Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбачев, О пересечении неприводимых компонент пространства конечномерных алгебр Ли, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 7, 57–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7845>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:41:13

УДК 512.554.3

В. В. Горбачевич

О пересечении неприводимых компонент пространства конечномерных алгебр Ли

Исследуются неприводимые компоненты пространства n -мерных алгебр Ли. Изучаются свойства алгебр Ли, принадлежащих пересечению всех таких неприводимых компонент (эти алгебры Ли называются краевыми). Доказывается, что все такие алгебры Ли нильпотентны и что все они имеют абелев идеал коразмерности 1. Приводятся конкретные примеры краевых алгебр Ли произвольной размерности, а с целью общего описания алгебр Ли выдвигается некоторая гипотеза. Рассматривается понятие спектра алгебр Ли и изучаются некоторые его простейшие свойства.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: алгебра Ли, пространство алгебр Ли, неприводимая компонента, нильпотентная алгебра Ли.

Введение

Пространство $\mathcal{L}_n(k)$ n -мерных алгебр Ли над полем k – это алгебраическое многообразие, задаваемое уравнениями Якоби (представляющими собой условия Якоби для коэффициентов c_{ij}^k структурного тензора алгебры Ли). Его неприводимые компоненты обозначим ${}^{\alpha}\mathcal{L}_n(k)$; их число конечно, точное его значение известно только для небольших n ($n \leq 7$), в общем же случае имеют-ся только его оценки сверху и снизу. В настоящей работе будет предполагаться, что рассматривается поле $k = \mathbb{R}$ или $k = \mathbb{C}$, хотя некоторые результаты статьи можно было бы перенести и на случай более общих полей. Для рассматриваемых нами полей можно использовать как обычную топологию, так и топологию Зариского. Иногда мы будем явно указывать, о какой именно топологии идет речь, иногда это будет ясно из контекста или конкретный тип топологии просто не будет играть существенной роли.

Роль неприводимых компонент при изучении алгебр Ли представляется автору очень значительной. Дело в том, что такое, казалось бы, естественное понятие, как “общая алгебра Ли”, корректно ввести невозможно. Существуют понятия общей алгебры Ли только в отдельных частных случаях (для отдельных неприводимых компонент из $\mathcal{L}_n$) – это “общие точки” этих алгебраических подмногообразий. Поэтому неприводимые компоненты – это как бы отдельные “галактики” во “вселенной алгебр Ли” со своими собственными законами. Некоторые из этих “галактик” устроены довольно просто – они являются

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00465а).

замыканиями орбит определенных алгебр Ли, называемых жесткими (таковы, например, все полупростые алгебры Ли, существуют и жесткие разрешимые алгебры Ли, о которые подробнее говорится ниже). Каждой неприводимой компоненте (или подходящему семейству компонент, например соответствующих полупростым алгебрам Ли одной и той же размерности) соответствует своя “теория алгебр Ли”. Так как при этом может получиться очень много “теорий”, то, возможно, для целей исследования неприводимых компонент их полезно будет объединять в некоторые семейства (одно из таких семейств хорошо известно – это компоненты, соответствующие полупростым алгебрам Ли). Возможно, удастся также установить некоторые связи между неприводимыми компонентами в пространствах алгебр Ли разных размерностей или даже одновременно рассматривать неприводимые компоненты при различных (или даже при всех) значениях числа n .

Изучение самого пространства $\mathcal{L}_n$ началось довольно давно, изучение же неприводимых компонент в $\mathcal{L}_n$ при этом проводилось лишь эпизодически (в основном при малых n или же в случаях, когда эти компоненты – замыкания орбит жестких алгебр Ли). В [1] автором были получены некоторые новые общие результаты о пространстве $\mathcal{L}_n$ n -мерных алгебр Ли. Настоящую статью можно рассматривать как продолжение программы исследования пространства $\mathcal{L}_n$ и его неприводимых компонент, начатого в [1]. В частности, здесь уточнены и обобщены некоторые утверждения, доказанные в [1], а также получены и совсем новые результаты. Они позволяют прояснить строение пространства $\mathcal{L}_n$.

В § 1 доказано, что пересечение $\bigcap^\alpha \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ всех неприводимых компонент ${}^\alpha \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ содержится в пространстве $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ всех нильпотентных комплексных алгебр Ли (теорема 1), т.е. все алгебры Ли в $\bigcap^\alpha \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ нильпотентны. Для случая поля $k = \mathbb{R}$ подобное утверждение было доказано в [1] с использованием “антагонизма” между вещественными и чисто мнимыми собственными значениями линейных операторов ad_X . Для поля $\mathbb{C}$ такой прием уже не работает. В [1] было отмечено, что для $k = \mathbb{C}$ указанное утверждение тоже верно, но доказательство требует более сложных рассуждений. В настоящей статье такое рассуждение и приводится. Оно является весьма общим и справедливо для более общих, чем $\mathbb{C}$, полей (в том числе и для $\mathbb{R}$). На самом деле подобное утверждение имеет место и для пространства $\mathcal{R}_n$ всех n -мерных разрешимых алгебр Ли (из такого утверждения вытекает и справедливость указанного выше утверждения для $\mathcal{L}_n$). Еще один подход к подобного типа результатам указан в § 4.

В статье особое внимание уделяется изучению пересечения $\bigcap^\alpha \mathcal{L}_n(k)$ всех неприводимых компонент. Алгебры Ли, его составляющие, мы будем в дальнейшем называть краугольными алгебрами Ли. Такое название вызвано тем, что эти алгебры Ли содержатся в любой неприводимой компоненте пространства $\mathcal{L}_n$ и потому могут рассматриваться как своего рода основа, каркас для всех других алгебр Ли (русскоязычная Википедия говорит, что “краугольный камень – термин, в настоящее время обозначающий основу, начало, суть”).

В § 2 доказано, что в любой алгебре Ли из $\bigcap^\alpha \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ имеется абелев идеал ко-размерности 1 (теорема 2). Это открывает реальную возможность для полного

описания пространства $\bigcap^\alpha \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$. Такое описание в виде гипотезы приведено в этом параграфе, причем полученные далее в этой статье результаты его подтверждают.

В § 3 продолжено исследование пространства $\bigcap^\alpha \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$. При $5 \leq n \leq 7$ в [1] доказано, что в $\bigcap^\alpha \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ содержатся алгебры Ли вида $N(2, 2) \oplus \mathbb{C}^{n-5}$. Там была использована классификация (довольно непросто доказываемая) неприводимых компонент в пространствах алгебр Ли малой размерности. Здесь же подобное утверждение доказано для произвольного $n \geq 5$, а также обсуждено обобщение этого утверждения.

В § 4 вводится понятие спектра алгебр Ли. Это понятие полезно при изучении пространств алгебр Ли. Фактически оно было использовано и в предыдущих параграфах. Здесь же оно описано явно, причем автор намеревается интенсивно использовать это понятие в дальнейшем. Доказаны некоторые связанные со спектром утверждения, дополняющие утверждения, доказанные в предыдущих параграфах. Также дается схема еще одного (основанного на понятии спектра) доказательства части утверждения важной теоремы 1.

В статье будут использоваться некоторые понятия и методы, игравшие важную роль в работе [1]. В частности, постоянно будут фигурировать сжатия алгебр Ли. Напомним, что алгебра Ли L' называется сжатием алгебры Ли L (тут используется обозначение $L \rightarrow L'$), если L' содержится в замыкании орбиты естественного действия группы GL_n на пространстве $\mathcal{L}_n$. Содержательно говоря, сжатие – это результат некоторого специального предельного перехода в пространстве алгебр Ли. Далее под деформацией понимаются кривые (при $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, как в нашей работе, эти кривые обычно предполагаются кусочно гладкими) в пространстве $\mathcal{L}_n$, содержащие заданную алгебру Ли. Так как алгебраическое многообразие при $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ является, как хорошо известно, локально линейно связным (ибо многообразие его особых точек имеет коразмерность ≥ 1 , а дополнение до него локально евклидово), то близкие точки таких многообразий всегда можно соединить локально гладкой кривой. Поэтому любые алгебры Ли, достаточно близкие к заданной алгебре Ли, могут рассматриваться как результаты некоторой ее деформации или, говоря короче, как ее деформации.

Автор благодарен рецензенту за критику и полезные замечания.

§ 1. Краеугольные алгебры Ли нильпотентны

В этом параграфе будет доказана теорема 1, сформулированная ниже. Ее доказательство основано на рассмотрении некоторых жестких алгебр Ли. Мы найдем такие жесткие алгебры Ли, пересечение замыканий GL_n -орбит которых (эти замыкания – неприводимые компоненты в $\mathcal{L}_n$) состоит только из нильпотентных алгебр Ли, что и даст нам доказательство теоремы 1. Здесь мы полагаем поначалу, что $k = \mathbb{C}$.

Начнем с некоторых предварительных рассмотрений.

Если $n = 2k$ четно, то рассмотрим алгебру Ли $L_0 = \bigoplus R_2$ – прямую сумму k экземпляров алгебры Ли R_2 (двумерной разрешимой неабелевой алгебры Ли,

которая в подходящем базисе X, Y задается соотношением $[X, Y] = Y$). Для нечетного $n = 2k + 1$ будем рассматривать $L_0 = R_5 \oplus (\bigoplus R_2)$ (берется $k - 2$ слагаемых, изоморфных R_2). Здесь R_5 – борелевская подалгебра Ли в $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, она состоит из треугольных матриц порядка 3 с нулевым следом и имеет размерность 5. Алгебры Ли R_2, R_5 жесткие, так как их двумерные когомологии с коэффициентами в присоединенном представлении тривиальны (подробнее см., например, обзор [2]). Будут жесткими (даже алгебраически жесткими, т.е. для них равны нулю указанные выше пространства когомологий) и их прямые суммы. Поэтому замыкания орбит указанных прямых сумм – неприводимые компоненты в пространстве $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$.

ЛЕММА 1. *Если L – алгебра Ли из $\bigcap^\alpha \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$, то $\text{codim}_L[L, L] \geq [n/2]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1, 3$ утверждение почти очевидно и проверяется непосредственно. Рассмотрим теперь остальные значения n .

Пусть вначале $n = 2k$ четно. Тогда для указанной выше алгебры Ли L_0 имеем $\text{codim}_{L_0}[L_0, L_0] = k$. Но при замыкании орбиты коразмерность коммуванта алгебры Ли не уменьшается, поэтому для всех алгебр Ли L из неприводимой компоненты – замыкания орбиты алгебры Ли L_0 – будет $\text{codim}_L[L, L] \geq k = [n/2]$.

Если же $n = 2k + 1$ нечетно, то рассматриваем введенную выше нечетномерную алгебру Ли L_0 (полагая, что $n \geq 5$). Имеем

$$\text{codim}_{L_0}[L_0, L_0] = 2 + (k - 2) = k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

(так как $\text{codim}_{R_5}[R_5, R_5] = 2$). Получаем $\text{codim}_L[L, L] \geq [n/2]$.

Итак, нами показано, что для любых алгебр Ли L , лежащих в пересечении всех неприводимых компонент, будет иметь место неравенство $\text{codim}_L[L, L] \geq [n/2]$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для нильпотентной краеугольной алгебры Ли (ниже мы покажем, что все краеугольные алгебры Ли нильпотентны) класс нильпотентности не более чем $\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как алгебра Ли L нильпотентна, то ее класс нильпотентности не превосходит $\dim[L, L] + 1$ (ибо он равен такому наименьшему значению l , что член центрального ряда $C^l(L) = \{0\}$, причем $C^1(L) = [L, L]$). В силу леммы 1 имеем $\dim[L, L] \geq n - [n/2]$. Но нетрудно проверить, что имеется такое тождество:

$$n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor.$$

Это в сочетании со сказанным выше завершает доказательство следствия.

ТЕОРЕМА 1. $\bigcap^\alpha \mathcal{L}_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$, т.е. любая краеугольная алгебра Ли нильпотентна.

Аналогично имеем $\bigcap^\alpha \mathcal{R}_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. Более того, пересечение одних только замыканий орбит жестких разрешимых алгебр Ли также содержится в $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем, что для каждого n будет нильпотентно (т.е. состоит из нильпотентных алгебр Ли) пересечение некоторых двух неприводимых компонент, являющихся замыканиями двух жестких разрешимых алгебр Ли. Это утверждение влечет за собой все утверждения, содержащиеся в теореме 1.

Вначале мы рассмотрим в дополнение к введенной выше алгебре Ли L_0 еще одну специальную жесткую алгебру Ли. Пусть L_1 – такая жесткая алгебра Ли, которая разрешима и нильрадикал которой имеет коразмерность 1 (т.е. его размерность равна $n - 1$) и филиформен (т.е. имеет максимально возможный класс нильпотентности, равный $n - 2$). Такие алгебры Ли существуют, подобного рода примеры приведены, например, в работе [3]. Опишем нужные нам алгебры Ли из [3].

Пусть $L_1 = \mathbb{C} +_{\varphi} N$ – это полупрямая сумма алгебр Ли, задаваемая гомоморфизмом $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \text{Der}(N)$ в алгебру дифференцирований некоторой нильпотентной алгебры Ли N , для которого в данном случае $\varphi(1) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$, причем $\lambda_i \neq 0$. Например, в [3] рассмотрена алгебра Ли $N = B_{n-1}^k(\psi_1, \dots, \psi_t)$, где $t = \lfloor \frac{n-1-k}{2} \rfloor$. Она строится для четного $n - 1 = 2m$ (т.е. для нечетного n), причем $2 \leq k \leq n - 4$. Алгебра Ли $L_1 = \mathbb{C} +_{\varphi} N$, как показано в [3], при подходящем φ будет жесткой, если $k = 2m - 4 = n - 5$ (мы полагаем, что $n > 5$, так как случаи меньших n были рассмотрены в [1]). Отметим, что в [3] имеется опечатка: там в предложении 1, п. 2 доказана жесткость используемой нами тут алгебры Ли при $k = 2m - 4$, а выше, в п. 1, сказано, что нет жесткости для соответствующих алгебр Ли при $k \geq 2m - 4$, а на самом деле там должно быть написано $k > 2m - 4$. Корни λ_i в работе [3] явно указаны – они равны

$$k, k + 1, \dots, k + 2m - 3, 2k + 2m - 1$$

(последний корень “особый”, он – вне серии $k, k + 1, k + 2m - 3$ последовательных натуральных чисел). Их количество равно $((2m - 3) + 1) + 1 = 2m - 1 = n - 2$. Поэтому размерность коммутанта $[N, N]$ равна $n - 2$.

Для четного n построение нужной нам алгебры Ли производится аналогично с использованием нильпотентных алгебр Ли A_{n-1}^k из [3]. Отметим, что для построения алгебры Ли L_1 нам нужны филиформные алгебры Ли ранга 1 (о ранге подробнее см. ниже), а именно они и перечислены в [3].

Рассмотрим замыкание GL_n -орбиты алгебры Ли L_1 в $\mathcal{L}_n$ и его пересечение с замыканием соответствующей орбиты алгебры Ли L_0 . Покажем, что в этом пересечении все алгебры Ли нильпотентны.

Пусть L' – алгебра Ли из указанного пересечения. Если она не нильпотентна, то ее ненулевые корни будут пропорциональны числам λ_i , а потому их количество равно $n - 2$. Поэтому $\dim[L', L'] \geq n - 2$. Но в силу леммы 1 для той же размерности имеем неравенство $\dim[L', L'] \leq n - [n/2]$. При $n > 5$ эти неравенства одновременно выполняться не могут. Поэтому наше предположение о нильпотентности L' неверно.

Так как алгебры Ли L_0, L_1 жесткие и разрешимые, то приведенным выше рассуждением доказано последнее из утверждений теоремы 1. А все остальные утверждения теоремы 1 из него сразу вытекают.

В частности, нами доказано, что пересечение только тех неприводимых компонент, которые являются замыканиями орбит жестких разрешимых алгебр Ли, состоит только из нильпотентных алгебр Ли. Это верно для случаев алгебр Ли над $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ и, можно предположить (исходя из приведенного выше доказательства), – над некоторыми более общими полями.

§ 2. Абелев идеал коразмерности 1 в краеугольных алгебрах Ли

В этом параграфе доказана теорема 2, показывающая, что нильпотентные алгебры Ли, из которых состоит пересечение неприводимых компонент пространства алгебр Ли, имеют весьма специальное строение.

ТЕОРЕМА 2. *Любая краеугольная алгебра Ли (над $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) содержит абелев идеал коразмерности 1.*

Эта теорема сразу вытекает из более сильного утверждения.

ТЕОРЕМА 3. *Существует неприводимая компонента $C \subset \mathcal{L}_n(k)$, любая алгебра Ли в которой имеет абелев идеал коразмерности 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наше доказательство в виде указания фигурирующей в формулировке теоремы 3 неприводимой компоненты C основано на следующей специальной конструкции.

Рассмотрим разрешимые алгебры Ли вида $R = \mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-1}$ – полупрямые суммы одномерной подалгебры (изоморфной $\mathbb{C}$) и абелева идеала $\mathbb{C}^{n-1}$ (для определенности мы взяли $k = \mathbb{C}$, случай $k = \mathbb{R}$ рассматривается совершенно аналогично). Здесь мы будем полагать, что $\varphi(1) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$. Положим $\Lambda = \{\lambda_i\}$, тогда соответствующую алгебру Ли будем обозначать R_{Λ} .

Семейство корней Λ назовем иррациональным, если $\sum k_i \lambda_i \neq 0$ при всех целых значениях k_i , по модулю не превосходящих n и не равных одновременно нулю (мы здесь будем называть это условие ограниченной линейной независимостью корней над $\mathbb{Q}$). В частности, все λ_i тогда должны быть ненулевыми. Ясно, что иррациональные наборы Λ образуют открытое (например, в евклидовой топологии) множество в множестве всех наборов корней (ибо число алгебраических неравенств, задающих иррациональные наборы, конечно).

Положим $R^{\sharp} = R_{\Lambda}$ при некотором иррациональном наборе корней Λ . Отметим, что алгебра Ли $R^{\sharp}$ имеет ранг 1 (под рангом алгебры Ли понимается, как обычно, размерность нуль-пространства для ее регулярных элементов), ее картановская подалгебра одномерна, причем одной из картановских подалгебр является подалгебра $\mathbb{C}$, использованная в построении нашей полупрямой суммы. Алгебра Ли $R^{\sharp}$ по своему построению имеет абелев идеал коразмерности 1. Она будет “стартовой точкой” в нашей конструкции.

Пусть теперь L – некоторая алгебра Ли, достаточно близкая к $R^{\sharp}$. Докажем, что тогда она, как и $R^{\sharp}$, имеет абелев идеал коразмерности 1.

Так как при малой деформации алгебр Ли размерность коммутанта алгебры Ли не уменьшается, то для нашей алгебры Ли L будет $\text{codim}_L[L, L] \leq 1$. Далее, ранг алгебры Ли L не больше, чем 1 (так ранг при малой деформации не увеличивается). Но всегда ранг алгебры Ли положителен, поэтому для

нашей алгебры Ли L он должен быть равен 1. Рассмотрим полученные свойства L подробнее и посмотрим, что они дают в совокупности.

Докажем вначале, что на самом деле алгебра Ли L разрешима.

Рассмотрим разложение Леви

$$L = S + R$$

для алгебры Ли L , где R – радикал, а S – полупростая часть (фактор Леви) алгебры Ли L . Так как наша L – алгебра Ли ранга 1, то при $S \neq \{0\}$ обязательно будет $\text{rank}(S) = 1$, а потому алгебра Ли S изоморфна $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Тут при $k = \mathbb{C}$ мы получаем по сравнению со случаем $k = \mathbb{R}$ некоторое упрощение доказательства, так как при $k = \mathbb{R}$ нужно будет рассматривать не одну, а две нетривиальные возможные полупростые части: $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ и $\mathfrak{su}(2)$. Однако корни картановской (одномерной) подалгебры в $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, как легко понять, не являются линейно независимы (в нашем “ограниченном” понимании, см. выше) над $\mathbb{Q}$. Это противоречит сказанному выше о корнях алгебры Ли L . Поэтому должно быть $S = \{0\}$, т.е. алгебра Ли L разрешима.

Имеем $\text{codim}_L[L, L] \leq 1$. Но L разрешима, поэтому всегда $\text{codim}_L[L, L] > 0$. Поэтому $\text{codim}_L[L, L] = 1$. Так как $\lambda_i \neq 0$, то алгебра Ли L не является нильпотентной. Но тогда $[L, L]$ совпадает с нильрадикалом N , ибо всегда $[L, L] \subset N$. Потому $L = \mathbb{C} + N$ – полупрямая сумма одномерной подалгебры Ли и нильрадикала.

Докажем теперь, что нильрадикал N абелев.

Если это не так, то корни указанного действия элемента X не будут линейно независимыми над $\mathbb{Q}$, так как действие, индуцированное дифференцированиями, на $N/[N, N]$ однозначно задает корни на всей N , причем в виде линейных комбинаций с целыми коэффициентами, по модулю не превосходящими n . Этот факт доказывается так. Собственные векторы, порождающие дополнительное к $[N, N]$ подпространство, являются, как известно, образующими нильпотентной алгебры Ли N . При коммутировании собственных векторов соответствующие им собственные значения складываются. Получаем представление собственных чисел, соответствующих собственным векторам из $[N, N]$, в виде линейных комбинаций собственных чисел, соответствующих образующим нильпотентной алгебры Ли (и, тем самым, дающих нам указанные выше рациональные линейные зависимости между корнями). Среди этих комбинаций есть такие, коэффициенты которых по модулю не превосходят n , так как последовательно коммутировать образующие нужно не более n раз (ибо класс нильпотентности алгебры Ли N всегда меньше n). Но существование таких линейных комбинаций противоречит тому, что система корней Λ и близкие к ней системы корней иррациональны. Итак, мы доказали, что N – абелев идеал, причем коразмерности 1. Тем самым, мы доказали, что для всех алгебр Ли L , близких к $R^\sharp$, существует абелев идеал коразмерности 1. Поэтому в $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ существует некоторое открытое (и в евклидовой топологии, и в топологии Зариского) подмножество (которое мы обозначим через $U^\sharp$), содержащее $R^\sharp$ и состоящее из алгебр Ли, имеющих абелев идеал коразмерности 1. На основе этого подмножества мы и будем строить нужную нам неприводимую

компоненту. Отметим, что при необходимости можно считать подмножество $U^\sharp$ инвариантным относительно GL_n (заменяя, если нужно, $U^\sharp$ на $\mathrm{GL}_n U^\sharp$ с сохранением всех нужных нам свойств).

Подмножество $U^\sharp$ мы можем считать связным (и в евклидовой топологии, и в топологии Зариского). Рассмотрим некоторую неприводимую компоненту пространства $\mathcal{L}_n$, его содержащую; это и будет нужная нам неприводимая компонента $C^\sharp$. Докажем, что в этой компоненте все алгебры Ли имеют абелевы идеалы коразмерности 1. Для этого нам понадобится еще одна конструкция.

Рассмотрим подмножество F в $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$, задаваемое уравнениями

$$c_{1,i}^j = 0, \quad i \geq 2, \quad c_{i,j}^k = 0, \quad i, j \geq 2,$$

где $c_{i,j}^k$ – структурные константы алгебр Ли (точек пространства $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$).

Другими словами, F – это линейно заданное подмногообразие в $\mathcal{L}_n$, соответствующее таким выборам (которые, заметим, не всегда возможны) базисов в алгебрах Ли, что $\langle e_2, e_3, \dots, e_n \rangle$ – подпространство, натянутое на $e_2, \dots, e_n$ – является абелевым идеалом. Пусть P – параболическая подгруппа в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, сохраняющая подпространство, натянутое на $e_2, \dots, e_n$.

Имеем $C^\sharp = \overline{\mathrm{GL}_n \cdot U^\sharp}$, так как $\overline{\mathrm{GL}_n \cdot U^\sharp}$ – открытое, замкнутое и связное (в обеих топологиях) подмножество в $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$, ибо $U^\sharp$ – открытое связное подмножество. Докажем теперь, что все алгебры Ли в $C^\sharp$ имеют абелев идеал коразмерности 1.

Рассмотрим вначале подмножество $U^\sharp \cap F$. Из сказанного выше о $U^\sharp$ следует, что $\mathrm{GL}_n(U^\sharp \cap F) \supset U^\sharp$. Далее, подмножество $\overline{U^\sharp \cap F} \subset F$ инвариантно относительно действия P . Теперь используем следующую лемму.

ЛЕММА 2 (см. [4; гл. III, § 2.5]). *Пусть Z – некоторое GL_n -инвариантное алгебраическое многообразие, P – параболическая подгруппа. Если $Y \subset Z$ – замкнутое подмножество, инвариантное относительно P , то $\mathrm{GL}_n Y$ замкнуто в Z (в топологии Зариского).*

В силу этой леммы в нашем случае получаем, что $\mathrm{GL}_n(\overline{U^\sharp \cap F})$ замкнуто, но оно содержит непустое открытое подмножество $U^\sharp$ (см. выше), а потому совпадает с $C^\sharp$. Поэтому все элементы из $C^\sharp$ имеют абелевы идеалы коразмерности 1, ибо это верно для $\overline{U^\sharp \cap F} \subset F$. Нужная нам неприводимая компонента построена, что и завершает доказательство теоремы 3, а с ней – и теоремы 2.

Итак, пересечение всех неприводимых компонент пространства $\mathcal{L}_n(k)$ состоит из нильпотентных алгебр Ли, имеющих абелев идеал коразмерности 1 (тут $k = \mathbb{C}$ или $k = \mathbb{R}$). Такие алгебры Ли имеют вид $\mathbb{C} +_\varphi \mathbb{C}^{n-1}$ (полупрямая сумма, соответствующая гомоморфизму φ), где $\varphi(1)$ – нильпотентная матрица. Каждая такая матрица есть прямая сумма жордановых клеток $\bigoplus J_{k_i}(0)$ некоторых порядков $k_i \geq 1$. Остается выяснить, какие именно суммы жордановых клеток соответствуют краугольным алгебрам Ли.

В [1] было доказано, что одна клетка $J_2(0)$ (точнее, $J_2(0) \oplus 0_{n-3}$, где 0_{n-3} – нулевая матрица порядка $n-3$) всегда реализуется в виде $\varphi(1)$ для некоторой краугольной алгебры Ли. Далее там же было доказано, что при $5 \leq n \leq 7$

реализуется (в качестве $\varphi(1)$) и $J_2(0) \oplus J_2(0)$. В следующем параграфе будет доказано, что то же верно для любого $n \geq 5$. В общем же случае возникает следующее естественное предположение.

ГИПОТЕЗА. Для достаточно больших n в виде $\varphi(1)$ для краугольных алгебр Ли реализуются любые нильпотентные матрицы.

Эта гипотеза в сочетании с теоремой 1 дает некоторое (хотя и гипотетическое, но, по мнению автора, весьма правдоподобное) описание всех краугольных алгебр Ли. Ее частичное подтверждение приведено в § 3. Интересно было бы также выяснить, какие именно нильпотентные матрицы могут появляться в разложениях краугольных алгебр Ли заданной размерности.

§ 3. Некоторые краугольные алгебры Ли

Рассмотрим алгебры Ли вида $\mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-1}$, где $\varphi(1) = \bigoplus J_{k_i}(0)$ – нильпотентная матрица, представленная в виде прямой суммы жордановых клеток $J_k(0)$. Обозначим через K набор чисел $\{k_i\}$, а соответствующую алгебру Ли обозначим через $N(K)$. Тогда $N(2) = \mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^2$, $N(2, 2) = \mathbb{C} +_{\psi} \mathbb{C}^4$, где $\varphi(1) = J_2(0)$, $\psi(1) = J_2(0) \oplus J_2(0)$. Как уже было отмечено в § 2, в [1] было доказано, что алгебры Ли $N(2) \oplus \mathbb{C}^{n-3}$ краугольны. В [1] был рассмотрен и случай $N(2, 2) \oplus \mathbb{C}^{n-5}$, но только при $n \leq 7$ и с использованием довольно сложно доказываемой классификации неприводимых компонент пространств алгебр Ли малой размерности. Ниже приводится доказательство в общем случае.

ТЕОРЕМА 4. Для любого $n \geq 5$ алгебры Ли $N(2, 2) \oplus \mathbb{C}^{n-5}$ являются краугольными, т.е. они принадлежат любой неприводимой компоненте пространства $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$.

Отметим, что при $n < 5$ теорема 4 неверна по очевидной причине – алгебра Ли $N(2, 2)$ имеет размерность 5.

Перед доказательством теоремы 4 нам нужно рассмотреть несколько специальных конструкций сжатий и деформаций алгебр Ли некоторых специальных классов. Эти конструкции понадобятся при доказательстве теоремы 4: мы будем от одних алгебр Ли переходить (сжатиями, деформациями и просто заменами) к другим, лежащим в той же неприводимой компоненте, так, чтобы в результате получить нужную нам алгебру Ли $N(2, 2) \oplus \mathbb{C}^{n-5}$.

Начнем с весьма общей конструкции IW-сжатий (сжатий Инёню–Вигнера). Вкратце IW-сжатие алгебр Ли описывается так (подробнее см., например, обзор [2]).

Пусть L – некоторая алгебра Ли, а $L = U + V$ – ее разложение в прямую сумму подалгебры U и дополнительного к ней подпространства V (выбор которого для нас несуществен). Имеется естественное действие (индуцированное присоединенным представлением алгебры Ли L) подалгебры Ли U на подпространстве V , отождествленном с L/U . Сжатие Инёню–Вигнера (впервые построенное этими авторами для описания предельных переходов в теории относительности) дает сжатие алгебры Ли L в полупрямую сумму $U + V_0$

подалгебры Ли U и абелева идеала V_0 (отождествляемого как векторное пространство с L/U), на котором подалгебра Ли U естественным образом действует (как на факторпространстве L/U). Сама конструкция этого сжатия несложна, но в деталях она нам не потребуется и потому здесь не приводится (она описана, например, в [2]). Отметим, что так как любая неприводимая компонента в $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ замкнута (в обеих топологиях), то любое сжатие любой алгебры Ли, принадлежащей этой компоненте, тоже ей принадлежит.

Важный частный случай этой конструкции (именно он и будет далее использоваться) таков: U – одномерная подалгебра, натянутая на некоторый ненулевой элемент $X \in L$ (дополнительное пространство V выбирается произвольным образом). Тогда IW-сжатие дает нам алгебру Ли $\mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-1}$, где $\varphi(1)$ – оператор присоединенного представления ad_X , а точнее – индуцированное им линейное преобразование пространства $L/\langle X \rangle$.

Рассмотрим теперь некоторые сжатия (уже не IW-сжатия) алгебр Ли вида $\mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-1}$. Они основаны на “сжатиях” матрицы $A = \varphi(1)$. Мы можем заменять эту матрицу на подобные ей (что соответствует выбору базиса в $\mathbb{C}^{n-1}$) и умножать ее на произвольное ненулевое число (это соответствует переходу от образующей одномерной подалгебры $\mathbb{C}$ к некоторому элементу, ей кратному). При этом можно также совершать предельные переходы – это и будет давать некоторые нужные нам сжатия алгебры Ли L .

Матрицу A для упрощения рассмотрений полезно привести к канонической жордановой форме. Тем самым, мы можем считать, что A есть прямая сумма жордановых клеток $J_k(\lambda)$ (где k – порядок клетки, а λ – соответствующее ей собственное число).

Нас здесь будут интересовать сжатия нильпотентных матриц (сжатия более общих матриц описаны в процессе доказательства теоремы 4). Подробно этот вопрос рассмотрен в [4] (в терминах замыканий орбит нильпотентных матриц). Имеются такие сжатия:

$$J_k(0) \rightarrow J_{k-1}(0) \oplus 0_1 \rightarrow J_{k-2}(0) \oplus 0_2 \rightarrow \cdots \rightarrow J_2(0) \oplus 0_{k-2} \rightarrow J_1 \oplus 0_{k-1} \rightarrow 0_k,$$

где 0_m – нулевая матрица порядка m . Далее, имеется такое важное для нас сжатие нильпотентных матриц:

$$J_3(0) \oplus 0_1 \rightarrow J_2(0) \oplus J_2(0).$$

Теперь рассмотрим две конструкции нетривиальных деформаций нильпотентных алгебр Ли специального вида (нетривиальность деформации означает, что с ее помощью получаются алгебры Ли, не изоморфные исходной).

Начнем с конструкции деформаций 2-нильпотентных (т.е. имеющих класс нильпотентности 2) алгебр Ли.

Рассмотрим разложение 2-нильпотентной алгебры Ли $N = U + V$ в прямую сумму двух подпространств U, V , причем $[U, U] = V, [U, V] = \{0\}$ (такое разложение существует для любой 2-нильпотентной алгебры Ли). Ниже мы укажем в явном виде нетривиальную деформацию этой алгебры Ли. Отметим,

что в основе этой деформации лежит существование полупростого дифференцирования алгебры Ли L , которое задается единичной матрицей E на U и матрицей $2E$ на V .

Рассмотрим векторные пространства $U(t)$ и $V(t)$, совпадающие как векторные пространства с U и V соответственно. Пусть алгебра Ли $N(t) = U(t) + V(t)$ задается в базисах $U_i(t)$ для $U(t)$ и $V_k(t)$ для $V(t)$ следующими коммутационными соотношениями для операции коммутирования $[*, *]_t$:

$$\begin{aligned} [U_1(t), U_i(t)]_t &= [U_1, U_i] + tV_i, & i \geq 2, \\ [U_i(t), U_j(t)]_t &= [U_i, U_j], & i, j \geq 2, \\ [U_1(t), V_k(t)]_t &= 2tV_k(t), & k \geq 1, \\ [U_i(t), V_l(t)]_t &= 0, & i \geq 2, \\ [V_k(t), V_l(t)]_t &= 0, & k, l \geq 1. \end{aligned}$$

Здесь $U_i = U_i(0)$, аналогично для V_i . Прямым тривиальным вычислением проверяется, что заданная так операция коммутирования удовлетворяет условиям Якоби и потому определяют структуру алгебры Ли, причем при $t = 0$ получаем исходную алгебру Ли N . Тем самым, мы получаем гладкую (даже линейную) деформацию $N(t)$ алгебры Ли N . В силу третьего из указанных коммутационных соотношений алгебра Ли $N(t)$ при $t \neq 0$ не является нильпотентной (хотя и разрешима), поэтому деформация эта нетривиальна. В частности, любая 2-нильпотентная алгебра Ли не является жесткой в пространстве всех алгебр Ли размерности n (и даже в подпространстве всех разрешимых алгебр Ли).

Можно дать и более общую, чем приведенная выше, конструкцию деформаций алгебр Ли. Это позволит заменять алгебру Ли L на более подходящие в различных ситуациях (в частности, при рассмотрении алгебр Ли вида $\mathbb{C} + N$; см. ниже случай двух различных собственных значений).

Пусть P – произвольная алгебра Ли, а D – некоторое ее дифференцирование. Рассмотрим полупрямую сумму $P_D = \mathbb{C} + P$ одномерной подалгебры $\mathbb{C} = \langle D \rangle$, натянутой на D , и идеала P (действие элемента D на P естественное). Мы можем деформировать векторное пространство P внутри P_D . Если оно будет оставаться при этом подалгеброй Ли, то мы получим деформации алгебры Ли P .

В приведенной выше конструкции деформации 2-нильпотентной алгебры Ли N мы исходили из указанного там простейшего дифференцирования, существующего для таких алгебр Ли. При этом деформация алгебры Ли N эквивалентна такой, при которой смещался только один элемент базиса U_1 – он заменялся на $U_1 + tD$, что давало деформацию алгебры Ли N как подалгебры Ли в N_D . Приведенное выше явное описание коммутационных соотношений при этой деформации было дано для большей наглядности описываемой конструкции.

Описанная общая конструкция может быть использована и в других ситуациях.

Вот одно такое применение этой общей конструкции (еще одна нетривиальная деформация). Будем при доказательстве теоремы 4 использовать тот факт, что в одном важном для нас случае (при ограничении на спектр, указанном ниже) алгебры Ли вида $L = \mathbb{C} +_{\varphi} N$, где нильпотентная алгебра Ли N – это прямая сумма алгебры Гейзенберга H_p (с базисом $X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_p, Z$ и коммутационными соотношениями $[X_i, Y_i] = Z$) и абелевой алгебры Ли, не являются жесткими. А именно, мы будем предполагать, что спектр матрицы $\varphi(1)$ равен $(b, b, \dots, b, 2b)$, где собственное число $2b$ соответствует действию $\varphi(1)$ на Z . Для доказательства этого факта достаточно построить деформацию такого рода для алгебры Ли L , при которой получаемые при деформации алгебры Ли не имеют описанного выше строения.

Полупрямая сумма $L = \mathbb{C} +_{\varphi} (1)N$ задается дифференцированием $A = \varphi(1)$ алгебры Ли N , спектр которого равен $(b, b, \dots, b, 2b)$. Если L жесткая, то она алгебраична (см., например, [3]), поэтому можно считать, что дифференцирование A диагонально (полупросто). Алгебра Гейзенберга имеет много внешних дифференцирований (например, лежащих в симплектической подалгебре $\mathfrak{sp}_p(\mathbb{C})$ алгебры Ли дифференцирований алгебры Гейзенберга). Возьмем любое дифференцирование D алгебры Ли N , не являющееся скалярным на подпространстве, порожденном X_i, Y_j (на котором A действует скалярно; см. выше). Оно дает дифференцирование, перестановочное с A (и потому задающее дифференцирование алгебры Ли L) и ему не пропорциональное. Заменяя A на $A + tD$, получим нужную нам деформацию алгебры Ли L . Приведенная выше конструкция деформации в данном случае дает нам нетривиальную деформацию алгебры Ли L , что противоречит ее жесткости.

Еще одно применение приведенной выше общей конструкции деформаций будет приведено ниже, в самом конце доказательства теоремы 4.

Теперь все подготовительные шаги сделаны и можно переходить непосредственно к доказательству теоремы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть C – некоторая неприводимая компонента в $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$, а L – некоторая (пока произвольная) алгебра Ли из C . Нам нужно доказать, что $N(2, 2) \oplus \mathbb{C}^{n-5} \in C$.

Пусть X – произвольный ненулевой элемент из L . С помощью IW-сжатия мы можем из L получить разрешимую алгебру Ли вида $\mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-1}$, тоже лежащую в неприводимой компоненте C (см. выше). Пусть Λ – множество $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ собственных значений линейного оператора ad_X на факторпространстве $L/\langle X \rangle$ (назовем Λ редуцированным спектром; об общем понятии спектра см. § 4).

В случае необходимости алгебру Ли L мы в дальнейшем можем заменить на другую алгебру Ли, принадлежащую той же неприводимой компоненте C (но обладающей, в отличие от исходной L , некоторыми нужными нам свойствами или же не обладающей некоторыми ненужными нам свойствами). Будем выяснять, как найти нужное видоизменение (обычно это будет сжатие или последовательность сжатий) алгебры Ли L , дающее алгебру Ли $N(2, 2) \oplus \mathbb{C}^{n-5}$. Мы рассмотрим последовательно несколько частных случаев (и подслучаев) при различного рода ограничениях на множество чисел λ_i . При этом будем либо строить переход (не выходя за пределы компоненты C) к нужной нам

алгебре Ли $N(2, 2) \oplus \mathbb{C}^{n-5} \in C$, либо указывать, как можно заменить (тем самым, исключая из дальнейшего рассмотрения некоторые частные случаи) алгебру Ли L или элемент в ней, чтобы такой переход был возможен.

1. Пусть среди чисел λ_i имеются хотя бы две пары различных. Покажем, что тогда существует сжатие нашей алгебры Ли в $N(2, 2) \oplus 0_{n-5}$.

Рассмотрим вначале модельную конструкцию для случая, когда имеются две различные жордановы клетки порядка 1 с собственными значениями λ, μ соответственно. Имеем при любом $\varepsilon \neq 0$ очевидное подобие матриц

$$\text{diag}(\lambda, \mu) \sim \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Умножение этих матриц на ε можно рассматривать как результат умножения на это число ε образующей X подалгебры $\mathbb{C}$. Но при умножении на ε получим справа матрицу, которая в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ даст $J_2(0)$. Кстати, именно на этом соображении основано сжатие алгебры Ли $R_2 \oplus \mathbb{C}$ в трехмерную нильпотентную алгебру Ли $N(2)$, играющее немалую роль в изучении сжатий алгебр Ли. При наличии двух пар жордановых клеток порядка 1 с различными λ_i мы получим с помощью указанной выше конструкции две нильпотентные жордановы клетки порядка 2, а все остальные клетки при $\varepsilon \rightarrow 0$ сжимаются в нулевые.

Если же собственные значения λ, μ не имеют жордановых клеток порядка 1, то рассмотрим соответствующие им жордановы клетки $J_k(\lambda), J_l(\mu)$ больших порядков и их прямую сумму $J_k(\lambda) \oplus J_l(\mu)$. Пусть вначале $k = l = 2$; тогда матрица четвертого порядка $J_2(\lambda) \oplus J_2(\mu)$ подобна прямой сумме двух клеток, у которых вместо 1 на побочной диагонали стоит $1/\varepsilon$. При переходе к пределу получаем матрицу $J_2(0) \oplus J_2(0)$. Аналогично действуем и при произвольных k, l , используя сделанные выше замечания о сжатии $J_k(0) \rightarrow J_{k-1}(0) \oplus 0_1$ нильпотентных матриц высших порядков. Это рассуждение в результате дает нам сжатие алгебры Ли L в такую, для которой $\varphi(1) = J_2(0) \oplus J_2(0) \oplus 0_{n-5}$.

2. Предположим теперь, что среди чисел λ_i имеются хотя бы три различных. Тогда тем же приемом, как и в случае 1, получаем сжатие матрицы $\varphi(1)$ в $J_3(0) \oplus 0_{n-4}$. При $n \geq 5$ мы продолжим сжатия и теперь сожмем $J_3(0) \oplus 0_1$ в $J_2(0) \oplus J_2(0)$ (об этом уже было сказано выше). В результате снова получаем нужное нам сжатие.

3. Остается рассмотреть случаи, когда не выполнено ни одно из приведенных в пп. 1 и 2 свойств семейства корней λ_i , т.е. когда у $\varphi(1)$ существует только одно (кратное) собственное значение или же два различных собственных значения, причем одно из них кратности 1 (другими словами, тут $\Lambda = (\lambda, \mu, \dots, \mu)$, причем $\lambda \neq \mu$).

Этот случай разобьем на несколько подслучаев.

а) Пусть собственное значение только одно. Тогда редуцированный спектр элемента X (на $L/\langle X \rangle$) имеет вид $\Lambda = (\lambda, \dots, \lambda)$.

Рассмотрим вначале ситуацию, когда $\lambda = 0$, т.е. выбранный нами элемент $X \in L$ нильпотентен. Если алгебра Ли L не является нильпотентной, то в ней

существуют ненильпотентные элементы. Выбрав такой ненильпотентный элемент вместо X , мы избавляем себя от рассмотрения случая $\lambda = 0$. Пусть теперь алгебра Ли L нильпотентна, а X – некоторый элемент из L . Применим к L описанное выше IW-сжатие и получим нильпотентную алгебру Ли вида $\mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-1}$ (как было описано выше перед доказательством этой теоремы). Матрица $A = \varphi(1)$ здесь нильпотентна. Если в ее жордановом разложении имеются хотя бы две клетки порядка 2, то, сжав (предельным переходом подобных матриц) остальные клетки в нулевые (см. выше), мы получим сжатие алгебры Ли L в $N(2, 2) \oplus \mathbb{C}^{n-4}$. Далее, так как можно при $k > 2$ сжать жордановы клетки $J_k(0)$ в $J_2(0) \oplus 0_{k-2}$, то нам остается рассмотреть только случай, когда $\varphi(1) = J_2(0) \oplus 0_{n-2}$. Пусть это равенство (точнее, подобие) матриц выполняется для любого $X \in L$ (иначе мы просто заменим X на такой элемент, для которого матрица $\varphi(1)$ не подобна матрице $J_2(0) \oplus 0_{n-2}$). Но тогда очевидно, что алгебра Ли L будет 2-нильпотентна. Однако такие алгебры Ли не являются жесткими (об этом хорошо известном факте уже было сказано выше). Поэтому мы можем, не выходя за пределы рассматриваемой нами неприводимой компоненты C , заменить нильпотентную алгебру Ли L на такую, для которой хотя бы для некоторого ее элемента X случай $\varphi(1) = J_2(0) \oplus 0_{n-2}$ не имеет места. Тем самым, случай, когда для любого $X \in L$ имеем $\varphi(1) = J_2(0) \oplus 0_{n-2}$, мы можем в дальнейшем не рассматривать. Итак, мы полностью рассмотрели ситуацию, когда $\lambda = 0$.

Поэтому теперь мы можем считать, что $\lambda \neq 0$ для некоторого $X \in L$. Докажем, что это при подходящем выборе алгебры Ли L (в пределах рассматриваемой нами неприводимой компоненты) невозможно.

Рассмотрим разложение Леви $L = S + R$, где R – радикал, а S – полупростая часть в L . Если $\dim(S) > 0$, то, как легко понять, в S всегда найдется элемент, в редуцированном спектре которого есть не менее двух различных собственных значений. Поэтому в нашем случае $S = \{0\}$, т.е. $L = R$ разрешима.

Пусть N – нильрадикал в R . Если $\text{codim}_R N > 1$, то для любого ненильпотентного элемента $X \in L$ в редуцированном спектре содержится число 0, что противоречит нашим предположениям. Поэтому $\text{codim}_R N = 1$ и потому алгебру Ли L можно представить в виде полупрямой суммы $L = \mathbb{C} + N$, где $\mathbb{C} = \langle X \rangle$ – одномерная подалгебра, натянутая на X . Рассмотрим действие X на N , порожденное присоединенным представлением. В силу нашего предположения его полупростая часть равна $\text{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$. Но алгебра Ли $\text{Der}(N)$ дифференцирований алгебры Ли N алгебраична и потому полупростая часть любого дифференцирования тоже является дифференцированием. В частности, получаем, что скалярный линейный оператор λE является дифференцированием. Но тогда алгебра Ли N должна быть абелева, так как только абелевы алгебры Ли имеют скалярные ненулевые дифференцирования (ибо равенство $\lambda[X, Y] = [\lambda X, Y] + [X, \lambda Y]$ возможно только при $[X, Y] = 0$). Итак, получаем, что алгебра Ли L имеет вид $\mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-1}$. Но такие алгебры Ли не образуют неприводимой компоненты, ибо возможны их деформации (нетривиальные) в алгебры Ли вида $\mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-1}$, но с другими, а не только вида $(\lambda, \lambda, \dots)$, наборами характеристических корней для матрицы $\varphi(1)$. Поэтому мы можем

заменить алгебру Ли L на другую, со спектром другого вида. Потому случай одного (кратного) собственного значения нами полностью рассмотрен – он невозможен при подходящем выборе алгебры Ли L в C . Заменяя L на более подходящую, мы можем рассматриваемый нами случай далее не принимать во внимание.

б) Переходим к рассмотрению случая двух различных (возможно, кратных) собственных значений.

Здесь придется рассмотреть две возможности (два частных случая).

(i) Рассмотрим вначале случай, когда оба числа λ и μ ненулевые. Тогда $\text{codim}_L[L, L] = 1$.

Покажем, что мы можем ограничиться в дальнейшем только случаем, когда алгебра Ли L разрешима.

Применим метод, уже использованный нами при рассмотрении случая 3, а) выше. Пусть $X \in L$ – некоторый нильпотентный элемент. Если в соответствующем линейному оператору ad_X жордановом разложении имеются хотя бы две клетки порядков ≥ 2 , то мы получаем, как и в случае 3, а), нужное нам для доказательства теоремы 1 сжатие в алгебру Ли $N(2, 2) \oplus \mathbb{C}^{n-5}$. Поэтому остается рассмотреть случаи, когда таких элементов в L нет. Ясно, что это эквивалентно условию $\text{rank}(\text{ad}_X) \leq 1$ (для любого нильпотентного $X \in L$); такое условие мы обозначим (*).

Пусть $L = S + R$ – разложение Леви алгебры Ли L . Если полупростая алгебра Ли S имеет ранг ≥ 2 , то она не может удовлетворять (*), так как в ней найдутся нильпотентные элементы большего чем 1 ранга. Поэтому подалгебра Леви S либо тривиальна, либо изоморфна $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Если $S = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, то действие ее на радикал R должно быть тривиально (иначе не выполняется (*), тут для подходящего $X \in L$ оператор ad_X на $L/\langle X \rangle$ будет иметь не менее двух нильпотентных жордановых клеток порядка > 1). Поэтому алгебра Ли L должна быть прямой суммой $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ и R . Покажем, что радикал R обязательно абелев: если это не так, то диагональный нильпотентный элемент прямой суммы имеет более сложное жорданово разложение, чем одна клетка $J_2(0)$. Поэтому получаем, что $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^{n-3}$. Однако такая алгебра Ли не является, очевидно, жесткой и потому ее можно деформировать в пределах любой содержащей ее неприводимой компоненты в алгебру Ли, ей не изоморфную. Поэтому мы можем перейти от рассматриваемой нами алгебры Ли L к такой, которая не удовлетворяет условию (*). Тем самым, мы избавляемся от необходимости рассматривать случай, когда алгебра Ли L не является разрешимой.

Итак, можно считать, что L разрешима. Поэтому в нашем случае имеем разложение $L = \mathbb{C} + N$, где N – нильпотентный идеал коразмерности 1 (совпадающий с коммутантом алгебры Ли L), причем N удовлетворяет свойству (*).

Алгебра Ли N у нас имеет ненильпотентное дифференцирование (порожденное действием $X \in \mathbb{C}$ с помощью присоединенного представления), а так как алгебра Ли дифференцирований алгебраична, то N имеет и полупростое дифференцирование D с матрицей, подобной $\text{diag}(a, b, b, \dots, b)$, где $a, b \neq 0$ (можно считать, что $a = \lambda, b = \mu$). Рассмотрим разложение $N = U + V$ в прямую сумму

подпространств, где $V = [N, N]$, а U – дополнительное к V подпространство. Так как N нильпотентна, то $\dim(U) \geq 2$. Рассмотрим два собственных вектора дифференцирования D , лежащие в U (мы всегда можем предполагать, взяв подходящее U , что такой выбор возможен). Сравним действие D на эти два элемента и на их коммутатор. В силу того, что при коммутировании элементов алгебры Ли их собственные значения (точнее, собственные значения соответствующих им операторов присоединенного представления), как известно, складываются, для указанного выше набора собственных чисел возможны только следующие три соотношения: $a + b = b$, $b + b = b$, $b + b = a$. В первых двух случаях получаем, что одно из собственных значений дифференцирования D нулевое, что противоречит нашему предположению.

Последнее соотношение возможно, только если $D|_U = bE$ (скалярный линейный оператор) и $\dim(V) = 1$. Очевидно, что соответствующая алгебра Ли N изоморфна прямой сумме некоторой алгебры Гейзенберга H_p (с базисом $X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_p, Z$ и коммутационными соотношениями $[X_i, Y_i] = Z$) и некоторой абелевой алгебры Ли. Однако таких алгебр Ли N конечное число и соответствующих им алгебр Ли L – тоже, так как используемых нами дифференцирований здесь тоже конечное число (с точностью до пропорциональности). Но, как легко понять, эти алгебры Ли не являются жесткими (подробнее этот вопрос был рассмотрен перед доказательством теоремы 1) и потому орбиты указанного конечного числа алгебр Ли не могут давать плотного в изучаемой нами неприводимой компоненте C множества. Поэтому можно заменить выбранную нами вначале алгебру Ли L на такую, для которой указанное выше соотношение $b + b = a$ не выполнено. Поэтому этот вариант соотношений мы можем не рассматривать, выбрав подходящую алгебру Ли $L \in C$. Получаем в результате, что случай ненулевых λ, μ для общей алгебры Ли $L \in C$ невозможен.

(ii) Теперь рассмотрим случаи, когда одно из чисел λ, μ равно нулю (оба они равняться нулю не могут, так как тогда $\lambda = \mu$, а этот случай мы не рассматриваем; см. выше). Пусть вначале $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$. Тогда алгебра Ли L имеет ранг $n - 1$ и потому (как доказано в [1; лемма 1]) обязательно $L = R_2 \oplus N$, где N нильпотентна и в нашем случае класса нильпотентности ≤ 2 . Но 2-нильпотентные алгебры Ли не являются жесткими, ибо мы можем деформировать N в неизоморфную ей и даже в нильпотентную алгебру Ли. Если бы все алгебры Ли в рассматриваемой нами неприводимой компоненте имели вид $R_2 \oplus N$, то любая малая деформация одной из них, являющейся общей точкой в этой неприводимой компоненте, давала бы алгебру Ли того же вида.

Тем самым, мы всегда можем выйти из сферы действия указанных выше ограничений на алгебру Ли L , заменив L на другую алгебру Ли из той же неприводимой компоненты (напомним, что алгебра Ли L была “стартовой” точкой нашей конструкции, но мы заранее оговорили возможность изменения этой точки). Но, тем самым, мы получаем возможность исключить случай $\mu = 0$ из рассмотрения.

Пусть теперь $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$. Тогда $\text{codim}_L[L, L] = 2$ и μE будет дифференцированием нильпотентной алгебры Ли $[L, L]$. Однако в этом случае алгебра

Ли $[L, L]$ должна быть абелевой (так как у нас $\mu \neq 0$; сходное рассуждение в подобном случае уже было приведено выше). Рассмотрим разложение $L = \langle X, Y \rangle + [L, L]$ алгебры Ли L в прямую сумму подпространства, порожденного исходным элементом X и некоторым $Y \in L$, и абелева идеала $[L, L]$. Спектр естественного действия элемента Y на $[L, L]$ тоже должен состоять из одинаковых собственных значений (так как иначе мы вместо элемента X возьмем Y и выйдем за пределы рассматриваемого нами случая $\lambda = 0, \mu \neq 0$). Но тогда очевидно, что действие Y на $[L, L]$ мы можем считать нильпотентным, заменив Y в случае необходимости на линейную комбинацию с элементом X . Получаем, что L может быть представлена в виде $L = \langle X \rangle + N$, где N – нильпотентный идеал коразмерности 1. Рассмотрим подробнее действие элемента Y на $[L, L]$.

Если это действие нулевое, то N абелева и потому $L = \mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-1}$. Но такого рода алгебры Ли, как уже указывалось выше, не могут заполнять полностью неприводимую компоненту (так как они допускают деформации, дающие алгебры Ли иного по сравнению с ними строения). Поэтому, заменив исходную алгебру Ли, мы можем считать этот случай невозможным (точнее, не требующим отдельного рассмотрения).

Если же это действие нильпотентное, но ненулевое, то рассмотрим разложение соответствующей ему матрицы в прямую сумму жордановых клеток. Подобный случай уже рассматривался выше (случай 3, а)). Нужно нам сжатие алгебры Ли в $N(2, 2) \oplus \mathbb{C}^{n-5}$ имеется всегда, кроме случая, когда в указанной выше прямой сумме имеется только одна жорданова клетка порядка 2, а все остальные клетки – порядка 1. Но в этом случае получаем, что алгебра Ли N изоморфна $N(2) \oplus \mathbb{C}^{n-5}$. Поэтому $L = \mathbb{C} + (N(2, 2) \oplus \mathbb{C}^{n-5})$, причем действие элемента X на $\mathbb{C}^{n-5}$ скалярное. Но и алгебры Ли такого строения не могут заполнять собой неприводимую компоненту, так как скалярное действие на $\mathbb{C}^{n-5}$ при $n > 5$ всегда допускает нескаларные деформации (о чем уже говорилось выше).

Случай $n = 5$ мы можем не рассматривать, так как он был разобран в [1]. Можно было бы здесь применить и приведенные выше рассуждения, немного их модифицировав (ибо условие $n > 5$ используется там только в одном месте).

Тем самым, мы доказали, что произвольная неприводимая компонента C всегда содержит алгебру Ли, сжимаемую (одним или несколькими сжатиями) в $N(2, 2) \oplus \mathbb{C}^{n-5}$. Но тогда она в силу своей замкнутости содержит и саму алгебру Ли $N(2, 2) \oplus \mathbb{C}^{n-5}$.

Теорема 4 доказана.

Укажем одно возможное обобщение теоремы 4: алгебра Ли $N(3) \oplus \mathbb{C}$, видимо, тоже краеугольная. Это можно доказывать по аналогии с вышеприведенными рассуждениями серией сжатий некоторой алгебры Ли из неприводимой компоненты в алгебру Ли $N(3) \oplus O_{n-4}$, где $N(3) = \mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^3$, $\varphi(1) = J_3(0)$. Если эти сжатия удастся построить, то мы получим новые примеры краеугольных алгебр Ли, причем класса нильпотентности 3 (до сих пор они у нас были только класса 2). Схема рассуждений тут может быть аналогична приведенной выше (при доказательстве теоремы 4).

§ 4. О спектре алгебр Ли

Пусть L – алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$. В этом параграфе мы рассмотрим некоторые понятия, которые неявно или почти незаметно фигурировали в предыдущих параграфах. В явной же форме они нам будут нужны в дальнейшем при осуществлении следующих шагов программы по изучению пространств алгебр Ли, намеченной автором.

Спектром $\text{Спек}(X)$ элемента X алгебры Ли L назовем, как обычно, множество $\{\lambda_i(\text{ad}_X)\}$ всех собственных значений (с учетом кратностей) линейного оператора ad_X . Всегда $\text{Спек}(X)$ – это непустое подмножество в $\mathbb{C}$, элементы которого имеют определенные кратности. Приведенным спектром $\text{Спек}^*(X)$ назовем множество всех ненулевых элементов из $\text{Спек}(X)$. Это множество вполне может оказаться пустым.

Рассмотрим простой пример. Пусть $L = \mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-1}$ – полупрямая сумма, задаваемая линейным оператором $\varphi(1) = A$. Тогда если элемент X принадлежит абелеву идеалу $\mathbb{C}^{n-1}$, то $\text{Спек}^*(X) = \emptyset$. Если же X не лежит в $\mathbb{C}^{n-1}$, то $\text{Спек}(X) = \{\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_{n-1}, 0\}$, где λ_i – собственные числа линейного оператора A , а α – произвольные ненулевые константы. $\text{Спек}^*(X)$ состоит здесь из множества тех $\alpha\lambda_i$, которые отличны от нуля. Число элементов (с учетом кратности) в $\text{Спек}^*(X)$ здесь равно размерности $\dim[L, L]$ коммутанта рассматриваемой алгебры Ли L .

Через $\text{Спек}(L)$ (спектр алгебры Ли L) обозначим $\{\text{Спек}(X) \mid X \in L\}$ – множество неупорядоченных наборов комплексных чисел. Два таких набора считаем различными, если они различаются хотя бы одним элементом или кратностью хотя бы одного элемента. Аналогично определяется $\text{Спек}^*(L)$. Отметим, что на множестве комплексных чисел можно было бы ввести упорядочение (лексикографическое – по модулю и аргументу), но нам это здесь не понадобится и мы пойдем другим путем.

Отметим, что если алгебра Ли L нильпотентна, то $\text{Спек}^*(L) = \emptyset$.

Продолжим рассмотрение примеров, касающихся понятия спектра.

Пусть L – алгебраическая разрешимая алгебра Ли. Тогда она имеет разложение Шевалле $L = T + U$ в полупрямую сумму тора T (абелевой подалгебры, состоящей из полупростых элементов) и нильпотентного идеала U . При этом можно предполагать, что присоединенное действие любого элемента из T на U нетривиально.

Вообще, как следует из теоремы Ли, для любой разрешимой комплексной алгебры Ли L корни можно упорядочить и потому мы можем заменить множество $\text{Спек}(L)$ на естественно “накрывающее” его векторное пространство (слои этого разветвленного накрытия конечны). Для того чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что в силу теоремы Ли все линейные операторы ad_X ($X \in L$) могут быть одновременно приведены к треугольному виду. Другими словами, все эти линейные операторы сохраняют некоторый полный флаг. Но тогда этот (фиксированный нами на будущее) полный флаг задает некоторое упорядочение собственных значений, или, что эквивалентно, диагональных

элементов указанных выше треугольных матриц. Добавив к ним (например, в конце) некоторые нулевые собственные значения (соответствующие ядру операторов ad_x), получим, что характеристические корни можно упорядочить (причем, вообще говоря, одним из многих способов). Поэтому в дальнейшем можно считать, что для разрешимой алгебры Ли L среди элементов наборов из комплексных чисел, образующих $\text{Spec}(L)$ (или $\text{Spec}^*(L)$), введено некоторое упорядочение. Такого рода идея интенсивно использовалась многие годы при изучении полупростых алгебр Ли и их классификации.

Пусть теперь L – произвольная комплексная алгебра Ли, а B – борелевская подалгебра Ли (максимальная разрешимая подалгебра в L). Все такие подалгебры в L сопряжены, поэтому произвольный элемент $X \in L$, будучи принадлежащим некоторой борелевской подалгебре, сопряжен некоторому элементу из B . Так как спектр элемента при сопряжении не меняется, то получаем, что $\text{Spec}(L)$ можно отождествить с $\text{Spec}(B)$, а так как алгебра Ли B разрешима, то получаем, что для спектра алгебры Ли всегда можно рассматривать естественно накрывающее (разветвленно, с конечными слоями) его векторное пространство. Размерности множества $\text{Spec}(L)$ и указанного выше векторного пространства равны, очевидно, рангу алгебры Ли.

В частности, для алгебры Ли L вида $\mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-1}$ (уже неоднократно рассматривавшейся выше) $\text{Spec}(L)$ естественно рассматривать как одномерное векторное пространство. Ненулевые элементы тут – это наборы $(\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_{n-1}, 0)$ при всевозможных $\alpha \neq 0$, а нулевой элемент этого векторного пространства соответствует спектру любого нильпотентного элемента этой алгебры Ли (например, нулевого). То же верно и для алгебры Ли вида $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-3}$ – прямой сумме, соответствующей представлению φ трехмерной простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Тем самым, в обоих случаях мы имеем дело с алгебрами Ли ранга 1.

Рассмотрим более подробно один специальный случай алгебр Ли вида $\mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-1}$. Речь идет об алгебрах Ли вида $R_{\Lambda} = \mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-1}$, где $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ – множество характеристических корней для матрицы $\varphi(1) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$. Другими словами, мы рассматриваем алгебры Ли, которые определяются диагональной матрицей (или, что эквивалентно, полупростым линейным оператором). Ясно, что $\text{Spec}(R_{\Lambda})$ – одномерное векторное пространство, порожденное вектором $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0)$. А вот $\text{Spec}^*(R_{\Lambda})$ состоит из наборов $(\alpha\lambda_{k_1}, \dots)$, где $\lambda_k \neq 0$, $\alpha \neq 0$. Картановской подалгеброй в R_{Λ} (напомним, что все картановские подалгебры в комплексной алгебре Ли сопряжены между собой) является подалгебра $\mathbb{C} + Z(R_{\Lambda})$, где $Z(R_{\Lambda})$ – центр алгебры Ли R_{Λ} . Если $\text{Spec}^*(R_{\Lambda}) \neq \{0\}$, то $Z(R_{\Lambda}) \subset \mathbb{C}^{n-1}$. В частности, мы получаем, что ранг алгебры Ли R_{Λ} равен $1 + |\text{Spec}^*(R_{\Lambda})|$, где $|\text{Spec}^*(R_{\Lambda})|$ – число ненулевых элементов среди λ_i . Отметим, что алгебры Ли R_{Λ} и $R_{\Lambda'}$ изоморфны тогда и только тогда, когда Λ и Λ' пропорциональны.

Рассмотрим поведение спектра алгебры Ли при сжатии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если алгебра Ли L' есть сжатие алгебры Ли L , то

$$\text{Spec}(L') \subseteq \text{Spec}(L).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В GL_n -орбите алгебры Ли $L \in \mathcal{L}_n$ все алгебры Ли изоморфны, а потому имеют одинаковые спектры. При сжатии множество всех характеристических многочленов элементов алгебры Ли не увеличивается, а элементы спектра – это наборы корней характеристических многочленов.

Рассмотрим иллюстрирующий предложение 1 пример – сжатие алгебр Ли вида R_Λ . Если имеется сжатие алгебры Ли R_Λ в некоторую алгебру Ли L' , то эта алгебра Ли имеет абелев идеал коразмерности 1 и потому может быть записана в виде $\mathbb{C} +_\psi \mathbb{C}^{n-1}$ – полупрямой суммы, определяемой гомоморфизмом ψ . Однако матрица $\psi(1)$ не обязательно будет диагональной. Далее, хотя в силу предложения 1 имеем $\text{Spec}(L') \subseteq \text{Spec}(R_\Lambda)$, но может оказаться, что на самом деле это включение строгое. Например, любая алгебра Ли (в том числе и R_Λ) сжимается в абелеву алгебру Ли, спектр которой состоит только из нуля (точнее, из набора нулей).

Теперь рассмотрим подробнее специальный случай, когда векторное пространство $\text{Spec}(L)$ одномерно. Алгебра Ли может иметь невырожденное дифференцирование, только если она нильпотентна (прямое доказательство этого давно известного факта приведено в [5]). Алгебры Ли, имеющие невырожденные дифференцирования, мы будем называть гиперболическими; они фигурируют в вопросах, связанных с диффеоморфизмами Аносова на компактных нильмногообразиях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\dim(\text{Spec}(L)) = 1$ (или, что эквивалентно, ранг алгебры Ли L равен 1).

1. Если алгебра Ли L разрешима, то в L существует нильпотентный идеал коразмерности ≤ 1 . Если L ненильпотентна, то этот идеал можно выбрать гиперболическим.

2. Если L неразрешима, то $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) +_\varphi N$, где N – гиперболическая нильпотентная алгебра Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию ранг алгебры Ли L равен единице, т.е. для общего элемента $X \in L$ только одно собственное значение линейного оператора ad_X равно нулю.

1. Пусть N – нильрадикал в разрешимой по условию алгебре Ли L . Если $\text{codim}_L N \geq 2$, то для любого $X \in L$ у ad_X имеется ≥ 2 нулевых собственных значений (так как $[L, L] \subset N$ и потому действие ad_X на L/N тривиально). Поэтому нильрадикал N должен иметь в нашем случае коразмерность ≤ 1 . На самом деле в этом случае всегда можно построить и нильпотентный идеал, имеющий коразмерность 1. Если $N \neq L$ (т.е. L ненильпотентна), то N имеет невырожденное дифференцирование (это ограничение ad_X на N , все характеристические корни которого будут отличны от нуля) и потому является гиперболической алгеброй Ли в силу самого определения гиперболичности, данного выше.

2. Пусть $L = S + R$ – разложение Леви. Тогда полупростая алгебра Ли S ранга 1 и потому она изоморфна $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Рассмотрим действие S на радикале R .

Действие элемента $H \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ – образующего одномерной картановской подалгебры в $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ – должно иметь только ненулевые собственные значения. Это может быть, только если R нильпотентна, причем она будет гиперболической.

Снова рассмотрим Λ – некоторый набор k комплексных чисел (возможно, с кратностями). Опять рассмотрим алгебры Ли вида $R_\Lambda = \mathbb{C} +_\varphi \mathbb{C}^k$, где $\varphi(1) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если алгебра Ли L есть нетривиальное сжатие некоторой R_Λ , то L обязательно нильпотентна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что сжатие называется нетривиальным, если получаемая при сжатии алгебра Ли не изоморфна исходной (сжимаемой) алгебре Ли.

Имеем $\text{Spec}(R_\Lambda) = \mathbb{C}$ и потому $\text{Spec}(L) \subseteq \mathbb{C}$ (в силу предложения 1), поэтому $\text{Spec}(L)$ равно $\mathbb{C}$ или же состоит только из набора нулей (и тогда L нильпотентна).

Пусть $\text{Spec}(L) = \mathbb{C}$. Алгебра Ли L тоже имеет абелев идеал коразмерности 1, т.е. она тоже есть полупрямая сумма вида $\mathbb{C} +_\psi \mathbb{C}^{n-1}$. При этом в силу предложения 1 $\text{Spec}(L) = \text{Spec}(R_\Lambda)$. Остается только доказать, что $\psi(1)$ полупросто (и тогда мы получим, что L изоморфна R_Λ). Но это вытекает из известного факта о замкнутости для полупростого элемента класса сопряженных с ним элементов (см., например, [4]). У нас кроме сопряжения еще имеются умножения на скаляр, но это при сжатии (предельном переходе) может дать только некоторый нильпотентный элемент. Следовательно, ненильпотентная алгебра Ли L должна быть изоморфна R_Λ .

Назовем алгебру Ли инфраразрешимой (т.е. лежащей в диаграмме сжатий “ниже” всех разрешимых алгебр Ли), если она не имеет нетривиальных сжатий в ненильпотентные алгебры Ли (т.е. нетривиально она может сжиматься только в нильпотентные алгебры Ли). Тогда получаем, что R_Λ инфранильпотентна. Например, инфраразрешима алгебра Ли $R_2 \oplus \mathbb{C} = \mathbb{C} +_\varphi \mathbb{C}^2$, $\varphi(1) = \text{diag}(1, 0)$. Отметим, что прямая сумма инфраразрешимых алгебр Ли не обязательно инфраразрешима, например, алгебра Ли $R_2 \oplus R_2 \oplus \mathbb{C}$ (прямая сумма инфраразрешимых R_2 и $R_2 \oplus \mathbb{C}$) имеет сжатие в алгебру Ли $R_2 \oplus N(2)$, ей не изоморфную (о сжатии $R_2 \oplus \mathbb{C}$ в $N(2)$ уже говорилось выше).

На основе полученных в этом параграфе результатов дадим схему еще одного доказательства некоторых утверждений из теоремы 1. Пусть $n = 4k$ (для других значений n рассуждения немного изменятся); тогда алгебра Ли вида $L_2 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) +_\varphi \mathbb{C}^{n-3}$ жесткая (тут φ – неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$; см. [6]).

Пусть R – разрешимая, но не нильпотентная алгебра Ли, принадлежащая замыканию GL_n -орбиты алгебры Ли L_2 . Тогда для любого $X \in R$ число элементов в $\text{Spec}(X)$ равно 0 или $n - 1$ (это следует из описания алгебры Ли L_2).

С другой стороны, если R принадлежит замыканию орбиты алгебры Ли L_0 (описанной выше), то число элементов в $\text{Spec}(X)$ равно 0 или строго меньше чем $n - 1$.

Выбрав в качестве $X \in R$ ненильпотентный элемент (он существует, ибо наша алгебра Ли R не является нильпотентной), приходим к противоречию.

Отметим, что тут используется неразрешимая алгебра Ли R_2 , поэтому к $\mathcal{R}_n$ приведенное рассуждение неприменимо (в отличие от рассуждения из § 1). Далее, мы рассмотрели тут только один частный случай, когда размерность n кратна 4.

Список литературы

- [1] В. В. Горбацевич, “О некоторых свойствах пространства n -мерных алгебр Ли”, *Матем. сб.*, **200**:2 (2009), 31–60; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, “Some properties of the space of n -dimensional Lie algebras”, *Sb. Math.*, **200**:2 (2009), 185–213.
- [2] Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик, “Строение групп и алгебр Ли”, *Группы Ли и алгебры Ли* – 3, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **41**, ВИНИТИ, М., 1990, 5–253; англ. пер.: A. L. Onishchik, E. B. Vinberg, V. V. Gorbatsevich, *Lie groups and Lie algebras III. Structure of Lie groups and Lie algebras*, Encyclopaedia Math. Sci., **41**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [3] J. M. Ancochea Bermudez, M. Goze, “On the nonrationality of rigid Lie algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**:9 (1999), 2611–2618.
- [4] Х. Крафт, *Геометрические методы в теории инвариантов*, Мир, М., 1987; пер. с нем.: H. Kraft, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Aspects Math., **D1**, Vieweg, Braunschweig, 1984.
- [5] В. В. Горбацевич, “Об алгебраических диффеоморфизмах Аносова на нильмногообразиях”, *Сиб. матем. журн.*, **45**:5 (2004), 995–1021; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, “On algebraic Anosov diffeomorphisms on nilmanifolds”, *Siberian Math. J.*, **45**:5 (2004), 821–839.
- [6] R. Richardson, “On the rigidity of semi-direct products of Lie algebras”, *Pacific J. Math.*, **22**:2 (1967), 339–344.

В. В. Горбацевич (V. V. Gorbatsevich)

Российский государственный технологический
университет им. К. Э. Циолковского (МАТИ),
г. Москва
E-mail: vgorvich@yandex.ru

Поступила в редакцию
18.01.2011 и 24.06.2011