Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Слюсарчук, Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 5, 135–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7844>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:59:53

УДК 517.988.6

В. Е. Слюсарчук

Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений

Приведены условия существования ограниченных и периодических решений нелинейного дифференциально-функционального уравнения

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} + (Fx)(t) = h(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

использующие локальные линейные аппроксимации оператора F .

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: ограниченные и периодические решения, нелинейные дифференциально-функциональные уравнения, обратимость нелинейных операторов.

Эта статья продолжает исследования автора об условиях существования решений нелинейных уравнений с помощью метода локальной линейной аппроксимации (см. [1]–[4]). Здесь в общем случае изложена идея этого метода, показано, что он применим к исследованию широкого класса нелинейных дифференциально-функциональных уравнений, и приведены примеры нахождения условий разрешимости нелинейных уравнений в пространствах ограниченных непрерывных на оси функций и периодических функций.

§ 1. Функциональные пространства и c -непрерывные операторы

Будем придерживаться следующих обозначений и определений.

Пусть E – конечномерное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$, X и Y – произвольные банаховы пространства и $L(X, Y)$ – банахово пространство линейных непрерывных операторов A , действующих из пространства X в пространство Y , с нормой $\|A\|_{L(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$. Обозначим через $C^0(\mathbb{R}, X)$ банахово пространство ограниченных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $x = x(t)$ со значениями в X с нормой $\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, X)} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_X$, а через $C^m(\mathbb{R}, X)$, где $m \in \mathbb{N}$, обозначим банахово пространство функций $x \in C^0(\mathbb{R}, X)$, для каждой из которых $\frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^m x}{dt^m} \in C^0(\mathbb{R}, X)$, с нормой

$$\|x\|_{C^m(\mathbb{R}, X)} = \max_{k=0, \dots, m} \left\| \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, X)},$$

где $\frac{d^0 x}{dt^0}$ обозначает x . Пространство всех T -периодических элементов $x = x(t)$ пространства $C^k(\mathbb{R}, X)$ с нормой $\|x\|_{P_T^k(\mathbb{R}, X)} = \|x\|_{C^k(\mathbb{R}, X)}$, где $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, будем обозначать через $P_T^k(\mathbb{R}, X)$.

Последовательность элементов $x_k \in C^0(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, будем называть *локально сходящейся* к элементу $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$ при $k \rightarrow \infty$, если эта последовательность ограничена и $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|t| \leq T} \|x_k(t) - x(t)\|_E = 0$ для каждого числа $T > 0$. Для такой последовательности будем использовать следующее обозначение:

$$x_k \xrightarrow{\text{loc}, C^0(\mathbb{R}, E)} x \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Аналогично, последовательность $y_k \in C^m(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, будем называть *локально сходящейся* к элементу $y \in C^m(\mathbb{R}, E)$ при $k \rightarrow \infty$ и обозначать

$$y_k \xrightarrow{\text{loc}, C^m(\mathbb{R}, E)} y \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

если

$$y_k \xrightarrow{\text{loc}, C^0(\mathbb{R}, E)} y, \quad \frac{dy_k}{dt} \xrightarrow{\text{loc}, C^0(\mathbb{R}, E)} \frac{dy}{dt}, \quad \dots, \quad \frac{d^m y_k}{dt^m} \xrightarrow{\text{loc}, C^0(\mathbb{R}, E)} \frac{d^m y}{dt^m} \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Оператор $\mathcal{H}: C^i(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^j(\mathbb{R}, E)$, $i, j \in \{0, 1, \dots, m\}$, называется *с-непрерывным*, если для произвольных функций $x \in C^i(\mathbb{R}, E)$ и $x_k \in C^i(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, для которых $x_k \xrightarrow{\text{loc}, C^i(\mathbb{R}, E)} x$ при $k \rightarrow \infty$, выполняется соотношение

$$\mathcal{H}x_k \xrightarrow{\text{loc}, C^j(\mathbb{R}, E)} \mathcal{H}x \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Оператор $\mathcal{H}: C^i(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^j(\mathbb{R}, E)$ называется *равномерно с-непрерывным на ограниченном множестве* $M \subset C^i(\mathbb{R}, E)$, если для некоторого числа $d > 0$ и произвольных числа $\varepsilon > 0$ и отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ существуют такие число $\delta > 0$ и отрезок $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, что

$$\max_{a \leq t \leq b, l \in \{0, 1, \dots, j\}} \left\| \frac{d^l(\mathcal{H}x)(t)}{dt^l} - \frac{d^l(\mathcal{H}y)(t)}{dt^l} \right\|_E < \varepsilon,$$

если

$$x \in M, \quad y \in \bigcup_{u \in M} \{x : \|x - u\|_{C^i(\mathbb{R}, E)} \leq d\},$$

$$\max_{\alpha \leq t \leq \beta, l \in \{0, 1, \dots, i\}} \left\| \frac{d^l x(t)}{dt^l} - \frac{d^l y(t)}{dt^l} \right\|_E < \delta.$$

с-непрерывный оператор $\mathcal{H}: C^i(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^j(\mathbb{R}, E)$, $i, j \in \{0, 1, \dots, m\}$, называется *с-вполне непрерывным*, если для каждого числа $r > 0$ функции множества

$$\bigcup_{\|x\|_{C^i(\mathbb{R}, E)} \leq r} \left\{ (\mathcal{H}x)(t), \frac{d(\mathcal{H}x)(t)}{dt}, \dots, \frac{d^j(\mathcal{H}x)(t)}{dt^j} \right\}$$

равностепенно непрерывны на каждом конечном промежутке.

Напомним, что понятия с-непрерывного оператора (на языке ε, δ) и с-вполне непрерывного оператора введены Э. Мухамадиевым (см. [5], [6]). Изучение этих понятий было продолжено в [7]–[12] и других работах. Определение с-непрерывного оператора, которое использует локально сходящиеся последовательности, предложено автором (см., например, [13]).

§ 2. Постановка основных задач

Рассмотрим c -непрерывные дифференциально-функциональные операторы $\mathcal{L}_{F_1} : C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ и $\mathcal{L}_{F_2} : C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, которые определяются формулами

$$(\mathcal{L}_{F_1} x)(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m} + (F_1 x)(t), \quad (\mathcal{L}_{F_2} x)(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m} + (F_2 x)(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $x \in C^m(\mathbb{R}, E)$, $m \in \mathbb{N}$, $F_1 : C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – ограниченный (см. [14]) c -вполне непрерывный оператор и $F_2 : C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – ограниченный и равномерно c -непрерывный на каждом шаре $B^{m-1}[0, r]$, $r > 0$, оператор.

Целями статьи являются:

- выяснение условий, когда прообразы $\mathcal{L}_{F_1}^{-1} P_T^0(\mathbb{R}, E)$, $\mathcal{L}_{F_2}^{-1} P_T^0(\mathbb{R}, E)$ пространства $P_T^0(\mathbb{R}, E)$ совпадают с $P_T^m(\mathbb{R}, E)$ (случай выполнения соотношений $\mathcal{L}_{F_j}^{-1} C^0(\mathbb{R}, E) = C^m(\mathbb{R}, E)$, $j = 1, 2$, рассмотрен в [1]), и условий, когда конкретные нелинейные операторы обладают аналогичными свойствами;
- построение одного достаточно широкого класса нелинейных дифференциально-функциональных операторов, к исследованию элементов которого применим метод локальной линейной аппроксимации.

Заметим, что решение задачи о существовании периодических решений нелинейных уравнений даже в случае обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка не является тривиальным (см., например, [15]–[18]).

В основе исследований операторов $\mathcal{L}_{F_1}$, $\mathcal{L}_{F_2}$ и других нелинейных операторов лежит метод, использующий локальную линейную аппроксимацию этих операторов на шарах пространства $C^m(\mathbb{R}, E)$ или пространства $C^{m-1}(\mathbb{R}, E)$, а также свойства c -непрерывных операторов.

§ 3. Идея метода локальной линейной аппроксимации

Пусть $\mathcal{F} : X \rightarrow Y$ – нелинейный оператор и $y \in Y$. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{F}x = y, \tag{1}$$

частными случаями которого являются исследуемые в статье дифференциально-функциональные уравнения. Важными являются условия, обеспечивающие выполнение для множества $R(\mathcal{F})$ значений оператора $\mathcal{F}$ равенства

$$R(\mathcal{F}) = Y. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathcal{E}(X, Y)$ множество всех линейных непрерывных операторов $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$, каждый из которых имеет непрерывный обратный $\mathcal{A}^{-1}$.

Для каждого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{E}(X, Y)$ уравнение (1) равносильно уравнению

$$x = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x - \mathcal{F}x + y).$$

Предположим, что для каждого числа $H \geq 0$ существуют такие число $r_H > 0$ и оператор $\mathcal{A}_H \in \mathcal{E}(X, Y)$, что выполняется неравенство

$$\sup_{\|x\|_X \leq r_H} \|\mathcal{F}x - \mathcal{A}_H x\|_Y \leq \frac{r_H}{\|\mathcal{A}_H^{-1}\|_{L(Y, X)}} - H. \tag{3}$$

Легко убедиться, что тогда шар $B_X[0, r_H] = \{x : \|x\|_X \leq r_H\}$ для каждого вектора $y \in B_Y[0, H]$ является инвариантным по отношению к оператору

$$\mathcal{G}_H x = \mathcal{A}_H^{-1}(\mathcal{A}_H x - \mathcal{F}x + y).$$

Следовательно, задача о существовании решения уравнения (1), если $\|y\|_Y \leq H$, сводится к задаче о существовании неподвижной точки оператора $\mathcal{G}_H$.

Если для каждого $H \geq 0$ множество $\text{Fix } \mathcal{G}_H$ неподвижных точек оператора $\mathcal{G}_H$ не является пустым множеством, то будет выполняться соотношение (2). Это условие реализуется, если пространства X и Y конечномерные, $\dim X = \dim Y$ и оператор $\mathcal{F}$ непрерывный (в силу теоремы Боля–Брауэра; см. [19]).

В случае $\dim X = \infty$ и непрерывности оператора $\mathcal{F}$ множество решений уравнения (1) может быть пустым, что подтверждается следующим примером.

ПРИМЕР 1. Пусть $X = Y = l_1$, где l_1 – банахово пространство числовых последовательностей $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, для каждой из которых $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$, с нормой $\|\mathbf{x}\|_{l_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Рассмотрим непрерывный оператор $\mathcal{G} : l_1 \rightarrow l_1$, который определяется равенством

$$\mathcal{G}\mathbf{x} = \left(1 - \frac{\|\mathbf{x}\|_{l_1}}{\omega(\mathbf{x})}, \frac{x_1}{\omega(\mathbf{x})}, \frac{x_2}{\omega(\mathbf{x})}, \dots, \frac{x_n}{\omega(\mathbf{x})}, \dots\right), \quad (4)$$

где

$$\omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|\mathbf{x}\|_{l_1} \leq 1, \\ \|\mathbf{x}\|_{l_1}, & \text{если } \|\mathbf{x}\|_{l_1} > 1. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть $\mathcal{J} : l_1 \rightarrow l_1$ – единичный оператор и $\mathcal{F} = \mathcal{J} - \mathcal{G}$.

Покажем, что уравнение

$$\mathcal{F}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (6)$$

не имеет решений в пространстве l_1 и для оператора $\mathcal{F}$ для каждого числа $H \geq 0$ существуют такие число $r_H > 0$ и оператор $\mathcal{A}_H \in \mathcal{E}(l_1, l_1)$, что выполняется соотношение (3) при $X = Y = l_1$.

Действительно, если $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \dots)$ – решение уравнения (6), то на основании (4) и (5)

$$\|\mathbf{x}^*\|_{l_1} = 1. \quad (7)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mathbf{x}^* &= (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \dots) - \mathcal{G}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \dots) \\ &= (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \dots) - (0, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \dots) = (0, 0, \dots, 0, \dots) \end{aligned}$$

и поэтому $\mathbf{x}^* = (0, 0, \dots, 0, \dots)$, что противоречит (7). Следовательно, множество решений уравнения (6) является пустым.

Далее фиксируем произвольное число $H \geq 0$. В качестве числа r_H и элемента $\mathcal{A}_H$ множества $\mathcal{E}(l_1, l_1)$ возьмем соответственно $1 + H$ и $\mathcal{J}$ (заметим, что $\mathcal{J}^{-1} = \mathcal{J}$ и $\|\mathcal{J}^{-1}\|_{L(l_1, l_1)} = 1$). Тогда на основании (4) и (5)

$$\sup_{\|\mathbf{x}\|_{l_1} \leq r} \|\mathcal{F}\mathbf{x} - \mathcal{J}\mathbf{x}\|_{l_1} = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{l_1} \leq 1+H} \|\mathcal{G}\mathbf{x}\|_{l_1} = 1 = (1 + H) - H = \frac{r}{\|\mathcal{J}^{-1}\|_{L(l_1, l_1)}} - H.$$

Поэтому для оператора $\mathcal{F}$ соотношение (3) выполняется.

Заметим, что в случае $X = C^m(\mathbb{R}, E)$ и $Y = C^0(\mathbb{R}, E)$ для широких классов дифференциально-функциональных уравнений $\text{Fix } \mathcal{G}_H \neq \emptyset$ для всех $H \geq 0$. Поэтому рассмотренную выше локальную линейную аппроксимацию нелинейных операторов можно применять для нахождения условий существования ограниченных и периодических решений нелинейных дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений.

§ 4. Вспомогательные утверждения о s -непрерывных операторах

Рассмотрим ряд утверждений о s -непрерывных операторах, которые потребуются в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 1 (см. [1]). Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $G: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – равномерно s -непрерывное на каждом шаре $B^{m-1}[0, r]$, $r > 0$, отображение. Тогда сужение $G|_{C^m(\mathbb{R}, E)}: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ отображения G на $C^m(\mathbb{R}, E)$ является s -вполне непрерывным.

ТЕОРЕМА 2 (см. [1]). Линейный непрерывный и s -непрерывный оператор A , действующий из $C^{m-1}(\mathbb{R}, E)$ в $C^0(\mathbb{R}, E)$, является равномерно s -непрерывным на каждом шаре $B^{m-1}[0, r]$, $r > 0$.

ТЕОРЕМА 3 (см. [1]). Пусть $S: C^0(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^m(\mathbb{R}, E)$ – линейное непрерывное и s -непрерывное отображение и $F: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – ограниченное s -вполне непрерывное отображение. Тогда $SF: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^m(\mathbb{R}, E)$ – s -вполне непрерывное отображение.

ТЕОРЕМА 4 (см. [9]). Пусть оператор $D \in L(C^m(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))$ s -вполне непрерывный и оператор $\frac{d^m}{dt^m} + D: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ имеет непрерывный обратный $(\frac{d^m}{dt^m} + D)^{-1}$. Тогда

$$\left(\frac{d^m}{dt^m} + D \right)^{-1}: C^0(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^m(\mathbb{R}, E)$$

– s -непрерывный оператор.

ТЕОРЕМА 5 (см. [1]). Пусть $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{B}$ – замкнутый шар с центром в точке 0 в банаховом пространстве $C^p(\mathbb{R}, E)$ и $\mathcal{A}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ – s -вполне непрерывный оператор. Тогда $\mathcal{A}$ имеет неподвижную точку.

Также потребуется в дальнейшем еще одно утверждение.

Рассмотрим оператор сдвига $S_\tau \in L(C^0(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))$, $\tau \in \mathbb{R}$, который определяется соотношением

$$(S_\tau x)(t) = x(t + \tau), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$.

Оператор $A: C^i(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^j(\mathbb{R}, E)$, $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, называется T -периодическим, где T – произвольное положительное число, если

$$S_T A S_{-T} = A.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполняются условия теоремы 5 и оператор $\mathfrak{A}$ является T -периодическим. Тогда этот оператор имеет неподвижную T -периодическую точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку оператор $\mathfrak{A}$ T -периодический, то сужение $\mathfrak{A}|_{P_T^p(\mathbb{R}, E)}$ оператора $\mathfrak{A}$ на подпространство $P_T^p(\mathbb{R}, E)$ пространства $C^p(\mathbb{R}, E)$ вполне непрерывное. Поскольку также $\mathfrak{A}(\mathcal{B} \cap P_T^p(\mathbb{R}, E)) \subset \mathcal{B} \cap P_T^p(\mathbb{R}, E)$, то на основании теоремы Шаудера о неподвижной точке (см. [20]) оператор $\mathfrak{A}$ имеет неподвижную точку $x^* \in \mathcal{B} \cap P_T^p(\mathbb{R}, E)$. Теорема доказана.

С помощью приведенных утверждений получим условия разрешимости нелинейных дифференциально-функциональных уравнений в пространствах $C^0(\mathbb{R}, E)$ и $P_T^0(\mathbb{R}, E)$, $T > 0$.

§ 5. Теоремы о существовании ограниченных и периодических решений дифференциально-функциональных уравнений

Обозначим через $\mathcal{D}_1$ множество всех c -вполне непрерывных элементов A_1 пространства $L(C^m(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))$, для каждого из которых оператор $\mathcal{L}_{A_1}: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, который определяется формулой

$$(\mathcal{L}_{A_1}x)(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m} + (A_1x)(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

имеет непрерывный обратный оператор $\mathcal{L}_{A_1}^{-1}$. Через $\mathcal{D}_2$ обозначим множество всех c -непрерывных элементов A_2 пространства $L(C^{m-1}(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))$, для каждого из которых определен оператор

$$(\mathcal{L}_{A_2}x)(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m} + (A_2x)(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

оператор $\mathcal{L}_{A_2}: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ имеет непрерывный обратный оператор $\mathcal{L}_{A_2}^{-1}$.

Имеют место следующие утверждения о существовании ограниченных и периодических решений нелинейных дифференциально-функциональных уравнений.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $F_1: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – ограниченный c -вполне непрерывный оператор и для некоторых чисел $H \geq 0$, $r > 0$ и элемента $A_1 \in \mathcal{D}_1$ имеет место неравенство

$$\sup_{\|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|F_1x - A_1x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r}{\|\mathcal{L}_{A_1}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))}} - H. \quad (8)$$

Тогда:

1) для каждого $h \in B_{C^0(\mathbb{R}, E)}[0, H]$ уравнение

$$\mathcal{L}_{F_1}x = h \quad (9)$$

имеет хотя бы одно решение $x \in B_{C^m(\mathbb{R}, E)}[0, r]$;

2) если дополнительно для некоторого числа $T > 0$ операторы F_1 и A_1 являются T -периодическими, то уравнение (9) для каждого T -периодического $h \in B_{C^0(\mathbb{R}, E)}[0, H]$ имеет хотя бы одно T -периодическое решение $x \in B_{C^m(\mathbb{R}, E)}[0, r]$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $F_2: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – ограниченный и равномерно s -непрерывный на каждом шаре $B_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)}[0, r]$, $r > 0$, оператор и для некоторых чисел $H \geq 0$, $r > 0$ и элемента $A_2 \in \mathcal{D}_2$ имеет место неравенство

$$\sup_{\|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|F_2 x - A_2 x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r}{\|\mathcal{L}_{A_2}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^{m-1}(\mathbb{R}, E))}} - H. \quad (10)$$

Тогда:

1) для каждого $h \in B_{C^0(\mathbb{R}, E)}[0, H]$ уравнение

$$\mathcal{L}_{F_2} x = h \quad (11)$$

имеет хотя бы одно решение $x \in C^m(\mathbb{R}, E) \cap B_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)}[0, r]$;

2) если дополнительно для некоторого числа $T > 0$ операторы F_2 и A_2 являются T -периодическими, то уравнение (11) для каждого T -периодического $h \in B_{C^0(\mathbb{R}, E)}[0, H]$ имеет хотя бы одно T -периодическое решение $x \in C^m(\mathbb{R}, E) \cap B_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)}[0, r]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 7 и 8. Обоснования частей 1) утверждений теорем 7 и 8 при $H > 0$ приведены в [1]. Они сохраняют силу и в случае $H = 0$. Докажем части 2) утверждений теорем. Пусть $h \in P_T^0(\mathbb{R}, E) \cap B_{C^0(\mathbb{R}, E)}[0, H]$. Согласно § 3 множества решений уравнений (9) и (11) совпадают соответственно с множествами решений уравнений

$$x(t) = (\mathcal{G}_{H,1} x)(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

$$x(t) = (\mathcal{G}_{H,2} x)(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

где $\mathcal{G}_{H,i}: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^m(\mathbb{R}, E)$, $i = 1, 2$, – операторы, которые определяются формулами

$$(\mathcal{G}_{H,i} y)(t) = (\mathcal{L}_{A_i}^{-1}(A_i y - F_i y + h))(t), \quad i = 1, 2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В силу теорем 3 и 4 оператор $\mathcal{G}_{H,1}$ является s -вполне непрерывным. Поскольку на основании T -периодичности операторов F_1 , A_1 и функции h аналогичным свойством обладает и оператор $\mathcal{G}_{H,1}$ и в силу (8) шар $B_{C^m(\mathbb{R}, E)}[0, r]$ инвариантный по отношению к оператору $\mathcal{G}_{H,1}$, то на основании теоремы 6 уравнение (12) имеет T -периодическое решение $x \in B_{C^m(\mathbb{R}, E)}[0, r]$.

На основании теорем 1–4 оператор $\mathcal{G}_{H,2}: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^m(\mathbb{R}, E)$ является s -непрерывным и ограниченным. Этот оператор как оператор, действующий из $C^{m-1}(\mathbb{R}, E)$ в это же пространство, в силу теоремы Арцела–Асколи является s -вполне непрерывным. На основании неравенства (10) шар $B_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)}[0, r]$ инвариантный по отношению к оператору $\mathcal{G}_{H,2}$. Этот оператор также T -периодический в силу T -периодичности операторов A_2 , F_2 и функции $h \in B_{C^0(\mathbb{R}, E)}[0, H]$. Поэтому согласно теореме 6 уравнение (13) имеет хотя бы одно T -периодическое решение $x^* \in B_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)}[0, r]$, которое является элементом пространства $C^m(\mathbb{R}, E)$, поскольку $\mathcal{G}_{H,2} C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \subset C^m(\mathbb{R}, E)$. Теоремы 7 и 8 доказаны.

Частными случаями теорем 7 и 8 являются следующие два утверждения.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $F_1: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – ограниченный s -вполне непрерывный оператор и для каждого числа $H \geq 0$ существуют такие число $r > 0$ и элемент $A_1 \in \mathcal{D}_1$, что имеет место неравенство (8).

Тогда:

- 1) $\mathcal{L}_{F_1} C^m(\mathbb{R}, E) = C^0(\mathbb{R}, E)$;
- 2) если дополнительно для некоторого числа $T > 0$ операторы F_1 и A_1 являются T -периодическими, то $\mathcal{L}_{F_1} P_T^m(\mathbb{R}, E) = P_T^0(\mathbb{R}, E)$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $F_2: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – ограниченный и равномерно s -непрерывный на каждом шаре $B_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)}[0, r]$, $r > 0$, оператор и для каждого числа $H \geq 0$ существуют такие число $r > 0$ и элемент $A_2 \in \mathcal{D}_2$, что имеет место неравенство (10).

Тогда:

- 1) $\mathcal{L}_{F_2} C^m(\mathbb{R}, E) = C^0(\mathbb{R}, E)$;
- 2) если дополнительно для некоторого числа $T > 0$ операторы F_2 и A_2 являются T -периодическими, то $\mathcal{L}_{F_2} P_T^m(\mathbb{R}, E) = P_T^0(\mathbb{R}, E)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Части 1) утверждений теорем 9 и 10 при $H > 0$ содержатся в [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Применение на практике результатов этого параграфа предполагает знание норм $\|\mathcal{L}_{A_1}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))}$ и $\|\mathcal{L}_{A_2}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^{m-1}(\mathbb{R}, E))}$. Нахождение этих норм является непростой задачей даже в случае, когда оператор $\mathcal{L}_{A_2}^{-1}$ дифференциальный, $\dim E = 1$ и $m > 2$. Легче найти для рассматриваемых норм оценки сверху. Предположим, что такие оценки нам известны. Пусть

$$\|\mathcal{L}_{A_i}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))} \leq a_i, \quad i = 1, 2,$$

для некоторых чисел $a_i = a_i(A_i)$, $i = 1, 2$. Тогда если выполняются неравенства

$$\sup_{\|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|F_1 x - A_1 x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r}{a_1} - H, \quad (14)$$

$$\sup_{\|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|F_2 x - A_2 x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r}{a_2} - H, \quad (15)$$

то выполняются соответственно неравенства (8) и (10). Поэтому можно ослабить теоремы 7–10, заменив в них неравенства (8) и (10) неравенствами (14) и (15) соответственно.

§ 6. Класс уравнений, к которым применимы теоремы 7–10

Покажем, что множество нелинейных дифференциально-функциональных уравнений, к исследованию которых применимы результаты предыдущего параграфа, является достаточно широким множеством.

Обозначим через $\mathcal{G}_m$ множество всех элементов $\mathcal{B} = (B_0, B_1, \dots, B_m)$, где $B_k: C^0(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, $k = 0, \dots, m$, – линейные непрерывные и s - вполне непрерывные операторы, для каждого из которых линейный s -непрерывный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, который определяется равенством

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{B}} x)(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \sum_{k=0}^m \left(B_k \frac{d^k x}{dt^k} \right)(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

имеет обратный непрерывный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{-1}$.

ТЕОРЕМА 11. Для каждой положительных чисел H_n , $n \geq 1$, элементов $\mathcal{B}_n = (B_{0,n}, B_{1,n}, \dots, B_{m,n}) \in \mathcal{G}_m$, $n \geq 1$, и положительных чисел $a_{1,n}$, $n \geq 1$, для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = +\infty, \quad \|\mathcal{L}_{\mathcal{B}_n}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))} \leq a_{1,n}, \quad n \geq 1,$$

существуют ограниченный и с-вопне непрерывный оператор $F: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ и последовательность положительных чисел r_n , $n \geq 1$, для которых выполняется соотношение

$$\sup_{\|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r_n} \left\| Fx - \sum_{k=0}^m B_{k,n} \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r_n}{a_{1,n}} - H_n, \quad n \geq 1. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную последовательность положительных чисел r_n , $n \geq 1$, для которой $r_1 \geq 1$ и $r_{n+1} > r_n + 3$, $n \geq 1$ (значения r_n уточним ниже). Для каждого $n \geq 1$ определим отображения

$$\begin{aligned} \omega_{1,n}: \{x \in C^m(\mathbb{R}, E) : r_n \leq \|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r_n + 1\} &\rightarrow [0, 1], \\ \omega_{2,n}: \{x \in C^m(\mathbb{R}, E) : r_n + 1 \leq \|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r_n + 2\} &\rightarrow [0, 1] \end{aligned}$$

с помощью равенств

$$\begin{aligned} \omega_{1,n}(x) &= r_n \left\| \left(\frac{r_n + 1}{\|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)}} - 1 \right) x \right\|_{C^m(\mathbb{R}, E)}, \\ \omega_{2,n}(x) &= (r_n + 2) \left\| \left(\frac{r_n + 1}{\|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)}} - 1 \right) x \right\|_{C^m(\mathbb{R}, E)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что отображения $\omega_{1,n}$ и $\omega_{2,n}$ непрерывны,

$$\omega_{1,n}(x) = 1, \quad \text{если } \|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} = r_n, \quad (17)$$

$$\omega_{2,n}(x) = 1, \quad \text{если } \|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} = r_n + 2, \quad (18)$$

$$\omega_{1,n}(x) = \omega_{2,n}(x) = 0, \quad \text{если } \|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} = r_n + 1, \quad (19)$$

$$R(\omega_{1,n}) = R(\omega_{2,n}) = [0, 1]. \quad (20)$$

Оператор $F: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ и числа r_n , $n \geq 1$, определим следующим образом.

Сначала рассмотрим линейный оператор $F_1: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, который определяется равенством

$$F_1 x = \sum_{k=0}^m B_{k,1} \frac{d^k x}{dt^k}.$$

Очевидно, что для каждого числа $r > 0$

$$\sup_{\|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r} \left\| F_1 x - \sum_{k=0}^m B_{k,1} \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} = 0.$$

Выберем число $r_1 \geq 1$ так, чтобы

$$\frac{r_1}{a_{1,1}} - H_1 \geq 0.$$

Далее рассмотрим нелинейный оператор $F_2: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, который определяется формулой

$$F_2x = \begin{cases} F_1x, & \text{если } \|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r_1, \\ \omega_{1,1}(x)F_1x, & \text{если } r_1 < \|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r_1 + 1, \\ \omega_{2,1}(x) \sum_{k=0}^m B_{k,2} \frac{d^k x}{dt^k}, & \text{если } r_1 + 1 < \|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r_1 + 2, \\ \sum_{k=0}^m B_{k,2} \frac{d^k x}{dt^k}, & \text{если } \|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} > r_1 + 2. \end{cases}$$

Этот оператор непрерывный и ограниченный в силу непрерывности $\omega_{1,1}$ и $\omega_{2,1}$, соотношений (17)–(20) и непрерывности линейных операторов F_1 и $\sum_{k=0}^m B_{k,2} \frac{d^k x}{dt^k}$. Легко проверить, что

$$\sup_{x \in C^m(\mathbb{R}, E)} \left\| F_2x - \sum_{k=0}^m B_{k,2} \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} < +\infty.$$

Поэтому существует такое число $r_2 > r_1 + 3$, что выполняется неравенство

$$\sup_{\|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r_2} \left\| F_2x - \sum_{k=0}^m B_{k,2} \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r_2}{a_{1,2}} - H_2.$$

Далее определим нелинейный оператор $F_3: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ с помощью формулы

$$F_3x = \begin{cases} F_2x, & \text{если } \|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r_2, \\ \omega_{1,2}(x)F_2x, & \text{если } r_2 < \|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r_2 + 1, \\ \omega_{2,2}(x) \sum_{k=0}^m B_{k,3} \frac{d^k x}{dt^k}, & \text{если } r_2 + 1 < \|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r_2 + 2, \\ \sum_{k=0}^m B_{k,3} \frac{d^k x}{dt^k}, & \text{если } \|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} > r_2 + 2. \end{cases}$$

Этот оператор непрерывный и ограниченный в силу непрерывности $\omega_{1,2}$ и $\omega_{2,2}$, соотношений (17)–(20), непрерывности и ограниченности нелинейного оператора F_2 и непрерывности линейного оператора $\sum_{k=0}^m B_{k,3} \frac{d^k x}{dt^k}$. Очевидно, что

$$\sup_{x \in C^m(\mathbb{R}, E)} \left\| F_3x - \sum_{k=0}^m B_{k,3} \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} < +\infty.$$

Поэтому существует такое число $r_3 > r_2 + 3$, что выполняется неравенство

$$\sup_{\|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r_3} \left\| F_3x - \sum_{k=0}^m B_{k,3} \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r_3}{a_{1,3}} - H_3.$$

Аналогичным образом определяем нелинейные непрерывные и ограниченные операторы $F_n: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, $n \geq 4$, и числа $r_n > r_{n-1} + 3$, $n \geq 4$.

и s -вполне непрерывный оператор $F: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ и последовательность положительных чисел r_n , $n \geq 1$, для которых выполняется соотношение

$$\sup_{\|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r_n} \left\| Fx - \sum_{k=0}^m B_{k,n} \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r_n}{\|\mathcal{L}_{\mathcal{B}_n}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))}} - H_n, \\ n \geq 1.$$

Далее рассмотрим множество элементов $\mathcal{B} = (B_0, B_1, \dots, B_{m-1})$, где

$$B_k: C^0(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E), \quad k = 0, \dots, m-1,$$

– линейные непрерывные и s -непрерывные операторы, для каждого из которых линейный s -непрерывный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, который определяется формулой

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}x)(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \sum_{k=0}^{m-1} \left(B_k \frac{d^k x}{dt^k} \right)(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

имеет обратный непрерывный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{-1}$. Это множество будем обозначать через $\mathcal{H}_m$.

Аналогично теореме 11 доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 13. Для каждой положительной чисел H_n , $n \geq 1$, элементов $\mathcal{C}_n = (C_{0,n}, C_{1,n}, \dots, C_{m-1,n}) \in \mathcal{H}_m$, $n \geq 1$, и положительных чисел $a_{2,n}$, $n \geq 1$, для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = +\infty, \quad \|\mathcal{L}_{\mathcal{C}_n}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^{m-1}(\mathbb{R}, E))} \leq a_{2,n}, \quad n \geq 1,$$

существуют ограниченный непрерывный и равномерно s -непрерывный на каждом шаре $B_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)}[0, r]$, $r > 0$, оператор $G: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ и последовательность положительных чисел r_n , $n \geq 1$, для которых выполняется соотношение

$$\sup_{\|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r_n} \left\| Gx - \sum_{k=0}^{m-1} C_{k,n} \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r_n}{a_{2,n}} - H_n, \quad n \geq 1. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную последовательность положительных чисел r_n , $n \geq 1$, для которой $r_1 \geq 1$ и $r_{n+1} > r_n + 3$, $n \geq 1$ (значение r_n уточним ниже). Для каждого $n \geq 1$ определим отображения

$$\omega_{1,n}: \{x \in C^{m-1}(\mathbb{R}, E) : r_n \leq \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r_n + 1\} \rightarrow [0, 1], \\ \omega_{2,n}: \{x \in C^{m-1}(\mathbb{R}, E) : r_n + 1 \leq \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r_n + 2\} \rightarrow [0, 1]$$

с помощью равенств

$$\omega_{1,n}(x) = r_n \left\| \left(\frac{r_n + 1}{\|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)}} - 1 \right) x \right\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)}, \\ \omega_{2,n}(x) = (r_n + 2) \left\| \left(\frac{r_n + 1}{\|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)}} - 1 \right) x \right\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)}.$$

Очевидно, что отображения $\omega_{1,n}$ и $\omega_{2,n}$ непрерывны,

$$\omega_{1,n}(x) = 1, \quad \text{если } \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} = r_n, \quad (24)$$

$$\omega_{2,n}(x) = 1, \quad \text{если } \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} = r_n + 2, \quad (25)$$

$$\omega_{1,n}(x) = \omega_{2,n}(x) = 0, \quad \text{если } \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} = r_n + 1, \quad (26)$$

$$R(\omega_{1,n}) = R(\omega_{2,n}) = [0, 1]. \quad (27)$$

Оператор $G: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ и числа r_n , $n \geq 1$, определим следующим образом.

Сначала рассмотрим линейный оператор $G_1: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, который определяется равенством

$$G_1 x = \sum_{k=0}^{m-1} C_{k,1} \frac{d^k x}{dt^k}.$$

Очевидно, что для каждого числа $r > 0$

$$\sup_{\|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r} \left\| G_1 x - \sum_{k=0}^{m-1} C_{k,1} \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} = 0.$$

Выберем число $r_1 \geq 1$ так, чтобы

$$\frac{r_1}{a_{2,1}} - H_1 \geq 0.$$

Далее рассмотрим нелинейный оператор $G_2: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, который определяется формулой

$$G_2 x = \begin{cases} G_1 x, & \text{если } \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r_1, \\ \omega_{1,1}(x) G_1 x, & \text{если } r_1 < \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r_1 + 1, \\ \omega_{2,1}(x) \sum_{k=0}^{m-1} C_{k,2} \frac{d^k x}{dt^k}, & \text{если } r_1 + 1 < \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r_1 + 2, \\ \sum_{k=0}^{m-1} C_{k,2} \frac{d^k x}{dt^k}, & \text{если } \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} > r_1 + 2. \end{cases}$$

Этот оператор непрерывный и ограниченный в силу непрерывности $\omega_{1,1}$ и $\omega_{2,1}$, соотношений (24)–(27), а также непрерывности линейных операторов G_1 и $\sum_{k=0}^{m-1} C_{k,2} \frac{d^k x}{dt^k}$. Легко проверить, что

$$\sup_{x \in C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \left\| G_2 x - \sum_{k=0}^{m-1} C_{k,2} \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} < +\infty.$$

Поэтому существует такое число $r_2 > r_1 + 3$, что выполняется неравенство

$$\sup_{\|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r_2} \left\| G_2 x - \sum_{k=0}^{m-1} C_{k,2} \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r_2}{a_{2,2}} - H_2.$$

Далее определим нелинейный оператор $G_3: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ с помощью формулы

$$G_3x = \begin{cases} G_2x, & \text{если } \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r_2, \\ \omega_{1,2}(x)G_2x, & \text{если } r_2 < \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r_2 + 1, \\ \omega_{2,2}(x) \sum_{k=0}^{m-1} C_{k,3} \frac{d^k x}{dt^k}, & \text{если } r_2 + 1 < \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r_2 + 2, \\ \sum_{k=0}^{m-1} C_{k,3} \frac{d^k x}{dt^k}, & \text{если } \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} > r_2 + 2. \end{cases}$$

Этот оператор непрерывный и ограниченный в силу непрерывности $\omega_{1,2}$ и $\omega_{2,2}$, соотношений (24)–(27), а также непрерывности и ограниченности нелинейного оператора G_2 и непрерывности линейного оператора $\sum_{k=0}^{m-1} C_{k,3} \frac{d^k x}{dt^k}$. Очевидно, что

$$\sup_{x \in C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \left\| G_3x - \sum_{k=0}^{m-1} C_{k,3} \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} < +\infty.$$

Поэтому существует такое число $r_3 > r_2 + 3$, что выполняется неравенство

$$\sup_{\|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r_3} \left\| G_3x - \sum_{k=0}^{m-1} C_{k,3} \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r_3}{a_{2,3}} - H_3.$$

Аналогичным образом определяем нелинейные непрерывные и ограниченные операторы $G_n: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, $n \geq 4$, и числа $r_n > r_{n-1} + 3$, $n \geq 4$.

Заметим, что оператор $G_n: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ определяется с помощью формулы

$$G_nx = \begin{cases} G_{n-1}x, & \text{если } \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r_{n-1}, \\ \omega_{1,n-1}(x)G_{n-1}x, & \text{если } r_{n-1} < \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r_{n-1} + 1, \\ \omega_{2,n-1}(x) \sum_{k=0}^{m-1} C_{k,n} \frac{d^k x}{dt^k}, & \text{если } r_{n-1} + 1 < \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r_{n-1} + 2, \\ \sum_{k=0}^{m-1} C_{k,n} \frac{d^k x}{dt^k}, & \text{если } \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} > r_{n-1} + 2. \end{cases}$$

В силу соотношения

$$\sup_{x \in C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \left\| G_nx - \sum_{k=0}^{m-1} C_{k,n} \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} < +\infty$$

существует такое число $r_n > r_{n-1} + 3$, что выполняется неравенство

$$\sup_{\|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r_n} \left\| G_nx - \sum_{k=0}^{m-1} C_{k,n} \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r_n}{a_{2,n}} - H_n. \quad (28)$$

§ 7. Примеры

Применим результаты § 5 к исследованию существования ограниченных и периодических решений нелинейных дифференциально-функциональных уравнений. Приложения частей 1) утверждений теорем 9 и 10 к исследованию существования ограниченных решений нелинейных уравнений в случае $H > 0$ содержатся в [1]. Здесь мы рассмотрим как случай $H = 0$, так и случай периодических решений исследуемых уравнений.

Пусть $p \in \mathbb{N}$, $\gamma \in [0, +\infty)$ и $E^{p+1} = \underbrace{E \times \dots \times E}_{p+1 \text{ раз}}$. Банахово пространство E

предполагается конечномерным. Обозначим через $\mathcal{H}_\gamma$ множество всех непрерывных отображений $h: \mathbb{R} \times E^{p+1} \rightarrow E$, для каждого из которых существуют такие числа $a > 0$ и $b \geq 0$, что выполняется соотношение

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, \|x_1\|_E \leq r, \dots, \|x_{p+1}\|_E \leq r} \|h(t, x_1, \dots, x_{p+1})\|_E \leq ar^\gamma + b \quad (30)$$

для всех $r > 0$. Будем рассматривать множество $\mathcal{H}_\gamma$ как при $\gamma > 0$, так и при $\gamma = 0$. Очевидно, что множество $\mathcal{H}_0$ состоит из всех непрерывных отображений $h: \mathbb{R} \times E^{p+1} \rightarrow E$, для каждого из которых

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, x_1, \dots, x_{p+1} \in E} \|h(t, x_1, \dots, x_{p+1})\|_E < +\infty. \quad (31)$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} + l(x(t))Ax(t) = h(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_p(t))), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (32)$$

где $l: E \rightarrow [0, +\infty)$ – непрерывное отображение, которое определяется формулой

$$l(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \|x\|_E < 1, \\ \ln \|x\|_E, & \text{если } \|x\|_E \geq 1, \end{cases} \quad (33)$$

$A: E \rightarrow E$ – линейный непрерывный оператор, $h \in \mathcal{H}_0$ и $\tau_1, \dots, \tau_p \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 15. Пусть для спектра $\sigma(A)$ оператора A выполняется соотношение

$$\sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\} = \emptyset. \quad (34)$$

Тогда уравнение (32) имеет хотя бы одно решение $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$. Это уравнение для числа $T > 0$ имеет хотя бы одно T -периодическое решение $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$, если также

$$h(t + T, x_1, \dots, x_{p+1}) = h(t, x_1, \dots, x_{p+1}), \quad (35)$$

$$\tau_l(t + T) = \tau_l(t), \quad l = 1, \dots, p, \quad (36)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$ и $x_k \in E$, $k = 1, \dots, p + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор $\mathcal{L}: C^1(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, который определяется формулой

$$(\mathcal{L}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + Ax(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

В силу (34) (см., например, [21]) оператор $\mathcal{L}$ имеет непрерывный обратный $\mathcal{L}^{-1}: C^0(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^1(\mathbb{R}, E)$ и существует такая непрерывная на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ операторная функция $G: \mathbb{R} \rightarrow L(E, E)$, для которой для некоторых положительных чисел N и α

$$\|G(t)\|_{L(E, E)} \leq N e^{-\alpha|t|}, \quad t \in \mathbb{R},$$

что

$$(\mathcal{L}^{-1}y)(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t-s)y(s) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

для всех $y \in C^0(\mathbb{R}, E)$. Очевидно, что

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))} \leq \frac{2N}{\alpha}. \quad (37)$$

Далее рассмотрим непрерывные операторы $\mathcal{L}_\gamma: C^1(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ и $T_\gamma: C^k(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^k(\mathbb{R}, E)$, $\gamma > 0$, $k = 0, 1$, которые определяются с помощью соотношений

$$(\mathcal{L}_\gamma x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + \gamma Ax(t), \quad (T_\gamma y)(t) = y(\gamma t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$ и y – элемент пространства $C^0(\mathbb{R}, E)$ или $C^1(\mathbb{R}, E)$. Легко проверить, что оператор T_γ имеет непрерывный обратный T_γ^{-1} ,

$$T_\gamma^{-1} = T_{\gamma^{-1}}, \quad (38)$$

$$\|T_\gamma\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))} = 1, \quad (39)$$

$$\gamma T_\gamma \mathcal{L} T_\gamma^{-1} = \mathcal{L}_\gamma.$$

Поэтому

$$\mathcal{L}_\gamma^{-1} = \frac{1}{\gamma} T_\gamma \mathcal{L}^{-1} T_\gamma^{-1} \quad (40)$$

и, следовательно,

$$\|\mathcal{L}_\gamma^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))} \leq \frac{2N}{\alpha\gamma} \quad (41)$$

(здесь учтены соотношения (37)–(40)).

Фиксируем произвольные $h \in \mathcal{H}_0$, $\tau_1, \dots, \tau_p \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $r \in (e, +\infty)$. Рассмотрим операторы $F: C^0(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ и $A_{\ln r}: C^0(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, которые определяются формулами

$$(Fx)(t) = l(x(t))Ax(t) - h(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_p(t))), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(A_{\ln r}x)(t) = (\ln r)Ax(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что $A_{\ln r}$ – непрерывный и ς -непрерывный оператор. Оператор F ограниченный и равномерно ς -непрерывный на каждом шаре $B_{C^0(\mathbb{R}, E)}[0, R]$, $R > 0$, в силу соотношения (31), непрерывности l и A , равномерной непрерывности $h(t, x_1, \dots, x_{p+1})$ на каждом компактном подмножестве множества $\mathbb{R} \times E^{p+1}$ и равномерной непрерывности функций $\tau_l(t)$, $l = 1, \dots, p$, на каждом ограниченном множестве $C \subset \mathbb{R}$. Пусть

$$M = \sup_{t \in \mathbb{R}, x_1, \dots, x_{p+1} \in E} \|h(t, x_1, \dots, x_{p+1})\|_E.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \sup_{\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|Fx - A_{\ln r} x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} &= \sup_{\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq r, t \in \mathbb{R}} \|(Fx)(t) - (\ln r)Ax(t)\|_E \\
 &\leq M + \sup_{\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq r, t \in \mathbb{R}} \|l(x(t))Ax(t) - (\ln r)Ax(t)\|_E \\
 &= M + \max_{\|y\|_E \leq r} \|l(y)Ay - (\ln r)Ay\|_E \\
 &\leq M + \max_{\|y\|_E \leq 1} \|(l(y) - \ln r)Ay\|_E + \max_{1 \leq \|y\|_E \leq r} \|(l(y) - \ln r)Ay\|_E \\
 &\leq M + (\ln r)\|A\|_{L(E, E)} + \|A\|_{L(E, E)} \max_{1 \leq s \leq r} |(\ln s - \ln r)s| \\
 &= M + \left(\frac{r}{e} + \ln r\right) \|A\|_{L(E, E)}. \tag{42}
 \end{aligned}$$

Также

$$\frac{\alpha r \ln r}{2N} \leq \frac{r}{\|\mathcal{L}_{\ln r}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))}}, \tag{43}$$

поскольку в силу (41)

$$\|\mathcal{L}_{\ln r}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))} \leq \frac{2N}{\alpha \ln r},$$

и

$$M + \left(\frac{r}{e} + \ln r\right) \|A\|_{L(E, E)} \leq \frac{\alpha r \ln r}{2N} \tag{44}$$

для всех $r \geq r_*$, где r_* – достаточно большое положительное число.

Из (42)–(44) вытекает, что

$$\sup_{\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq r, t \in \mathbb{R}} \|(Fx)(t) - (\ln r)Ax(t)\|_E \leq \frac{r}{\|\mathcal{L}_{\ln r}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))}}$$

для всех $r \geq r_*$, т.е. для рассматриваемого уравнения (32) выполняется соотношение (10) при $H = 0$ для каждого $r \geq r_*$.

Следовательно, в силу теоремы 8 уравнение (32) имеет хотя бы одно решение $x \in C^1(\mathbb{R}, E) \cap B_{C^0(\mathbb{R}, E)}[0, r_*]$. В силу этой же теоремы уравнение (32) имеет хотя бы одно T -периодическое решение $x \in C^1(\mathbb{R}, E) \cap B_{C^0(\mathbb{R}, E)}[0, r_*]$, если выполняются соотношения (35) и (36). Теорема 15 доказана.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} + \|(x(t))_E^\alpha x(t) = h(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_p(t))), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{45}$$

где $\alpha \in (0, +\infty)$, $h \in \mathcal{H}_\beta$, $\beta \in [0, +\infty)$ и $\tau_1, \dots, \tau_p \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 16. Пусть выполняется соотношение

$$\alpha + 1 > \beta. \tag{46}$$

Тогда уравнение (45) имеет хотя бы одно решение $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$. Это уравнение для числа $T > 0$ имеет хотя бы одно T -периодическое решение $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$, если также выполняются соотношения (35) и (36).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное положительное число r . Рассмотрим операторы $A_{r^\alpha}: C^0(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, $\mathcal{K}_{r^\alpha}: C^1(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ и $F: C^0(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, которые определяются формулами

$$\begin{aligned}(A_{r^\alpha}y)(t) &= r^\alpha y(t), \\ (\mathcal{K}_{r^\alpha}x)(t) &= \frac{dx(t)}{dt} + r^\alpha x(t), \\ (Fy)(t) &= \|(y(t)\|_E^\alpha y(t) - h(t, y(t), y(t - \tau_1(t)), \dots, y(t - \tau_p(t))),\end{aligned}$$

где $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$, $y \in C^0(\mathbb{R}, E)$ и $t \in \mathbb{R}$.

Очевидно, что оператор A_{r^α} непрерывный и c -непрерывный.

Оператор F , как и аналогичный оператор в примере 2, является ограниченным и равномерно c -непрерывным на каждом шаре $B_{C^0(\mathbb{R}, E)}[0, R]$, $R > 0$, в силу соотношения (30), конечномерности пространства E , непрерывности $\|x\|_E^\alpha x$ на E , равномерной непрерывности $h(t, x_1, \dots, x_{p+1})$ на каждом компактном подмножестве множества $\mathbb{R} \times E^{p+1}$ и равномерной непрерывности функций $\tau_l(t)$, $l = 1, \dots, p$, на каждом ограниченном подмножестве множества $\mathbb{R}$.

Для операторов A_{r^α} и F выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\sup_{\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|Fx - A_{r^\alpha}x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} &= \sup_{\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq r, t \in \mathbb{R}} \|(Fx)(t) - r^\alpha x(t)\|_E \\ &\leq ar^\beta + b + \sup_{\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq r, t \in \mathbb{R}} \left\| \|x(t)\|_E^\alpha x(t) - r^\alpha x(t) \right\|_E \\ &= ar^\beta + b + \max_{\|y\|_E \leq r} \left\| \|y\|_E^\alpha y - r^\alpha y \right\|_E = ar^\beta + b + \max_{\|y\|_E \leq r} (\|y\|_E^\alpha - r^\alpha) \|y\|_E \\ &= ar^\beta + b + \max_{0 \leq s \leq r} |(s^\alpha - r^\alpha)s| = ar^\beta + b + r^{\alpha+1} \frac{\alpha}{(\alpha + 1)^{1+1/\alpha}}.\end{aligned}\quad (47)$$

Здесь учтены соотношение (30) и то, что в силу методов дифференциального исчисления (см. [22])

$$\max_{0 \leq s \leq r} |(s^\alpha - r^\alpha)s| = r^{\alpha+1} \frac{\alpha}{(\alpha + 1)^{1+1/\alpha}}.$$

Оператор $\mathcal{K}_{r^\alpha}$ имеет непрерывный обратный $\mathcal{K}_{r^\alpha}^{-1}$, поскольку $r^\alpha \neq 0$ (см. [21]), и

$$(\mathcal{K}_{r^\alpha}^{-1}z)(t) = \int_{-\infty}^t e^{-r^\alpha(t-s)} z(s) ds, \quad z \in C^0(\mathbb{R}, E), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Согласно этому соотношению

$$\|\mathcal{K}_{r^\alpha}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))} = r^{-\alpha}.$$

Поэтому

$$\frac{r}{\|\mathcal{K}_{r^\alpha}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))}} = r^{\alpha+1}.$$

Отсюда, из соотношения (47) и неравенства

$$\frac{\alpha}{(\alpha + 1)^{1+1/\alpha}} < 1$$

вытекает, что в силу (46) существует такое число $r^* > 0$, что

$$\sup_{\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|Fx - A_{r^\alpha} x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r}{\|\mathcal{H}_{r^\alpha}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))}}$$

для всех $r \geq r^*$.

Следовательно, для $H = 0$ выполняется неравенство (10). Поэтому уравнение (45) имеет хотя бы одно решение $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$. В силу части 2) утверждения теоремы 8 это уравнение имеет для числа $T > 0$ хотя бы одно T -периодическое решение $x \in C^1(\mathbb{R}, E) \cap B_{C^0(\mathbb{R}, E)}[0, r^*]$, если выполняются соотношения (35) и (36). Теорема 16 доказана.

Далее рассмотрим пример применения теоремы 7.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} + l(x(t))x(t) \\ = \int_{t-1}^t h\left(s, x(s), \frac{dx(u)}{du} \Big|_{u=s-\tau_1(s)}, \dots, \frac{dx(u)}{du} \Big|_{u=s-\tau_p(s)}\right) ds, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (48)$$

где $l: E \rightarrow [0, +\infty)$ – отображение, которое определяется формулой (33), $h \in \mathcal{H}_0$ и $\tau_1, \dots, \tau_p \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Покажем, что это уравнение имеет хотя бы одно решение $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$, а в случае выполнения для числа $T > 0$ соотношений (35) и (36) имеет хотя бы одно T -периодическое решение $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$.

Фиксируем число $r > e$. Определим операторы $A_{\ln r}: C^1(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, $\mathcal{M}_{\ln r}: C^1(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ и $F: C^1(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ с помощью формул

$$\begin{aligned} (A_{\ln r} x)(t) &= (\ln r)x(t), \quad (\mathcal{M}_{\ln r} x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + (\ln r)x(t), \\ (Fx)(t) &= l(x(t))x(t) - \int_{t-1}^t h\left(s, x(s), \frac{dx(u)}{du} \Big|_{u=s-\tau_1(s)}, \dots, \frac{dx(u)}{du} \Big|_{u=s-\tau_p(s)}\right) ds, \end{aligned}$$

где $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$ и $t \in \mathbb{R}$.

Линейный непрерывный оператор $A_{\ln r}$ является c -вполне непрерывным в силу теоремы Арцела–Асколи (см. [23]).

Нелинейный оператор F является ограниченным и c -вполне непрерывным в силу включений $h \in \mathcal{H}_0$, $\tau_1, \dots, \tau_p \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, определения отображения l и теоремы Арцела–Асколи.

Линейный непрерывный оператор $\mathcal{M}_{\ln r}$ имеет непрерывный обратный $\mathcal{M}_{\ln r}^{-1}$, поскольку $\ln r > 1$ (см. [21]), и

$$(\mathcal{M}_{\ln r}^{-1} z)(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(\ln r)(t-s)} z(s) ds, \quad z \in C^0(\mathbb{R}, E), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$\frac{d(\mathcal{M}_{\ln r}^{-1} z)(t)}{dt} = z(t) - (\ln r) \int_{-\infty}^t e^{-(\ln r)(t-s)} z(s) ds, \quad z \in C^0(\mathbb{R}, E), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Поскольку

$$\|\mathcal{M}_{\ln r}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))} = \frac{1}{\ln r}, \quad \sup_{\|z\|_{C^0(\mathbb{R}, E)}=1, t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d(\mathcal{M}_{\ln r}^{-1}z)(t)}{dt} \right\|_E = 2,$$

то для всех $r > \sqrt{e}$

$$\|\mathcal{M}_{\ln r}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^1(\mathbb{R}, E))} = \max \left\{ \frac{1}{\ln r}, 2 \right\} = 2.$$

Поэтому

$$\frac{r}{\|\mathcal{M}_{\ln r}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^1(\mathbb{R}, E))}} = \frac{r}{2} \quad (49)$$

для $r > \sqrt{e}$.

Далее оценим сверху величину $\sup_{\|x\|_{C^1(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|Fx - A_{\ln r}x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)}$. В силу включения $h \in \mathcal{H}_0$

$$\sup_{x \in C^1(\mathbb{R}, E), t \in \mathbb{R}} \left\| \int_{t-1}^t h \left(s, x(s), \frac{dx(u)}{du} \Big|_{u=s-\tau_1(s)}, \dots, \frac{dx(u)}{du} \Big|_{u=s-\tau_p(s)} \right) ds \right\|_E < +\infty.$$

Обозначим через M левую часть этого неравенства. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|_{C^1(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|Fx - A_{\ln r}x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} &= \sup_{\|x\|_{C^1(\mathbb{R}, E)} \leq r, t \in \mathbb{R}} \|(Fx)(t) - (\ln r)x(t)\|_E \\ &\leq M + \sup_{\|x\|_{C^1(\mathbb{R}, E)} \leq r, t \in \mathbb{R}} \|l(x(t))x(t) - (\ln r)x(t)\|_E \\ &= M + \sup_{\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq r, t \in \mathbb{R}} \|l(x(t))x(t) - (\ln r)x(t)\|_E \\ &= M + \max_{\|y\|_E \leq r} \|l(y)y - (\ln r)y\|_E \\ &\leq M + \max_{\|y\|_E \leq 1} \|(l(y) - \ln r)y\|_E + \max_{1 \leq \|y\|_E \leq r} \|(l(y) - \ln r)y\|_E \\ &\leq M + \ln r + \max_{1 \leq s \leq r} |(\ln s - \ln r)s| = M + \frac{r}{e} + \ln r. \end{aligned} \quad (50)$$

Обозначим через r^* такое число из интервала $(e, +\infty)$, что выполняется неравенство

$$M + \frac{r}{e} + \ln r \leq \frac{r}{2},$$

если $r \geq r^*$. Тогда согласно (49) и (50) для всех $r \geq r^*$

$$\sup_{\|x\|_{C^1(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|Fx - A_{\ln r}x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r}{\|\mathcal{M}_{\ln r}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^1(\mathbb{R}, E))}}.$$

Следовательно, для уравнения (48) выполняются условия теоремы 7 и неравенство (8) при $H = 0$ и $m = 1$. Поэтому это уравнение имеет хотя бы одно решение $x \in B_{C^1(\mathbb{R}, E)}[0, r^*]$. Если дополнительно для числа $T > 0$ выполняются соотношения (35) и (36), то оператор F , как и оператор $A_{\ln r}$, является T -периодическим и поэтому уравнение (48) имеет хотя бы одно T -периодическое решение $x \in B_{C^1(\mathbb{R}, E)}[0, r^*]$.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} + e^{x(t)} + x(t) + \sin x(t-1) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (51)$$

где $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Покажем, что это уравнение для каждой функции $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ имеет хотя бы одно решение $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и для каждой T -периодической функции $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ имеет хотя бы одно T -периодическое решение $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Фиксируем число $r > 0$. Определим операторы $A_{e^{r_{r-1}}}: C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{L}_{e^{r_{r-1}}}: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $F: C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ с помощью формул

$$\begin{aligned} (A_{e^{r_{r-1}}}x)(t) &= \frac{e^r}{r}x(t), & (\mathcal{L}_{e^{r_{r-1}}}y)(t) &= \frac{dy(t)}{dt} + \frac{e^r}{r}y(t), \\ (Fx)(t) &= e^{x(t)} + x(t) + \sin x(t-1), \end{aligned}$$

где $x \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $t \in \mathbb{R}$.

Очевидно, что линейный оператор $A_{e^{r_{r-1}}}$ непрерывный и s -непрерывный.

Оператор F ограниченный и равномерно s -непрерывный на каждом шаре $B_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})}[0, R]$, $R > 0$, в силу непрерывности функций $e^s + s$ и $\sin s$ на $\mathbb{R}$.

Для операторов $A_{e^{r_{r-1}}}$ и F выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \leq r} \|Fx - A_{e^{r_{r-1}}}x\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} &= \sup_{\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \leq r, t \in \mathbb{R}} \left| (Fx)(t) - \frac{e^r}{r}x(t) \right| \\ &= \sup_{\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \leq r, t \in \mathbb{R}} \left| e^{x(t)} + x(t) + \sin x(t-1) - \frac{e^r}{r}x(t) \right| \\ &\leq \sup_{|x| \leq r} \left| e^x + x - \frac{e^r}{r}x \right| + 1. \end{aligned}$$

С помощью методов нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке (см., например, [22]) для достаточно большого числа $r^* > 0$ получаем

$$\sup_{|x| \leq r} \left| e^x + x - \frac{e^r}{r}x \right| = e^r - (r - e^{-r}), \quad r > r^*.$$

Следовательно,

$$\sup_{\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \leq r} \|Fx - A_{e^{r_{r-1}}}x\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \leq e^r - (r - e^{-r}) + 1, \quad r > r^*. \quad (52)$$

Оператор $\mathcal{L}_{e^{r_{r-1}}}$ имеет непрерывный обратный $\mathcal{L}_{e^{r_{r-1}}}^{-1}$ и

$$\|\mathcal{L}_{e^{r_{r-1}}}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}))} = \frac{r}{e^r}$$

(аналогичный оператор рассмотрен в примерах 3 и 4). Поэтому

$$\frac{r}{\|\mathcal{L}_{e^{r_{r-1}}}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}))}} = e^r. \quad (53)$$

Фиксируем произвольную функцию $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Пусть H – такое число, что

$$\|h\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \leq H.$$

Существует число $r^{**} \geq r^*$, для которого

$$e^{r^{**}} - (r^{**} - e^{-r^{**}}) + 1 \leq e^{r^{**}} - H.$$

Поэтому на основании (52) и (53) для $r = r^{**}$ получаем

$$\sup_{\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \leq r} \|Fx - A_{e^r r^{-1}x}\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \leq \frac{r}{\|\mathcal{L}_{e^r r^{-1}}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}))}} - H.$$

Следовательно, в силу теоремы 10 для каждой функции $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ уравнение (51) имеет хотя бы одно решение $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и для каждой T -периодической функции $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ это уравнение имеет хотя бы одно T -периодическое решение $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Далее рассмотрим пример применения теоремы 9.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} + (\operatorname{sgn} x(t))|x(t)|^\alpha + \int_{t-1}^{t+1} \left| \frac{dx(s)}{ds} \right|^\beta ds = h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (54)$$

где $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ и $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Покажем, что в случае выполнения соотношения

$$1 > \alpha > \beta > 0 \quad (55)$$

уравнение (54) для каждой функции $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ имеет хотя бы одно решение $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и это уравнение имеет хотя бы одно T -периодическое решение $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, если функция $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ является T -периодической.

Фиксируем число $r > 0$. Определим операторы $A_{r^{\alpha-1}}: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{L}_{r^{\alpha-1}}: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $F: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ с помощью формул

$$\begin{aligned} (A_{r^{\alpha-1}}x)(t) &= r^{\alpha-1}x(t), & (\mathcal{L}_{r^{\alpha-1}}x)(t) &= \frac{dx(t)}{dt} + r^{\alpha-1}x(t), \\ (Fx)(t) &= (\operatorname{sgn} x(t))|x(t)|^\alpha + \int_{t-1}^{t+1} \left| \frac{dx(s)}{ds} \right|^\beta ds, \end{aligned}$$

где $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $t \in \mathbb{R}$.

Линейный непрерывный оператор $A_{r^{\alpha-1}}$ является c -вопне непрерывным, а нелинейный оператор F является ограниченным и c -вопне непрерывным в силу теоремы Арцела–Асколи (см. [23]).

Линейный непрерывный оператор $\mathcal{L}_{r^{\alpha-1}}$, как и аналогичный оператор $\mathcal{M}_{\ln r}$ в примере 4, имеет непрерывный обратный $\mathcal{L}_{r^{\alpha-1}}^{-1}$ и

$$\|\mathcal{L}_{r^{\alpha-1}}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))} = \max \left\{ \frac{1}{r^{\alpha-1}}, 2 \right\}.$$

Поэтому

$$\frac{r}{\|\mathcal{L}_{r^{\alpha-1}}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}))}} = r^\alpha, \quad (56)$$

если $r \geq 2^{1/(1-\alpha)}$.

Очевидно, что операторы $A_{r^{\alpha-1}}$, $\mathcal{L}_{r^{\alpha-1}}$ и F для каждого числа $T > 0$ являются T -периодическими.

Оценим сверху величину $\sup_{\|x\|_{C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq r} \|Fx - A_{r^{\alpha-1}}x\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \sup_{\|x\|_{C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq r} \|Fx - A_{r^{\alpha-1}}x\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})} \\ &= \sup_{\|x\|_{C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq r, t \in \mathbb{R}} \left\| (\operatorname{sgn} x(t))|x(t)|^\alpha + \int_{t-1}^{t+1} \left| \frac{dx(s)}{ds} \right|^\beta ds - r^{\alpha-1}x(t) \right\|_E \\ &\leq \sup_{\|x\|_{C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq r, t \in \mathbb{R}} \left\| \int_{t-1}^{t+1} \left| \frac{dx(s)}{ds} \right|^\beta ds \right\|_E \\ &\quad + \sup_{\|x\|_{C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq r, t \in \mathbb{R}} \left\| (\operatorname{sgn} x(t))|x(t)|^\alpha - r^{\alpha-1}x(t) \right\|_E \\ &= 2r^\beta + \max_{0 \leq x \leq r} |x^\alpha - r^{\alpha-1}x|. \end{aligned}$$

Легко проверить с помощью методов дифференциального исчисления, что

$$\max_{0 \leq x \leq r} |x^\alpha - r^{\alpha-1}x| = \frac{r^\alpha(1-\alpha)}{\alpha^{\alpha/(\alpha-1)}}.$$

Поэтому

$$\sup_{\|x\|_{C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq r} \|Fx - A_{r^{\alpha-1}}x\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq \frac{r^\alpha(1-\alpha)}{\alpha^{\alpha/(\alpha-1)}} + 2r^\beta. \quad (57)$$

Фиксируем произвольное число $H \geq 0$. В силу (55) и неравенства

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^{\alpha/(\alpha-1)}} < 1$$

существует такое число $r^* > 2^{1/(1-\alpha)}$, что для каждого $r \geq r^*$

$$\frac{r^\alpha(1-\alpha)}{\alpha^{\alpha/(\alpha-1)}} + 2r^\beta \leq r^\alpha - H.$$

Тогда согласно (56) и (57) для всех $r \geq r^*$

$$\sup_{\|x\|_{C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq r} \|Fx - A_{r^{\alpha-1}}x\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq \frac{r}{\|\mathcal{L}_{r^{\alpha-1}}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}))}} - H.$$

Следовательно, для уравнения (54) выполняются условия теоремы 9 при $m = 1$. Поэтому это уравнение для каждой функции $h \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ имеет хотя бы одно решение $x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и для каждой T -периодической функции $h \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ имеет хотя бы одно T -периодическое решение $x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Список литературы

- [1] В. Е. Слюсарчук, “Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений”, *Матем. сб.*, **201**:8 (2010), 103–126; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “The method of local linear approximation in the theory of nonlinear functional-differential equations”, *Sb. Math.*, **201**:8 (2010), 1193–1215.
- [2] V. Yu. Slyusarchuk, “Conditions of the existence of bounded solutions of non-linear difference equations”, *Nauk. Visn. Chernivets'kogo Univ., Mat.*, **454** (2009), 88–94.
- [3] В. Е. Слюсарчук, “Метод локальной линейной аппроксимации в теории ограниченных решений нелинейных разностных уравнений”, *Нелин. колеб.*, **12**:3 (2009), 109–115; англ. пер.: V. Yu. Slyusarchuk, “Method of local linear approximation in the theory of bounded solutions of nonlinear difference equations”, *Nonlinear Oscil. (N. Y.)*, **12**:3 (2009), 380–391.
- [4] В. Е. Слюсарчук, “Метод локальной линейной аппроксимации в теории ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений”, *Укр. мат. журн.*, **61**:11 (2009), 1541–1556; англ. пер.: V. Yu. Slyusarchuk, “Method of local linear approximation in the theory of bounded solutions of nonlinear differential equations”, *Ukrainian Math. J.*, **61**:11 (2009), 1809–1829.
- [5] Э. Мухамадиев, “Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций”, *Матем. заметки*, **11**:3 (1972), 269–274; англ. пер.: Ё. Mukhamadiev, “On the inversion of functional operators in a space of functions bounded on the axes”, *Math. Notes*, **11**:3 (1972), 169–172.
- [6] Э. Мухамадиев, “Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений”, *Матем. заметки*, **30**:3 (1981), 443–460; англ. пер.: E. Mukhamadiev, “Investigations in the theory of bounded and periodic solutions of differential equations”, *Math. Notes*, **30**:3 (1981), 713–722.
- [7] В. Е. Слюсарчук, “Обратимость почти периодических c -непрерывных функциональных операторов”, *Матем. сб.*, **116(158)**:4(12) (1981), 483–501; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Invertibility of almost periodic c -continuous functional operators”, *Math. USSR-Sb.*, **44**:4 (1983), 431–446.
- [8] В. Е. Слюсарчук, “Интегральное представление c -непрерывных линейных операторов”, *Докл. АН УССР. Сер. А*, **8** (1981), 35–38.
- [9] В. Е. Слюсарчук, “Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов”, *Матем. сб.*, **130(172)**:1(5) (1986), 86–104; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Invertibility of nonautonomous functional-differential operators”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:1 (1987), 83–100.
- [10] В. Е. Слюсарчук, “Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов”, *Матем. заметки*, **42**:2 (1987), 262–267; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Necessary and sufficient conditions for invertibility of nonautonomous functional-differential operators”, *Math. Notes*, **42**:2 (1987), 648–651.
- [11] В. Е. Слюсарчук, “Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c -непрерывных функционально-дифференциальных операторов”, *Укр. матем. журн.*, **41**:2 (1989), 201–205; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Necessary and sufficient conditions for invertibility of uniformly c -continuous functional-differential operators”, *Ukrainian Math. J.*, **41**:2 (1989), 180–183.
- [12] Чан Хыу Бонг, *Почти периодические и ограниченные решения линейных функционально-дифференциальных уравнений*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Ин-т матем. АН Украины, Киев, 1993.
- [13] В. Е. Слюсарчук, “Слабо нелинейные возмущения импульсных систем”, *Матем. физика и нелинейная мех.*, **15**:49 (1991), 32–35.

- [14] М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, *Нелинейные почти периодические колебания*, Наука, М., 1970; англ. пер.: М. А. Krasnosel'skii, V. Sh. Burd, Yu. S. Kolesov, *Nonlinear almost periodic oscillations*, Halsted Press, New York–Toronto, ON; Israel Program for Scientific Transl., Jerusalem–London, 1973.
- [15] А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, *Теория колебаний*, Физматгиз, М., 1959; англ. пер.: А. А. Andronov, A. A. Vitt, S. E. Khaikin, *Theory of oscillators*, Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [16] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, 4-е изд., Наука, М., 1974; англ. пер. 2-го изд.: N. N. Bogoliubov, Yu. A. Mitropolsky, *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*, Hindustan Publishing Corp., Delhi; Gordon and Breach, New York, 1961.
- [17] Р. Рейссиг, Г. Сансоне, Р. Конти, *Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1974; пер. с нем.: R. Reissig, G. Sansone, R. Conti, *Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen*, Edizioni Cremonese, Rome, 1963.
- [18] Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*, Наука, М., 1975; англ. пер.: E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*, Math. Concepts Methods Sci. Engrg., **13**, Plenum Press, New York, 1980.
- [19] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, *Геометрические методы нелинейного анализа*, Наука, М., 1975.
- [20] Л. Ниренберг, *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, Мир, М., 1977; пер. с англ.: L. Nirenberg, *Topic in nonlinear functional analysis*, Courant Institute of Math. Sciences, New York Univ., New York, 1974.
- [21] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970; англ. пер.: Ju. L. Dalec'kii, M. G. Krein, *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974.
- [22] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. I, Наука, М., 1968; нем. пер.: G. M. Fikhtengol'ts, *Differential and integral calculus*, v. I, Deutscher, Berlin, 1977.
- [23] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 6-е изд., Наука, М., 1986; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.

В. Е. Слюсарчук (V. E. Slyusarchuk)
Национальный университет водного хозяйства
и природопользования,
г. Ровно, Украина
E-mail: V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.rv.ua

Поступила в редакцию
17.01.2011