{V}_{i_1 i}$ подпространства $\mathcal{H}_i = [\mathcal{U}_i \xi]$ на $\mathcal{H}_{i_1}$, сплетающей представления π_{i_1} и π_i :

$$\mathcal{V}_{i_1 i} \pi_i(a) = \pi_{i_1}(a) \mathcal{V}_{i_1 i}, \quad a \in \mathcal{U}_1.$$

Отсюда в силу (3.7) получаем

$$0 \neq \mathcal{V}_{i_1 i}^{-1} P_{i_1}^{(j)} \xi = \mathcal{V}_{i_1 i}^{-1} \pi_{i_1}(P_1^{(j)}) \xi = \pi_i(P_1^{(j)}) \mathcal{V}_{i_1 i}^{-1} P_{i_1}^{(j)} \xi = \pi_i(P_1^{(j)}) \mathcal{V}_{i_1 i}^{-1} \xi. \quad (3.24)$$

Если $j \notin \mathcal{J}_m$, то в силу (3.24) для некоторого $k \neq m$ при всех $l \in \mathbb{B}_k$ имеем $\pi_l(P_1^{(j)}) \neq 0$. Отсюда, опираясь на предложение 8, (ii) и теорему 5, получаем $P_1^{(j)} E_k = P_1^{(j)}$. Но в силу предложения 8, (ii) для $i \in \mathbb{B}_m$

$$\pi_i(P_1^{(j)}) = \pi_i(P_1^{(j)} E_k) = \pi_i(P_1^{(j)}) \pi_i(E_k) = 0.$$

Для доказательства b) достаточно установить, что для любой транспозиции $(q\ r) \in \mathfrak{S}_{\mathbb{B}_m}$

$$T((q\ r))\xi \in [\{P_i^{(j)}\}_{i \in \mathbb{B}_m, j \in \mathcal{J}_m} \xi]. \quad (3.25)$$

Напомним, что вектор ξ неподвижен относительно операторов из $T(\mathfrak{S}_{\Pi})$. Так как в силу теоремы мультипликативности сужение T на подгруппу $\mathfrak{S}_{\mathbb{B}_m}$ в подпространстве $[T(\mathfrak{S}_{\mathbb{B}_m})\xi]$ неприводимо и $\mathbb{B}_m = \bigsqcup_{j \in \mathcal{J}_m} \mathbb{A}_j$, то, применяя предложение 6, получаем, что при $s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{B}_m}$ любой вектор $\eta \in [T(\mathfrak{S}_{\mathbb{B}_m})\xi]$, удовлетворяющий условию $T(h)\eta = \eta$ при всех $h \in s(\mathfrak{S}_{\Pi} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{B}_m})s^{-1}$, имеет вид $\eta = cT(s)\xi$, $c \in \mathbb{C}$. Следовательно, для обоснования (3.25) достаточно установить, что подпространство $[\mathcal{U}_r \mathcal{U}_q \xi]$ содержит ненулевой вектор, неподвижный относительно операторов из $T((q\ r)(\mathfrak{S}_{\Pi} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{B}_m})(q\ r))$.

Действительно, если $q \in \mathbb{A}_{j_1} \subset \mathbb{B}_m$, $r \in \mathbb{A}_{j_2} \subset \mathbb{B}_m$, то в силу свойства а)

$$\pi_q(P_1^{(j_2)})[\mathcal{U}_q \xi] = P_q^{(j_2)}[\mathcal{U}_q \xi] \neq 0.$$

Далее, для $\eta \in P_q^{(j_2)}[\mathcal{U}_q \xi]$ и $i, k \in \mathbb{A}_{j_2}$, замечая, что $T((i\ k))\eta = \eta$ при $i, k \neq q$ (следствие 2), получаем

$$\begin{aligned} T((q\ i))\eta &\stackrel{(3.7)}{=} w\text{-}\lim_{\mathbb{A}_{j_2} \ni k \rightarrow \infty} T((q\ i))T((q\ k))\eta \\ &= w\text{-}\lim_{\mathbb{A}_{j_2} \ni k \rightarrow \infty} T((q\ k))T((i\ k))\eta = w\text{-}\lim_{\mathbb{A}_{j_2} \ni k \rightarrow \infty} T((q\ k))\eta \stackrel{(3.7)}{=} P_q^{(j_2)}\eta = \eta. \end{aligned}$$

Следовательно, векторы из $P_q^{(j_2)}[\mathcal{U}_q \xi]$ неподвижны относительно операторов $T(s)$, где s принадлежит подгруппе Юнга $\mathfrak{S}_{\tilde{\Pi}}$, которая соответствует разбиению $\tilde{\Pi} = (\tilde{\mathbb{A}}_1, \tilde{\mathbb{A}}_2, \dots, \tilde{\mathbb{A}}_n)$, построенному из $\Pi = (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_n)$ с помощью удаления q из $\mathbb{A}_{j_1}$ и присоединения его к $\mathbb{A}_{j_2}$. Теперь, заменяя ξ на ненулевой вектор $\eta \in P_q^{(j_2)}[\mathcal{U}_q \xi]$, j_2 на j_1 , а q на r , и повторяя изложенные рассуждения, мы получим, что подпространство $P_r^{(j_1)}P_q^{(j_2)}[\mathcal{U}_r \mathcal{U}_q \xi]$ ненулевое и состоит из векторов, неподвижных относительно операторов из $T((q\ r)(\mathfrak{S}_{\Pi} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{B}_m})(q\ r)^{-1})$.

ЛЕММА 5. Пусть $\mathcal{H}^{(\infty)} = [\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 \dots \mathcal{U}_k \dots \xi]$. Если $\mathfrak{R}_i(a)$ – сужение оператора $a \in \mathcal{U}_i$ на подпространство $\mathcal{H}_i = [\mathcal{U}_i \xi]$, а $\mathfrak{R}_i^{\infty}(a)$ – сужение a на подпространство $\mathcal{H}^{(\infty)}$, то справедливы следующие утверждения:

- $\{a \in \mathcal{U}_i : \mathfrak{R}_i(a) = 0\} = \{a \in \mathcal{U}_i : \mathfrak{R}_i^{\infty}(a) = 0\}$;
- если $\Pi^c = (\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_k)$ – разбиение, построенное по $\Pi = (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_n)$ согласно (3.23), то $[T(\mathfrak{S}_{\Pi^c})\xi] = \mathcal{H}^{(\infty)}$;
- при $s \notin \mathfrak{S}_{\Pi^c}$ подпространства $\mathcal{H}^{(\infty)}$ и $T(s)\mathcal{H}^{(\infty)}$ ортогональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство а) вытекает из того факта, что операторы $a_i \in \mathcal{U}_i$ и $a_j \in \mathcal{U}_j$ при $i \neq j$ попарно коммутируют. Из леммы 4, b) следует свойство b). Свойство с) будет вытекать из b), если мы покажем, что

$$(T(g)\xi, \xi) = 0 \quad \text{для любого } g \notin \mathfrak{S}_{\Pi^c}.$$

В силу теоремы мультипликативности (см. п. 3.2) это свойство достаточно доказать в случае, когда $g = (k_1\ k_2\ \dots\ k_m)$ – цикл. Не ограничивая общности, мы можем также предположить, что $k_1 \in \mathbb{B}_{j_1}$, $k_2 \in \mathbb{B}_{j_2}$ и $j_1 \neq j_2$. Отсюда, опираясь на теорему 4 и лемму 4, а), получаем

$$(T(g)\xi, \xi) = (P_{k_1}^{(\text{ип}(k_m))} \cdot P_{k_1}^{(\text{ип}(k_{m-1}))} \dots P_{k_1}^{(j_2)}\xi, \xi) = 0.$$

Обозначим через $E^{(\infty)}$ ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{H}^{(\infty)}$, введенное в лемме 5. Опираясь на леммы 3 и 5, а), получаем, что $E^{(\infty)}\mathcal{U}_iE^{(\infty)}$ – фактор типа I_{n_m} . Для каждого $i \in \mathbb{B}_m$ найдем в $E^{(\infty)}\mathcal{U}_iE^{(\infty)}$ линейный базис из системы матричных единиц $\{e_{qr}^{(i)}\}_{q,r=1}^{n_m}$ со свойством

$$T((i\ j))e_{qr}^{(i)}T((i\ j)) = e_{qr}^{(j)} \quad \text{для всех } i, j \in \mathbb{B}_m. \quad (3.26)$$

Простая проверка показывает, что для $s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{B}_m} \subset \mathfrak{S}_\infty$ оператор

$$U(s) = \sum_{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_N}=1}^{n_m} e_{x_{s(i_1)}x_{i_1}}^{(i_1)} e_{x_{s(i_2)}x_{i_2}}^{(i_2)} \cdots e_{x_{s(i_N)}x_{i_N}}^{(i_N)}, \quad (3.27)$$

где $\text{supp } s \subset \{i_1, \dots, i_N\}$, является унитарным в $\mathcal{H}^{(\infty)}$ и справедливы соотношения

$$\begin{aligned} U(s)U(t) &= U(st) \quad \text{при всех } s, t \in \mathfrak{S}_{\mathbb{B}_m}, \\ U(s)u_1u_2 \cdots u_lU(s^{-1}) &= T(s)u_1u_2 \cdots u_lT(s^{-1}) \quad \text{при всех } l \in \mathbb{N}, u_i \in \mathcal{U}_i. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Понятно, что U расширяется по мультипликативности до представления группы $\mathfrak{S}_{\Pi^c}$ в $\mathcal{H}^{(\infty)}$:

$$U(s_1s_2 \cdots s_k) = U(s_1)U(s_2) \cdots U(s_k), \quad s_i \in \mathfrak{S}_{\mathbb{B}_i}.$$

ЛЕММА 6. *Алгебра фон Неймана, порожденная $\{E^{(\infty)}\mathcal{U}_iE^{(\infty)}\}_{i=1}^\infty$ в $\mathcal{H}^{(\infty)}$, неприводима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при $i \neq j$ $u_iu_j = u_ju_i$ для всех $u_i \in \mathcal{U}_i$ и $u_j \in \mathcal{U}_j$, то, применяя теорему 5 и леммы 3, 5, а), получаем, что

$$\prod_{i=1, i \in \mathbb{A}_{j_i}}^N P_i^{(j_i)}[\mathcal{U}_1 \cdots \mathcal{U}_N \xi] = \mathbb{C}\xi.$$

Следовательно, проектор $Q = \prod_{i=1, i \in \mathbb{A}_{j_i}}^\infty P_i^{(j_i)} \in \{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots\}''$ удовлетворяет условию $Q\mathcal{H}^{(\infty)} = \mathbb{C}\xi$. Отсюда вытекает, что любой оператор из коммутанта семейства алгебр $\{E^{(\infty)}\mathcal{U}_iE^{(\infty)}\}_{i=1}^\infty$ имеет вид $cE^{(\infty)}$, $c \in \mathbb{C}$.

ЛЕММА 7. *Имеют место следующие свойства:*

- (i) $U(s)\xi = \xi$ для всех $s \in \mathfrak{S}_\Pi$;
- (ii) $E^{(\infty)}T(s) = U(s)$ для всех $s \in \mathfrak{S}_{\Pi^c}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть транспозиция $(k_1\ k_2)$ принадлежит подгруппе $\mathfrak{S}_\Pi$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{A}_j \subset \mathbb{B}_m$. Опираясь на (3.26), получаем

$$\begin{aligned} (U(k_1\ k_2)\xi, \xi) &= \left(\sum_{p,q=1}^{n_m} e_{pq}^{(k_1)} \cdot e_{qp}^{(k_2)} \xi, \xi \right) = \sum_{p,q=1}^{n_m} (e_{pq}^{(k_1)} \xi, \xi) (e_{qp}^{(k_2)} \xi, \xi) \\ &= \sum_{p,q=1}^{n_m} (e_{pq}^{(k_1)} \xi, \xi) (T((k_1\ k_2))e_{qp}^{(k_1)}T((k_1\ k_2))\xi, \xi) \\ &= \sum_{p,q=1}^{n_m} (e_{pq}^{(k_1)} \xi, \xi) (e_{qp}^{(k_1)} \xi, \xi) = \|\xi\|^2 = 1. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает свойство (i).

Далее, используя лемму 6 и (3.28), получаем, что $T(s) = \omega(s)U(s)$ при всех $s \in \mathfrak{S}_{\Pi^c}$, где ω – одномерное представление группы $\mathfrak{S}_{\Pi^c}$. Следовательно, при $s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{B}_m}$ имеем $\omega(s) = 1$ или $\omega(s) = \text{sign } s$. Наконец, применяя свойство (i), получаем, что $\omega(s) = 1$ для всех $s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{B}_m}$.

Для формулировки главного результата полезно следующее

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Существует естественная изометрия $\mathfrak{I}$ подпространства $\mathcal{H}^{(\infty)} = [\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 \cdots \mathcal{U}_k \cdots \xi] \subset \mathcal{H}_T$ на бесконечное тензорное произведение $\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots$ подпространств $\mathcal{H}_i = [\mathcal{U}_i \xi]$. А именно,

$$\mathfrak{I}(u_1 u_2 \cdots u_N \xi) = u_1 \xi \otimes u_2 \xi \otimes \cdots \otimes u_N \xi.$$

В конструкции $\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i$ вектор $f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_N \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ отождествляется с

$$f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_N \otimes \xi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_{N+1}.$$

Теперь мы сформулируем классификационный результат для сферических представлений.

ТЕОРЕМА 7. Если для $s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{B}_m}$ оператор $\mathcal{R}(s)$ равен $\mathfrak{I}E^{(\infty)}T(s)E^{(\infty)}\mathfrak{I}^{-1}$, то

$$\mathcal{R}(s) = \sum_{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_N}=1}^{n_m} e_{x_{s(i_1)}x_{i_1}}^{(i_1)} \otimes e_{x_{s(i_2)}x_{i_2}}^{(i_2)} \otimes \cdots \otimes e_{x_{s(i_N)}x_{i_N}}^{(i_N)}. \quad (3.29)$$

Представление T унитарно эквивалентно $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{\Pi^c}}^{\mathfrak{S}_{\infty}} \mathcal{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула для $\mathcal{R}(s)$ вытекает из (3.27), леммы 7, (ii) и из определения изометрии $\mathfrak{I}$ (см. замечание 2). Второе утверждение следует из леммы 5.

В следующем параграфе мы фиксируем гильбертово пространство $\mathbf{H}$, каждому подмножеству $\mathbb{A}_j$ из разбиения² $\Pi = (\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n)$ ставим в соответствие единичный вектор f_j и по полученной системе данных строим представление из $\mathfrak{A}_{\Pi}^{\text{sph}}$ как бесконечное тензорное произведение. В этой конструкции проекторы $\{P_i^{(j)}\}$ из предложения 7 естественно строятся по проекторам p_j на одномерные подпространства $\mathbb{C}f_j$ (см. предложение 9). Оказывается, что эквивалентность представлений равносильна унитарной эквивалентности соответствующих семейств $\{p_j\}$ (см. предложение 10). Заметим, что сферические представления пар (G, K) , где $G = \text{GL}(\infty) \times \text{GL}(\infty) \times \cdots$, $K = \text{diag } U(\infty)$, также параметризуются семействами операторов, удовлетворяющих некоторым соотношениям, и для них имеют место похожие условия унитарной эквивалентности (см. [13; теорема 4.7]).

Понятно, что классы унитарно эквивалентных пар $\{P, Q\}$ одномерных проекторов параметризуются числом $\alpha \in [0, 1]$, где $\alpha Q = PQP$. Соответствующие сферические относительно двухблочных подгрупп Юнга представления аппроксимируются конечными парами Гельфанда (см. [14]). Когда количество блоков больше двух, допредельные конечные пары $(\mathfrak{S}_N, \mathfrak{S}_N \cap \mathfrak{S}_{\Pi})$ уже не являются парами Гельфанда. Но предельный объект $(\mathfrak{S}_{\infty}, \mathfrak{S}_{\Pi})$ имеет все свойства пары Гельфанда (см. предложение 6).

²Напомним, что n может быть бесконечным.

§ 4. Реализации допустимых представлений

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbf{H}$ размерности n и отображение

$$\mathbb{N} \ni j \xrightarrow{u} u(j) \in S_1(\mathbf{H}) = \{v \in \mathbf{H} : \|v\| = 1\}.$$

Определим гильбертово пространство $\mathbf{H}_u^{\otimes \infty}$ как пополнение комплексной линейной оболочки векторов вида $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes \cdots$, где $v_k = u(k)$ при всех достаточно больших k , в топологии, задаваемой естественным скалярным произведением:

$$(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_k \otimes \cdots, g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_k \otimes \cdots) = \prod_{j=1}^{\infty} (f_j, g_j).$$

Для $s \in \mathfrak{S}_\infty$ обозначим через $T_{\mathbf{H}}^{(u)}(s)$ унитарный оператор, действующий в $\mathbf{H}_u^{\otimes \infty}$ согласно формуле

$$T_{\mathbf{H}}^{(u)}(s)(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_k \otimes \cdots) = f_{s^{-1}(1)} \otimes f_{s^{-1}(2)} \otimes \cdots \otimes f_{s^{-1}(k)} \otimes \cdots. \quad (4.1)$$

Понятно, что операторы $T_{\mathbf{H}}^{(u)}(s)$ задают представление группы $\mathfrak{S}_\infty$. Обозначим через $\Pi(u) = (\mathbb{A}_1(u), \mathbb{A}_2(u), \dots, \mathbb{A}_m(u))$ разбиение множества $\mathbb{N}$ на прообразы точек отображения u , где m может быть бесконечным. Если $\xi^{(u)} = u(1) \otimes u(2) \otimes \cdots$, то при $s \in \mathfrak{S}_{\Pi(u)}$

$$T_{\mathbf{H}}^{(u)}(s)\xi^{(u)} = \xi^{(u)}. \quad (4.2)$$

Далее мы будем предполагать, что

$$|\mathbb{A}_j(u)| = \infty \quad \text{для всех } j, \quad (4.3)$$

а векторы $u(a_j)$, где $a_j \in \mathbb{A}_j(u)$, удовлетворяют условию

$$u(a_j) \neq zu(a_k) \quad \text{для любых } j \neq k \text{ и всех } z \in \mathbb{C}. \quad (4.4)$$

Обозначим через $p_u^{(j)}$ ортопроектор на одномерное подпространство $\mathbb{C}u(a_j)$.

Сформулируем необходимое в дальнейшем техническое утверждение, которое проверяется простым вычислением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Для каждого l и j существуют слабые пределы

$$P_l^{(j)} = w\text{-}\lim_{\mathbb{A}_j(u) \ni k \rightarrow \infty} T_{\mathbf{H}}^{(u)}((l \ k)),$$

действующие согласно формуле

$$P_l^{(j)}(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_l \otimes f_{l+1} \otimes \cdots) = f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes p_u^{(j)}(f_l) \otimes f_{l+1} \otimes \cdots.$$

4.1. Критерий унитарной эквивалентности. Обозначим через $T_c^{(u)}$ представление из $\mathfrak{A}_{\Pi(u)}^{\text{sph}}$, которое получается сужением $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ на подпространство $[T_{\mathbf{H}}^{(u)}(\mathfrak{S}_\infty)\xi^{(u)}]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть отображения $u, \tilde{u}$ из $\mathbb{N}$ в $S_1(\mathbf{H})$ удовлетворяют условию $\Pi(u) = \Pi(\tilde{u}) = \Pi = (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_m)$. Предположим, что линейные оболочки каждого из множеств $\{u(l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ и $\{\tilde{u}(l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ плотны в $\mathbf{H}$. При этих условиях представления $T_c^{(u)}$ и $T_c^{(\tilde{u})}$ тогда и только тогда унитарно эквивалентны, когда в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ существует унитарный оператор U такой, что $Uu(l) \in \mathbb{C}\tilde{u}(l)$ для всех $l \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\begin{aligned}\varphi_u^{(l; j_1, \dots, j_r)} &= (P_l^{(j_1)} \cdot P_l^{(j_2)} \dots P_l^{(j_r)} \xi^{(u)}, \xi^{(u)}), \\ \varphi_{\tilde{u}}^{(l; j_1, \dots, j_r)} &= (\tilde{P}_l^{(j_1)} \cdot \tilde{P}_l^{(j_2)} \dots \tilde{P}_l^{(j_r)} \xi^{(\tilde{u})}, \xi^{(\tilde{u})}),\end{aligned}$$

где $P_l^{(k)}$ и $\tilde{P}_l^{(k)}$ определяются согласно предложению 9 по представлениям $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ и $T_{\mathbf{H}}^{(\tilde{u})}$ соответственно. В силу предложения 9

$$\begin{aligned}P_l^{(j)}(f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_l \otimes f_{l+1} \otimes \dots) &= f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes p_u^{(j)}(f_l) \otimes f_{l+1} \otimes \dots, \\ \tilde{P}_l^{(j)}(f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_l \otimes f_{l+1} \otimes \dots) &= f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes p_{\tilde{u}}^{(j)}(f_l) \otimes f_{l+1} \otimes \dots.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Если представления $T_c^{(u)}$ и $T_c^{(\tilde{u})}$ унитарно эквивалентны, то, применяя предложение 6 и теорему 4, получаем

$$\varphi_u^{(l; j_1, \dots, j_r)} = \varphi_{\tilde{u}}^{(l; j_1, \dots, j_r)} \quad \text{для всех мультииндексов } (l; j_1, \dots, j_r).$$

Отсюда, учитывая (4.5) и тот факт, что

$$\xi^{(u)} = u(1) \otimes u(2) \otimes \dots, \quad \xi^{(\tilde{u})} = \tilde{u}(1) \otimes \tilde{u}(2) \otimes \dots,$$

получаем

$$(p_u^{(j_1)} \cdot p_u^{(j_2)} \dots p_u^{(j_r)} u(l), u(l)) = (p_{\tilde{u}}^{(j_1)} \cdot p_{\tilde{u}}^{(j_2)} \dots p_{\tilde{u}}^{(j_r)} \tilde{u}(l), \tilde{u}(l)) \quad (4.6)$$

для всех мультииндексов $(l; j_1, \dots, j_r)$.

Обозначим через $\mathbf{H}_l$ и $\tilde{\mathbf{H}}_l$ подпространства в $\mathbf{H}$, порожденные всеми векторами вида

$$p_u^{(j_1)} \cdot p_u^{(j_2)} \dots p_u^{(j_r)} u(l), \quad p_{\tilde{u}}^{(j_1)} \cdot p_{\tilde{u}}^{(j_2)} \dots p_{\tilde{u}}^{(j_r)} \tilde{u}(l)$$

соответственно. В силу (4.6) отображение

$$p_u^{(j_1)} \cdot p_u^{(j_2)} \dots p_u^{(j_r)} u(l) \mapsto p_{\tilde{u}}^{(j_1)} \cdot p_{\tilde{u}}^{(j_2)} \dots p_{\tilde{u}}^{(j_r)} \tilde{u}(l)$$

расширяется до изометрии U_l подпространства $\mathbf{H}_l$ на $\tilde{\mathbf{H}}_l$ и при любом j

$$p_u^{(j)} U_l v = U_l p_u^{(j)} v \quad \text{для всех } v \in \mathbf{H}_l. \quad (4.7)$$

Если $\mathbf{H}_1 \neq \mathbf{H}$, то в силу условий предложения найдется $l_1 \in \mathbb{N}$, для которого $u(l_1) \notin \mathbf{H}_1$. Отсюда, используя определение $\mathbf{H}_l$, получаем, что $u(l_1) \perp \mathbf{H}_1$. Из этого свойства и из (4.6) вытекает, что $\tilde{u}(l_1) \perp \tilde{\mathbf{H}}_1$. Следовательно, $\mathbf{H}_{l_1} \perp \mathbf{H}_1$ и $\tilde{\mathbf{H}}_1 \perp \tilde{\mathbf{H}}_{l_1}$. Продолжая в случае необходимости этот процесс, мы найдем набор индексов $\{1 < l_1 < l_2 < \dots\}$ такой, что

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_{l_1} \oplus \mathbf{H}_{l_2} \oplus \dots = \tilde{\mathbf{H}}_1 \oplus \tilde{\mathbf{H}}_{l_1} \oplus \tilde{\mathbf{H}}_{l_2} \oplus \dots.$$

Следовательно, в силу (4.7) оператор $U = U_1 \oplus U_{l_1} \oplus U_{l_2} \oplus \dots$ является унитарным и удовлетворяет условию

$$p_u^{(j)} U = U p_u^{(j)} \quad \text{для всех } j. \quad (4.8)$$

Обратное утверждение является прямым следствием теоремы 4 и предложения 9.

4.2. Разложение представления $T_H^{(u)}$ на неприводимые в случае попарно ортогональных $p_u^{(j)}$. Для разбиения $\Pi = (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_m)$ множества $\mathbb{N}$ обозначим через $\Pi^{(N)} = (\mathbb{A}_1^{(N)}, \mathbb{A}_2^{(N)}, \dots, \mathbb{A}_m^{(N)})$ разбиение множества $\{1, 2, \dots, N\}$ на подмножества $\mathbb{A}_j^{(N)} = \mathbb{A}_j \cap \{1, 2, \dots, N\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Разбиение $\Pi = (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_m)$ назовем *u-согласованным*, если существует натуральное N такое, что

$$\mathbb{A}_j(u) \cap \{N+1, N+2, \dots\} = \mathbb{A}_j \cap \{N+1, N+2, \dots\} \quad \text{при всех } j.$$

Целочисленный вектор

$$w(\Pi) = (|\mathbb{A}_1^{(N)}| - |\mathbb{A}_1^{(N)}(u)|, |\mathbb{A}_2^{(N)}| - |\mathbb{A}_2^{(N)}(u)|, \dots, |\mathbb{A}_m^{(N)}| - |\mathbb{A}_m^{(N)}(u)|)$$

будем называть *u-весом* разбиения³ $\Pi = (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_m)$.

Класс *u-согласованных* разбиений совпадает с множеством разбиений, эквивалентных $\Pi(u) = (\mathbb{A}_1(u), \mathbb{A}_2(u), \dots, \mathbb{A}_m(u))$.

Понятно, что для *u-согласованного* разбиения Π у вектора $w(\Pi)$ имеется лишь конечное количество ненулевых координат, а их сумма равна нулю. Определим вектор $\xi_\Pi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots$ из $\mathbf{H}_u^{\otimes \infty}$, полагая при $k \in \mathbb{A}_j$

$$\xi_k = u(a), \quad \text{где } a \in \mathbb{A}_j \cap \mathbb{A}_j(u).$$

Заметим, что последнее пересечение бесконечно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть отображение u удовлетворяет условиям (4.3), (4.4), проекторы $p_u^{(j)}$ попарно ортогональны и $\sum_{j=1}^m p_u^{(j)} = I_{\mathbf{H}}$, где $I_{\mathbf{H}}$ – единичный оператор в $\mathbf{H}$. Обозначим через $\mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})}$ подпространство в $\mathbf{H}_u^{\otimes \infty}$, натянутое на все векторы ξ_Π , где Π пробегает множество всех *u-согласованных* разбиений фиксированного *u-веса* $\mathfrak{w}$. Тогда:

- 1) при $\mathfrak{w} \neq \mathfrak{v}$ подпространства $\mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})}$ и $\mathbf{H}_u^{(\mathfrak{v})}$ ортогональны;
- 2) $\bigoplus_{\mathfrak{w}} \mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})} = \mathbf{H}_u^{\otimes \infty}$;
- 3) $T_{\mathbf{H}}^{(u)} \mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})} = \mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})}$ и сужение $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ на $\mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})}$ неприводимо;
- 4) сужения представления $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ на подпространства $\mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})}$ и $\mathbf{H}_u^{(\mathfrak{v})}$ при $\mathfrak{w} \neq \mathfrak{v}$ унитарно не эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1), 2) и соотношение $T_{\mathbf{H}}^{(u)} \mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})} = \mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})}$ из 3) не нуждаются в доказательстве. Докажем 3). Заметим, что вектор вида $\xi_\Pi \in \mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})}$ является циклическим для $\mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})}$ и неподвижным относительно операторов из $\mathfrak{S}_\Pi$. Теперь для обоснования неприводимости сужения $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ на $\mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})}$ достаточно воспользоваться теоремой мультипликативности.

Перейдем к доказательству свойства 4). Обозначим через $T_{\mathfrak{w}}$ и $T_{\mathfrak{v}}$ сужения $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ на $\mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})}$ и $\mathbf{H}_u^{(\mathfrak{v})}$ соответственно. Зафиксируем *u-согласованные* разбиения $\Pi_{\mathfrak{w}} = (\mathbb{A}_1^{(\mathfrak{w})}, \mathbb{A}_2^{(\mathfrak{w})}, \dots, \mathbb{A}_m^{(\mathfrak{w})})$ и $\Pi_{\mathfrak{v}}$ такие, что $w(\Pi_{\mathfrak{w}}) = \mathfrak{w}$ и $w(\Pi_{\mathfrak{v}}) = \mathfrak{v}$.

Если представления $T_{\mathfrak{w}}$ и $T_{\mathfrak{v}}$ унитарно эквивалентны, то существует унитарный оператор U , действующий в $\mathbf{H}_u^{\otimes \infty}$, для которого

$$U \mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})} = \mathbf{H}_u^{(\mathfrak{v})}, \quad T_{\mathfrak{v}}(s) U x = U T_{\mathfrak{w}}(s) x \quad \text{для всех } s \in \mathfrak{S}_\infty, x \in \mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})}.$$

³Понятно, что для всех $j > N$ имеем $(|\mathbb{A}_1^{(N)}| - |\mathbb{A}_1^{(N)}(u)|, |\mathbb{A}_2^{(N)}| - |\mathbb{A}_2^{(N)}(u)|, \dots, |\mathbb{A}_m^{(N)}| - |\mathbb{A}_m^{(N)}(u)|) = (|\mathbb{A}_1^{(j)}| - |\mathbb{A}_1^{(j)}(u)|, |\mathbb{A}_2^{(j)}| - |\mathbb{A}_2^{(j)}(u)|, \dots, |\mathbb{A}_m^{(j)}| - |\mathbb{A}_m^{(j)}(u)|)$.

В таком случае вектор $U\xi_{\Pi_{\mathfrak{w}}} \in \mathbf{H}_u^{(\mathfrak{v})}$ неподвижен относительно операторов из $T_{\mathfrak{v}}(\mathfrak{S}_{\Pi_{\mathfrak{w}}})$:

$$T_{\mathfrak{v}}(s)U\xi_{\Pi_{\mathfrak{w}}} = U\xi_{\Pi_{\mathfrak{w}}} \quad \text{для всех } s \in \mathfrak{S}_{\Pi_{\mathfrak{w}}}. \quad (4.9)$$

Теперь замечаем, что существуют слабые пределы

$$P_l^{(j)} = w\text{-}\lim_{\mathbb{A}_j(u) \ni k \rightarrow \infty} T_{\mathbf{H}}^{(u)}((lk)),$$

действующие согласно формуле

$$P_l^{(j)}(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_l \otimes f_{l+1} \otimes \cdots) = f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes p_u^{(j)}(f_l) \otimes f_{l+1} \otimes \cdots.$$

Отсюда и из (4.9) получаем

$$U\xi_{\Pi_{\mathfrak{w}}} = \prod_j \prod_{l \in \mathbb{A}_j^{(\mathfrak{w})}} P_l^{(j)} U\xi_{\Pi_{\mathfrak{w}}} = z\xi_{\Pi_{\mathfrak{w}}}, \quad \text{где } z \in \mathbb{C}.$$

Последнее в силу свойства 1) противоречит условию $\mathfrak{w} \neq \mathfrak{v}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Сужение $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ на $\mathbf{H}_u^{(\mathfrak{w})}$ унитарно эквивалентно представлению $\mathfrak{S}_{\infty}$, индуцированному с единичного представления подгруппы $\mathfrak{S}_{\Pi_{\mathfrak{w}}}$.

4.3. Разложение представления $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ на неприводимые в общем случае. Для перенесения предложения 11 на общий случай введем необходимые понятия и обозначения.

По разбиению $\Pi(u) = (\mathbb{A}_1(u), \mathbb{A}_2(u), \dots, \mathbb{A}_m(u))$ построим неориентированный граф $\Gamma(u)$, вершинами которого являются множества $\mathbb{A}_1(u), \mathbb{A}_2(u), \dots, \mathbb{A}_m(u)$. Вершины $\mathbb{A}_k(u)$ и $\mathbb{A}_l(u)$ соединены ребром⁴, если $p_u^{(k)} \cdot p_u^{(l)} \neq 0$. Обозначим через $\Pi^c(u) = (\mathbb{B}_1(u), \mathbb{B}_2(u), \dots, \mathbb{B}_i(u))$ разбиение множества $\mathbb{N}$, в котором $\mathbb{B}_l(u)$ является объединением $\mathbb{A}_j(u)$, принадлежащих одной компоненте связности⁵ графа $\Gamma(u)$. Для произвольного u -согласованного разбиения $\Pi = (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_m)$ (см. определение 1) определим разбиение $\Pi^c = (\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_i)$, где $\mathbb{B}_l = \bigcup_j \mathbb{A}_{k_j}$, а k_j пробегает все значения, удовлетворяющие условию $\mathbb{A}_{k_j}(u) \subset \mathbb{B}_l(u)$.

Целочисленный вектор

$$w^{(c)}(\Pi) = (|\mathbb{B}_1| - |\mathbb{B}_1(u)|, |\mathbb{B}_2| - |\mathbb{B}_2(u)|, \dots, |\mathbb{B}_i| - |\mathbb{B}_i(u)|)$$

будем называть *си-весом* u -согласованного разбиения $\Pi = (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_m)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть отображение u удовлетворяет условиям (4.3), (4.4), а подпространства $p_u^{(j)}\mathbf{H}$ порождают $\mathbf{H}$. Обозначим через $\mathbf{H}_{cu}^{(\mathfrak{w})}$ подпространство в $\mathbf{H}_u^{\otimes \infty}$, натянутое на все векторы ξ_{Π} , где $\Pi = (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_m)$ пробегает множество всех u -согласованных разбиений фиксированного си-веса $\mathfrak{w}$. Тогда:

- 1) при $\mathfrak{w} \neq \mathfrak{v}$ подпространства $\mathbf{H}_{cu}^{(\mathfrak{w})}$ и $\mathbf{H}_{cu}^{(\mathfrak{v})}$ ортогональны;
- 2) $\bigoplus_{\mathfrak{w}} \mathbf{H}_{cu}^{(\mathfrak{w})} = \mathbf{H}_u^{\otimes \infty}$;
- 3) $T_{\mathbf{H}}^{(u)}\mathbf{H}_{cu}^{(\mathfrak{w})} = \mathbf{H}_{cu}^{(\mathfrak{w})}$ и сужение $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ на $\mathbf{H}_{cu}^{(\mathfrak{w})}$ неприводимо;
- 4) сужения представления $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ на подпространства $\mathbf{H}_{cu}^{(\mathfrak{w})}$ и $\mathbf{H}_{cu}^{(\mathfrak{v})}$ при $\mathfrak{w} \neq \mathfrak{v}$ унитарно неэквивалентны.

⁴Напомним, что $p_u^{(j)}$ – ортопроектор на одномерное подпространство $\mathbb{C}u(a)$, где $a \in \mathbb{A}_j$.

⁵ i – количество компонент связности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathbf{H}_l$ подпространство в $\mathbf{H}$, порожденное всеми $p_u^{(j)}\mathbf{H}$, для которых $\mathbb{A}_j(u) \subset \mathbb{B}_l(u)$. Нетрудно понять, что

$$\mathbf{H}_l \perp \mathbf{H}_k \quad \text{при } l \neq k. \quad (4.10)$$

По u -согласованным разбиениям $\Pi_{\mathfrak{w}} = (\mathbb{A}_1^{(\mathfrak{w})}, \mathbb{A}_2^{(\mathfrak{w})}, \dots, \mathbb{A}_m^{(\mathfrak{w})})$ и $\Pi_{\mathfrak{v}} = (\mathbb{A}_1^{(\mathfrak{v})}, \mathbb{A}_2^{(\mathfrak{v})}, \dots, \mathbb{A}_m^{(\mathfrak{v})})$ таким, что $w^{(c)}(\Pi_{\mathfrak{w}}) = \mathfrak{w}$, $w^{(c)}(\Pi_{\mathfrak{v}}) = \mathfrak{v}$, построим векторы $\xi^{(\mathfrak{w})}$, $\xi^{(\mathfrak{v})}$ из $\mathbf{H}_u^{\otimes \infty}$, имеющие вид

$$\xi^{(\mathfrak{w})} = (\xi_1^{(\mathfrak{w})} \otimes \xi_2^{(\mathfrak{w})} \otimes \dots), \quad \xi^{(\mathfrak{v})} = (\xi_1^{(\mathfrak{v})} \otimes \xi_2^{(\mathfrak{v})} \otimes \dots), \quad (4.11)$$

где $\xi_l^{(\mathfrak{w})} \in p_u^{(j)}\mathbf{H}$ при $l \in \mathbb{A}_j^{(\mathfrak{w})}$ и $\xi_k^{(\mathfrak{v})} \in p_u^{(j)}\mathbf{H}$ при $k \in \mathbb{A}_j^{(\mathfrak{v})}$. Так как $\mathfrak{w} \neq \mathfrak{v}$, то существует подпространство $\mathbf{H}_p$ такое, что

$$|\{q : \xi_q^{(\mathfrak{w})} \in \mathbf{H}_p\}| \neq |\{q : \xi_q^{(\mathfrak{v})} \in \mathbf{H}_p\}|.$$

Отсюда, опираясь на (4.10), получаем, что $\xi^{(\mathfrak{w})} \perp \xi^{(\mathfrak{v})}$.

Свойство 2) и $T_u^{\otimes \infty}$ -инвариантность $\mathbf{H}_{cu}^{(\mathfrak{w})}$ из 3) – прямые следствия определений представления $T_u^{\otimes \infty}$ (см. (4.1)) и подпространства $\mathbf{H}_{cu}^{(\mathfrak{w})}$.

Неприводимость сужения $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ на $\mathbf{H}_{cu}^{(\mathfrak{w})}$ будет следствием теоремы мультипликативности, если мы докажем цикличность $T_{\mathbf{H}}^{(u)}(\mathfrak{S}_{\Pi_{\mathfrak{w}}})$ -неподвижного вектора $\xi^{(\mathfrak{w})}$ из (4.11) в подпространстве $\mathbf{H}_{cu}^{(\mathfrak{w})}$.

С этой целью по разбиению $\Pi_{\mathfrak{w}} = (\mathbb{A}_1^{(\mathfrak{w})}, \mathbb{A}_2^{(\mathfrak{w})}, \dots, \mathbb{A}_m^{(\mathfrak{w})})$ построим разбиение $\Pi_{\mathfrak{w}}^c = (\mathbb{B}_1^{(\mathfrak{w})}, \mathbb{B}_2^{(\mathfrak{w})}, \dots, \mathbb{B}_i^{(\mathfrak{w})})$. Пусть k -я компонента $\xi_k^{(\mathfrak{w})}$ вектора $\xi^{(\mathfrak{w})}$ из (4.11) принадлежит подпространству $\mathbf{H}_l$ (см. (4.10)). Это означает, что $\xi_k^{(\mathfrak{w})} \in p_u^{(j)}\mathbf{H}$, где $\mathbb{A}_j^{(\mathfrak{w})} \subset \mathbb{B}_l^{(\mathfrak{w})}$. Из определения разбиения $\Pi_{\mathfrak{w}}^c = (\mathbb{B}_1^{(\mathfrak{w})}, \mathbb{B}_2^{(\mathfrak{w})}, \dots, \mathbb{B}_i^{(\mathfrak{w})})$ вытекает, что при $\mathbb{A}_q^{(\mathfrak{w})} \subset \mathbb{B}_l^{(\mathfrak{w})}$ найдутся $\mathbb{A}_{j_1}^{(\mathfrak{w})}, \mathbb{A}_{j_2}^{(\mathfrak{w})}, \dots, \mathbb{A}_{j_r}^{(\mathfrak{w})} \subset \mathbb{B}_l^{(\mathfrak{w})}$, для которых

$$0 \neq p_u^{(j_1)} \cdot p_u^{(j_2)} \dots p_u^{(j_r)} \xi_k^{(\mathfrak{w})} \in p_u^{(q)}\mathbf{H}. \quad (4.12)$$

Следовательно, для любого вектора $\eta_k \in \mathbf{H}_l$ и $\varepsilon > 0$ существует оператор a_ε из w^* -алгебры $\mathfrak{A}_k \subset \{T_u^{\otimes \infty}(\mathfrak{S}_\infty)\}''$, порожденной проекторами $\{P_k^{(j)}\}_{j=1}^m$, определенными в предложении 9, со свойством

$$\|a_\varepsilon(\xi^{(\mathfrak{w})}) - \xi_1^{(\mathfrak{w})} \otimes \xi_2^{(\mathfrak{w})} \otimes \dots \otimes \xi_{k-1}^{(\mathfrak{w})} \otimes \eta_k \otimes \xi_{k+1}^{(\mathfrak{w})} \otimes \dots\| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\xi_1^{(\mathfrak{w})} \otimes \xi_2^{(\mathfrak{w})} \otimes \dots \otimes \xi_{k-1}^{(\mathfrak{w})} \otimes \eta_k \otimes \xi_{k+1}^{(\mathfrak{w})} \otimes \dots \in [\mathfrak{A}_k \xi^{(\mathfrak{w})}]$. Продолжая этот процесс, мы докажем, что для любого набора векторов $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$, удовлетворяющего условию:

η_j и $\xi_j^{(\mathfrak{w})}$ принадлежат одному и тому же подпространству $\mathbf{H}_{l_j}$ (см. (4.10)),

вектор $\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \dots \otimes \eta_N \otimes \xi_{N+1}^{(\mathfrak{w})} \otimes \xi_{N+2}^{(\mathfrak{w})} \otimes \dots$ лежит в подпространстве

$$[\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_N \xi^{(\mathfrak{w})}].$$

Отсюда вытекает, что $[T_{\mathbf{H}}^{(u)}(\mathfrak{S}_\infty) \cup_{N=1}^\infty [\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_N \xi^{(\mathfrak{w})}]]$ совпадает с $\mathbf{H}_{cu}^{(\mathfrak{w})}$. Доказательство свойства 4) опирается на те же соображения, которые приведены при обосновании аналогичного утверждения из предложения 11. Поэтому мы его опускаем.

4.4. Примеры допустимых представлений. В предложениях 11 и 12 линейная оболочка множества векторов, являющихся значениями отображения u , была плотной в $\mathbf{H}$. По этой причине неприводимые компоненты представления $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ были сферическими по отношению к подгруппам Юнга $\mathfrak{S}_{\Pi}$, определяемым u -согласованными разбиениями Π (см. определение 1).

Для получения общих допустимых представлений, не обладающих этим свойством, мы откажемся от условия тотальности в $\mathbf{H}$ множества $\{u(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$. Обозначим через H замыкание линейной оболочки значений отображения

$$\mathbb{N} \ni j \xrightarrow{u} u(j) \in S_1(\mathbf{H}) = \{v \in \mathbf{H} : \|v\| = 1\},$$

которое удовлетворяет условию (4.4).

Перейдем к описанию разложения пространства $\mathbf{H}_u^{\otimes \infty}$ на неприводимые компоненты в случае, когда $\mathbf{H} \neq H$. Обозначим через $\mathcal{H}(n)$ подпространство в $H_u^{\otimes \infty}$, порожденное векторами вида $\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots$, у которых ровно n компонент ξ_k принадлежат подпространству $H^\perp = \mathbf{H} \ominus H$. Очевидно, что имеют место следующие свойства:

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{H}}^{(u)}(s)\mathcal{H}(n) &= \mathcal{H}(n) \quad \text{для всех } s \in \mathfrak{S}_\infty, \quad \mathcal{H}(n) \perp \mathcal{H}(k) \quad \text{при } n \neq k, \\ \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}(j) &= \mathbf{H}_u^{\otimes \infty}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathcal{H}^0(n)$ подпространство в $\mathcal{H}(n)$, порожденное векторами вида $\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots$, где $\xi_j \in H^\perp$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$T_{\mathbf{H}}^{(u)}(\mathfrak{S}_n \cdot \mathfrak{S}_\infty^{(n)})\mathcal{H}^0(n) = \mathcal{H}^0(n). \quad (4.13)$$

Обозначим через $H_u^{\otimes [n, \infty]}$ пространство, порожденное векторами $\xi_{n+1} \otimes \xi_{n+2} \otimes \dots$, где $\xi_i \in H$ при всех $i = n+1, n+2, \dots$ и $\xi_i = u(i)$ для всех достаточно больших i . Подпространство $\mathcal{H}^0(n)$ является тензорным произведением $(H^\perp)^{\otimes n} \otimes H_u^{\otimes [n, \infty]}$, где операторы $T_{\mathbf{H}}^{(u)}(\mathfrak{S}_n \cdot \mathfrak{S}_\infty^{(n)})$ действуют перестановками компонент. Понятно, что для всех $s \in \mathfrak{S}_n$, $t \in \mathfrak{S}_\infty^{(n)}$ оператор $T_{\mathbf{H}}^{(u)}(st)$ есть тензорное произведение операторов $R_1(s)$ и $R_2(t)$, которые действуют в $(H^\perp)^{\otimes n}$ и $H_u^{\otimes [n, \infty]}$ соответственно. Появившееся представление R_2 подгруппы $\mathfrak{S}_\infty^{(n)}$ разлагается в прямую сумму неприводимых. Описание соответствующих им подпространств можно получить из предложения 12. Обозначим через $\mathcal{H}_{n\infty}$ одно из этих подпространств в $H_u^{\otimes [n, \infty]}$ и зафиксируем диаграмму Юнга из n клеток, у которой не более $\dim(\mathbf{H} \ominus H)$ строк. Пусть $\mathcal{H}_\lambda$ – подпространство в $(H^\perp)^{\otimes n}$, инвариантное относительно $R_1(\mathfrak{S}_n)$ и такое, что сужение R_1 на $\mathcal{H}_\lambda$ эквивалентно неприводимому представлению группы $\mathfrak{S}_n$, определяемому диаграммой λ .

Доказательство следующего утверждения можно получить, используя технику, развитую в §5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Для любого разбиения Π на бесконечные блоки в $\mathcal{H}(n)$ при $n > 0$ не существует ненулевых векторов, неподвижных относительно операторов из $T_{\mathbf{H}}^{(u)}(\mathfrak{S}_\infty^{(n-1)} \cap \mathfrak{S}_\Pi)$. Сужение представления $T_{\mathbf{H}}^{(u)}$ на подпространство $[T_{\mathbf{H}}^{(u)}(\mathfrak{S}_\infty)(\mathcal{H}_\lambda \otimes \mathcal{H}_{n\infty})]$ неприводимо.

§ 5. Описание Π -допустимых представлений

В этом параграфе мы получим полную классификацию Π -допустимых факторпредставлений.

Следующее утверждение позволяет естественно связать с каждым представлением $T \in \mathfrak{A}_\Pi$ сферическое представление.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Пусть $T \in \mathfrak{A}_\Pi$ действует в пространстве $\mathcal{H}_T$, а единичные векторы ξ_1 и ξ_2 из $\mathcal{H}_T$ удовлетворяют условию: существуют натуральные N_1 и N_2 со свойствами

$$T(s_1)\xi_1 = \xi_1, \quad T(s_2)\xi_2 = \xi_2 \quad \text{при всех } s_1 \in \mathfrak{S}_\infty^{(N_1)} \cap \mathfrak{S}_\Pi, \quad s_2 \in \mathfrak{S}_\infty^{(N_2)} \cap \mathfrak{S}_\Pi.$$

Если T_i , $i = 1, 2$, – представление подгруппы $\mathfrak{S}_\infty^{(N_i)}$, определяемое сужениями операторов $T(s)$, $s \in \mathfrak{S}_\infty^{(N_i)}$, на подпространство $[T(\mathfrak{S}_\infty^{(N_i)})\xi_i]$, то T_i неприводимо и $(T(g)\xi_1, \xi_1) = (T(g)\xi_2, \xi_2)$ для всех $g \in \mathfrak{S}_\infty^{(N_2)} \cap \mathfrak{S}_\infty^{(N_1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{A}_j = \{a_1^{(j)} < a_2^{(j)} < \dots\}$. По данному $s \in \mathfrak{S}_\infty$ и натуральному $m \geq \max\{k \mid k \in \text{supp } s\}$ определим элемент $\sigma_m(s) \in \mathfrak{S}_\Pi$ следующим образом:

$$\sigma_m(s) = \prod_{j, q: a_q^{(j)} \in \text{supp } s} (a_q^{(j)} a_{q+m}^{(j)}).$$

Положим

$$s^{(m)} = \sigma_m(s) s \sigma_m(s). \quad (5.1)$$

Расположив в порядке возрастания $a_{i_1}^{(j)} < a_{i_2}^{(j)} < \dots < a_{i_{k_j}}^{(j)}$ элементы множества $\mathbb{A}_j \cap \text{supp } s$, определим подстановку

$$\tau_m^{(m+k)} = \prod_j (a_{i_1+m}^{(j)} a_{i_1+m+k}^{(j)}) \cdot (a_{i_2+m}^{(j)} a_{i_2+m+k}^{(j)}) \cdots (a_{i_{k_j}+m}^{(j)} a_{i_{k_j}+m+k}^{(j)}). \quad (5.2)$$

Так как при любом натуральном k

$$\sigma_{m+k}(s) = \tau_m^{(m+k)} \sigma_m(s) (\tau_m^{(m+k)})^{-1}, \quad (5.3)$$

а $m \geq \max\{k \mid k \in \text{supp } s\}$, то для произвольных $g, h \in \mathfrak{S}_\infty$ последовательность $(T(s^{(k)})T(g)\xi_i, T(h)\xi_i)$ стабилизируется. А именно,

$$(T(s^{(k)})T(g)\xi_i, T(h)\xi_i) = (T(s^{(j)})T(g)\xi_i, T(h)\xi_i) \\ \text{при всех } j, k > \max\{N_i, \max\{l \mid l \in \text{supp } s \cup \text{supp } g \cup \text{supp } h\}\}.$$

Следовательно, при всех $\eta \in [T(\mathfrak{S}_\infty)\xi_i]$, $i = 1, 2$, существует слабый предел

$$A_i(s)\eta = w\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} T(s^{(k)})\eta.$$

Отсюда, учитывая, что T – факторпредставление и для ортогонального проектора E' из коммутанта любого фактора $\mathcal{M}$ отображение $a \in \mathcal{M} \mapsto mE' \in E'\mathcal{M}E'$ является изоморфизмом, получаем существование слабого предела

$$A(s)\eta = w\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} T(s^{(k)})\eta$$

уже при всех $\eta \in \mathcal{H}_T$. Более того, используя конструкцию $s^{(k)}$, легко понять, что $A(s)$ – скалярный оператор:

$$A(s) = a(s)\mathcal{I}, \quad \text{где } \mathcal{I} \text{ – единичный оператор в } \mathcal{H}_T, \quad a(s) \in \mathbb{C}. \quad (5.4)$$

По этой же причине для $s \in \mathfrak{S}_\infty^{(N_i)}$ при всех k получаем

$$(T(s)\xi_i, \xi_i) = (T(s^{(k)})\xi_i, \xi_i) = a(s). \quad (5.5)$$

Для доказательства неприводимости, опираясь на теорему мультипликативности и следствие 1, достаточно показать, что для независимых элементов $g, h \in \mathfrak{S}_\infty^{(N_i)}$ имеет место соотношение

$$(T(gh)\xi_i, \xi_i) = (T(g)\xi_i, \xi_i)(T(h)\xi_i, \xi_i). \quad (5.6)$$

При $m > \max\{l \mid l \in \text{supp } g\}$ из определения $\sigma_m(h)$ вытекает следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} (T(gh)\xi_i, \xi_i) &= (T(\sigma_m(h)gh\sigma_m(h))\xi_i, \xi_i) = (T(g\sigma_m(h)h\sigma_m(h))\xi_i, \xi_i) \\ &\stackrel{(5.4)}{=} a(h)(T(g)\xi_i, \xi_i). \end{aligned}$$

Отсюда, замечая, что $a(h) = (T(h)\xi_i, \xi_i)$, получаем (5.6).

Для разбиения $\Pi = (\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n)$ обозначим через $\Pi^{(N_\infty)}$ разбиение множества $\{i \in \mathbb{N} : i > N\}$ на подмножества $\mathbb{A}_j^{(N_\infty)} = \mathbb{A}_j \cap \{i \in \mathbb{N} : i > N\}$.

Разбиения натурального ряда Π и $\tilde{\Pi}$ на бесконечные части назовем *эквивалентными*, если существует натуральное N , для которого $\Pi^{(N_\infty)} = \tilde{\Pi}^{(N_\infty)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если данное факторпредставление T группы $\mathfrak{S}_\infty$ является допустимым по отношению к подгруппе $\mathfrak{S}_\Pi$ (принадлежит классу $\mathfrak{A}_\Pi$), то T также допустимо относительно подгруппы $\mathfrak{S}_{\tilde{\Pi}}$ (принадлежит классу $\mathfrak{A}_{\tilde{\Pi}}$) при любом разбиении $\tilde{\Pi}$, эквивалентном Π . Иными словами, $\mathfrak{A}_\Pi = \mathfrak{A}_{\tilde{\Pi}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Глубиной $\text{depth}(T)$ представления $T \in \mathfrak{A}_\Pi$ будем называть наименьшее из целых неотрицательных чисел d , удовлетворяющих условию: найдется разбиение $\tilde{\Pi} = (\tilde{\mathbb{A}}_1, \dots, \tilde{\mathbb{A}}_n)$, эквивалентное Π и такое, что в $\mathcal{H}_T$ существуют ненулевые неподвижные векторы относительно операторов из $T(\mathfrak{S}_\infty^{(d)} \cap \mathfrak{S}_{\tilde{\Pi}})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Понятно, что это определение инвариантно относительно эквивалентности разбиений. Иными словами, меняя Π на эквивалентное разбиение, мы получим для данного факторпредставления то же самое значение глубины. Поэтому будем далее предполагать, заменяя в случае необходимости разбиение Π на эквивалентное, что в пространстве, где действует факторпредставление $T \in \mathfrak{A}_\Pi$, существуют ненулевые векторы, неподвижные относительно операторов из $T(\mathfrak{S}_\infty^{(d)} \cap \mathfrak{S}_\Pi)$, где d – глубина представления T .

С помощью следующих результатов мы приведем представление $T \in \mathfrak{A}_\Pi$ к явной реализации, которая дана в теореме 9.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. Пусть $T \in \mathfrak{A}_\Pi$, d – глубина T и ξ – единичный вектор, неподвижный относительно операторов $T(\mathfrak{S}_\infty^{(d)} \cap \mathfrak{S}_\Pi)$. Если $s \notin \mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}$, то подпространства $[T(\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)})\xi]$ и $[T(s\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)})\xi]$ ортогональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через X пространство двойных классов смежности группы $\mathfrak{S}_\infty$ по подгруппе $\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}$; X естественно отождествим с множеством $\{0, 1, 2, \dots, d\}$. А именно, рассматривая неединичный класс $x \in X$ как подмножество в $\mathfrak{S}_\infty$, можно найти в x элемент $\omega_k \in \mathfrak{S}_\infty$ вида $\omega_k = (1 \ d+1)(2 \ d+2) \cdots (k \ d+k)$, где $k = 1, 2, \dots, d$, а ω_0 – единица группы. Следовательно, любой $s \notin \mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}$ записывается в виде

$$s = s_1 s_2 \omega_k t_1 t_2, \quad \text{где } s_1, t_1 \in \mathfrak{S}_d, \ s_2, t_2 \in \mathfrak{S}_\infty^{(d)}.$$

Таким образом, для доказательства предложения достаточно установить, что при $k > 0$ и произвольных $g, h \in \mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}$ справедливо равенство

$$(T(\omega_k)T(g)\xi, T(h)\xi) = 0. \quad (5.7)$$

Так как при $j \geq 1$ $g^{-1}(d+j) > d$, то для произвольных $n_j > d$ таких, что n_j и $g^{-1}(d+j) > d$ принадлежат одному и тому же элементу разбиения $\mathbb{A}_{l_j}$, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} (T(\omega_k)T(g)\xi, T(h)\xi) &= (T(g)T((g^{-1}(1) \ g^{-1}(d+1)))T((g^{-1}(2) \ g^{-1}(d+2))) \\ &\quad \cdots T((g^{-1}(k) \ g^{-1}(d+k)))\xi, T(h)\xi) \\ &= (T(g)T((g^{-1}(1) \ g^{-1}(d+1)))T((g^{-1}(2) \ g^{-1}(d+2))) \\ &\quad \cdots T((g^{-1}(k) \ g^{-1}(d+k)))T((g^{-1}(d+1) \ n_1))T((g^{-1}(d+2) \ n_2)) \\ &\quad \cdots T((g^{-1}(d+k) \ n_k))\xi, T(h)\xi). \end{aligned}$$

Отсюда, замечая, что $(a \ b)(b \ c) = (a \ c)(a \ b)$, получаем

$$\begin{aligned} (T(\omega_k)T(g)\xi, T(h)\xi) &= (T(g)T((g^{-1}(1) \ n_1))T((g^{-1}(2) \ n_2)) \\ &\quad \cdots T((g^{-1}(k) \ n_k))T((g^{-1}(1) \ g^{-1}(d+1)))T((g^{-1}(2) \ g^{-1}(d+2))) \\ &\quad \cdots T((g^{-1}(k) \ g^{-1}(d+k)))\xi, T(h)\xi). \end{aligned}$$

Переходя в последнем равенстве последовательно к пределам $n_j \rightarrow \infty$, $n_j \in \mathbb{A}_{l_j}$, и учитывая (3.7), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} (T(\omega_k)T(g)\xi, T(h)\xi) &= (T(g)P_{g^{-1}(1)}^{(l_1)}P_{g^{-1}(2)}^{(l_2)} \cdots P_{g^{-1}(k)}^{(l_k)}T((g^{-1}(1) \ g^{-1}(d+1))) \\ &\quad \times T((g^{-1}(2) \ g^{-1}(d+2))) \cdots T((g^{-1}(k) \ g^{-1}(d+k)))\xi, T(h)\xi). \end{aligned}$$

Теперь в силу следствия 2 имеем

$$\begin{aligned} (T(\omega_k)T(g)\xi, T(h)\xi) &= (P_1^{(l_1)}P_2^{(l_2)} \cdots P_k^{(l_k)}T(g)T((g^{-1}(1) \ g^{-1}(d+1))) \\ &\quad \times T((g^{-1}(2) \ g^{-1}(d+2))) \cdots T((g^{-1}(k) \ g^{-1}(d+k)))\xi, T(h)\xi) \\ &= (T(g)T((g^{-1}(1) \ g^{-1}(d+1)))T((g^{-1}(2) \ g^{-1}(d+2))) \\ &\quad \cdots T((g^{-1}(k) \ g^{-1}(d+k)))\xi, T(h)P_{h^{-1}(1)}^{(l_1)}P_{h^{-1}(2)}^{(l_2)} \cdots P_{h^{-1}(k)}^{(l_k)}\xi). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что d – глубина представления T , множество $h(\{1, 2, \dots, d\})$ совпадает с $\{1, 2, \dots, d\}$, а вектор ξ неподвижен относительно операторов из $T(\mathfrak{S}_\infty^{(d)} \cap \mathfrak{S}_\Pi)$, получаем, опираясь на лемму 2, что

$$P_{h^{-1}(1)}^{(l_1)}P_{h^{-1}(2)}^{(l_2)} \cdots P_{h^{-1}(k)}^{(l_k)}\xi = 0.$$

Соотношение (5.7) доказано.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $T \in \mathfrak{A}_\Pi$, d – глубина представления T , ξ – ненулевой вектор из $\mathcal{H}_T$, неподвижный относительно операторов $T(\mathfrak{S}_\infty^{(d)} \cap \mathfrak{S}_\Pi)$, и $\mathcal{H}_T = [T(\mathfrak{S}_\infty)\xi]$. Тогда

$$[T(\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)})\xi] = \{\eta \in \mathcal{H}_T : P_i^{(j)}\eta = 0 \text{ при всех } i = 1, 2, \dots, d; j = 1, 2, \dots, n\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольных $s \in \mathfrak{S}_d$, $t \in \mathfrak{S}_\infty^{(d)}$ рассмотрим вектор $\eta = T(s)T(t)\xi$. Применяя следствие 2, получаем при $i \leq d$

$$P_i^{(j)}\eta = T(st)P_{s^{-1}(i)}^{(j)}\xi.$$

Так как d – глубина представления T , то из леммы 2 вытекает, что $P_{s^{-1}(i)}^{(j)}\xi = 0$.

Теперь предположим, что

$$P_i^{(j)}\eta = 0 \quad \text{при всех } i = 1, 2, \dots, d, j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.8)$$

Повторяя аргументы, изложенные в начале доказательства предложения 15, и используя введенные там обозначения, найдем элементы $g_{i_k}^{(k)} \in \mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}$, $k = 1, \dots, d$, где при каждом k индекс i_k пробегает множество всех натуральных чисел, со свойствами:

- а) множества $\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}$, $g_{i_k}^{(k)} \omega_k \mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}$ попарно не пересекаются;
- б) $\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)} \cup (\bigcup_{k=1}^d \bigcup_{i_k \in \mathbb{N}} g_{i_k}^{(k)} \omega_k \mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}) = \mathfrak{S}_\infty$.

Отсюда, учитывая предложение 15, получаем, что подпространства

$$\mathcal{H}_0 = [T(\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)})\xi], \quad \mathcal{H}_{i_k}^{(k)} = [T(g_{i_k}^{(k)} \omega_k \mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)})\xi], \quad k = 1, \dots, d, \quad i_k \in \mathbb{N}, \quad (5.9)$$

попарно ортогональны и

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_0 \oplus \bigoplus_{k=1}^d \bigoplus_{i_k=1}^{\infty} \mathcal{H}_{i_k}^{(k)}.$$

Вектор η из (5.8) представим в виде

$$\eta = \eta_0 + \sum \eta_{i_k}^{(k)}, \quad \text{где } \eta_0 \in \mathcal{H}_0, \quad \eta_{i_k}^{(k)} \in \mathcal{H}_{i_k}^{(k)}. \quad (5.10)$$

В начале доказательства мы показали, что $P_i^{(j)}\zeta = 0$ при $i = 1, 2, \dots, d$ для всех j и $\zeta \in \mathcal{H}_0$. Отсюда при условии $(g_{i_k}^{(k)} \omega_k)^{-1}(i) \leq d$ получаем

$$P_i^{(j)}\zeta = 0 \quad \text{для всех } j \text{ и } \zeta \in \mathcal{H}_{i_k}^{(k)} = [T(g_{i_k}^{(k)} \omega_k \mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)})\xi]. \quad (5.11)$$

Более того, в силу следствия 2 при $(g_{i_k}^{(k)} \omega_k)^{-1}(i) > d$ из (5.9) и (3.7) вытекает, что

$$P_i^{(j)}\mathcal{H}_{i_k}^{(k)} \subset \mathcal{H}_{i_k}^{(k)}.$$

Отсюда и из (5.8) для $i = 1, 2, \dots, d$, $k = 1, 2, \dots, d$ и всех i_k получаем

$$P_i^{(j)}\eta_{i_k}^{(k)} = 0. \quad (5.12)$$

Следовательно, если мы докажем при $k = 1, 2, \dots, d$ для всех i_k , $s \in \mathfrak{S}_d$ и $t \in \mathfrak{S}_\infty^{(d)}$, что справедливо равенство

$$(\eta_{i_k}^{(k)}, T(g_{i_k}^{(k)} \omega_k)T(s)T(t)\xi) = 0, \quad (5.13)$$

то, опираясь на (5.9), получим, что $\eta_{i_k}^{(k)} = 0$. Из последнего соотношения будет следовать утверждение нашей теоремы.

Для обоснования (5.13) зафиксируем $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, удовлетворяющее условию

$$j_k = (g_{i_k}^{(k)} \omega_k st)^{-1}(i) > d. \quad (5.14)$$

Далее замечаем, что при $j_k \in \mathbb{A}_j$ из определения $P_i^{(j)}$ (см. (3.7)) вытекает соотношение $P_{j_k}^{(j)} \xi = \xi$. Отсюда, опираясь на (5.14), получаем

$$\begin{aligned} (\eta_{i_k}^{(k)}, T(g_{i_k}^{(k)} \omega_k) T(s) T(t) \xi) &= (\eta_{i_k}^{(k)}, T(g_{i_k}^{(k)} \omega_k) T(s) T(t) P_{j_k}^{(j)} \xi) \\ &= (P_i^{(j)} \eta_{i_k}^{(k)}, T(g_{i_k}^{(k)} \omega_k) T(s) T(t) \xi) \stackrel{(5.12)}{=} 0. \end{aligned}$$

Равенство (5.13) доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Представления из $\mathfrak{A}_\Pi$ имеют тип I.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть d – глубина представления $T \in \mathfrak{A}_\Pi$. Без ограничения общности можно считать, что T действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с циклическим вектором ξ и $T(s)\xi = \xi$ для всех $s \in \mathfrak{S}_\infty^{(d)} \cap \mathfrak{S}_\Pi$. В силу теоремы 8 проектор E на подпространство $[T(\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)})\xi]$ принадлежит w^* -алгебре $T(\mathfrak{S}_\infty)''$. Отсюда и из предложения 15 получаем, что w^* -алгебра $ET(\mathfrak{S}_\infty)''E$ совпадает с $ET(\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)})''$. Следовательно, $ET(\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)})''$ – фактор. В силу следствия 1 получаем, что алгебра $ET(\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)})''$ – фактор типа I.

Так как факторпредставление типа I квазиэквивалентно (кратно) неприводимому, то, учитывая следствие 4, мы будем предполагать, что рассматриваемые представления из $\mathfrak{A}_\Pi$ неприводимы.

Теперь сформулируем главный результат этого параграфа⁶.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть T – неприводимое представление из $\mathfrak{A}_\Pi$, а d – его глубина. Тогда существуют неприводимое представление $\mathcal{R}$ подгруппы $\mathfrak{S}_d \subset \mathfrak{S}_\infty$ и неприводимое представление $\mathcal{S}$ подгруппы $\mathfrak{S}_\infty^{(d)}$ с неподвижным ненулевым вектором относительно операторов из $\mathcal{S}(\mathfrak{S}_\infty^{(d)} \cap \mathfrak{S}_\Pi)$ такие, что T индуцировано представлением $\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ подгруппы $\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ξ и E такие же, как в доказательстве следствия 4, где мы заметили, что алгебры $ET(\mathfrak{S}_\infty)''E$ и $ET(\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)})''$ совпадают, а $E \in T(\mathfrak{S}_\infty)''$. Следовательно, из неприводимости T вытекает неприводимость представления T_E подгруппы $\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}$, образованного операторами $T_E(s) = ET(s)E$, $s \in \mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}$. В качестве представления $\mathcal{R}$ можно взять сужение T_E на подгруппу $\mathfrak{S}_d$, действующее в подпространстве $[T(\mathfrak{S}_d)\xi]$. Представление $\mathcal{S}$ – сужение T_E на подгруппу $\mathfrak{S}_\infty^{(d)}$, действующее в подпространстве $[T(\mathfrak{S}_\infty^{(d)})\xi]$. В частности, неприводимость $\mathcal{S}$ можно вывести из предложения 14. Тот факт, что $T = \text{Ind}_{\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}}^{\mathfrak{S}_\infty}(\mathcal{R} \otimes \mathcal{S})$, является простым следствием предложения 15 и теоремы 8.

⁶Нетрудно убедиться, опираясь на теорему 1, что теорема 9 эквивалентна теореме 2.

§ 6. Условие унитарной эквивалентности допустимых представлений

В § 5 мы показали, как по неприводимому представлению $T \in \mathfrak{A}_\Pi$ канонически строится триплет $(d, \mathcal{R}, \mathcal{S})$, где d – глубина представления T , $\mathcal{R}$ – неприводимое представление подгруппы $\mathfrak{S}_d \subset \mathfrak{S}_\infty$, а $\mathcal{S}$ – сферическое представление⁷ подгруппы $\mathfrak{S}_\infty^{(d)}$ такой, что $T = \text{Ind}_{\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}}^{\mathfrak{S}_\infty}(\mathcal{R} \otimes \mathcal{S})$. Для этих представлений мы получаем далее естественные условия унитарной эквивалентности.

ТЕОРЕМА 10. *Если оба представления в триplete $(d, \mathcal{R}, \mathcal{S})$ неприводимы, то $T = \text{Ind}_{\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}}^{\mathfrak{S}_\infty}(\mathcal{R} \otimes \mathcal{S})$ – неприводимое представление из $\mathfrak{A}_\Pi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через X пространство левых классов смежности $\mathfrak{S}_\infty / (\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)})$. Пусть $H_{\mathcal{R}}$ и $H_{\mathcal{S}}$ – гильбертовы пространства, в которых действуют представления $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$ соответственно. Тогда T реализуется в пространстве $l^2(X, H_{\mathcal{R}} \otimes H_{\mathcal{S}})$ операторами, действующими согласно соотношению

$$(T(g)f)(x) = (\mathcal{R} \otimes \mathcal{S})(s_{gx}^{-1} g s_x) f(g^{-1}x), \quad (6.1)$$

где $s_x \in \mathfrak{S}_\infty$ принадлежит⁸ классу $x \in X$.

В пространстве $H_{\mathcal{S}}$ возьмем единичный вектор $\xi_{\mathcal{S}}$, неподвижный относительно операторов $\mathcal{S}(\mathfrak{S}_\infty^{(d)} \cap \mathfrak{S}_\Pi)$, и положим

$$\xi(x) = \begin{cases} \eta_{\mathcal{R}} \otimes \xi_{\mathcal{S}}, & \text{если } x = \mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}, \\ 0, & \text{если } x \neq \mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}, \end{cases}$$

где $\eta_{\mathcal{R}}$ – произвольный единичный вектор из $H_{\mathcal{R}}$. В силу условий теоремы

$$[T(\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)})\xi] = \{f \in l^2(H_{\mathcal{R}} \otimes H_{\mathcal{S}}, X) : f(x) = 0 \text{ для всех } x \neq \mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}\}, \quad (6.2)$$

$$[T(\mathfrak{S}_\infty)\xi] = l^2(X, H_{\mathcal{R}} \otimes H_{\mathcal{S}}). \quad (6.3)$$

Пусть $A' \in T(\mathfrak{S}_\infty)'$. Обозначая через $\tilde{g} \in X$ класс, содержащий $g \in \mathfrak{S}_\infty$, и учитывая (6.1)–(6.3), получаем, что подпространства

$$\mathcal{H}_{\tilde{g}} = T(g)[T(\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)})\xi]$$

попарно ортогональны при разных $\tilde{g}$. Если $E_{\tilde{g}}$ – ортогональный проектор на $\mathcal{H}_{\tilde{g}}$, то

$$A' = \sum_{x, y \in X} E_x A' E_y. \quad (6.4)$$

Для $s \in \mathfrak{S}_\infty$ подмножество $s\{1, 2, \dots, d\} \cap \{d+1, d+2, \dots\}$ обозначим через $D(s)$. Понятно, что

$$D(s) = D(sg) \quad \text{при всех } g \in \mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}.$$

Следовательно, множество $\mathbb{S}_\Pi(x) = \{(\mathfrak{S}_\infty^{(d)} \cap \mathfrak{S}_\Pi)x\} \subset X$ бесконечно для любого $x \neq \tilde{e}$. Отсюда и из соотношения

$$E_x A' \xi \stackrel{h \in \mathfrak{S}_\infty^{(d)} \cap \mathfrak{S}_\Pi}{=} E_x A' T(h) \xi = T(h) E_{h^{-1}x} A' \xi$$

⁷Сферичность рассматривается по отношению к подгруппе $\mathfrak{S}_\Pi \cap \mathfrak{S}_\infty^{(d)}$.

⁸Если $x = \mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}$, то s_x – единица e .

при $x \neq \tilde{e}$ и $E_x A' \xi \neq 0$, учитывая (6.4), получаем

$$\|A' \xi\|^2 = \sum_{y \in X} \|E_y A' \xi\|^2 \geq \sum_{y \in \mathfrak{S}_\Pi(x)} \|E_y A' \xi\|^2 = |\mathfrak{S}_\Pi(x)| \|E_x A' \xi\| = \infty.$$

Следовательно,

$$A' \xi = E_{\tilde{e}} A' \xi. \quad (6.5)$$

Отсюда, используя (6.1), (6.2) и неприводимость сужения представления T на подгруппу $\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}$ в подпространстве $[T(\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}) \xi]$, получаем, что $A' E_{\tilde{e}} = a' E_{\tilde{e}}$, где $a' \in \mathbb{C}$. В силу (6.1) $A' = a' I$, где I – единичный оператор в $l^2(X, H_{\mathcal{R}} \otimes H_{\mathcal{S}})$.

ЛЕММА 8. Пусть $\mathcal{R}$ – неприводимое представление подгруппы $\mathfrak{S}_d$ в пространстве $H_{\mathcal{R}}$, $\mathcal{S}$ – неприводимое представление подгруппы $\mathfrak{S}_\infty^{(d)}$ в гильбертовом пространстве $H_{\mathcal{S}}$, где существует единичный вектор $\xi_{\mathcal{S}}$, неподвижный относительно операторов из $\mathcal{S}(\mathfrak{S}_\infty^{(d)} \cap \mathfrak{S}_\Pi)$, и $T = \text{Ind}_{\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_\infty^{(d)}}^{\mathfrak{S}_\infty}(\mathcal{R} \otimes \mathcal{S})$. Если T реализовано в $l^2(X, H_{\mathcal{R}} \otimes H_{\mathcal{S}})$ согласно (6.1), то любой вектор η , неподвижный относительно операторов из $T(\mathfrak{S}_\infty^{(d)} \cap \mathfrak{S}_\Pi)$, удовлетворяет условию $\eta(x) = 0$ для всех $x \neq \tilde{e}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторого $x \neq \tilde{e}$

$$\eta(x) \neq 0. \quad (6.6)$$

В силу (6.1)

$$\eta(h^{-1}x) = (\mathcal{R} \otimes \mathcal{S})(s_x^{-1} h s_{hx}) \eta(x) \quad \text{для всех } h \in \mathfrak{S}_\infty^{(d)} \cap \mathfrak{S}_\Pi.$$

Отсюда, используя обозначения из доказательства теоремы 10 и повторяя изложенные там рассуждения, получаем

$$\|\eta\|_{l^2}^2 = \sum_{y \in X} \|\eta(y)\|_{H_{\mathcal{R}} \otimes H_{\mathcal{S}}}^2 \geq \sum_{y \in \mathfrak{S}_\Pi(x)} \|\eta(y)\|_{H_{\mathcal{R}} \otimes H_{\mathcal{S}}}^2 = \|\eta(x)\|^2 |\mathfrak{S}_\Pi(x)| \stackrel{(6.6)}{=} \infty.$$

Следовательно, $\eta \notin l^2(X, H_{\mathcal{R}} \otimes H_{\mathcal{S}})$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Глубина представления T из леммы 8 равна d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{depth}(T)$ – глубина представления T , а $\Pi = (\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n)$ – разбиение. Из условий на представление T из леммы 8 имеем

$$\text{depth}(T) \leq d.$$

Если $\text{depth}(T) < d$, то согласно определению 2 найдется разбиение $\tilde{\Pi} = (\tilde{\mathbb{A}}_1, \dots, \tilde{\mathbb{A}}_n)$, эквивалентное Π , для которого существует ненулевой вектор

$$\eta \in l^2(X, H_{\mathcal{R}} \otimes H_{\mathcal{S}}),$$

неподвижный относительно операторов из $T(\mathfrak{S}_\infty^{(d-1)} \cap \mathfrak{S}_{\tilde{\Pi}})$. Тогда по той же причине, что и в доказательстве леммы 8,

$$\eta(x) = 0 \quad \text{при } x \neq \tilde{e}.$$

Но это свойство противоречит нашему предположению, а именно неподвижности вектора η относительно оператора $T((dl))$, где d и l принадлежат одному и тому же $\tilde{\mathbb{A}}_j$.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $d, \tilde{d} \in \mathbb{N}$, $\Pi = (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_n)$ – разбиение множества $\mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ и $\tilde{\mathcal{R}}$ – неприводимые представления подгрупп $\mathfrak{S}_d$ и $\mathfrak{S}_{\tilde{d}}$ в пространствах $H_{\mathcal{R}}$ и $H_{\tilde{\mathcal{R}}}$, $\mathcal{S}$ и $\tilde{\mathcal{S}}$ – неприводимые представления подгрупп $\mathfrak{S}_{\infty}^{(d)}$ и $\mathfrak{S}_{\infty}^{(\tilde{d})}$ в пространствах $H_{\mathcal{S}}$ и $H_{\tilde{\mathcal{S}}}$, в которых существуют единичные векторы $\xi_{\mathcal{S}}$ и $\xi_{\tilde{\mathcal{S}}}$, неподвижные относительно операторов из $\mathcal{S}(\mathfrak{S}_{\infty}^{(d)} \cap \mathfrak{S}_{\Pi})$ и $\tilde{\mathcal{S}}(\mathfrak{S}_{\infty}^{(\tilde{d})} \cap \mathfrak{S}_{\Pi})$ соответственно. Если представления

$$T = \text{Ind}_{\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_{\infty}^{(d)}}^{\mathfrak{S}_{\infty}}(\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}), \quad \tilde{T} = \text{Ind}_{\mathfrak{S}_{\tilde{d}} \mathfrak{S}_{\infty}^{(\tilde{d})}}^{\mathfrak{S}_{\infty}}(\tilde{\mathcal{R}} \otimes \tilde{\mathcal{S}})$$

унитарно эквивалентны, то $d = \tilde{d}$, $\mathcal{R}$ унитарно эквивалентно $\tilde{\mathcal{R}}$, а $\mathcal{S}$ унитарно эквивалентно $\tilde{\mathcal{S}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как унитарно эквивалентные представления имеют одинаковую глубину, то в силу следствия 5

$$d = \tilde{d}.$$

Пусть X – пространство левых классов смежности $\mathfrak{S}_{\infty}/(\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_{\infty}^{(d)})$. Обозначим через $\mathcal{W}$ изометрию пространства $l^2(X, H_{\mathcal{R}} \otimes H_{\mathcal{S}})$ на $l^2(X, H_{\tilde{\mathcal{R}}} \otimes H_{\tilde{\mathcal{S}}})$, сплетающую представления T и $\tilde{T}$,

$$\tilde{T}(s)\mathcal{W} = \mathcal{W}T(s), \quad s \in \mathfrak{S}_{\infty}. \quad (6.7)$$

В силу леммы 8 и предложения 6 получаем, что векторы

$$\xi \in l^2(X, H_{\mathcal{R}} \otimes H_{\mathcal{S}}), \quad \tilde{\xi} \in l^2(X, H_{\tilde{\mathcal{R}}} \otimes H_{\tilde{\mathcal{S}}}),$$

неподвижные относительно операторов из $T(\mathfrak{S}_{\infty}^{(d)} \cap \mathfrak{S}_{\Pi})$ и $\tilde{T}(\mathfrak{S}_{\infty}^{(d)} \cap \mathfrak{S}_{\Pi})$ соответственно, имеют вид

$$\xi(x) = \begin{cases} u \otimes \xi_{\mathcal{S}}, & \text{если } x = \tilde{\mathbf{e}}, \\ 0, & \text{если } x \neq \tilde{\mathbf{e}}, \end{cases} \quad \tilde{\xi}(x) = \begin{cases} \tilde{u} \otimes \xi_{\tilde{\mathcal{S}}}, & \text{если } x = \tilde{\mathbf{e}}, \\ 0, & \text{если } x \neq \tilde{\mathbf{e}}, \end{cases}$$

где $u \in H_{\mathcal{R}}$, $\tilde{u} \in H_{\tilde{\mathcal{R}}}$. Следовательно, существует изометрия W пространства $H_{\mathcal{R}}$ на $H_{\tilde{\mathcal{R}}}$ такая, что

$$(\mathcal{W}\xi)(x) = \begin{cases} (Wu) \otimes \xi_{\tilde{\mathcal{S}}}, & \text{если } x = \tilde{\mathbf{e}}, \\ 0, & \text{если } x \neq \tilde{\mathbf{e}}. \end{cases}$$

Отсюда и из (6.7) получаем

$$\tilde{\mathcal{R}}(g)W = W\mathcal{R}(g), \quad g \in \mathfrak{S}_d.$$

По тем же причинам при $s \in \mathfrak{S}_{\infty}^{(d)}$ имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{T}(s)\mathcal{W}\xi, \mathcal{W}\xi) &= (Wu, Wu)_{H_{\tilde{\mathcal{R}}}} \cdot (\tilde{\mathcal{S}}(s)\xi_{\tilde{\mathcal{S}}}, \xi_{\tilde{\mathcal{S}}})_{H_{\tilde{\mathcal{S}}}} \\ &= (T(s)\xi, \xi) = (u, u)_{H_{\mathcal{R}}} \cdot (\mathcal{S}(s)\xi_{\mathcal{S}}, \xi_{\mathcal{S}})_{H_{\mathcal{S}}}. \end{aligned}$$

Так как $(Wu, Wu)_{H_{\mathcal{A}}} = (u, u)_{H_{\mathcal{A}}}$, то

$$(\widetilde{\mathcal{S}}(s)\xi_{\widetilde{\mathcal{S}}}, \xi_{\widetilde{\mathcal{S}}})_{H_{\widetilde{\mathcal{S}}}} = (\mathcal{S}(s)\xi_{\mathcal{S}}, \xi_{\mathcal{S}})_{H_{\mathcal{S}}}$$

для всех $s \in \mathfrak{S}_\infty^{(d)}$. Следовательно, неприводимые представления $\mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}$ группы $\mathfrak{S}_\infty^{(d)}$ также унитарно эквивалентны.

Список литературы

- [1] E. Thoma, “Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe”, *Math. Z.*, **85**:1 (1964), 40–61.
- [2] A. Lieberman, “The structure of certain unitary representations of infinite symmetric groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **164** (1972), 189–198.
- [3] G. I. Ol’shanskii, “On semigroups related to infinite-dimensional groups”, *Topics in representation theory*, Adv. Soviet Math., **2**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 67–101.
- [4] Ю. А. Неретин, *Категории симметрий и бесконечномерные группы*, УРСС, М., 1998; англ. пер.: Yu. A. Neretin, *Categories of symmetries and infinite-dimensional groups*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **16**, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [5] Г. И. Олшанский, “Унитарные представления (G, K) -пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$ ”, *Алгебра и анализ*, **1**:4 (1989), 178–209; англ. пер.: G. I. Olshanski, “Unitary representations of (G, K) -pairs connected with the infinite symmetric group $S(\infty)$ ”, *Leningrad Math. J.*, **1**:4 (1990), 983–1014.
- [6] А. Ю. Окуньков, “Теорема Тома и представления бесконечной бисимметрической группы”, *Функц. анализ и его прил.*, **28**:2 (1994), 31–40; англ. пер.: A. Yu. Okounkov, “Thoma’s theorem and representations of the infinite bisymmetric group”, *Funct. Anal. Appl.*, **28**:2 (1994), 100–107.
- [7] А. Ю. Окуньков, “О представлениях бесконечной симметрической группы”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы*. II, Зап. научн. сем. ПОМИ, **240**, ПОМИ, СПб., 1997, 166–228; англ. пер.: A. Okounkov, “On representations of the infinite symmetric group”, *J. Math. Sci. (New York)*, **96**:5 (1999), 3550–3589.
- [8] A. M. Vershik, S. V. Kerov, “The Grothendieck group of infinite symmetric group and symmetric functions (with the elements of the theory of K_0 -functor of AF-algebras)”, *Representation of Lie groups and related topics*, Adv. Stud. Contemp. Math., **7**, Gordon and Breach, New York, 1990, 39–117.
- [9] А. М. Вершик, Н. И. Нессонов, *Стабильные представления бесконечной симметрической группы*, <http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2010/rus-2010.html>.
- [10] А. М. Вершик, Н. В. Цилевич, “Марковские меры на таблицах Юнга и индуцированные представления бесконечной симметрической группы”, *ТВП*, **51**:1 (2006), 47–63; англ. пер.: A. M. Vershik, N. V. Tsilevich, “Markov measures on Young tableaux and induced representations of an infinite symmetric group”, *Theory Probab. Appl.*, **51**:1 (2007), 211–223.
- [11] N. V. Tsilevich, A. M. Vershik, “Induced representations of the infinite symmetric group”, *Pure Appl. Math. Q.*, **3**:4 (2007), 1005–1026.
- [12] Н. И. Нессонов, “Полная классификация представлений $GL(\infty)$, содержащих единичное представление унитарной подгруппы”, *Матем. сб.*, **130(172)**:2(6) (1986), 131–150; англ. пер.: N. I. Nessonov, “A complete classification of the representations of $GL(\infty)$ containing the identity representation of the unitary subgroup”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:1 (1987), 127–147.

- [13] Н. И. Нессонов, “КМШ-состояния на группе $GL(\infty)$ и допустимые представления $GL(\infty)^X$ ”, *Тр. Санкт-Петерб. МО*, **10** (2004), 117–172; англ. пер.: N. I. Nessonov, “Kubo–Martin–Schwinger states on the group $GL(\infty)$ and admissible representations of $GL(\infty)^X$ ”, *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, v. X, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **214**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 109–165.
- [14] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 1995.

Н. И. Нессонов (N. I. Nessonov)

Физико-технический институт низких температур

им. Б. И. Веркина НАН Украины, г. Харьков

E-mail: n.nessonov@gmail.com

Поступила в редакцию

28.12.2010 и 12.05.2011