Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Анисимов, Стабильность диагональных действий и тензорные инварианты, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 4, 47–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7840>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 09:39:08

УДК 512.743+512.745

А. Б. Анисимов

Стабильность диагональных действий и тензорные инварианты

Для связной полупростой алгебраической группы G исследуется наличие инвариантных элементов в тензорных степенях ее линейных представлений и устанавливается связь между наличием тензорных инвариантов и стабильностью диагональных действий группы G на аффинных многообразиях.

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: стабильное действие, группа Вейля, уравновешенный набор.

§ 1. Введение

Напомним, что действие алгебраической группы G на алгебраическом многообразии X называется *стабильным* [1], если его типичные орбиты замкнуты. Этим свойством обладает не всякое действие. Однако, как показано в [2], если группа G – аффинная полупростая алгебраическая группа, а многообразие X аффинно и нормально, то действие $G : X$ становится стабильным при переходе к диагональному действию на достаточно большом числе копий многообразия X . В качестве примера рассмотрим диагональное действие группы $SL_n(\mathbf{k})$, где $\mathbf{k}$ – некоторое алгебраически замкнутое поле, на произведении k копий пространства ее тавтологического представления $\mathbf{k}^n \times \cdots \times \mathbf{k}^n$. При малых k , а именно при $k < n$, такое действие нестабильно, поскольку имеет плотную орбиту, не совпадающую со всем пространством $\mathbf{k}^n \times \cdots \times \mathbf{k}^n$. При $k = n$ типичные орбиты этого действия имеют вид

$$O_c = \{(v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{k}^n \times \cdots \times \mathbf{k}^n \mid \det(v_1, \dots, v_n) = c\},$$

т.е. являются замкнутыми подмножествами. При $k > n$ типичные орбиты диагонального действия также замкнуты.

Стабильность диагональных действий группы G связана с наличием ненулевых G -неподвижных векторов в тензорных степенях рациональных G -модулей. Рассмотрим тавтологическое представление группы SL_n с этой точки зрения. Представление в тензорных степенях $SL_n : (\mathbf{k}^n)^{\otimes k}$ при $k < n$ не имеет ненулевых неподвижных элементов. Действие же на n -й тензорной степени имеет нетривиальный инвариант. Совпадение числа копий, необходимых для получения стабильного действия $SL_n : \mathbf{k}^n \times \cdots \times \mathbf{k}^n$ и минимального номера тензорной степени $(\mathbf{k}^n)^{\otimes k}$, имеющей ненулевой SL_n -неподвижный элемент, не случайно – впоследствии мы увидим (теорема 3), что отсутствие инвариантов в малых тензорных степенях линейных представлений влечет существование нестабильных диагональных действий группы G с малым числом копий.

Связь стабильности действия с тензорными инвариантами была установлена в [3; теорема 10] и впоследствии использована в [2] для доказательства стабильности диагональных действий на большом числе копий.

Настоящая работа продолжает изучение связи между стабильностью диагональных действий и наличием нетривиальных инвариантных элементов в тензорных степенях линейных представлений – указаны нижние и верхние оценки для числа копий многообразий, которые необходимо взять для получения стабильного действия, найдена в явном виде диагональ весовой полугруппы для действия $G : G^n$. Это позволило уточнить результат работы [2] и показать, что число копий G -многообразия X , необходимых для получения стабильного диагонального действия, зависит только от группы G .

Перейдем к точным формулировкам полученных результатов. Всюду далее основное поле $\mathbf{k}$ предполагается алгебраически замкнутым полем характеристики нуль; группа G , если не указано иное, предполагается связной односвязной полупростой; веса группы G рассматриваются относительно некоторого фиксированного максимального тора $T \subseteq G$; нумерация простых корней и фундаментальных весов используется такая же, как и в [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G – связная алгебраическая группа. Положим

$$M(G) := \{n \in \mathbb{N} \mid (V^{\otimes n})^G \neq \{0\} \text{ для любого ненулевого рационального } G\text{-модуля } V\}.$$

Очевидно, что $M(G)$ является аддитивной полугруппой. Обозначим через $m(G)$ минимальное число в полугруппе $M(G)$ или $+\infty$, если она пуста.

Отметим, что выполнение свойства $(V^{\otimes n})^G \neq \{0\}$ не обязательно проверять для всех рациональных G -модулей – достаточно рассмотреть только простые G -модули. Действительно, если $(V^{\otimes n})^G \neq \{0\}$ для всех ненулевых G -модулей V , то это свойство тем более выполнено для всех простых G -модулей. Обратно, пусть задан ненулевой модуль V ; фиксируем в нем простой подмодуль $U \subset V$, тогда $(V^{\otimes n})^G \supset (U^{\otimes n})^G \neq \{0\}$.

ТЕОРЕМА 1. Полугруппы $M(G)$ для простых односвязных групп G имеют следующий вид:

Группа G	$M(G)$	Группа G	$M(G)$
SL_n	$n\mathbb{N}$	G_2	$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$
$Spin_{2n+1}$	$2\mathbb{N}$	F_4	$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$
$Spin_{4n+2}$	$4\mathbb{N}$	E_6	$3\mathbb{N}$
$Spin_{4n+4}$	$2\mathbb{N}$	E_7	$2\mathbb{N}$
Sp_{2n}	$2\mathbb{N}$	E_8	$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$

Вычисление полугруппы $M(G)$ для произвольной (не обязательно редуктивной) группы G сводится к случаям, рассмотренным в этой теореме, при помощи следующих двух утверждений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть G – связная аффинная алгебраическая группа, F – ее унитарный радикал и $H = G/F$. Тогда $M(G) = M(H)$.

Заметим, что в действительности данное утверждение сводит вычисление полугруппы $M(G)$ к случаю полупростой H , а не произвольной редуктивной. Действительно, если $Z \subseteq H$ – нетривиальный центральный тор в группе H , то $M(H) = \emptyset$. Это выполнено в силу того, что Z может нетривиально действовать гомотетиями на любой тензорной степени $\mathbf{k}^1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть группа $G = G_1 \times G_2$ является прямым произведением редуктивных групп G_1 и G_2 . Тогда $M(G) = M(G_1) \cap M(G_2)$.

Используя этот результат, можно найти $M(G)$ для произвольной связной односвязной полупростой группы G , т.е. для прямого произведения нескольких односвязных простых групп. Случай неодносвязных групп G несколько сложнее; каждая неодносвязная полупростая группа требует, по-видимому, отдельного рассмотрения. Отметим только, что если G_1 и G_2 – полупростые группы одного типа и группа G_1 односвязна, то $M(G_1) \subseteq M(G_2)$.

Вычисление полугруппы $M(G)$ для односвязных простых групп G связано с задачей описания уравновешенных наборов в группе Вейля системы корней касательной алгебры группы G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{W}$ – группа Вейля, соответствующая группе G . Будем говорить, что набор ее элементов $w_1, \dots, w_k \in \mathcal{W}$ уравновешен, если $w_1 + \dots + w_k = 0$ (сумма здесь понимается как сумма линейных операторов, действующих в $\mathbb{Q}$ -линейной оболочке корней группы G).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{W}$ – группа Вейля системы корней касательной алгебры простой группы G . Группа $\mathcal{W}$ обладает уравновешенным набором из t элементов тогда и только тогда, когда $t \in M(G)$.

Теперь перейдем к установлению связи между полугруппой $M(G)$ и стабильностью диагональных действий группы G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть G – связная полупростая, но не обязательно односвязная алгебраическая группа. Обозначим:

- $s_m(G)$ – индекс метастабильности G – такое минимальное натуральное число, что для любого аффинного многообразия X с эффективным действием группы G диагональное действие G на произведении $s_m(G)$ экземпляров X стабильно;
- $s(G)$ – индекс стабильности G – такое минимальное натуральное число, что для любого аффинного многообразия X с эффективным действием группы G и для любого натурального $k \geq s(G)$ диагональное действие $G : X^k$ стабильно.

Существование числа $s(G)$ для полупростой группы G будет установлено в теореме 4. Отметим, что $s_m(G) \leq s(G)$. Введение индекса метастабильности наряду с индексом стабильности мотивировано тем, что стабильность диагонального действия группы G на k экземплярах многообразия X не влечет стабильности действия на r экземплярах X при $r > k$. Подобное явление наблюдается, например, у действий симплектической группы Sp_{2m} . Тавтологическое представление $\mathrm{Sp}_{2m} : \mathbf{k}^{2m}$ обладает тем свойством, что действие

$\mathrm{Sp}_{2m} : (\mathbf{k}^{2m})^k$ при $k \leq 2m$ стабильно при четных k , но нестабильно при нечетных k . Действительно, легко видеть, что при четном k стабилизатор типичной точки $(\mathbf{k}^{2m})^k$ редуктивен и изоморфен Sp_{2m-k} ; в силу [5; теорема 1] это влечет стабильность действия. В случае же нечетного k стабилизатор общего положения содержит нетривиальную нормальную унитарную подгруппу, поэтому действие нестабильно.

Связь между индексами стабильности и числом $m(G)$ устанавливают следующие два утверждения.

ТЕОРЕМА 3. *Для односвязной простой группы G имеем $m(G) \leq s_m(G)$.*

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $e(G)$ – такое натуральное число, что для любого аффинного многообразия X с эффективным действием G действие $G : X^{e(G)}$ имеет конечный стабилизатор общего положения. Тогда выполнена оценка $s(G) \leq e(G)m(G)$.*

Теорема 4 является прямым следствием доказательства в [2; теорема 1]. Отметим, что число $e(G)$ существует и не превосходит размерности группы G . Было бы интересно вычислить значение $e(G)$ для всех полупростых алгебраических групп G .

Для тех групп G , все линейные представления которых самосопряжены, теорему 3 можно существенно усилить, используя результаты работы [6].

ТЕОРЕМА 5. *Пусть G – связная полупростая, но не обязательно односвязная аффинная алгебраическая группа, все линейные представления которой самосопряжены. Тогда $s_m(G) = m(G) = 2$.*

Рассмотрение примеров действий групп, диаграммы Дынкина которых имеют симметрии, т.е. групп, у которых линейные представления не обязательно самосопряжены, показывает, что для простых групп G требование самосопряженности в этой теореме избыточно.

ГИПОТЕЗА. *Если группа G проста, то $s_m(G) = m(G)$.*

Автор выражает благодарность И. В. Аржанцеву за постановку задачи и плодотворные обсуждения доказательств и Д. А. Тимашеву за идею использования PRV-теоремы для вычисления полугрупп $M(G)$. Также автор выражает благодарность В. Л. Попову за его полезные замечания.

§ 2. Вычисление полугрупп $M(G)$

2.1. Обозначения и вспомогательные утверждения. Основным средством доказательства теоремы 1 является PRV-теорема об экстремальных весах простых слагаемых в тензорном произведении простых модулей. Напомним необходимые определения и результаты.

Обозначим через $\mathscr{W}$ группу Вейля системы корней касательной алгебры группы G и через $V(\lambda)$ – простой G -модуль со старшим весом λ . Будем говорить, что вес τ модуля $V(\lambda)$ *экстремален*, если τ лежит в $\mathscr{W}$ -орбите старшего веса λ . Заметим, что простой модуль со старшим весом λ однозначно определяется любым своим экстремальным весом τ , поэтому обозначение $V(\tau)$ приобретает смысл для любого веса τ . Следующее утверждение, называемое

PRV-теоремой, дает достаточное условие вхождения некоторого простого модуля в разложение тензорного произведения.

ТЕОРЕМА 6 (см. [7], [8]). Пусть λ и μ – произвольные веса. Тогда тензорное произведение $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ содержит простой подмодуль $V(\lambda + \mu)$.

PRV-теорема устанавливает связь между длинами уравновешенных наборов в $\mathcal{W}$ и элементами полугруппы $M(G)$.

ЛЕММА 1. Пусть $w_1, \dots, w_m \in \mathcal{W}$ – уравновешенный набор из m элементов. Тогда $M(G) \supseteq m\mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого доминантного веса λ и соответствующего ему простого модуля $V(\lambda)$ имеем $V(\lambda)^{\otimes m} = V(w_1\lambda) \otimes V(w_2\lambda) \otimes \dots \otimes V(w_m\lambda)$. Согласно PRV-теореме, этот модуль содержит подмодуль с экстремальным весом

$$w_1\lambda + w_2\lambda + \dots + w_m\lambda = (w_1 + w_2 + \dots + w_m)\lambda = 0,$$

т.е. $(V(\lambda)^{\otimes m})^G \neq \{0\}$, и поэтому $M(G) \supseteq m\mathbb{N}$.

Эта лемма составляет только половину доказательства теоремы 2. Обратное утверждение, т.е. наличие уравновешенных наборов длины m при $m \in M(G)$, будет следовать из доказательства теоремы 1 о вычислении $M(G)$ для простых групп G .

Для доказательств того, что некоторое число m не входит в полугруппу $M(G)$, оказывается достаточно следующего простого соображения.

ЛЕММА 2. Пусть центр $Z(G)$ группы G содержит циклическую подгруппу H порядка m . Тогда $M(G) \subseteq m\mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа G обладает точным неприводимым представлением, поэтому найдется простой G -модуль U , в котором H действует эффективно. В силу неприводимости представления в U элементы H действуют умножениями на корни из единицы степени m , а в силу эффективности действия H ее образующая x_0 действует умножением на примитивный корень ε степени m из единицы, поэтому в любой степени $U^{\otimes k}$ элемент x_0 действует умножением на ε^k . Это означает, что если k не делится на m , то в модуле $U^{\otimes k}$ нет ненулевых G -инвариантных элементов, а значит, $M(G) \subseteq m\mathbb{N}$.

При рассмотрении групп типов F_4 , E_6 и E_8 полезным приемом построения уравновешенных наборов оказывается рассмотрение степеней элементов Кокстера соответствующих групп Вейля. Напомним, что элемент группы Вейля, равный произведению последовательных отражений относительно простых корней, называется *элементом Кокстера*. Он определен неоднозначно, но все получаемые таким образом элементы сопряжены в группе Вейля, поэтому они имеют одинаковые порядки и одинаковые собственные значения. В дальнейшем, говоря об элементе Кокстера, будем подразумевать произвольный из них.

ТЕОРЕМА 7 (см. [9; предложение 3.18 и теорема 3.19]). Пусть Φ – неприводимая система корней. Тогда выполнены следующие два утверждения:

- 1) порядок элемента Кокстера системы Φ равен $h = |\Phi|/\text{rk } \Phi$;

- 2) если $\exp(2\pi i m_1/h), \dots, \exp(2\pi i m_r/h)$ – все собственные значения элемента Кокстера ($r = \text{rk } \Phi$, $0 \leq m_i < h$), то порядок группы Вейля $|\mathscr{W}|$ равен $\prod_i (m_i + 1)$.

Числа m_i , фигурирующие в теореме 7, называются *показателями* группы Вейля $\mathscr{W}$ и в нужных нам случаях вычисляются с помощью следующей леммы.

ЛЕММА 3 (см. [9; предложение 3.20]). Пусть Φ – неприводимая система корней, h – порядок ее элемента Кокстера, t – натуральное число, не превосходящее h и взаимно простое с ним. Тогда t является показателем группы Вейля.

Для доказательства того, что определенные степени элемента Кокстера дают уравновешенный набор, нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Пусть в группе Вейля $\mathscr{W}$ имеется элемент w порядка 3, для которого 1 не является собственным значением. Тогда элементы w, w^2, w^3 составляют уравновешенный набор и $M(G) \supseteq 3\mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для любого $x \in \mathbb{R}^{\text{rk } G}$ элемент, равный $(\text{Id} + w + w^2)x$, является неподвижным относительно w вектором, а значит, нулем. Как видим, $\text{Id} + w + w^2 = 0$, поэтому согласно лемме 1 $M(G) \supseteq 3\mathbb{N}$.

2.2. Вычисление $M(G)$ для простых групп G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Случай $G = \text{SL}_n$. Простые корни системы A_{n-1} – это векторы $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n$, где e_i – векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^n$, группа Вейля изоморфна симметрической группе S_n и действует на $\mathbb{R}^n$ перестановками базисных векторов. Рассмотрим элемент $\varepsilon \in \mathscr{W}$, осуществляющий циклическую перестановку $(1\ 2\ 3 \dots n)$. Для него имеем

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где сумма понимается как сумма элементов в $\text{End}(\mathbb{R}^n)$.

Данный оператор действует нулем на линейной оболочке простых корней, т.е. на подпространстве $\{x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$, поэтому согласно лемме 1 $M(\text{SL}_n) \supseteq n\mathbb{N}$. Центр группы SL_n изоморфен группе корней степени n из единицы, значит, в силу леммы 2 имеем обратное включение $M(\text{SL}_n) \subseteq n\mathbb{N}$.

Для дальнейшего полезно отметить, что циклическая перестановка ε является элементом Кокстера системы корней A_{n-1} .

Случай $G = \text{Spin}_{2n+1}$ или $G = \text{Sp}_{2n}$. В обоих указанных случаях группа Вейля изоморфна $S_n \ltimes \{\pm 1\}^n$ и действует на $\mathbb{R}^n$ перестановками и сменами знаков координат. Значит, $-\text{Id} \in \mathscr{W}$, и согласно лемме 1 имеем включения $M(\text{Spin}_{2n+1}), M(\text{Sp}_{2n}) \supseteq 2\mathbb{N}$. Центры групп Spin_{2n+1} и Sp_{2n} изоморфны $\mathbb{Z}_2$ (см. [4; табл. 3]), поэтому согласно лемме 2 получаем обратные включения $M(\text{Spin}_{2n+1}), M(\text{Sp}_{2n}) \subseteq 2\mathbb{N}$.

Случай $G = \text{Spin}_{2n}$. Группа Вейля системы корней типа D_n изоморфна $S_n \ltimes \{\pm 1\}^{n-1}$ и действует на $\mathbb{R}^n$ перестановками координат и сменами знака в четном количестве мест. Здесь необходимо рассмотреть два случая.

Если n чётно, то $-\text{Id} \in \mathscr{W}$ и центр $Z(\text{Spin}_{2n}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Это означает, что $M(\text{Spin}_{2n}) = 2\mathbb{N}$.

Теперь пусть n нечётно. В этом случае $Z(\text{Spin}_{2n}) \cong \mathbb{Z}_4$, поэтому имеем включение $M(\text{Spin}_{2n}) \subseteq 4\mathbb{N}$. Рассмотрим следующие элементы группы $\mathscr{W}$:

$$\begin{aligned} w_1 &= \text{diag}(1, -1, -1, -1, \dots, -1), \\ w_2 &= \text{diag}(-1, 1, -1, -1, \dots, -1), \\ w_3 &= \text{diag}(-1, -1, 1, 1, \dots, 1), \\ w_4 &= \text{diag}(1, 1, 1, 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

Сумма элементов $w_1 + w_2 + w_3 + w_4$ равна нулю, поэтому $M(\text{Spin}_{2n}) \supseteq 4\mathbb{N}$.

Случай $G = G_2$. В данном случае группа Вейля изоморфна группе диэдра $\mathscr{D}_6$. Элемент $-\text{Id}$ принадлежит $\mathscr{W}$, поэтому $M(G_2) \supseteq 2\mathbb{N}$. Рассмотрим элемент $\varepsilon \in \mathscr{W}$ – поворот на $2\pi/3$. Для него имеем $\text{Id} + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$, поэтому $M(G_2) \supseteq 3\mathbb{N}$. Как видим, $M(G_2) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$.

Случай $G = F_4$. Группа Вейля для группы F_4 содержит отображение $-\text{Id}$ (см. [4; табл. 1]), поэтому $M(F_4) \supseteq 2\mathbb{N}$. Чтобы доказать, что $3 \in M(F_4)$, рассмотрим элемент Кокстера ε . В силу теоремы 7 элемент ε имеет порядок 12, и согласно лемме 3 показателями ε являются числа 1, 5, 7, 11. Значит, элемент ε^4 не имеет действительных собственных значений. Применяя лемму 4 к ε^4 , получим, что $M(G_2) \supseteq 3\mathbb{N}$. Как видим, $M(F_4) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$.

Случай $G = E_6$. Как и ранее, рассмотрим элемент Кокстера ε . Он имеет порядок 12. В отличие от предыдущего случая, лемма 3 дает только четыре показателя $-1, 5, 7$ и 11 . Поскольку с каждым собственным значением λ элемент ε обладает и собственным значением $\bar{\lambda}$, оставшиеся два показателя имеют вид m и $12-m$. Согласно теореме 7 порядок группы Вейля $|\mathscr{W}| = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$ совпадает с произведением $2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 8 \cdot (m+1) \cdot (12-m+1)$. Отсюда следует, что $\mathscr{W}$ имеет еще показатели 4 и 8. Значит, элемент ε^4 не имеет действительных собственных значений, и, применив лемму 4, мы получаем, что $M(E_6) \supseteq 3\mathbb{N}$. Так как центр $Z(E_6) \cong \mathbb{Z}_3$, то $M(E_6) = 3\mathbb{N}$.

Случай $G = E_7$. Группа Вейля для группы E_7 содержит отображение $-\text{Id}$, поэтому $M(E_7) \supseteq 2\mathbb{N}$. Кроме того, центр $Z(E_7) \cong \mathbb{Z}_2$, поэтому $M(E_7) = 2\mathbb{N}$.

Случай $G = E_8$. Группа Вейля для группы E_8 содержит отображение $-\text{Id}$, поэтому $M(E_8) \supseteq 2\mathbb{N}$. Рассмотрим элемент Кокстера ε . Он имеет порядок 30 и лемма 3 дает восемь показателей, взаимно простых с 30. Значит, элемент ε^{10} не имеет действительных собственных значений, поэтому к нему применима лемма 4. Как видим, $M(E_8) \supseteq 3\mathbb{N}$, поэтому $M(E_8) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Ввиду леммы 1 нам остается только показать, что если $m \in M(G)$, то найдется уравновешенный набор из m элементов, что было сделано в ходе доказательства теоремы 1.

2.3. Вычисление полугруппы $M(G)$ в общем случае. Для начала докажем утверждение 1 о сведении задачи к случаю редуктивной группы H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $M(G) \subseteq M(H)$ очевидно. Действительно, пусть $\pi: G \rightarrow H$ – естественная проекция. Тогда любой H -модуль V является одновременно и G -модулем относительно умножения $g \cdot x = \pi(g)x$ и выполнено равенство $(V^{\otimes m})^H = (V^{\otimes m})^G$.

Зафиксируем $m \in M(H)$ и G -модуль V . Подмодуль $W = V^F$ ненулевой. В силу нормальности F в G имеем действие $G : W$, откуда получаем, что W одновременно является и H -модулем; так как $m \in M(H)$, то $(W^{\otimes m})^H \neq \{0\}$. Значит, $(V^{\otimes m})^G \supseteq (W^{\otimes m})^G = (W^{\otimes m})^{G/F} \neq \{0\}$, что дает нам обратное включение $M(G) \supseteq M(H)$.

Как уже было отмечено, для редуктивной группы G с нетривиальным центральным тором $M(G) = \emptyset$, поэтому достаточно найти $M(G)$ для полупростых групп. В случае односвязной G полный ответ на этот вопрос дает утверждение 2 о полугруппе M прямого произведения, к доказательству которого мы сейчас переходим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \in M(G_1 \times G_2)$. Фиксируем V и W – произвольные модули над G_1 и G_2 соответственно. Каждый из них можно рассматривать как модуль над $G_1 \times G_2$, на котором один из множителей действует тривиально. В силу выбора m получаем, что $(V^{\otimes m})^{G_1} = (V^{\otimes m})^{G_1 \times G_2} \neq \{0\}$ и $(W^{\otimes m})^{G_2} = (W^{\otimes m})^{G_1 \times G_2} \neq \{0\}$. Значит, $m \in M(G_1)$ и $m \in M(G_2)$, и мы получаем включение $M(G_1 \times G_2) \subseteq M(G_1) \cap M(G_2)$.

Теперь фиксируем $m \in M(G_1) \cap M(G_2)$ и простой $G_1 \times G_2$ -модуль U . Поскольку группы G_1 и G_2 редуктивны, такой модуль получается как тензорное произведение $U = V \otimes W$ простого G_1 -модуля V и простого G_2 -модуля W . Для тензорной степени такого модуля имеем $U^{\otimes m} \cong V^{\otimes m} \otimes W^{\otimes m}$. В силу выбора m имеем $(V^{\otimes m})^{G_1} \neq \{0\}$ и $(W^{\otimes m})^{G_2} \neq \{0\}$, поэтому $(V^{\otimes m} \otimes W^{\otimes m})^{G_1 \times G_2} \neq \{0\}$, т.е. $m \in M(G_1 \times G_2)$.

§ 3. Связь индексов стабильности и числа $m(G)$

3.1. Вспомогательные утверждения о НВ-многообразиях. Для доказательства теоремы 3 достаточно для каждой односвязной простой группы G предъявить такое действие $G : X$, что диагональное действие $G : X^{m(G)-1}$ нестабильно. Примеры таких действий удастся найти среди действий G на конусах старших векторов. Необходимые нам факты о таких действиях приведены в работах [10] и [11].

Пусть λ – доминантный вес группы G . Замыкание в $V(\lambda)$ орбиты старшего вектора называется *конусом старших векторов* или *НВ-многообразием* $X(\lambda)$, отвечающим весу λ (см. [10; определение 1]).

ТЕОРЕМА 8 (см. [10; теорема 1]). Пусть λ – доминантный вес группы G и v_λ – старший вектор модуля $V(\lambda)$. Тогда $X(\lambda) = G \cdot v_\lambda \cup \{0\}$.

Набор доминантных весов $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ группы G называется *свободным от инвариантов* [11; определение 2], если для произвольных натуральных чисел $n_1, \dots, n_s$ выполнено $(V(n_1 \lambda_1) \otimes \dots \otimes V(n_s \lambda_s))^G = \{0\}$.

ТЕОРЕМА 9 (см. [11; теорема 10]). Пусть $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ – набор доминантных весов группы G . Следующие условия эквивалентны:

- набор $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ свободен от инвариантов;
- в замыкании любой G -орбиты в $X(\lambda_1) \times \dots \times X(\lambda_s)$ содержится $(0, \dots, 0) \in V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_s)$;
- $\mathbf{k}[X(\lambda_1) \times \dots \times X(\lambda_s)]^G = \mathbf{k}$.

3.2. Вспомогательные утверждения о тензорных произведениях Spin_{2r} -модулей. При доказательстве теоремы 3 для группы Spin_{4n+2} требуется найти явное разложение на простые слагаемые тензорного произведения $V(p\varpi_{2n+1}) \otimes V(q\varpi_{2n+1})$. Правило Литтлвуда–Ричардсона, описывающее строение такого тензорного произведения, приведено в [12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (см. [12; приложение А.3]). Пусть ϖ_i , $1 \leq i \leq r$, – фундаментальные веса группы Spin_{2r} и $\lambda = \sum_{i=1}^r a_i \varpi_i$, $a_i \geq 0$, – ее доминантный вес. *Диаграмма Юнга* формы λ – это диаграмма, отвечающая разбиению $(c_1, \dots, c_r)$, где числа c_p определены следующим образом:

$$c_p = \begin{cases} 2 \sum_{i=p}^{r-2} a_i + a_{r-1} + a_r & \text{при } p \leq r-2, \\ a_{r-1} + a_r & \text{при } p = r-1, \\ a_r & \text{при } p = r. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В диаграммах Юнга условимся выравнивать столбцы по нижней строке, а строки – по левому столбцу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (см. [12; приложение А.4]). Пусть T – диаграмма Юнга формы $a\varpi_{2r}$. Назовем Spin_{2r} -стандартной таблицей Юнга заполнение ячеек диаграммы T натуральными числами, не превосходящими $2r$, при котором

- слева направо числа строго возрастают,
- снизу вверх числа не убывают,
- в каждой строке числа i и $2r+1-i$ одновременно не встречаются,
- в каждой строке количество чисел, превосходящих r , четно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В общем случае правило Литтлвуда–Ричардсона накладывает на таблицу Юнга дополнительные ограничения сверх тех, которые указаны выше. Мы не будем их приводить ввиду громоздкости и ненужности для дальнейшего изложения. Полное определение стандартной таблицы Юнга дано в [12; приложение А.4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (см. [12; приложение А.4]). Пусть T – стандартная таблица Юнга, $C_T(i)$ – количество вхождений числа i в таблицу T . Весом таблицы T назовем вес

$$v(T) = \frac{1}{2} [(C_T(1) - C_T(2r))\varepsilon_1 + (C_T(2) - C_T(2r-1))\varepsilon_2 + \dots].$$

Весом $v_m(T)$ назовем вес таблицы T_m , состоящей из m верхних строк таблицы T .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 (см. [12; приложение А.4]). Пусть μ – доминантный вес. Таблица Юнга T называется μ -доминантной, если для произвольного m вес $2\mu + 2v_m(T)$ доминантен.

ТЕОРЕМА 10 (см. [12; приложение А.4]). Пусть λ, μ – доминантные веса группы Spin_{2r} . Тогда

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) = \bigoplus_T V(\lambda + v(T)),$$

где сумма в правой части берется по всем стандартным λ -доминантным таблицам Юнга формы μ .

3.3. Один пример свободной от инвариантов тройки весов группы Spin_{4n+2} . В [11] доказано, что набор весов $(\varpi_{2n+1}, \varpi_{2n+1}, \varpi_{2n+1})$ группы Spin_{4n+2} примитивен в том смысле, что для произвольных натуральных чисел n_1, n_2, n_3 имеет место неравенство

$$\dim(V(n_1\varpi_{2n+1}) \otimes V(n_2\varpi_{2n+1}) \otimes V(n_3\varpi_{2n+1}))^{\text{Spin}_{4n+2}} \leq 1.$$

Нам потребуется усиление данного утверждения – покажем, что данный набор свободен от инвариантов.

ЛЕММА 5. При $p \geq q$ имеет место разложение

$$V(p\varpi_{2n+1}) \otimes V(q\varpi_{2n+1}) = \bigoplus V((p+q-2r)\varpi_{2n+1} + \varpi_{i_1} + \dots + \varpi_{i_r}),$$

где сумма в правой части берется по всем r из диапазона $0, \dots, q$ и по всевозможным наборам нечетных чисел $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r \leq 2n-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как строка диаграммы формы $r\varpi_{2n+1}$ имеет длину $2n+1$, то в силу стандартности она однозначно определяется тем, какие в ней записаны числа, не превосходящие $2n+1$. Пусть $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_p\}$ и $J = \{j_1 < \dots < j_s\}$ таковы, что $I \sqcup J = \{1, \dots, 2n+1\}$. Если строка таблицы Юнга начинается с чисел из набора I , то оставшиеся числа обязательно равны $4n+3-j_s, \dots, 4n+3-j_1$. Вес такой строки равен $(\sum_{i=1}^{2n+1} a_i \varepsilon_i)/2$, где $a_i = +1$, если $i \in I$, и $a_i = -1$, если $i \in J$.

Для сокращения записи обозначим $i' = (4n+3-i)$. Про числа из множества J будем говорить, что они *вычеркнуты* из диапазона $1, \dots, (2n+1)$, а про соответствующую строку таблицы будем говорить, что она получена из диапазона $1, \dots, (2n+1)$ вычеркиванием чисел из множества J .

Опишем все ϖ_{2n+1} -доминантные таблицы Юнга T . Рассмотрим две соседние строки в таблице T . Пусть в верхней минимальное вычеркнутое число равно p , в нижней – q . Тогда эти строки заканчиваются числами p' и q' соответственно. В силу условия неубывания чисел в столбцах имеем $p' \geq q'$, поэтому $p \leq q$. Теперь покажем, что все строки таблицы T получаются вычеркиванием из диапазона $1, \dots, (2n+1)$ их конечных частей $s, \dots, (2n+1)$, т.е. с учетом предыдущего утверждения, таблица T имеет вид

$1 \dots k_1$	$(2n+1)' \dots \dots \dots$	$(k_1+1)'$
$1 \dots \dots k_2$	$(2n+1)'\dots \dots \dots$	$(k_2+1)'$
$1 \dots \dots \dots k_3$	$(2n+1)'\dots \dots \dots$	$(k_3+1)'$
$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$		
$1 \dots \dots \dots$	$2n+1$	

с $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_r$. Отметим, что все числа k_i нечетны, так как в каждой строке количество чисел, превосходящих $2n+1$, четно.

Рассмотрим верхнюю строку таблицы T . Если она не получается из диапазона $1 \dots 2n+1$ вычеркиванием нескольких чисел с конца, то найдутся два таких числа $1 \leq x < y \leq 2n+1$, что x вычеркнуто, а y – нет. Это означает,

что вес $2p\varpi_{2n+1} + 2v_1(T)$ равен $(p+1)\varepsilon_1 + \dots + (p-1)\varepsilon_x + \dots + (p+1)\varepsilon_y + \dots$. Поскольку коэффициент при ε_x меньше коэффициента при ε_y , такой вес не доминантен, что противоречит $p\varpi_{2n+1}$ -доминантности таблицы T .

Далее будем действовать по индукции. Пусть верхние l строк таблицы получены вычеркиванием чисел, начиная с позиций $k_1+1, \dots, k_l+1$, и $k_1 \leq \dots \leq k_l$. Без ограничения общности можно считать, что $k_l < 2n+1$. Для такой таблицы вес $2p\varpi_{2n+1} + 2v_l(T)$ равен $2(p+q-2l)\varpi_{2n+1} + 2\varpi_{k_1} + \dots + 2\varpi_{k_l}$. Повторим для $(l+1)$ -й строки рассуждение, проведенное для верхней строки. Числа x и y , если они определены, окажутся больше k_l , потому что в $(l+1)$ -й строке первое вычеркнутое число не меньше, чем первое вычеркнутое число в l -й строке. Поскольку веса ϖ_{k_i} являются суммами ε_i с $i \leq k_l < x$, они не повлияют на коэффициенты при ε_x и ε_y ; значит, рассуждение, основанное на сравнении этих коэффициентов, никак не изменится и снова приведет к тому, что вес $2p\varpi_{2n+1} + 2v_{l+1}(T)$ окажется недоминантным.

Итак, стандартная таблица Юнга, если она $p\varpi_{2n+1}$ -доминантна, имеет вид, указанный на рисунке. Из доказательства видно, что для таблицы T высоты $q \leq r$ данное условие является и достаточным. Действительно, такая таблица стандартна и все веса $2p\varpi_{2n+1} + 2v_l(T)$ доминантны, так как $p+q-2l \geq p-q \geq 0$.

Для таблицы T указанного вида вес $p\varpi_{2n+1} + v(T)$ равен

$$(p+q-2s) + \varpi_{k_1} + \dots + \varpi_{k_s},$$

где s – число строк, отличных от $1, \dots, 2n+1$, и (k_i+1) – минимальное вычеркнутое число в i -й строке. Значит, все простые модули, входящие в разложение $V(p\varpi_{2n+1}) \otimes V(q\varpi_{2n+1})$, имеют вид $V((p+q-2s)\varpi_{2n+1} + \varpi_{k_1} + \dots + \varpi_{k_s})$ для подходящих k_i .

Чтобы завершить доказательство, покажем, что каждый вес вида

$$\lambda = (p+q-2l)\varpi_{2n+1} + \varpi_{k_1} + \dots + \varpi_{k_l},$$

где k_i – нечетные числа, не превосходящие $2n-1$, получается как $p\varpi_{2n+1} + v(T)$ для подходящей $p\varpi_{2n+1}$ -доминантной таблицы T . Упорядочивая, если нужно, числа k_i , можем считать, что $k_1 \leq \dots \leq k_l$. В первую строку диаграммы T запишем числа $1, \dots, k_1$ и дополним числами $(2n+1)', \dots, (k_1+1)'$; последующие $l-1$ строк заполним аналогично, а в нижние $q-l$ строк запишем числа $1, \dots, 2n+1$. Ясно, что для таким образом построенной таблицы T выполнено равенство $\lambda = p\varpi_{2n+1} + v(T)$. Значит, в силу правила Литтлвуда–Ричардсона модуль $V(\lambda)$ действительно входит в разложение тензорного произведения $V(p\varpi_{2n+1}) \otimes V(q\varpi_{2n+1})$. Легко видеть, что представление λ в виде $p\varpi_{2n+1} + v(T)$ можно получить только одним способом, т.е. $V(\lambda)$ входит с кратностью единица.

Для сокращения записи будем в дальнейшем использовать мультииндексные обозначения. Пусть $I = (i_1, \dots, i_s)$ – мультииндекс, все компоненты которого – нечетные натуральные числа, не превосходящие $2n-1$. Обозначим количество компонент I как $|I|$, под ϖ_I будем понимать сумму $\sum_{i \in I} \varpi_i$. Тогда разложение $V(p\varpi_{2n+1}) \otimes V(q\varpi_{2n+1})$ на неприводимые слагаемые запишется в виде

$$\bigoplus V((p+q-2|I|)\varpi_{2n+1} + \varpi_I).$$

ЛЕММА 6. *Тройка $(\varpi_{2n+1}, \varpi_{2n+1}, \varpi_{2n+1})$ свободна от инвариантов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольные натуральные числа $p \geq q \geq r$. Согласно предыдущей лемме

$$\begin{aligned} & V(p\varpi_{2n+1}) \otimes V(q\varpi_{2n+1}) \otimes V(r\varpi_{2n+1}) \\ &= \bigoplus_I [V((p+q-2|I|)\varpi_{2n+1} + \varpi_I) \otimes V(r\varpi_{2n+1})]. \end{aligned}$$

Покажем, что никакой модуль из правой части равенства не содержит неподвижных относительно G элементов. Согласно правилу Литтлвуда–Ричардсона каждая неприводимая компонента такого модуля является модулем со старшим весом равным $(p+q-2|I|)\varpi_{2n+1} + \varpi_I + v(T)$, где T – некоторая стандартная таблица Юнга формы $r\varpi_{2n+1}$. Ни одна такая таблица Юнга не может иметь вес равный $-((p+q-2s)\varpi_{2n+1} + \varpi_{i_1} + \dots + \varpi_{i_s})$. Чтобы показать это, фиксируем произвольную стандартную таблицу Юнга T формы $r\varpi_{2n+1}$, т.е. прямоугольную таблицу размера $(2n+1) \times r$. В силу ее стандартности, нижние t строк этой таблицы начинаются с числа 1, а лежащие выше $r-t$ строк – с чисел, больших 1. Для такой таблицы $v(T) = 1/2((t - (r-t))\varepsilon_1 + \dots)$ и

$$(p+q-2|I|)\varpi_{2n+1} + \varpi_I + v(T) = \left(\frac{p+q-r}{2} + t \right) \varepsilon_1 + \dots.$$

Если $(p+q-2|I|)\varpi_{2n+1} + \varpi_I + v(T) = 0$, то $(p+q-r)/2 + t = 0$, что невозможно, поскольку $(p+q-r)/2 \geq p/2 > 0$.

3.4. Пример нестабильного действия группы E_6 на двух копиях многообразия X .

ЛЕММА 7. Пусть G – полупростая алгебраическая группа, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, T – максимальный тор в G , $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ – корневое разложение $\mathfrak{g}$ относительно тора T , и пусть V – модуль над G . Если $v \in V$ – T -весовой вектор, то касательная алгебра $\mathfrak{h}$ стабилизатора вектора v регуляльна, т.е. имеет вид $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{g}_\alpha$, где $\mathfrak{h}_0 \subseteq \mathfrak{t}$ и $\Gamma \subset \Delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольный элемент $\xi \in \mathfrak{h}$. Пусть его весовое разложение имеет вид $\xi = \sum_{\mu \in \Delta} \xi_\mu$. Поскольку $0 = \xi \cdot v = \sum_{\mu \in \Delta} \xi_\mu \cdot v$ и каждый вектор в написанной сумме является весовым, то каждое слагаемое в отдельности равно нулю, т.е. $\xi_\mu \in \mathfrak{h}$ для всех μ , а это означает регулярность подалгебры $\mathfrak{h}$.

ЛЕММА 8. *Группа E_6 действует на $X(\varpi_1) \times X(\varpi_1)$ с плотной орбитой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала найдем размерность $X(\varpi_1)$. Обозначим через $P(\varpi_1)$ систему весов модуля $V(\varpi_1)$. Модуль $V(\varpi_1)$ обладает тем свойством, что если $\xi \in \text{Lie } E_6$ и $v \in V(\varpi_1)$ – ненулевые элементы таких весов μ и ν , что $\mu + \nu \in P(\varpi_1)$, то $\xi \cdot v \neq 0$. С учетом того, что стабилизатор v_λ регулярен, это показывает, что данный стабилизатор является прямой суммой подпространства коразмерности 1 в $\mathfrak{t}$ и тех корневых пространств $\mathfrak{g}_\alpha$, для которых $\varpi_1 + \alpha \notin P(\varpi_1)$. Значит, размерность $X(\varpi_1)$ на единицу больше числа

корней α алгебры $\text{Lie } E_6$, для которых вес $\varpi_1 + \alpha \in P(\varpi_1)$. Пользуясь этим, легко получить, что $\dim X(\varpi_1) = 17$.

Заметим, что в $X(\varpi_1)$ имеется вектор веса $\varepsilon_6 - \varepsilon$ – его можно получить из старшего вектора модуля $V(\varpi_1)$ действием группы Вейля, которая содержит все перестановки весов ε_i и преобразование $\varepsilon_i \mapsto \varepsilon_i, \varepsilon \mapsto -\varepsilon$.

Возьмем точку $X(\varpi_1) \times X(\varpi_1)$, первая компонента которой – вектор v веса $\varpi_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon$, а вторая компонента – вектор w веса $\varepsilon_6 - \varepsilon$. Для поиска стабилизатора такой точки подходит то же самое рассуждение, что было использовано при подсчете $\dim X(\varpi_1)$. Оно показывает, что размерность орбиты точки (v, w) равна 34, т.е. совпадает с $\dim X(\varpi_1) \times X(\varpi_1)$, поэтому эта орбита плотна.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Описанное выше действие не транзитивно и, как следствие, не стабильно. Действительно, все точки из указанной орбиты имеют ненулевые компоненты, поэтому точка $(0, 0) \in X(\varpi_1) \times X(\varpi_1)$ не лежит в этой орбите.

3.5. Доказательство теоремы 3. Случай $G = \text{SL}_n$. Для $k < n$ действие $\text{SL}_n : (\mathbf{k}^n)^k$ не транзитивно и имеет открытую орбиту, поэтому $s_m(\text{SL}_n) \geq n = m(\text{SL}_n)$.

Случай, когда G совпадает с одной из групп Spin_{2n+1} , Spin_{4n+4} , Sp_{2n} , G_2 , F_4 , E_7 , E_8 . Для всех указанных групп $m(G) = 2$, поэтому утверждение теоремы тривиально, ведь действие G на любом ее НВ-многообразии нестабильно.

Случай $G = \text{Spin}_{4n+2}$. Тройка доминантных весов $(\varpi_{2n+1}, \varpi_{2n+1}, \varpi_{2n+1})$ согласно лемме 6 свободна от инвариантов. В силу теоремы 9 при $X = X(\varpi_{2n+1})$ действие $\text{Spin}_{4n+2} : X^3$ нестабильно, поэтому $s_m(\text{Spin}_{4n+2}) \geq 4 = m(\text{Spin}_{4n+2})$.

Случай $G = E_6$. Лемма 8 дает пример нестабильного диагонального действия $E_6 : X^2$, поэтому $s_m(E_6) \geq 3 = m(E_6)$.

3.6. Дальнейшие оценки индексов стабильности. Теорема 3 дает оценку снизу на числа $s_m(G)$ и $s(G)$. Рассмотрение действия группы Sp_{2m} на пространстве ее тавтологического представления $\text{Sp}_{2m} : \mathbf{k}^{2m}$ показывает, что для числа $s(G)$ эта оценка не точна, т.е. для некоторых групп $s(G) > m(G)$. Оценка же числа $s_m(G)$ в некоторых случаях оказывается точной, что показывает теорема 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть θ – инволюция Вейля на группе G , т.е. инволютивный автоморфизм, который действует как инверсия на некотором максимальном торе группы G . Известно, что для любого линейного представления R группы G подкрученное представление $R \circ \theta$ изоморфно сопряженному представлению R^* . Пусть X – неприводимое G -многообразие. Обозначим X^θ многообразие X с θ -подкрученным действием.

Всякое G -многообразие X можно G -эквивариантно вложить как замкнутое подмножество в G -модуль V . Поскольку все линейные представления группы G самосопряжены, то имеется эквивариантный изоморфизм $\varphi : V \rightarrow V^\theta$, с помощью которого строится изоморфизм G -многообразий $X \times X$ и $X \times X^\theta$. Значит, стабильность действия группы G на $X \times X$ равносильна стабильности действия на $X \times X^\theta$. Последнее же действие стабильно в силу [6; предложение 1.6]. Значит, $s_m(G) = 2$.

Теперь покажем, что $m(G) = 2$ для полупростых групп, все линейные представления которых самосопряжены. В этом случае для любого G -модуля V имеем $(V^{\otimes 2})^G \cong (V \otimes V^*)^G \cong (\text{End}(V))^G$, а модуль $\text{End}(V)$ имеет ненулевой неподвижный относительно G элемент – тождественное отображение Id_V ; значит, $2 \in M(G)$ и $m(G) = 2$.

Список литературы

- [1] В. Л. Попов, “О стабильности действия алгебраической группы на алгебраическом многообразии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:2 (1972), 371–385; англ. пер.: V. L. Popov, “On the stability of the action of an algebraic group on an algebraic variety”, *Math. USSR-Izv.*, **6**:2 (1972), 367–379.
- [2] И. В. Аржанцев, “О стабильности диагональных действий”, *Матем. заметки*, **71**:6 (2002), 803–806; англ. пер.: I. V. Arzhantsev, “On the stability of diagonal actions”, *Math. Notes*, **71**:5–6 (2002), 735–738.
- [3] E. B. Vinberg, “On stability of actions of reductive algebraic groups”, *Lie algebras, rings and related topics* (Tainan, Taiwan, 1997), Springer-Verlag, Hong-Kong, 2000, 188–202.
- [4] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по алгебраическим группам и группам Ли*, Наука, М., 1988; англ. пер.: A. L. Onishchik, È. B. Vinberg, *Lie groups and algebraic groups*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [5] В. Л. Попов, “Критерий стабильности действия полупростой группы на факториальном многообразии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:3 (1970), 523–531; англ. пер.: V. L. Popov, “Stability criteria for the action of a semisimple group on a factorial manifold”, *Math. USSR-Izv.*, **4**:3 (1970), 527–535.
- [6] D. I. Panyushev, “A restriction theorem and the Poincare series for U -invariants”, *Math. Ann.*, **301**:1 (1995), 655–675.
- [7] S. Kumar, “Proof of the Parthasarathy–Ranga Rao–Varadarajan conjecture”, *Invent. Math.*, **93**:1 (1998), 117–130.
- [8] O. Mathieu, “Construction d’un groupe de Kac-Moody et applications”, *Compositio Math.*, **69**:1 (1989), 37–60.
- [9] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Stud. Adv. Math., **29**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [10] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, “Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:4 (1972), 749–764; англ. пер.: È. B. Vinberg, V. L. Popov, “On a class of quasihomogeneous affine varieties”, *Math. USSR-Izv.*, **6**:4 (1972), 743–758.
- [11] V. L. Popov, “Tensor product decompositions and open orbits in multiple flag varieties”, *J. Algebra*, **313**:1 (2007), 392–416.
- [12] P. Littelmann, “A generalization of the Littlewood–Richardson rule”, *J. Algebra*, **130**:2 (1990), 328–368.

А. Б. Анисимов (A. B. Anisimov)
 Механико-математический факультет
 Московского государственного университета им.
 М. В. Ломоносова;
 Национальный исследовательский университет
 “Высшая школа экономики”, г. Москва
E-mail: aanisimov@inbox.ru

Поступила в редакцию
 30.12.2010 и 01.07.2011