Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. О. Шорыгин, Аппроксимативная управляемость системы Навье–Стокса в неограниченных областях, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 11, 141–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm784>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:43:28

УДК 517.977.1

П. О. Шорыгин

Аппроксимативная управляемость системы Навье–Стокса в неограниченных областях

Изучается вопрос об аппроксимативной управляемости для двух- или трехмерной системы Навье–Стокса, заданной во внешности ограниченной области ω или во всем пространстве. Доказана возможность управления решением с помощью граничного или локально распределенного управления, т.е. управления с носителем в заданной ограниченной области, заданного в правой части системы Навье–Стокса, так, что через заданное время решение системы Навье–Стокса будет сколь угодно близким к любому заданному соленоидальному векторному полю.

Библиография: 17 названий.

Введение

Вопросы об управляемости систем Навье–Стокса и Эйлера начали активно исследоваться с начала 90-х годов после того, как Ж.-Л. Лионсом в работе [1] была выдвинута гипотеза о глобальной управляемости системы Навье–Стокса с граничным или локально распределенным управлением.

Точная локальная управляемость системы Навье–Стокса и системы Буссинеска в ограниченной области доказана в работах А. В. Фурсикова, О. Ю. Эмануилова [2]–[5] для управления, распределенного по всей границе или по ее части.

Точная управляемость двумерным уравнением Эйлера в ограниченной области была доказана Ж.-М. Короном в [6]. Позднее этот результат был распространен на случай трехмерного уравнения Эйлера О. Глассом в [7].

Аппроксимативная управляемость двумерной системы Навье–Стокса в ограниченной области с граничными условиями типа проскальзывания установлена в работе Корона [8].

В работе Корона и Фурсикова [9] доказана глобальная точная управляемость системы Навье–Стокса на двумерном многообразии.

В работах Фурсикова [10] и Фурсикова и Эмануилова [11] установлена глобальная точная управляемость систем Навье–Стокса и Буссинеска, заданных в ограниченной области с граничным или локально распределенным управлением.

В настоящей работе используются методы, предложенные в [10], [11] для случая ограниченной области. Основным шагом, как и в [11], является сведение задачи аппроксимативной управляемости для системы Навье–Стокса к задаче управления для некоторой вспомогательной линейной системы первого порядка, коэффициенты которой мы сами и выберем. Однако если в [11] вся конструкция базируется на

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00415).

некоторой достаточно абстрактной теореме существования, то в случае внешности ограниченной области нам удалось заменить эту теорему аналитической конструкцией, основанной на явных формулах.

В § 1 работы приводится постановка задач аппроксимативной управляемости с граничным управлением (в случае, когда задача определена во внешности ограниченной области) и с локально распределенным управлением (когда задача определена во всем пространстве).

Второй параграф работы посвящен построению коэффициентов вспомогательной линейной системы и доказательству управляемости этой системы.

В § 3 мы сводим задачу аппроксимативной управляемости системы Навье–Стокса к задаче аппроксимативной нуль-управляемости для вспомогательной нелинейной системы, которая получена с помощью уже построенного решения линейной задачи. После этого дается доказательство основного результата.

Четвертый параграф посвящен изучению вспомогательной нелинейной системы, доказано существование решения и выведены оценки. Доказательство основано на методе Галёркина, однако оно содержит некоторые дополнительные конструкции, позволяющие оценить производные решения.

Автор выражает глубокую благодарность профессору А. В. Фурсикову за постановку задачи и руководство работой.

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

1.1. Управляемость посредством граничного управления. Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, – ограниченная область с гладкой границей $\partial\omega$ класса C^∞ и задано $T > 0$. Рассматривается смешанная краевая задача для системы Навье–Стокса в области $\mathbb{R}^d \setminus \omega$:

$$\partial_t v(t, x) - \Delta v + (v, \nabla)v + \nabla p = f(t, x), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (2)$$

$$v(t, x)|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \omega, \quad (3)$$

$$v(t, x)|_{\partial\omega} = u(t, x), \quad x \in \partial\omega, \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$|v(t, x) - v_\infty| \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где $t \in [0, T]$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \omega$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_d(t, x))$ – векторное поле скорости течения жидкости, $\nabla p(t, x)$ – градиент давления в жидкости, Δ – оператор Лапласа, $(v, \nabla)v = \sum_{i=1}^d v_i \partial v / \partial x_i$, $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_d(t, x))$ – заданная плотность внешних сил. Начальное условие $v_0(x)$ – заданное бездивергентное векторное поле и задана скорость потока на бесконечности $v_\infty \in \mathbb{R}^d$.

Векторное поле $u(t, x)$, определенное на границе $\partial\omega$, не считается заданным, а является управлением.

Введем необходимые функциональные пространства. Для произвольной области Ω через $H^k(\Omega)$, k – натуральное число, будем обозначать пространство Соболева векторных полей, квадратично суммируемых на области Ω вместе со всеми

производными до порядка k . Положим

$$\begin{aligned} V^k(\Omega) &= \{v(x) = (v_1, \dots, v_d) \in H^k(\Omega) : \operatorname{div} v = 0\}, \\ H^{1,2}((0, T) \times \Omega) &= \{v(t, x) \in L_2(0, T; H^2(\Omega)) : \partial_t v \in L_2(0, T; H^0(\Omega))\}, \\ V^{1,2}((0, T) \times \Omega) &= \{v(t, x) \in L_2(0, T; V^2(\Omega)) : \partial_t v \in L_2(0, T; V^0(\Omega))\}. \end{aligned}$$

Определение пространств Соболева $H^k(\Omega)$ с дробными k см. в [12], [13]. В дальнейшем будем обозначать $V^k \equiv V^k(\mathbb{R}^d)$.

Пусть задано конечное условие $v_1(x)$, которое вместе с начальным векторным полем $v_0(x)$ из (3) удовлетворяет условиям

$$(v_i - v_\infty) \in V^4(\mathbb{R}^d \setminus \omega), \quad \int_{\partial\omega} v_i(x) \cdot n(x) dx = 0, \quad i = 0, 1, \quad (6)$$

где $n(x)$ – нормаль к границе $\partial\omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Задача (1)–(5) для системы Навье–Стокса называется *аппроксимативно управляемой на $(0, T) \times (\mathbb{R}^d \setminus \omega)$ с границы $\partial\omega$* , если для произвольного $\varepsilon > 0$ и любых v_0, v_1 , удовлетворяющих (6), найдутся момент времени $T = T(\varepsilon, v_0, v_1)$ и граничное условие (т.е. управление) $u(t, x) \in L_2(0, T; H^{3/2}(\partial\omega))$ такие, что существует решение $v(t, x)$ краевой задачи (1)–(5), удовлетворяющее включению $(v - v_\infty) \in V^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}^d \setminus \omega)$ и оценке

$$\|v(T, \cdot) - v_1(\cdot)\|_{V^1(\mathbb{R}^d \setminus \omega)} < \varepsilon. \quad (7)$$

Отметим, что решение $v(t, x)$ краевой задачи (1)–(5) при заданных u, f, v_0 единственно в классе $v(t, x) : (v - v_\infty) \in V^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}^d \setminus \omega)$.

Одним из основных результатов данной работы является

ТЕОРЕМА 1.1. Для любых $f(t, x) \in L_2((0, T) \times (\mathbb{R}^d \setminus \omega))$ и $v_0(x), v_1(x)$, удовлетворяющих (6), задача (1)–(5) является аппроксимативно управляемой с границы, причем управление и время $T = T(\varepsilon, v_0, v_1)$ можно выбрать так, что $T(\varepsilon, v_0, v_1) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

1.2. Управляемость посредством локально распределенного управления. Пусть задана $\omega \subset \mathbb{R}^d$ – некоторая ограниченная область. Обозначим $Q_T = (0, T) \times \mathbb{R}^d$, $Q_T^\omega = (0, T) \times \omega$. Рассмотрим систему Навье–Стокса, заданную на Q_T :

$$\partial_t v(t, x) - \Delta v + (v, \nabla)v + \nabla p = f(t, x) + u(t, x), \quad \operatorname{supp} u \subset Q_T^\omega, \quad (8)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (9)$$

$$v(t, x)|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (10)$$

$$|v(t, x) - v_\infty| \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Задача (8)–(11) называется *аппроксимативно управляемой* на Q_T *посредством локально распределенного управления*, если для произвольного $\varepsilon > 0$ и любых v_0, v_1 , удовлетворяющих включению $(v_i - v_\infty) \in V^4$, $i = 0, 1$, найдутся момент времени $T = T(\varepsilon, v_0, v_1)$ и управление $u(t, x) \in L_2(Q_T)$, удовлетворяющее соотношению $\text{supp } u \subset Q_T^\omega$, такие, что существует решение $v(t, x)$ задачи (8)–(11), удовлетворяющее включению $(v - v_\infty) \in V^{1,2}(Q_T)$ и оценке

$$\|v(T, \cdot) - v_1(\cdot)\|_{V^1} < \varepsilon. \quad (12)$$

Отметим, что решение $v(t, x)$ краевой задачи (8)–(11) при заданных u, f, v_0 единственно в классе $v(t, x) : (v - v_\infty) \in V^{1,2}(Q_T)$.

ТЕОРЕМА 1.2. Для любых $f(t, x) \in L_2(Q_T)$ и $v_0(x), v_1(x)$, удовлетворяющих $(v_i - v_\infty) \in V^4$, $i = 0, 1$, задача (8)–(11) является *аппроксимативно управляемой* посредством локально распределенного управления, причем управление и время $T = T(\varepsilon, v_0, v_1)$ можно выбрать так, что $T(\varepsilon, v_0, v_1) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательству этой теоремы посвящена вся работа. Теорема 1.1 следует из теоремы 1.2. Действительно, достаточно, убрав условие (4), продолжить начальное и конечное условия и правую часть задачи (1)–(5) во все $\mathbb{R}^d$ и для полученной задачи вида (8)–(11) построить локально распределенное управление с носителем в Q^ω , обеспечивающее выполнимость условия (12). Ограничение полученного решения $v(t, x)$ системы Навье–Стокса на границу $(0, T) \times \partial\omega$ дает требуемое граничное управление, а ограничение решения на $\mathbb{R}^d \setminus \omega$ дает решение задачи (1)–(5), (7) (см. [11]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В теоремах 1.1 и 1.2 не накладывается условий на малость нормы $\|v_0 - v_1\|_{V^1}$ и $\|f\|_{L_2}$, т.е. решаемая задача не является локальной.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В теоремах 1.1 и 1.2 время T зависит от ε и начального и конечного условий и стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем не менее, оценки (7), (12) можно получить и в произвольный заданный момент времени T . Действительно, достаточно управлять решением на заданном интервале времени так, чтобы решение $v - v_\infty$ существовало в пространстве $V^{1,2}(Q_{T-\tau})$ на этом интервале; на интервале времени $(T - \tau, T)$ так, чтобы приблизиться к конечному условию в момент времени T .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Свойство точной управляемости в неограниченной области не имеет места даже для уравнения теплопроводности. (Как показано в работе [14], для уравнения теплопроводности, заданного на полуограниченном стержне: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $t \in [0, T]$, точной управляемости нет.)

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Некоторые приложения полученных результатов описаны в работе [11], в которой исследована аналогичная задача в случае ограниченной области. Эти приложения оказываются верными и в случае внешности ограниченной области, и в случае всего пространства.

§ 2. Задача управления для линейной системы

2.1. Постановка задачи управления. Рассмотрим следующую линейную

систему:

$$\partial_t z(t, x) + (m(t, x), \nabla)z(t, x) + (z(t, x), \nabla)m(t, x) = u(t, x), \quad \text{supp } u(t, x) \subset Q_T^\omega, \quad (13)$$

$$z(t, x)|_{t=0} = v_0(x). \quad (14)$$

Здесь $(t, x) \in Q_T$, $z(t, x) = (z_1(t, x), \dots, z_d(t, x))$ – неизвестная функция, $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_d(t, x))$ – управление, сосредоточенное в области Q_T^ω . Коэффициенты $m(t, x) = (m_1(t, x), \dots, m_d(t, x))$ являются гладким векторным полем, которое будет выбрано нами ниже так, чтобы следующая задача управления для системы (13), (14) имела решение: для заданных начального и конечного условий $v_0, v_1, v_i \in V^1$, $i = 0, 1$, и заданного $\varepsilon > 0$ требуется найти время T , управление $u(t, x) \in L_2(Q_T)$, $\text{supp } u \subset Q_T^\omega$, и гладкое решение $z(t, x)$ задачи (13), (14) такие, что выполнена оценка

$$\|z(T, \cdot) - v_1(\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon. \quad (15)$$

Без ограничения общности будем считать, что $\omega = B_1 = \{x : |x| < 1\}$. В случае произвольной ω с помощью линейного преобразования координат t, x (растяжения, одинакового по всем осям x_i и по t , а также сдвига) изменим область ω так, чтобы шар B_1 поместился внутрь ω : $B_1 \subset \omega$. После этого построим управление в шаре B_1 , оно будет удовлетворять свойству $\text{supp } u(t, x) \subset (0, T) \times B_1 \subset Q_T^\omega$. Обратное преобразование координат даст решение исходной задачи (13)–(15).

2.2. Построение векторного поля коэффициентов.

ЛЕММА 2.1. Для произвольного вещественного $R > 0$ существуют $T > 0$ и векторное поле $m(t, x) \in (C^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^d))^d$ такие, что справедливы следующие условия:

- 1) $\text{div } m = 0$ при $(t, x) \in Q_T$, $\exists \gamma$: $m = \nabla \gamma$ при $(t, x) \in Q_T \setminus Q_T^\omega$;
- 2) $m(0, x) = m(T, x) = 0$, $\partial_t^k m|_{t=0} = 0$, $\partial_t^k m|_{t=T} = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $x \in \mathbb{R}^d$, где $\partial_t^k = \partial^k / \partial t^k$;
- 3) для произвольного $x_0 \in B_R = \{x : |x| < R\}$ выполнено соотношение

$$\{(t, x(t, x_0)), t \in [0, T]\} \cap Q_T^\omega \neq \emptyset, \quad (16)$$

где $x(t, x_0)$ – решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt}x(t, x_0) = m(t, x(t, x_0)), \quad x(t, x_0)|_{t=0} = x_0, \quad (17)$$

причем $x(t, x_0)|_{t=T} = x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предъявим явный вид векторного поля $m(t, x)$, для которого выполнены условия 1) и 2) леммы, а условие 3) выполнено для некоторой подобласти шара B_R .

Построение начнем с выбора гармонической в $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ функции $\gamma(x)$:

$$\gamma(x) = \frac{x_1}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \gamma(x) = \frac{x_1}{|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (18)$$

где $x = (x_1, \dots, x_d)$. Прямая проверка показывает, что $\Delta\gamma = 0$ при $|x| > 0$.

Вне шара $B_{1/2} = \{x : |x| < \frac{1}{2}\}$ определим поле $\hat{m}(x)$ следующим образом: $\hat{m}(x) = \nabla\gamma(x)$. Выпишем $\hat{m}(x)$ в явном виде, используя выражения для γ (18):

$$\begin{aligned}\hat{m}(x) &= (\hat{m}^1(x), \hat{m}^2(x), \hat{m}^3(x)) \\ &= \frac{1}{|x|^5}(-2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, -3x_1x_2, -3x_1x_3), \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ \hat{m}(x) &= (\hat{m}^1(x), \hat{m}^2(x)) = \frac{1}{|x|^4}(-x_1^2 + x_2^2, -2x_1x_2), \quad x \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}\tag{19}$$

Заметим, что $\operatorname{div} \hat{m}(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^d \setminus B_{1/2}$, так как $\Delta\gamma = 0$ на этом множестве.

Продолжим векторное поле $\hat{m}(x)$ внутрь области $B_{1/2}$ так, что для продолженной функции $\hat{m}_{np}(x)$ будет выполнено условие $\operatorname{div} \hat{m}_{np} = 0$ во всем $\mathbb{R}^d$. Такое продолжение возможно в силу $\int_{|x|=r} \hat{m}(x) \cdot n \, ds = 0$ [15], причем продолженное векторное поле $\hat{m}_{np}$ является гладким.

Найдем фазовые кривые системы $\dot{x}(t) = \hat{m}_{np}(x(t))$ во внешности шара $B_{1/2}$. Заметим, что так как направление градиента $\nabla\gamma$ перпендикулярно поверхности уровня $\gamma(x) = \operatorname{const}$, то в силу $\hat{m}_{np} = \nabla\gamma$ достаточно построить линии, перпендикулярные поверхностям $\gamma(x) = \operatorname{const}$, это и будут искомые фазовые кривые.

В двумерном случае линии уровня $\gamma(x) = \operatorname{const}$ в полярных координатах имеют вид $r = c \cos \varphi$. Это окружности с центрами на оси x_1 , пересекающие начало координат. Перпендикулярные им линии – это также семейство окружностей, задающееся формулой $r = c \sin \varphi$, с центрами на оси x_2 , проходящих через начало координат. Учитывая явный вид (19) для $\hat{m}(x)$ во внешности шара $B_{1/2}$ и взяв, например, $x_1 = 0$, получим, что движение по фазовым кривым будет происходить по часовой стрелке при $x_2 > 0$ и против часовой стрелки при $x_2 < 0$, это показано на рис. 1. Явный вид фазовых кривых в координатах (x_1, x_2) : $x_1^2 + x_2^2 = cx_2$.

В трехмерном случае поверхность уровня $\gamma(x) = \operatorname{const}$ задается уравнением $r^2 = c \cos \varphi$, где φ – угол между радиус-вектором и осью x_1 . Таким образом, поверхность уровня является поверхностью, образованной вращением некоторой фигуры вокруг оси x_1 . А значит, достаточно рассмотреть, что происходит в сечении плоскостью $x_3 = cx_2$. В этом сечении ситуация аналогична двумерному случаю. Единственное отличие – вместо окружностей будут кривые, заданные уравнением $r^2 = c \cos \varphi$. Явный вид фазовых кривых для трехмерного случая в координатах (x_1, x_2, x_3) следующий: $x_3 = cx_2$, $x_2^2 = c'(x_1^2 + (c^2 + 1)x_2^2)^{3/2}$, где постоянные c, c' определяются начальными данными $x(0) = x_0$.

Через O обозначим множество, образованное пересечением конуса $\{x : x_1^2 > \frac{1}{4}(x_2^2 + x_3^2)\}$ с областью $\{x : 1 < |x| < R, x_1 > 0\}$. Для двумерного случая – это пересечение конуса $\{x : x_1^2 > \frac{1}{4}x_2^2\}$ и области $\{x : 1 < |x| < R, x_1 > 0\}$. (На рис. 1 представлена эта область O для двумерного случая.)

Оценим теперь время, за которое любая точка, движущаяся по траектории $x(t)$ и вышедшая из множества O , побывает внутри области B_1 , т. е.

$$T_0 = \sup_{x_0 \in O} (\inf \{t : x(t, x_0) \in B_1\}).$$

 Рис. 1. Область O в двумерном случае и фазовые кривые $x(t)$

Для этого рассмотрим dr/dt , где $r = |x|$. Из (19) получим, что

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-2x_1}{r^4}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{-x_1}{r^3}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Из условий $x_1^2 > \frac{1}{4}(x_2^2 + x_3^2)$ и $r > 1$ для области O ($x_1^2 > \frac{1}{4}x_2^2$ и $r > 1$ в двумерном случае) получаем, что $x_1 > (1/\sqrt{5})r$. Поэтому из $r < R$ получаем, что $|dr/dt| \geq 2/(\sqrt{5}R^3)$ (в двумерном случае $|dr/dt| \geq 1/(\sqrt{5}R^2)$).

Значит, время T_0 , за которое точка, вышедшая из O , побывает внутри B_1 (а значит, r изменится от некоторого $r_0 \leq R$ до 1), конечно и оценивается следующим образом:

$$T_0 \leq \sqrt{5}(R-1)R^d.$$

Таким образом, все точки области O при движении по фазовым кривым $\dot{x} = \hat{m}_{np}(x)$ за конечное время T_0 побывают внутри B_1 .

Изменим теперь векторное поле $\hat{m}_{np}(x)$ так, чтобы оно удовлетворяло также и условию 2) леммы. Для этого домножим $\hat{m}_{np}(x)$ на функцию $\psi(t) \in C_0^\infty(0, T_0 + 2\delta)$ следующего вида (δ – некоторое фиксированное число):

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left(0, \frac{\delta}{2}\right); \\ 1, & t \in (\delta, T_0 + \delta); \\ 0, & t \in \left(T_0 + \frac{3}{2}\delta, T_0 + 2\delta\right). \end{cases}$$

Векторное поле $m_1(t, x) = \hat{m}_{np}(x)\psi(t)$ удовлетворяет условию 2) леммы с $T_1 = T_0 + 2\delta$. При этом условие 1) леммы, очевидно, остается справедливым. Условие (16) также выполнено для множества O , так как $\psi(t) = 1$ на интервале

длины T_0 , а за это время все точки, движущиеся из множества O по траекториям системы (17), побывают внутри B_1 .

Для множества $B_R \setminus B_1$ мы построим конечное покрытие областями O_i , полученными с помощью поворотов области O вокруг начала координат. В двумерном случае нам потребуется 4 таких области (см. рис.1), по паре симметричных относительно начала координат для каждой оси. Они получаются поворотами области O относительно начала координат на углы $\pi/2, \pi, 3\pi/2$. В трехмерном случае мы построим 6 областей при помощи поворотов области O на $\pi/2$ вокруг осей x_2, x_3 и симметрий полученных трех областей относительно начала координат. Конусы $\{x : x_1^2 > \frac{1}{4}(x_2^2 + x_3^2)\}, \{x : x_2^2 > \frac{1}{4}(x_1^2 + x_3^2)\}, \{x : x_3^2 > \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)\}$, определяющие области O_1 – O_6 , покрывают все $\mathbb{R}^d$. Действительно, это следует из утверждения, что прямые $x_1 = \pm x_2 = \pm x_3$, наиболее удаленные от осей всех трех конусов, принадлежат каждому из конусов. Поэтому указанных шести областей достаточно для покрытия $B_R \setminus B_1$.

Определим $m_i(t, x)$, соответствующие множествам O_i , таким же образом, как мы определили выше $m_1(t, x)$ для O_1 , т.е. так, что выполняются условия 1) и 2) леммы и условие (16) для области O_i .

Чтобы условие 3) леммы было выполнено для всего шара B_R с единым $m(t, x)$, построим $m(t, x)$ следующим образом: положим

$$\tilde{m}_i(t, x) = \begin{cases} m_i(t, x), & t \in (0, T_1); \\ -m_i(2T_1 - t, x), & t \in (T_1, 2T_1); \\ 0, & t < 0, t > 2T_1, \end{cases} \quad i = 1, \dots, 2d, \quad (20)$$

$$m(t, x) = \sum_{i=1}^{2d} \tilde{m}_i(t - 2T_1(i-1), x), \quad T = 4dT_1.$$

Для построенного $m(t, x)$ любая траектория, выходящая из произвольной точки $x_0 \in \mathbb{R}^d$ и заданная уравнением (17), вернется к исходной точке: $x(t, x_0)|_{t=T} = x_0$ по построению $m(t, x)$ (20). А траектории, выходящие из $x_0 \in B_R$, побывают внутри шара B_1 хотя бы один раз за время $T = 4dT_1$. Лемма доказана.

2.3. Доказательство управляемости линейной системы.

ЛЕММА 2.2. Для задачи управления (13)–(15) с $m(t, x)$, заданным в лемме 2.1, где R выбрано столь большим, что $\|v_i(\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^d \setminus B_R)} < \varepsilon/2$, $i = 0, 1$, решение существует, причем $z(t, \cdot) \in H^k(\mathbb{R}^d)$, если $v_i \in V^k$, $i = 0, 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in B_R$, T – момент времени, а $m = m(t, x)$ – векторное поле из леммы 2.1. В силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий из (16) следует, что у любой точки $\xi \in B_R$ существуют окрестность $\mathcal{O}(\xi)$ и отрезок времени Δ_ξ конечной длины, в течение которого все траектории $x(t, x_0)$ системы (17), где $x_0 \in \mathcal{O}(\xi)$, одновременно находятся в области ω . Из покрытия $\{\mathcal{O}(\xi), \xi \in B_R\}$ выберем конечное подпокрытие $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_K$ шара B_R и соответствующие отрезки времени

$$\Delta_i = (\tau_{i,0}, \tau_{i,1}), \quad \{(t, x(t, x_0)) : t \in \Delta_i, x_0 \in \mathcal{O}_i\} \subset Q_T^\omega, \quad i = 1, \dots, K. \quad (21)$$

Добавим в это покрытие область $\mathcal{O}_0$, которая соответствует внешности шара B_R , и обозначим $\varphi_i(x)$, $i = 0, \dots, K$, – разбиение единицы, подчиненное построенному покрытию $\{\mathcal{O}_i\}$, причем в силу непрерывности будем считать, что (21) выполнено для всех $x_0 \in \text{supp } \varphi_i$, $i = 1, \dots, K$.

Будем строить решение следующей задачи *точной* управляемости внутри каждого из множеств $\text{supp } \varphi_i$, $i = 1, \dots, K$:

$$\partial_t z_i(t, x) + (m, \nabla) z_i + (z_i, \nabla) m = u_i(t, x), \quad (22)$$

$$z_i(t, x)|_{t=0} = v_0(x) \varphi_i(x), \quad (23)$$

$$z_i(t, x)|_{t=T} = v_1(x) \varphi_i(x). \quad (24)$$

Построение таких z_i , u_i , $i = 1, \dots, K$, полностью повторяет соответствующее построение в работе [11]. Мы рассматриваем решения задач (22), (23) и (22), (24) с нулевой правой частью в (22) на траекториях $x(t, x_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}^d$, а $x(t, x_0)$ – решение (17): $z_i(t, x(t, x_0))$. Тогда системы (22), (23) и (22), (24) принимают вид линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых мы находим решения. Домножая полученные решения систем (22), (23) и (22), (24) на гладкие функции

$$\chi_i^0(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, \tau_{i,0}); \\ 0, & t \in \left(\frac{\tau_{i,0} + \tau_{i,1}}{2}, T\right), \end{cases} \quad \chi_i^1(t) = \begin{cases} 1, & t \in (\tau_{i,1}, T); \\ 0, & t \in \left(0, \frac{\tau_{i,0} + \tau_{i,1}}{2}\right) \end{cases}$$

соответственно и складывая, получаем векторное поле $z_i(t, x)$, которое удовлетворяет (23) и (24). Подставляя $z_i(t, x)$ в левую часть (22), находим $u_i(t, x)$, причем из (21) получаем, что $\text{supp } u_i \subset Q_T^\omega$ (см. [11; док-во теоремы 6.1]).

Для $\text{supp } \varphi_0$ (внешности ограниченной области) построим решение $z_0(t, x)$ задачи (22), (23) с $i = 0$. Так же, как и при построении z_i , $i = 1, \dots, K$, рассмотрим систему (22), (23) с $i = 0$ на траекториях $x(t, x_0)$. Получим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая из построения $m(t, x)$ (20) обладает следующим свойством: $z_0(T, x(T, x_0)) = z_0(0, x_0)$. А из условия $x(T, x_0) = x_0$ получим, что $z_0(T, x) = z_0(0, x) = v_0(x) \varphi_0(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^d$.

Построим решение задачи управления (13)–(15) следующим образом:

$$z(t, x) = z_0(t, x) + \sum_{i=1}^K z_i(t, x), \quad u(t, x) = \sum_{i=1}^K u_i(t, x), \quad \text{supp } u \subset Q_T^\omega.$$

При этом получаем, что

$$z|_{t=0} = v_0, \quad z|_{t=T} = v_1(x)(1 - \varphi_0(x)) + v_0(x) \varphi_0(x).$$

Отсюда с учетом условия $\|v_i\|_{H^1(\mathbb{R}^d \setminus B_R)} < \varepsilon/2$, $i = 0, 1$, получаем

$$\begin{aligned} \|z(T, \cdot) - v_1(\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &= \|(v_0(\cdot) - v_1(\cdot)) \varphi_0(\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|v_0(\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^d \setminus B_R)} + \|v_1(\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^d \setminus B_R)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, построено управление $u(t, x)$ такое, что выполнено условие аппроксимативной управляемости (15). Утверждение леммы, что $z(t, \cdot) \in H^k(\mathbb{R}^d)$, следует из гладкости $\chi_i^j(t)$, $j = 0, 1$, $\varphi_i(\xi)$, $m(t, x)$ и условия $v_j \in V^k$, $j = 0, 1$.

2.4. Линейная система с условием соленоидальности. Рассмотрим следующую задачу:

$$\partial_t z + (m, \nabla)z + (z, \nabla)m + \nabla q = u(t, x), \quad \text{supp } u \subset Q_T^\omega, \quad (25)$$

$$\text{div } z = 0, \quad z|_{t=0} = v_0(x), \quad (t, x) \in Q_T. \quad (26)$$

ЛЕММА 2.3. *Для задачи управления (25), (26), (15) с $m(t, x)$, заданным в лемме 2.1, где R выбрано столь большим, что $\|v_i(\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^d \setminus B_R)} < \varepsilon/2$, $i = 0, 1$, решение существует, причем $z(t, \cdot) \in V^k$, если $v_i \in V^k$, $i = 0, 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство соответствующего утверждения в работе [11]. Пусть $\hat{z}(t, x)$, $\hat{u}(t, x)$ – решение задачи управления (13)–(15), полученное в лемме 2.2. Запишем для $\hat{z}$ разложение Вейля: $\hat{z} = z + \nabla p$, $\text{div } z = 0$, где $p(t, \cdot) \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $\nabla p(t, \cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $z \in V^0$. Подставляя это разложение в систему (13) и учитывая, что по построению векторного поля $m(t, x)$ при $x \in \mathbb{R}^d \setminus \omega$ справедливо $m = \nabla \gamma$, получаем следующую систему:

$$\partial_t z + (m, \nabla)z + (z, \nabla)m + \nabla \tilde{q} = u(t, x), \quad (27)$$

где $u(t, x)$ зависит от $m, p, \hat{u}$, а $\nabla \tilde{q} = \nabla \partial_t p + (m, \nabla) \nabla p + (\nabla p, \nabla)m$ при $x \in \mathbb{R}^d \setminus \omega$. Условие (15), доказанное в лемме 2.2 для $\hat{z}, \hat{u}$, и ортогональность ∇p и $(z(T, \cdot) - v_1)$ в V^1 влечет выполнение оценки

$$\|z(T, \cdot) - v_1(\cdot)\|_{V^1} < \varepsilon$$

(ортогональность получена из разложения Вейля для $\hat{z}$ и $\partial \hat{z} / \partial x_j$ и условия $\hat{z}(t, \cdot) \in H^4(\mathbb{R}^d)$, которое следует из включения $v_i \in V^4$, $i = 0, 1$, и леммы 2.2).

Утверждение леммы, что решение задачи $z(t, \cdot)$ принадлежит пространству V^k , следует из соответствующего утверждения леммы 2.2.

2.5. Сжатие по времени. По $z, \nabla q, m, u$, полученным в п. 2.4, с помощью сжатия временной координаты построим следующие векторные поля:

$$\begin{aligned} z_\delta(t, x) &= z\left(\frac{t}{\delta}, x\right), & m_\delta(t, x) &= \frac{1}{\delta} m\left(\frac{t}{\delta}, x\right), \\ \nabla q_\delta(t, x) &= \frac{1}{\delta} \nabla q\left(\frac{t}{\delta}, x\right), & u_\delta(t, x) &= \frac{1}{\delta} u\left(\frac{t}{\delta}, x\right), \end{aligned} \quad (28)$$

где $\delta > 0$ – некоторый параметр. В системе (25), (26) сделаем замену $s = t/\delta$. В результате получим, что $z_\delta, \nabla q_\delta, m_\delta, u_\delta$ при $(t, x) \in Q_{T\delta} = (0, T\delta) \times \mathbb{R}^d$ удовлетворяют следующей системе уравнений и оценке:

$$\partial_t z_\delta + (m_\delta, \nabla)z_\delta + (z_\delta, \nabla)m_\delta + \nabla q_\delta = u_\delta(t, x), \quad \text{supp } u_\delta \subset Q_{T\delta}^\omega, \quad (29)$$

$$\text{div } z_\delta = 0, \quad z_\delta(t, x)|_{t=0} = v_0(x), \quad (30)$$

$$\|z_\delta(T\delta, \cdot) - v_1(\cdot)\|_{V^1} < \varepsilon. \quad (31)$$

§ 3. Аппроксимативная управляемость системы Навье–Стокса

3.1. Вывод вспомогательной нелинейной задачи. С помощью замены неизвестного векторного поля v в задаче (8)–(11) на $v - v_\infty$ избавимся от условия (11). В результате замены в (8) добавится один линейный член с v_∞ , и мы получим следующую задачу:

$$\partial_t v(t, x) - \Delta v + (v, \nabla)v + (v_\infty, \nabla)v + \nabla p = f(t, x) + u(t, x), \quad \text{supp } u \subset Q_T^\omega, \quad (32)$$

$$\text{div } v = 0, \quad v(t, x)|_{t=0} = v_0(x). \quad (33)$$

Требуется найти управление $u(t, x)$, сосредоточенное в Q_T^ω , и время $\hat{T}$ такие, что

$$\|v(\hat{T}, \cdot) - v_1(\cdot)\|_{V^1} < \varepsilon \quad (34)$$

(здесь также исходные $v_i, i = 0, 1$, заменены на $v_i - v_\infty$).

По условию 2) леммы 2.1 $\exists \gamma(t, x)$: $m_\delta = \nabla \gamma$ при $x \in \mathbb{R}^d \setminus \omega, t \in (0, T\delta)$, где T определено в лемме 2.1. Поэтому существует такая функция $\Gamma(t, x)$, что $\partial_t m_\delta - \Delta m_\delta + (m_\delta, \nabla)m_\delta + (v_\infty, \nabla)m_\delta = \nabla \Gamma(t, x)$ при $x \in \mathbb{R}^d \setminus \omega$. Продолжая $\Gamma(t, x)$ до гладкой в $\mathbb{R}^d$ функции $\Gamma_0(t, x)$ и обозначая $u_1(t, x) = \partial_t m_\delta - \Delta m_\delta + (m_\delta, \nabla)m_\delta + (v_\infty, \nabla)m_\delta - \nabla \Gamma_0$, получаем $\text{supp } u_1 \subset Q_{T\delta}^\omega = (0, T\delta) \times \omega$.

Выберем управление $u(t, x)$ в правой части (32) следующим образом: $u(t, x) = u_1(t, x) + u_\delta(t, x)$, $\text{supp } u \subset Q_{T\delta}^\omega$, где $u_\delta(t, x)$ определено в (28). Подставим разложение

$$v(t, x) = z_\delta(t, x) + m_\delta(t, x) + y(t, x), \quad (35)$$

где $z_\delta(t, x), m_\delta(t, x)$ определены в (28), в систему (32), (33) и запишем с учетом (29) полученные выражения в виде уравнений относительно $y(t, x)$:

$$\partial_t y - \Delta y + (y, \nabla)y + (y, \nabla)(z_\delta + m_\delta) + (z_\delta + m_\delta + v_\infty, \nabla)y + \nabla p_1 = f_1(t, x), \quad (36)$$

$$\text{div } y = 0, \quad y(t, x)|_{t=0} = 0, \quad (37)$$

где $p_1 = p + \Gamma_0 + q_\delta$, начальное условие равно нулю в силу (30), (33) и $m_\delta(0, x) = 0$, а f_1 определено следующим образом:

$$f_1(t, x) = f(t, x) + \Delta z_\delta - (z_\delta, \nabla)z_\delta - (v_\infty, \nabla)z_\delta. \quad (38)$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть в задаче (36), (37), где m_δ, z_δ в (36) определены в (28), правая часть f_1 обладает следующим свойством:

$$\|f_1\|_{L_2(Q_{T\delta})} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (39)$$

Тогда найдется δ_0 такое, что для всех $\delta < \delta_0$ существует решение $y(t, x)$ задачи (36), (37), $y \in V^{1,2}(Q_{T\delta})$ и выполнена оценка

$$\|y(t, \cdot)\|_{V^1}^2 \leq c \int_0^t \|f_1(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau, \quad t \in [0, T\delta], \quad (40)$$

где c не зависит от y, f_1 и от δ .

Эта теорема доказана в § 4. Сейчас же с помощью этой теоремы мы докажем аппроксимативную управляемость задачи (32), (34).

3.2. Доказательство аппроксимативной управляемости системы Навье–Стокса.

ЛЕММА 3.1. Векторное поле $f_1(t, x)$, определенное в (38), обладает свойством (39).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем оценивать нормы членов правой части выражения (38).

1) Сжатия по времени для $f(t, x)$ не производится, поэтому

$$\int_0^{T\delta} \int_{\mathbb{R}^d} |f(t, x)|^2 dx dt \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0,$$

так как $f \in L_2(Q_T)$ фиксировано.

2) С помощью замены $s = t/\delta$, получим

$$\int_0^{T\delta} \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta z_\delta(t, x)|^2 dx dt = \delta \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta z(s, x)|^2 dx ds \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0,$$

так как $z(t, \cdot)$ не зависит от δ , а из условия $v_i(\cdot) \in V^4$, $i = 0, 1$, и леммы 2.3 следует, что $z(t, \cdot) \in V^4$.

3) Аналогично, с помощью замены $s = t/\delta$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{T\delta} \int_{\mathbb{R}^d} |(z_\delta, \nabla) z_\delta|^2 dx dt &= \delta \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |(z(s, x), \nabla) z(s, x)|^2 dx ds \\ &\leq \delta \|z\|_{C(0, T; C^1(\mathbb{R}^d))}^2 \|z\|_{L_2(Q_T)}^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так как из непрерывности вложения $H^3(\mathbb{R}^d)$ в $C^1(\mathbb{R}^d)$ и условия $z(t, \cdot) \in V^4$ следует ограниченность нормы $\|z\|_{C(0, T; C^1(\mathbb{R}^d))}$. Норма последнего члена в правой части (38) оценивается аналогично. Таким образом, (39) доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Доказательство аппроксимативной управляемости задачи для системы Навье–Стокса (8)–(11) мы свели к доказательству аппроксимативной управляемости задачи (32), (33). С учетом замены (35) справедлива следующая оценка для решения v задачи (32), (33):

$$\begin{aligned} \|v(T\delta, \cdot) - v_1(\cdot)\|_{V^1} &= \|y(T\delta, \cdot) + z_\delta(T\delta, \cdot) + m_\delta(T\delta, \cdot) - v_1(\cdot)\|_{V^1} \\ &\leq \|y(T\delta, \cdot)\|_{V^1} + \|z_\delta(T\delta, \cdot) - v_1(\cdot)\|_{V^1}. \end{aligned}$$

Из леммы 2.3 следует, что существует такое управление u_δ , что выполнена оценка (31): $\|z_\delta(T\delta, \cdot) - v_1(\cdot)\|_{V^1} < \varepsilon/2$. Следовательно, для доказательства аппроксимативной управляемости системы (32), (33) необходимо доказать оценку

$$\|y(T\delta, \cdot)\|_{V^1} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (41)$$

Из теоремы 3.1 и леммы 3.1 следует, что можно выбрать столь малое δ_0 , что при всех $\delta < \delta_0$ решение задачи (36), (37) существует и выполнены оценки

$$\|y(t, \cdot)\|_{V^1} \leq c \int_0^t \|f_1(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau < \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in [0, T\delta]. \quad (42)$$

Отсюда при $t = T\delta$ имеем оценку (41), а значит, при таких δ выполнено условие аппроксимативной управляемости для системы (32), (33):

$$\|v(T\delta, \cdot) - v_1(\cdot)\|_{V^1} < \varepsilon.$$

Следовательно, и система (8)–(11) также является аппроксимативно управляемой. Время $T(\varepsilon, v_0, v_1)$ из теоремы 1.2 равно $T\delta$. Поэтому по построению δ выполнено $T(\varepsilon, v_0, v_1) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теорема доказана.

§ 4. Существование решения одной нелинейной задачи

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Пусть в $\mathbb{R}^d$ задана задача (36), (37). Мы будем использовать разложение Вейля векторных полей из $L_2(\mathbb{R}^d)$: $L_2(\mathbb{R}^d) = V^0 \oplus \nabla H^1(\mathbb{R}^d)$, где $\nabla H^1(\mathbb{R}^d) = \{\nabla p : p \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^d), \nabla p \in L_2(\mathbb{R}^d)\}$. Через π обозначим ортопроектор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ на подпространство V^0 . Применим оператор π к системе (36) и, обозначая

$$A = \pi\Delta, \quad B(y, w) = \pi(y, \nabla)w, \quad C(y) = \pi(y, \nabla)(z_\delta + m_\delta) + \pi(z_\delta + m_\delta + v_\infty, \nabla)y, \quad (43)$$

получаем, что (36), (37) принимает вид:

$$\partial_t y - Ay + B(y, y) + C(y) = \pi f_1(t, x), \quad (44)$$

$$y(t, x)|_{t=0} = 0. \quad (45)$$

ЛЕММА 4.1. *Векторное поле $y(t, x) \in V^{1,2}(Q_{T\delta})$ является решением задачи (44), (45) тогда и только тогда, когда существует векторное поле $\nabla p(t, x) \in L_2(Q_{T\delta})$ такое, что пара $(y, \nabla p)$ является решением задачи (36), (37).*

Доказательство этой леммы приведено, например, в книге Фурсикова [16].

Таким образом, для того чтобы получить решение задачи (36), (37), достаточно найти решение задачи (44), (45). Будем строить решение этой задачи методом, основанным на методе Галёркина (см., например, [15]). При этом метод содержит некоторые дополнительные конструкции, необходимые для получения оценок производных решения и галеркинских приближений.

Основной идеей при получении этих оценок в случае ограниченной области является выбор специального базиса, состоящего из собственных векторов оператора Лапласа (см, например, [15], [16]). При этом проектор на линейную оболочку k первых векторов этого базиса и оператор Лапласа коммутируют, а это используется при выводе оценок для производных галеркинских приближений.

В случае неограниченной области вместо построения приближений, принадлежащих линейной оболочке k первых векторов базиса, мы будем строить приближения из пространства векторных полей $H_N \subset V^0$, имеющих преобразование Фурье с носителем в шаре фиксированного радиуса N . Проектор на это пространство и оператор Лапласа коммутируют, поэтому удастся доказать оценки норм производных для этих приближений.

Мы докажем существование решения задачи (44), (45), спроектированной на H_N , с помощью метода Галёркина. Затем мы докажем сходимости при $N \rightarrow \infty$ полученных решений к гладкому решению системы (44), (45).

Определим проектор $Q_N: V^0 \rightarrow V^0$ следующим образом:

$$Q_N y = \mathcal{F}^{-1}(\chi_{B_N}(\xi)\mathcal{F}(y)), \quad y \in V^0,$$

где $B_N = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| < N\}$ – шар радиуса N , $\chi_{B_N}(\xi)$ – характеристическая функция этого шара, $\mathcal{F}$ – оператор преобразования Фурье, а $\mathcal{F}^{-1}$ – обратный к нему. Определим пространство $H_N = Q_N V^0$.

Непосредственная проверка показывает, что для $y \in H_N$ выполнено

$$Q_N \nabla y = \nabla y, \quad (46)$$

а значит, $\text{Im } Q_N$ действительно содержится в V^0 , т.е. для произвольного $y \in V^0$ выполнено $\text{div}(Q_N y) = 0$. Заметим также, что справедлива оценка

$$\|\nabla^k y\|_{V^0}^2 \leq N^{2k} \|y\|_{V^0}^2 \quad \forall y \in H_N, \quad k = 1, 2, \dots \quad (47)$$

Оценка (47) показывает, что элементы пространства H_N – гладкие векторные поля, стремящиеся к нулю на бесконечности вместе со всеми производными:

$$\forall y \in H_N : \quad y \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \quad |\nabla^k y(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (48)$$

Будем искать решение $y_N \in H_N$ для следующей спроектированной системы:

$$\partial_t y_N - Q_N A y_N + Q_N B(y_N, y_N) + Q_N C(y_N) = Q_N \pi f_1(t, x), \quad (49)$$

$$y_N(t, x)|_{t=0} = 0. \quad (50)$$

Построение решения задачи (49), (50) производится хорошо известным методом Галёркина. Пусть $\{w_i(x)\}$ – некоторая полная линейно независимая в H_N система, $w_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Определим проектор P_K на линейную оболочку E_K первых K векторов:

$$P_K: V^0 \rightarrow [w_1, \dots, w_K] \equiv E_K.$$

Для каждого K определим приближенное решение $y_{NK} \in E_K$ системы (49), (50) следующим образом:

$$y_{NK} = \sum_{i=1}^K g_{iK}^N(t) w_i(x),$$

$$\begin{aligned} \partial_t y_{NK} - P_K Q_N A y_{NK} + P_K Q_N B(y_{NK}, y_{NK}) + P_K Q_N C(y_{NK}) \\ = P_K Q_N \pi f_1(t, x), \end{aligned} \quad (51)$$

$$y_{NK}(t, x)|_{t=0} = 0. \quad (52)$$

Домножая (51) на w_j , $j = 1, \dots, K$, скалярно в $L_2(\mathbb{R}^d)$, получаем нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно K функций $g_{1K}^N(t), \dots, g_{KK}^N(t)$. Эта нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет “максимальное” решение – решение, определенное на некотором максимальном интервале $[0, t_K]$. Априорные оценки, которые мы получим ниже, показывают, что t_K можно выбрать общим для всех K .

ЛЕММА 4.2. Для решения $y_{NK}(t, x)$ системы (51), (52) выполнена оценка

$$\|y_{NK}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq c \int_0^t \|f_1(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau, \quad (53)$$

где $t \in [0, T\delta]$ и c – константа, не зависящая от K и от δ .

Доказательство проводится хорошо известным методом с помощью энергетических оценок и неравенства Гронуолла (см., например, [15], [16]).

ЛЕММА 4.3. Для решения $y_{NK}(t, x)$ системы (51), (52) выполнена оценка

$$\|\partial_t y_{NK}\|_{L_2(Q_{T\delta})}^2 \leq c(\|f_1\|_{L_2(Q_{T\delta})}^2 + \|f_1\|_{L_2(Q_{T\delta})}^6), \quad (54)$$

где c – константа, не зависящая от K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (51), (43) и ограниченности норм проекторов P_K , Q_N и π получаем

$$\begin{aligned} \|\partial_t y_{NK}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq c(\|\Delta y_{NK}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|(y_{NK}, \nabla)y_{NK}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\quad + \|(y_{NK}, \nabla)(z_\delta + m_\delta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|(z_\delta + m_\delta + v_\infty, \nabla)y_{NK}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\quad + \|f_1(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2). \end{aligned} \quad (55)$$

Из оценки (47) имеем

$$\|\Delta y\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq c\|y\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \quad (56)$$

Для оценки нормы нелинейного члена $(y_{NK}, \nabla)y_{NK}$ в правой части (55) мы воспользуемся следующей оценкой, которая получена при помощи интерполяционных неравенств и теорем вложения [16]:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} (u, \nabla)v \cdot w dx \right| \leq \frac{c\varepsilon}{2} \|w\|_{V^0}^2 + \frac{c\varepsilon}{4} \|v\|_{V^2}^2 + \frac{c}{4\varepsilon^2} \|u\|_{V^1}^4 \|v\|_{V^1}^2, \quad (57)$$

где $\varepsilon > 0$ – произвольный малый параметр. Подставляя $u = v = y_{NK}$, $w = (y_{NK}, \nabla)y_{NK}$ в (57) и учитывая (47), получаем

$$\|(y_{NK}, \nabla)y_{NK}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq c_1(\|y_{NK}\|_{V^2}^2 + \|y_{NK}\|_{V^1}^6) \leq c_2(\|y_{NK}\|_{V^0}^2 + \|y_{NK}\|_{V^0}^6). \quad (58)$$

Следующие оценки для линейных членов получены с использованием ограниченности C^1 -норм векторных полей z_δ , m_δ , v_∞ и оценки (47):

$$\|(y_{NK}, \nabla)(z_\delta + m_\delta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq c_3\|\nabla(z_\delta + m_\delta)\|_{C(\mathbb{R}^d)}^2 \|y_{NK}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad (59)$$

$$\|(z_\delta + m_\delta + v_\infty, \nabla)y_{NK}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq c_4\|z_\delta + m_\delta + v_\infty\|_{C(\mathbb{R}^d)}^2 \|y_{NK}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \quad (60)$$

Используя полученные оценки (56), (58)–(60), получаем из (55)

$$\|\partial_t y_{NK}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C(\|f_1(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|y_{NK}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|y_{NK}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^6).$$

Воспользуемся оценкой (53) в правой части этого неравенства. Интегрируя полученное неравенство по t от 0 до $T\delta$, имеем требуемую оценку (54).

Итак, мы показали, что для системы (51), (52) для произвольного K существует гладкое решение $y_{NK} \in E_K$, которое определено на интервале $(0, T\delta)$, и его норма в $V^{1,2}(Q_{T\delta})$ ограничена константой, не зависящей от K . Следовательно, существует элемент $y_N \in V^{1,2}(Q_{T\delta})$ и подпоследовательность $y_{NK'}$ такие, что

$$y_{NK'} \rightarrow y_N \text{ слабо в } V^{1,2}(Q_{T\delta}).$$

Из леммы Дубинского (см. [15], [17]) следует, что вложение $V^{1,2}((0, T\delta) \times \Omega) \subset L_2(0, T\delta; V^0(\Omega))$ компактно, если компактным является вложение $V^1(\Omega) \subset V^0(\Omega)$. В случае ограниченной области Ω это свойство выполняется. В случае же, когда область Ω не является ограниченной (как, например, в рассматриваемом нами случае, где $\Omega = \mathbb{R}^d$), вложение $V^1(\Omega) \subset V^0(\Omega)$ не является компактным. Тем не менее, для любого шара θ , содержащегося в $\mathbb{R}^d$, вложение $V^1(\theta) \subset V^0(\theta)$ компактно, а следовательно, слабая сходимость перейдет в сильную:

$$y_{NK'}|_{\theta} \rightarrow y_N|_{\theta} \text{ сильно в } L_2(0, T\delta; V^0(\theta)).$$

Остается показать, что y_N является решением задачи (49), (50) ($y_N \in H_N$ ввиду замкнутости H_N). Это утверждение доказывается так же, как в [15]: сходимость в линейных членах уравнения следует из слабой сходимости $y_{NK'} \rightarrow y_N$ в $V^{1,2}(Q_{T\delta})$, а сходимость в нелинейном члене следует из сильной сходимости в $L_2(0, T\delta; V^0(\theta))$ для любого шара $\theta \in \mathbb{R}^d$.

Докажем, что при достаточно малом параметре сжатия по времени δ (а значит, на малом промежутке времени $(0, T\delta)$) выполнено $y_N \in V^{1,2}(Q_{T\delta})$, причем нормы всех y_N ограничены константой, не зависящей от N и от δ . Тогда существует подпоследовательность $y_{N'}$, слабо сходящаяся в $V^{1,2}(Q_{T\delta})$ к некоторому y , которое окажется решением системы (44), (45).

Схема доказательства оценок для y_N та же, что и для оценок y_{NK} . Отличие состоит в доказательстве оценки для нормы в $L_2(0, T\delta; V^2) \cap L_{\infty}(0, T\delta; V^1)$, в котором мы и выбираем параметр δ .

ЛЕММА 4.4. *Для решения $y_N(t, x)$ системы (49), (50) выполнена оценка*

$$\|y_N(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq c \int_0^t \|f_1(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau, \quad (61)$$

где c — константа, не зависящая от N и от δ .

Доказательство повторяет доказательство леммы 4.2.

ЛЕММА 4.5. *Существует такое $\delta_0 > 0$, что при всех $\delta < \delta_0$ для решения $y_N(t, x)$ системы (49), (50) выполнена оценка*

$$\|\nabla y_N(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \int_0^t \|\Delta y_N(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau \leq c \int_0^t \|f_1(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau, \quad (62)$$

где $t < T\delta$, а c — константа, не зависящая от N и от δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая (49) на Δy_N скалярно в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при фиксированном t и интегрируя по частям с учетом симметричности проекторов Q_N и π и свойства $Q_N \Delta y_N = \Delta y_N$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \|\nabla y_N\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\Delta y_N\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} (y_N, \nabla) y_N \cdot \Delta y_N dx \right| \\ &+ \left| \int_{\mathbb{R}^d} (y_N, \nabla) (z_\delta + m_\delta) \cdot \Delta y_N dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^d} (z_\delta + m_\delta + v_\infty, \nabla) y_N \cdot \Delta y_N dx \right| \\ &+ \left| \int_{\mathbb{R}^d} f_1(t, \cdot) \cdot \Delta y_N dx \right| \end{aligned} \quad (63)$$

(внеинтегральные члены, возникающие при интегрировании по частям, равны нулю в силу $y_N \in H_N$ и (48)).

Будем поочередно оценивать члены в правой части полученного неравенства.

1) Воспользуемся оценкой (57):

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (y_N, \nabla) y_N \cdot \Delta y_N dx \right| &\leq \frac{3c\varepsilon}{4} \|\Delta y_N\|_{V^0}^2 + c_1 (\|y_N\|_{V^0}^2 + \|y_N\|_{V^0}^6 + \|\nabla y_N\|_{V^0}^2 + \|\nabla y_N\|_{V^0}^6). \end{aligned}$$

2) Проинтегрируем по частям и воспользуемся ограниченностью C^2 -нормы $z_\delta + m_\delta$ (которая следует из леммы 2.3, условия $v_i(\cdot) \in V^4$, $i = 0, 1$, и теорем вложения):

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} (y_N, \nabla) (z_\delta + m_\delta) \cdot \Delta y_N dx \right| \leq c \|z_\delta + m_\delta\|_{C^2(\mathbb{R}^d)} (\|\nabla y_N\|_{V^0}^2 + \|y_N\|_{V^0}^2).$$

3) Интегрируя по частям, с учетом ограниченности $\|z_\delta + m_\delta + v_\infty\|_{C^1(\mathbb{R}^d)}$, получаем

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} (z_\delta + m_\delta + v_\infty, \nabla) y_N \cdot \Delta y_N dx \right| \leq c \|z_\delta + m_\delta + v_\infty\|_{C^1(\mathbb{R}^d)} \|\nabla y_N\|_{V^0}^2.$$

4) Применим неравенство Гёльдера:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f_1(t, \cdot) \cdot \Delta y_N dx \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f_1(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \varepsilon \|\Delta y_N\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Оценим правую часть неравенства (63) при помощи полученных оценок. Выберем $\varepsilon = \frac{1}{2}(3c/4 + 1)^{-1}$ и перенесем $\|\Delta y_N\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2$ в левую часть (63). Оценим члены с $\|y_N\|_{V^0}$ в правой части полученного неравенства с помощью (61) и проинтегрируем по t :

$$\begin{aligned} &\|\nabla y_N(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\Delta y_N\|_{L_2(0, t; V^0)}^2 \\ &\leq c \int_0^t ((1 + 2\|z_\delta + m_\delta + v_\infty\|_{C^2(\mathbb{R}^d)}) \|\nabla y_N\|_{V^0}^2 + \|\nabla y_N\|_{V^0}^6) d\tau \\ &\quad + c \int_0^t \left(\|f_1(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + (1 + \|z_\delta + m_\delta\|_{C^2(\mathbb{R}^d)}) \int_0^\tau \|f_1(s, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^\tau \|f_1(s, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \right)^3 \right) d\tau. \end{aligned} \quad (64)$$

По условию $\int_0^{T\delta} \|f_1(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Значит, найдется столь малое число $\delta_0 > 0$, что для произвольного $\delta < \delta_0$ выполнено

$$\int_0^{T\delta} \|f_1(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \leq 1,$$

а следовательно, и для произвольного $\tau \leq T\delta$ выполнено

$$\left(\int_0^\tau \|f_1(s, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \right)^3 \leq \int_0^\tau \|f_1(s, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds. \quad (65)$$

С помощью замены $\rho_N(t) = \|\nabla y_N\|_{V^0}^2$, неравенства (65) и оценки

$$\int_0^t \|(z_\delta + m_\delta)(\tau, \cdot)\|_{C^2(\mathbb{R}^d)} d\tau < \tilde{c},$$

где $\tilde{c}$ не зависит от δ (эта оценка следует из (28)), получаем, что оценка (64) принимает следующий вид ($\|\Delta y_N\|_{L_2(0,t;V^0)}^2$ в левой части отбрасываем):

$$\rho_N(t) \leq c \int_0^t (\|f_1(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + (1+2\|z_\delta + m_\delta + v_\infty\|_{C^2(\mathbb{R}^d)})\rho_N(t) + \rho_N^3(t)) d\tau. \quad (66)$$

Отсюда ввиду неотрицательности подынтегральной функции и $\rho_N(0) = 0$ получим, что найдется такое $t_N > 0$, что для всех $t < t_N$ выполнено $\rho_N(t) \leq 1$. Следовательно, при таких t справедливо $\rho_N^3(t) \leq \rho_N(t)$. Значит, при $t < t_N$ из оценки (66) получим

$$\rho_N(t) \leq c \int_0^t (\|f_1(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + (2+2\|z_\delta + m_\delta + v_\infty\|_{C^2(\mathbb{R}^d)})\rho_N(t)) d\tau. \quad (67)$$

Применим к этому неравенству лемму Гронуолла:

$$\rho_N(t) \leq c \int_0^t \left(\exp \left(c \int_0^\tau 2(1 + \|z_\delta + m_\delta + v_\infty\|_{C^2(\mathbb{R}^d)}) ds \right) \|f_1(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right) d\tau. \quad (68)$$

ЛЕММА 4.6. В правой части (68) содержится растущая при $\delta \rightarrow 0$ компонента $m_\delta(t, x) = (1/\delta)m(t/\delta, x)$. Тем не менее, правая часть (68) не растет при $\delta \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau (1 + \|z_\delta + m_\delta + v_\infty\|_{C^2(\mathbb{R}^d)}) ds &\leq \int_0^\tau \left(c + \frac{1}{\delta} \left\| m \left(\frac{s}{\delta}, x \right) \right\|_{C^2(\mathbb{R}^d)} \right) ds \\ &\leq T\delta c + T \left\| m \left(\frac{s}{\delta}, x \right) \right\|_{C(0,T\delta;C^2(\mathbb{R}^d))} = T\delta c + T \|m(t, x)\|_{C(0,T;C^2(\mathbb{R}^d))} < \text{const}. \end{aligned}$$

Следовательно, правая часть (68) ограничена.

Оценивая экспоненту в правой части (68) константой, получаем

$$\rho_N(t) \leq c \int_0^t \|f_1(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau, \quad (69)$$

где константа c не зависит от N и δ .

ЛЕММА 4.7. *Время t_N можно выбрать общим для всех N : $t_N = \hat{t}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правая часть в (69) – монотонно возрастающая функция. Поэтому достаточно выбрать $\hat{t}$ такое, при котором правая часть (69) равна единице.

Теперь остается выбрать параметр δ , который отвечает за сжатие времени, и, таким образом, получить, что неравенство (69) выполнено для всех N . Выберем δ_0 такое, что выполнено $\int_0^{T\delta_0} \|f_1(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \leq \min\{1/c, 1\}$, где c – константа из правой части (69). Тогда для всех $\delta \leq \delta_0$ оценки (65), (69) будут выполнены. Вспоминая определение ρ_N , получаем

$$\|\nabla y_N\|_{V^0}^2 \leq c \int_0^t \|f_1(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau. \quad (70)$$

Оценивая члены с $\|\nabla y_N\|_{V^0}^2$ в правой части (64) при помощи оценки (70), получаем требуемую оценку (62). Лемма доказана.

ЛЕММА 4.8. *Для решения $y_N(t, x)$ системы (49), (50) выполнена оценка*

$$\|\partial_t y_N(t, \cdot)\|_{L_2(0, T\delta; V^0)}^2 \leq c \|f_1\|_{L_2(Q_{T\delta})}^2, \quad (71)$$

где c – константа, не зависящая от N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО полностью повторяет доказательство леммы 4.3. Заметим только, что при доказательстве леммы 4.3 оценки для L_2 -норм ∇y и Δy мы получали из свойства (47) пространства H_N . В данном случае, чтобы избежать зависимости от N , мы пользуемся оценками, полученными в лемме 4.5.

Мы получили, что последовательность решений y_N системы (49), (50) ограничена в пространстве $V^{1,2}(Q_{T\delta})$. Отсюда, как было показано выше, следует, что найдутся такой элемент $y \in V^{1,2}(Q_{T\delta})$ и такая подпоследовательность $y_{N'}$, что $y_{N'} \rightarrow y$ слабо в $V^{1,2}(Q_{T\delta})$, а также $y_{N'}|_{\mathcal{O}} \rightarrow y|_{\mathcal{O}}$ сильно в $L_2(0, T\delta; V^0(\mathcal{O}))$ для любого шара $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$. Доказательство того факта, что полученное y является решением задачи (44), (45), проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения для y_N .

ЛЕММА 4.9. *Для решения $y(t, x)$ системы (44), (45) выполнена оценка*

$$\|y(t, \cdot)\|_{V^1}^2 \leq c \int_0^t \|f_1(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau, \quad (72)$$

где c не зависит от δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Комбинируя оценки лемм 4.4 и 4.5, получаем

$$\|y_N(t, \cdot)\|_{V^1}^2 \leq c \int_0^t \|f_1(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau. \quad (73)$$

Домножим обе части этой оценки на $\varphi(t) \in C^\infty(0, T\delta)$, $\varphi(t) \geq 0$, и проинтегрируем по t :

$$\int_0^{T\delta} \|y_N(t, \cdot)\|_{V^1}^2 \varphi(t) dt \leq c \int_0^{T\delta} \left(\int_0^t \|f_1(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau \right) \varphi(t) dt.$$

Вследствие выпуклости и полунепрерывности снизу функционала, стоящего в левой части этого неравенства, он полунепрерывен снизу в слабой топологии. Значит, переходя в этом соотношении к нижнему пределу, получаем

$$\int_0^{T\delta} \|y(t, \cdot)\|_{V^1}^2 \varphi(t) dt \leq c \int_0^{T\delta} \left(\int_0^t \|f_1(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau \right) \varphi(t) dt$$

для всех $\varphi(t) \in C^\infty(0, T\delta)$, $\varphi(t) \geq 0$. А это равносильно тому, что выполнена оценка (72) для п.в. $t \in [0, T\delta]$. С учетом непрерывности $\|y(t, \cdot)\|_{V^1}$ по t (в силу непрерывности вложения $V^{1,2}(Q_{T\delta}) \subset C([0, T\delta]; V^1)$) это означает, что (72) выполнено для всех $t \in [0, T\delta]$.

Теорема 3.1 доказана.

Список литературы

1. Lions J.-L. Are there connections between turbulence and controllability? New York: Springer-Verlag, 1990. (Lecture Notes in Control and Inform. Sci. V. 144.)
2. Фурсиков А. В., Эмануилов О. Ю. Точная локальная управляемость двумерных уравнений Навье–Стокса // Матем. сб. 1996. Т. 187. №9. С. 102–138.
3. Fursikov A. V., Ivanov O. Yu. Local exact controllability of the Navier–Stokes equations // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. 1996. V. 323. P. 275–280.
4. Фурсиков А. В., Эмануилов О. Ю. Локальная точная управляемость уравнений Буссинеска // Вестн. РУДН. Сер. матем. 1996. Т. 3. №1. С. 177–194.
5. Fursikov A. V., Ivanov O. Yu. Local exact boundary controllability of the Boussinesque equations // SIAM J. Control Optim. 1998. V. 36. №2. P. 391–421.
6. Coron J.-M. On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids // J. Math. Pures Appl. (9). 1996. V. 75. №2. P. 155–188.
7. Glass O. Controlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 3 // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. 1997. V. 325. P. 987–992.
8. Coron J.-M. On the controllability of the 2-D incompressible Navier–Stokes equations with the Navier slip boundary conditions // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 1996. V. 1. P. 35–75.
9. Coron J.-M., Fursikov A. V. Global exact controllability of the 2-D Navier–Stokes equations on manifold without boundary // Russian J. Math. Phys. 1996. V. 4. №3. P. 1–20.
10. Fursikov A. V. Controllability property for the Navier–Stokes equations. Basel: Birkhauser, 1999. (Internat. Ser. Numer. Math. V. 133.)
11. Фурсиков А. В., Эмануилов О. Ю. Точная управляемость уравнений Навье–Стокса и Буссинеска // УМН. 1999. Т. 54. №3. С. 565–618.
12. Слободетский Л. Н. Обобщенные пространства Соболева и их приложения к граничным задачам для уравнений с частными производными // Уч. записки Лен. пед. инст. им. А. И. Герцена. 1958. Т. 197. С. 54–112.
13. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
14. Серёгин Г., Сверак В. Системы Навье–Стокса и единственность в обратном направлении времени // Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы. Т. 2. В честь О. А. Ладыженской. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2002. С. 321–332.
15. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. М.: Мир, 1981.
16. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Н.: Научная книга, 1999.
17. Дубинский Ю. А. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях // Матем. сб. 1965. Т. 67. №4. С. 609–642.