Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Платонов, Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на световом конусе в $\mathbb{R}^3$, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 6, 101–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7846>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:32:30

УДК 517.986.6

С. С. Платонов

Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на световом конусе в $\mathbb{R}^3$

В некоторых функциональных топологических векторных пространствах на световом конусе X в $\mathbb{R}^3$ получено полное описание строения всех замкнутых линейных подпространств, инвариантных относительно естественного квазирегулярного представления группы $\mathbb{R} \oplus \text{SO}_0(1, 2)$. В частности, получено описание неприводимых и неразложимых инвариантных подпространств. Среди рассматриваемых функциональных пространств содержатся пространства $C(X)$ и $\mathcal{E}(X)$ непрерывных и бесконечно дифференцируемых функций на X , а также функциональные пространства, состоящие из функций экспоненциального роста на X .

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: инвариантные подпространства, квазирегулярное представление, световой конус, однородные пространства, гармонический анализ.

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть группа Ли G действует транзитивно справа на гладком многообразии X . Для любого $g \in G$ и любой функции $f(x)$ на X положим

$$(\tau(g)f)(x) := f(xg). \quad (1.1)$$

Топологическое векторное пространство $\mathcal{F}$, состоящее из комплекснозначных функций на X (обычных или обобщенных), будем называть τ -инвариантным пространством, если из $f \in \mathcal{F}$ и $g \in G$ следует, что $\tau(g)f \in \mathcal{F}$ и отображение $g \mapsto \tau(g)f$ является непрерывным отображением из G в топологическое векторное пространство $\mathcal{F}$. Семейство операторов $\tau(g)|_{\mathcal{F}}$ (обычно будем обозначать их просто $\tau(g)$) определяет квазирегулярное представление группы G в топологическом векторном пространстве $\mathcal{F}$. Замкнутое линейное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$ называется *инвариантным подпространством*, если оно инвариантно относительно квазирегулярного представления τ . Всюду, если не оговорено противное, будем предполагать, что инвариантное подпространство $H \neq \mathcal{F}$.

Для каждого набора $(G, X, \mathcal{F})$ возникает задача об описании строения всех инвариантных подпространств в пространстве $\mathcal{F}$. Эта задача является естественной задачей гармонического анализа на группах, но сложность и методы решения этой задачи сильно меняются в зависимости от тройки $(G, X, \mathcal{F})$. Здесь мы не будем рассматривать наиболее разработанные случаи, когда группа G компактна или когда $\mathcal{F}$ является гильбертовым пространством и квазирегулярное представление τ унитарно. Если пространство $\mathcal{F}$ совпадает с пространством $\mathcal{E}(X) = C^\infty(X)$ всех бесконечно дифференцируемых функций на X ,

то задачу об описании инвариантных подпространств часто называют задачей о спектральном синтезе на однородном многообразии X (см. [1]–[3]).

В работе [4] Л. Шварц решил задачу об описании инвариантных подпространств для случая $G = X = \mathbb{R}$, когда $\mathbb{R}$ действует на себе сдвигами, а пространство $\mathcal{F}$ совпадает с пространством $C(\mathbb{R})$ всех непрерывных функций на $\mathbb{R}$ или с пространством $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$. В этом случае линейное замкнутое подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$ является инвариантным подпространством, если H инвариантно относительно преобразований $f(x) \mapsto f(x + a)$ для любого $a \in \mathbb{R}$. Приведем описание инвариантных подпространств.

Для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}$ обозначим через $V_{\lambda,r}$ r -мерное линейное подпространство, порожденное функциями

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{r-1}e^{\lambda x}, \quad (1.2)$$

или, что эквивалентно, $V_{\lambda,r}$ есть множество всех решений дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^r f = 0.$$

Дополнительно обозначим

$$V_{\lambda,\infty} := \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_{\lambda,r}.$$

Пусть H – инвариантное подпространство в пространстве $\mathcal{F}$, где $\mathcal{F} = C(\mathbb{R})$ или $\mathcal{F} = \mathcal{E}(\mathbb{R})$ (все классические пространства рассматриваются с обычными топологиями). Будем говорить, что число $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит спектру инвариантного подпространства H , если $V_{\lambda,r} \subseteq H$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Обозначим $r_\lambda := \sup\{r : V_{\lambda,r} \subseteq H\}$. Число r_λ будем называть кратностью числа λ в спектре (r_λ может принимать значения из множества $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$). Обозначим через $\sigma = \sigma_H$ спектр инвариантного подпространства H , причем будем считать, что каждое число λ входит в σ с кратностью r_λ .

ТЕОРЕМА 1.1 (Л. Шварц, 1947 г.). Пусть $\mathcal{F}$ – одно из топологических векторных пространств $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ или $C(\mathbb{R})$, H – инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$, σ – его спектр. Тогда H допускает спектральный синтез, т.е. совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ линейной оболочки подпространств $V_{\lambda,r}$, где λ пробегает спектр σ , а $r = r_\lambda$ – кратность числа λ в σ .

Из теоремы 1.1 вытекает, что каждое инвариантное подпространство H однозначно восстанавливается по его спектру σ . При этом случай, когда инвариантное подпространство совпадает со всем пространством $\mathcal{F}$, тоже не исключается: если $H = \mathcal{F}$, то его спектр σ состоит из всех комплексных чисел, причем каждое число входит в σ с бесконечной кратностью. Если $H \neq \mathcal{F}$, то его спектр σ_H не более чем счетный и все кратности r_λ конечные. Отметим также, что если $H = \{0\}$, то его спектр σ пустой.

Можно дать и описание всевозможных спектров. Пусть σ – конечное или счетное подмножество в $\mathbb{C}$, причем каждое число λ может входить в σ с конечной кратностью r_λ . Для того чтобы подмножество σ совпадало со спектром некоторого инвариантного подпространства $H \subsetneq \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ – одно из пространств $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ или $C(\mathbb{R})$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

(S1) существует целая ненулевая функция $\Psi(z)$, для которой каждое число $\lambda \in \Lambda$ является нулем с кратностью не меньше r_λ , причем

$$|\Psi(z)| \leq A e^{B|\operatorname{Re} z|} (1 + |z|)^C, \quad x \in \mathbb{C},$$

для некоторых не зависящих от z постоянных $A, B, C > 0$ (такие функции являются преобразованиями Фурье обобщенных функций с компактным носителем).

Теорема 1.1 вместе с условием (S1) дает описание инвариантных подпространств в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ и $C(\mathbb{R})$. Гораздо более сложным оказался случай, когда $X = G = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $(\tau(y)f)(x) = f(x + y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Л. Шварц [4] высказал гипотезу, что любое инвариантное подпространство $H \subseteq \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с замыканием линейной оболочки содержащихся в H квазиполиномов, т.е. функций вида $P(x)e^{\lambda x}$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, $P(x)$ – полином от x . Эта гипотеза оказалась неверной. В 1975 г. Д. И. Гуревич [5] построил пример инвариантного подпространства $H \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, которое не содержит ни одного квазиполинома. Описание всех инвариантных подпространств в этом случае неизвестно, хотя имеется много работ, в которых описывается строение специальных классов инвариантных подпространств, таких как подпространства решений однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами или некоторых уравнений в свертках (см., например, [6]–[8]). Тем не менее задачу об описании всех инвариантных подпространств в пространстве $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (и в некоторых других функциональных пространствах на $\mathbb{R}^n$) можно решить, если в качестве группы G взять группу $\operatorname{ISO}(n)$ всех сохраняющих ориентацию изометрий пространства $\mathbb{R}^n$ (см. [9]–[11]). В работах [12]–[16] описание инвариантных подпространств в пространстве $\mathcal{E}(X)$ и в некоторых других функциональных пространствах получено для случая, когда X – произвольное риманово симметрическое пространство ранга 1, G – группа всех сохраняющих ориентацию изометрий многообразия X . В [17], [18] получено описание инвариантных подпространств для случая, когда многообразие X совпадает с группой $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$, $G = \operatorname{SL}(2, \mathbb{R}) \oplus \operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ и группа G действует на X левыми и правыми сдвигами, т.е.

$$\begin{aligned} x(g_1, g_2) &:= g_1^{-1} x g_2, & x \in X = \operatorname{SL}(2, \mathbb{R}), \\ (g_1, g_2) &\in G = \operatorname{SL}(2, \mathbb{R}) \oplus \operatorname{SL}(2, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Другие случаи решения задачи об описании инвариантных подпространств см. в [19]–[21].

В настоящей работе рассматривается новый случай, когда можно получить решение задачи об описании инвариантных подпространств: X – верхняя половина светового конуса в $\mathbb{R}^3$, $G = \mathbb{R} \oplus \operatorname{SO}_0(1, 2)$, $\mathcal{F}$ – произвольное функциональное пространство из некоторых классов функциональных пространств (в частности, может быть $\mathcal{F} = \mathcal{E}(X)$). Перейдем к более подробному описанию результатов.

Пространство $\mathbb{R}^3$ будем рассматривать как псевдоевклидово пространство с билинейной формой

$$\langle x, y \rangle := x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2, \quad x = (x_0, x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Пусть X – верхняя пола светового конуса, т.е.

$$X := \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, x \rangle = 0, x_0 > 0\}.$$

Через $\mathrm{SO}_0(1, 2)$ обозначим группу псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^3$ (точнее говоря, ее связную компоненту единицы). Если

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то $\mathrm{SO}_0(1, 2)$ состоит из всех матриц $u = (u_{ij})$, $0 \leq i, j \leq 2$, таких, что

$$uJu^t = J, \quad \det u = 1, \quad u_{00} > 0,$$

где u^t – матрица, транспонированная к матрице u .

Пусть $G = \mathbb{R} \oplus \mathrm{SO}_0(1, 2)$. Группа G действует справа на X : если $g = (t, u)$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathrm{SO}_0(1, 2)$, $x \in X$, то

$$xg := e^t x u. \quad (1.3)$$

Каждый элемент $u \in \mathrm{SO}_0(1, 2)$ будем отождествлять с элементом $(0, u) \in G$ и тем самым считать, что $\mathrm{SO}_0(1, 2)$ является подгруппой группы G . Элемент (t, e) ($t \in \mathbb{R}$, e – единичный элемент группы $\mathrm{SO}_0(1, 2)$) будем обозначать $\gamma(t)$. Подмножество $\Gamma := \{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$ является подгруппой в группе G , изоморфной $\mathbb{R}$. Будем называть Γ *подгруппой растяжений* в G . Если $x = (x_0, x_1, x_2) \in X$, то

$$x\gamma(t) = e^t x = (e^t x_0, e^t x_1, e^t x_2). \quad (1.4)$$

Отметим, что каждую точку $x \in X$ можно единственным образом представить в виде

$$x = (x_0, x_0 \cos \varphi, x_0 \sin \varphi), \quad x_0 > 0, \quad \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}. \quad (1.5)$$

Числа (x_0, φ) можно назвать полярными координатами точки x .

Определим на X классы функциональных пространств, в которых будут описываться инвариантные подпространства. Все функциональные пространства предполагаются τ -инвариантными, где τ определяется формулой (1.1). Через $C(X)$, $C^m(X)$ и $\mathcal{E}(X) = C^\infty(X)$ будем обозначать пространства непрерывных, m раз непрерывно дифференцируемых и бесконечно дифференцируемых функций соответственно (все классические пространства рассматриваются с обычными топологиями). Пусть $\mathcal{D}(X)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций на X с компактным носителем, $\mathcal{D}'(X)$ – пространство обобщенных функций на X , т.е. множество всех линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(X)$. Снабженное слабой топологией $\sigma(\mathcal{D}'(X), \mathcal{D}(X))$ множество $\mathcal{D}'(X)$ является полным локально выпуклым пространством. Для $f \in \mathcal{D}'(X)$ и $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ будем обозначать через $\langle f, \varphi \rangle$ значение функционала f на функции φ . Легко видеть, что $\mathcal{E}(X) \subset \mathcal{D}'(X)$ (вложение непрерывное), если отождествить функцию $f \in \mathcal{E}(X)$ с линейным функционалом на $\mathcal{D}(X)$ по формуле

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_X f(x) \varphi(x) dx, \quad (1.6)$$

где $f \in \mathcal{E}(X)$, $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, dx – элемент G -инвариантной меры на пространстве X . Оператор $\tau(g)$ (см. (1.1)) естественным образом распространяется на обобщенные функции по формуле

$$\langle \tau(g)f, \varphi \rangle := \langle f, \tau(g^{-1})\varphi \rangle, \quad f \in \mathcal{D}'(X), \quad \varphi \in \mathcal{D}(X).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. τ -инвариантное функциональное пространство $\mathcal{F}$ называется функциональным пространством *типа 1*, если

$$\mathcal{E}(X) \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}'(X),$$

причем вложения непрерывные.

Примерами пространств типа 1 служат пространства $C^m(X)$, $m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, а также пространства $L_{\text{loc}}^p(X)$ локально интегрируемых в степени p , $1 \leq p < \infty$, функций, где пространство $L_{\text{loc}}^p(X)$ состоит из всех измеримых функций $f(x)$ на X (с точностью до значений на множестве меры нуль), для которых конечны полунормы

$$|f|_{K,p} := \left(\int_K |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

K – произвольное компактное подмножество в X . Для всех этих пространств $\mathcal{F}$ вложение $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}'(X)$ задается формулой (1.6).

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G , $U(\mathfrak{g})$ – универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Обычным образом действие группы G на X индуцирует действие алгебры Ли на функциях на X , т.е. если $f \in C^n(X)$, $\xi \in \mathfrak{g}$, то по определению

$$(\xi f)(x) := \left. \frac{d}{ds} f(x \exp(s\xi)) \right|_{s=0}, \quad (1.7)$$

где $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ – экспоненциальное отображение. При этом $\xi f \in C^{m-1}(X)$. Действие (1.7) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ продолжается до действия универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$, которое будем обозначать af , $a \in U(\mathfrak{g})$.

Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ – произвольный базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ ($\dim \mathfrak{g} = 4$). Мультииндексом будем называть произвольный набор $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$. Будем использовать обозначения

$$\partial^\alpha f := (\xi_0)^{\alpha_0} (\xi_1)^{\alpha_1} (\xi_2)^{\alpha_2} (\xi_3)^{\alpha_3} f, \quad |\alpha| := \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Для любой точки $x = (x_0, x_1, x_2) \in X$ определим число $|x|$ формулой

$$|x| := |\ln x_0|. \quad (1.8)$$

Для любого $\nu \in \mathbb{R}$ обозначим через $C_{(\nu)}(X)$ множество всех функций $f \in C(X)$, удовлетворяющих условию

$$|f(x)|e^{-\nu|x|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (1.9)$$

Множество $C_{(\nu)}(X)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{(\nu)} := \sup_{x \in X} |f(x)|e^{-\nu|x|}. \quad (1.10)$$

Для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $C_{(\nu)}^m(X)$ множество всех функций $f \in C^m(X)$ таких, что $\partial^\alpha f \in C_{(\nu)}(X)$ для любого мультииндекса α с $|\alpha| \leq m$. Множество $C_{(\nu)}^m(X)$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|f\|_{(\nu)}^{(m)} := \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{(\nu)}.$$

Для банаховых пространств $C_{(\nu)}^m(X)$ имеются вложения (непрерывные)

$$C_{(\nu)}^m(X) \subseteq C_{(\nu')}^{m'}(X), \quad m \geq m', \quad \nu' \geq \nu.$$

Пространство

$$C_{(\nu)}^\infty(X) := \bigcap_{m \in \mathbb{Z}_+} C_{(\nu)}^m(X)$$

является полным локально выпуклым пространством с топологией, порожденной семейством норм $\|\cdot\|_{(\nu)}^{(m)}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, что

$$C_{(\nu)}^\infty(X) \subseteq C_{(\nu')}^\infty(X), \quad \nu' \geq \nu,$$

причем вложения непрерывные. Определим пространства

$$\mathcal{S}_*(X) := \bigcap_{\nu \in \mathbb{R}} C_{(\nu)}^\infty(X), \quad \mathcal{E}_*(X) := \bigcup_{\nu \in \mathbb{R}} C_{(\nu)}^\infty(X). \quad (1.11)$$

Пространства $\mathcal{S}_*(X)$ и $\mathcal{E}_*(X)$ являются полными локально выпуклыми пространствами с топологиями индуктивного и проективного пределов топологических векторных пространств $C_{(\nu)}^\infty(X)$. Можно сказать, что пространство $\mathcal{S}_*(X)$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций, убывающих вместе со всеми производными при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой экспоненты $\exp(-\nu|x|)$, $\nu > 0$, а пространство $\mathcal{E}_*(X)$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций f , которые могут расти вместе со всеми производными не быстрее некоторой экспоненты $\exp(\nu|x|)$, $\nu = \nu(f) > 0$.

Пусть $\mathcal{S}'_*(X)$ – сопряженное к $\mathcal{S}_*(X)$ пространство, т.е. множество линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{S}_*(X)$. Снабженное слабой топологией $\sigma(\mathcal{S}'_*(X), \mathcal{S}_*(X))$ множество $\mathcal{S}'_*(X)$ является полным локально выпуклым пространством. Пространство $\mathcal{S}'_*(X)$ естественно назвать пространством обобщенных функций на X экспоненциального роста. Для $f \in \mathcal{S}'_*(X)$ и $\varphi \in \mathcal{S}_*(X)$ будем обозначать через $\langle f, \varphi \rangle$ значение функционала f на функции φ .

Легко видеть, что $\mathcal{E}_*(X) \subseteq \mathcal{S}'_*(X)$ (вложение непрерывное), если отождествить функцию $f \in \mathcal{E}_*(X)$ с линейным функционалом на $\mathcal{S}_*(X)$ по формуле (1.6), и что пространства $\mathcal{E}_*(X)$ и $\mathcal{S}'_*(X)$ являются τ -инвариантными (доказательство этих фактов см. в § 2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. τ -инвариантное функциональное пространство $\mathcal{F}$ на X называется функциональным пространством *экспоненциального роста* или функциональным пространством *типа 2*, если

$$\mathcal{E}_*(X) \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}'_*(X),$$

причем вложения непрерывные.

Примерами пространств экспоненциального роста являются пространства $\mathcal{E}_*(X)$, $\mathcal{S}'_*(X)$, а также пространства

$$C_*^m := \bigcup_{\nu \in \mathbb{R}} C_{(\nu)}^m, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

при этом пространство C_*^m снабжается топологией индуктивного предела банаховых пространств $C_{(\nu)}^m$. Другие примеры пространств экспоненциально роста будут приведены в §2.

Обозначим через K следующую подгруппу в группе $\mathrm{SO}_0(1, 2) \subset G$:

$$K := \left\{ k(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}. \quad (1.12)$$

Пусть $\mathcal{F}$ – произвольное τ -инвариантное функциональное пространство на X . Для любого $n \in \mathbb{Z}$ обозначим через $\mathcal{F}^{(n)}$ подмножество в $\mathcal{F}$, состоящее из всех функций $f(x)$, удовлетворяющих условию

$$f(xk(\theta)) = e^{in\theta} f(x) \quad \forall k(\theta) \in K \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (1.13)$$

Подмножество $\mathcal{F}^{(n)}$ является замкнутым линейным подпространством пространства $\mathcal{F}$. Снабженное индуцированной из пространства $\mathcal{F}$ топологией подмножество $\mathcal{F}^{(n)}$ является полным локально выпуклым пространством. В частности, определены пространства $\mathcal{E}(X)^{(n)}$, $\mathcal{E}_*(X)^{(n)}$, $C(X)^{(n)}$, $C_*(X)^{(n)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Замкнутое линейное подпространство $H^{(n)} \subseteq \mathcal{F}^{(n)}$ назовем *инвариантной ячейкой* (или просто *ячейкой*), если существует инвариантное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$, такое, что

$$H^{(n)} = H \cap \mathcal{F}^{(n)}. \quad (1.14)$$

Инвариантное подпространство H , для которого выполняется (1.14), вообще говоря, не единственно. Будем говорить, что ячейка $H^{(n)}$ *соответствует* инвариантному подпространству H . Если H – инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$ и известны все ячейки $H^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, соответствующие H , то H однозначно восстанавливается по набору ячеек $H^{(n)}$, а именно, H совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ суммы ячеек $H^{(n)}$.

Далее описание инвариантных подпространств в $\mathcal{F}$ проводится по следующей схеме:

1) для каждого $n \in \mathbb{Z}$ описывается строение всевозможных инвариантных ячеек в $\mathcal{F}^{(n)}$;

2) определяются условия, при которых семейство ячеек $H^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, соответствует одному инвариантному подпространству.

Определим дифференциальный оператор $\delta: \mathcal{E}(X) \mapsto \mathcal{E}(X)$ по формуле

$$(\delta f)(x) := \left. \frac{d}{ds} f(x\gamma(s)) \right|_{s=0}, \quad (1.15)$$

где $x\gamma(s)$ определено в (1.4). Для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $r \in \mathbb{N}$ пусть

$$V_{\lambda, r}^{(n)} := \{f \in \mathcal{E}^{(n)}(X) : (\delta - \lambda)^r f = 0\}. \quad (1.16)$$

При $r = 0$ дополнительно полагаем $V_{\lambda, 0}^{(n)} := \{0\}$.

Если $\mathcal{F}$ – произвольное функциональное пространство типа 1 или типа 2, то подпространство $V_{\lambda,r}^{(n)}$ является инвариантной ячейкой в $\mathcal{F}^{(n)}$. Базис в пространстве $V_{\lambda,r}^{(n)}$ образуют функции

$$e_{\lambda,k}^{(n)}(x) := x_0^\lambda (\ln x_0)^k e^{in\varphi}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad (1.17)$$

где (x_0, φ) – полярные координаты точки x (см. (1.5)). В частности, $\dim V_{\lambda,r}^{(n)} = r$.

Пусть далее $\mathcal{F}$ – произвольное функциональное пространство на X типа 1 или типа 2. Для любого подмножества $A \subseteq \mathcal{F}$ через $[A]$ или $[A]_{\mathcal{F}}$ будем обозначать замыкание множества A в пространстве $\mathcal{F}$. Строение всех инвариантных ячеек в пространстве $\mathcal{F}^{(n)}$ описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1.2. 1) Для любой инвариантной ячейки $H^{(n)} \subset \mathcal{F}^{(n)}$, $H^{(n)} \neq \mathcal{F}^{(n)}$, существует единственный конечный или счетный набор $\sigma \subset \mathbb{C}$ (каждое число $\lambda \in \sigma$ может входить в этот набор с конечной кратностью r_λ) такой, что

$$H^{(n)} = \left[\sum_{\lambda \in \sigma} V_{\lambda, r_\lambda}^{(n)} \right], \quad (1.18)$$

т.е. $H^{(n)}$ совпадает с замыканием в $\mathcal{F}^{(n)}$ суммы всех подпространств $V_{\lambda, r_\lambda}^{(n)}$, $\lambda \in \sigma$. Набор σ будем называть спектром ячейки $H^{(n)}$.

2) Для того чтобы конечный или счетный набор $\sigma \subset \mathbb{C}$ являлся спектром некоторой инвариантной ячейки $H^{(n)} \subsetneq \mathcal{F}^{(n)}$ в функциональном пространстве $\mathcal{F}$ типа 1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (S1).

3) Для того чтобы конечный или счетный набор $\sigma \subset \mathbb{C}$ являлся спектром некоторой инвариантной ячейки $H^{(n)} \subsetneq \mathcal{F}^{(n)}$ в функциональном пространстве $\mathcal{F}$ типа 2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

(S2) для любого $k > 0$ рассмотрим множество $\sigma_k := \{\lambda \in \sigma : |\operatorname{Re} \lambda| < k\}$. Занумеруем числа из σ_k в порядке возрастания $|\operatorname{Im} \lambda|$:

$$0 \leq |\operatorname{Im} \lambda_1| \leq |\operatorname{Im} \lambda_2| \leq \dots,$$

причем пусть каждое число $\lambda \in \sigma_k$ входит в эту последовательность r_λ раз; тогда, если множество σ_k бесконечное, то должно выполняться условие

$$\frac{|\operatorname{Im} \lambda_j|}{\ln j} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В случае, когда ячейка $H^{(n)}$ совпадает со всем пространством $\mathcal{F}^{(n)}$, будем считать, что спектр σ состоит из всех комплексных чисел, причем каждое число берется с бесконечной кратностью. При этом остается справедливой формула (1.18), если считать, что

$$V_{\lambda, \infty}^{(n)} := \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_{\lambda, r}^{(n)}.$$

Пусть в каждом пространстве $\mathcal{F}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, фиксирована инвариантная ячейка $H^{(n)}$. Пусть $\sigma^{(n)}$ – спектр ячейки $H^{(n)}$ и $r_\lambda^{(n)}$ – кратность числа λ в наборе $\sigma^{(n)}$. Если $\lambda \notin \sigma^{(n)}$, то будем считать, что $r_\lambda^{(n)} = 0$.

В следующей теореме приводятся условия, при которых ячейки $H^{(n)}$ соответствуют единому инвариантному подпространству в $\mathcal{F}$, т.е. когда существует инвариантное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$ такое, что $H^{(n)} = H \cap \mathcal{F}^{(n)}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Разумеется, такое инвариантное подпространство может быть только одно (оно должно совпадать с замыканием в $\mathcal{F}$ суммы всех ячеек $H^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$).

ТЕОРЕМА 1.3. *Набор ячеек $H^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, соответствует единому инвариантному подпространству тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия.*

- 1) Если $\lambda \notin \mathbb{Z}$, то кратности $r_\lambda^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, не зависят от n .
- 2) Если $\lambda = k \in \mathbb{Z}$ и $k \geq 0$, то кратности $r_k^{(n)}$ будут принимать постоянные значения, когда n изменяется на промежутках

$$I_- = (-\infty, -k - 1], \quad I_0 = [-k, k], \quad I_+ = [k + 1, +\infty).$$

Обозначим эти кратности через r_k^- , r_k^0 и r_k^+ соответственно. Числа r_k^- , r_k^0 и r_k^+ должны удовлетворять условию

$$r_k^+, r_k^- \in \{r_k^0, r_k^0 - 1\}$$

(если $r_k^0 = 0$, то условие заменяется на $r_k^+ = r_k^- = 0$).

- 3) Если $\lambda = k \in \mathbb{Z}$ и $k < 0$, то кратности $r_k^{(n)}$ будут принимать постоянные значения, когда n изменяется на промежутках

$$I_- = (-\infty, k], \quad I_0 = [k + 1, -k - 1], \quad I_+ = [-k, +\infty).$$

Обозначим эти кратности через r_k^- , r_k^0 и r_k^+ соответственно. Числа r_k^- , r_k^0 и r_k^+ должны удовлетворять условию

$$r_k^+, r_k^- \in \{r_k^0, r_k^0 + 1\}.$$

В совокупности теоремы 1.2 и 1.3 дают полное описание инвариантных подпространств в функциональных пространствах типа 1 и типа 2: каждое инвариантное подпространство описывается набором спектров $\sigma^{(n)}$, которые удовлетворяют условиям 1)–3) теоремы 1.3. Доказательство этих теорем является основной целью работы.

В качестве применения теорем 1.2 и 1.3 получим описание неприводимых и неразложимых инвариантных подпространств. Инвариантное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$ называется *неприводимым*, если любое инвариантное подпространство $H_1 \subseteq H$ совпадает с H или с нулевым подпространством $\{0\}$. Инвариантное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$ называется *неразложимым*, если H нельзя представить в виде $H = [H_1 + H_2]$, где H_1 и H_2 ненулевые инвариантные подпространства такие, что $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ (здесь $[H_1 + H_2]$ – замыкание алгебраической суммы подпространств H_1 и H_2).

Пусть $\mathcal{F}$ – произвольное функциональное пространство типа 1 или типа 2, $\lambda \in \mathbb{C}$. Через $\mathcal{F}(\lambda)$ обозначим инвариантное подпространство, соответствующее набору спектров $\sigma^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, где каждый спектр $\sigma^{(n)}$ состоит из одного числа λ с кратностью 1. Легко видеть, что $\mathcal{F}(\lambda)$ состоит из всех функций $f(x) \in \mathcal{F}$, удовлетворяющих условию

$$f(x\gamma(s)) = e^{\lambda s} f(x) \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (1.19)$$

Условие (1.19) можно записать в эквивалентном виде

$$f(ax) = a^\lambda f(x) \quad \forall a > 0 \quad (1.20)$$

($ax := (ax_0, ax_1, ax_2)$), откуда вытекает, что $\mathcal{F}(\lambda)$ – подпространство в $\mathcal{F}$, состоящее из всех однородных функций степени λ .

Из теоремы 1.3 вытекает, что подпространство $\mathcal{F}(\lambda)$ неприводимо при $\lambda \notin \mathbb{Z}$. При $\lambda = k \in \mathbb{Z}$ и $k \geq 0$ в пространстве $\mathcal{F}(k)$ содержится единственное неприводимое инвариантное подпространство. Это подпространство соответствует набору спектров $\sigma_0^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, где $\sigma_0^{(n)}$ состоит из числа k с кратностью 1 при $|n| \leq k$ и $\sigma_0^{(n)} = \emptyset$ при $|n| > k$. Обозначим это неприводимое инвариантное подпространство $\mathcal{F}_0(k)$. Пространство $\mathcal{F}_0(k)$ конечномерно, $\dim \mathcal{F}_0(k) = 2k + 1$, и базис в нем образуют функции $e_{k,0}^{(n)}(x)$ при $n = -k, -k + 1, \dots, k$ (функции $e_{\lambda,s}^{(n)}(x)$ определены в (1.17)). При $\lambda = k \in \mathbb{Z}$ и $k < 0$ в пространстве $\mathcal{F}(k)$ содержатся два неприводимых инвариантных подпространства. Одно неприводимое инвариантное подпространство (обозначим его $\mathcal{F}_-(k)$) соответствует набору спектров $\sigma_-^{(n)}$, где $\sigma_-^{(n)}$ состоит из числа k с кратностью 1 при $n \leq k$ и $\sigma_-^{(n)} = \emptyset$ при $n > k$. Другое неприводимое инвариантное подпространство (обозначим его $\mathcal{F}_+(k)$) соответствует набору спектров $\sigma_+^{(n)}$, где $\sigma_+^{(n)}$ состоит из числа k с кратностью 1 при $n \geq -k$ и $\sigma_+^{(n)} = \emptyset$ при $n < -k$. Пространство $\mathcal{F}_-(k)$ ($\mathcal{F}_+(k)$) совпадает с замыканием линейной оболочки функций $e_{k,0}^{(n)}(x)$ при $n \leq k$ (соответственно при $n \geq -k$).

Все неприводимые инвариантные подпространства в пространстве $\mathcal{F}$ исчерпываются пространствами $\mathcal{F}(\lambda)$ при $\lambda \notin \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_0(k)$ при $k \in \mathbb{Z}$ и $k \geq 0$, $\mathcal{F}_-(k)$ и $\mathcal{F}_+(k)$ при $k \in \mathbb{Z}$ и $k < 0$.

Для того чтобы инвариантное подпространство $H \subset \mathcal{F}$, $H \neq \mathcal{F}$, было неразложимым, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что каждый спектр $\sigma^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, состоит только из числа λ с некоторой кратностью $r_\lambda^{(n)}$. При $\lambda \notin \mathbb{Z}$ эти кратности должны быть одинаковыми, а при $\lambda \in \mathbb{Z}$ кратности могут меняться в зависимости от n так, чтобы выполнялись условия 2) и 3) теоремы 1.3.

Если все спектры $\sigma^{(n)}$ одинаковы и состоят из одного числа λ с кратностью r , то соответствующее инвариантное подпространство (обозначим его $\mathcal{F}(\lambda, r)$) можно описать в более явном виде. Для любого $a > 0$ определим оператор *растяжения*

$$(\Delta_a f)(x) := f(ax).$$

Функция $f(x)$ называется присоединенной однородной функцией r -го порядка степени λ ($r \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$), если для любых положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_r$

$$\left(\prod_{j=1}^r (\Delta_{a_j} - a_j^\lambda I) \right) f = 0,$$

где I – тождественный оператор (см., например, [22; гл. IV, § 1]). Неразложимое инвариантное подпространство $\mathcal{F}(\lambda, r)$ состоит из всех присоединенных однородных функций r -го порядка степени λ .

Отметим, что в работе А. Ваврынчика [23] изучались инвариантные подпространства в пространстве $\mathcal{E}(X)$, где X – верхняя половина светового конуса в $\mathbb{R}^3$,

но при этом в качестве группы G рассматривалась группа $SO_0(1, 2)$. Полного описания инвариантных подпространств в этом случае не получено, а доказано существование спектрального анализа, т.е. доказано, что в каждом инвариантном подпространстве содержится некоторая функция специального вида.

§ 2. Вспомогательные результаты

Пусть группа Ли G транзитивно действует справа на гладком многообразии X . Через $C(G)$, $\mathcal{E}(G) = C^\infty(G)$, $C_c(G)$ и $\mathcal{D}(G) = C_c^\infty(G)$ будем обозначать пространства непрерывных функций, бесконечно дифференцируемых функций, непрерывных функций с компактным носителем и бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на группе G . Соответствующие пространства на многообразии X будем обозначать $C(X)$, $\mathcal{E}(X)$, $C_c(X)$ и $\mathcal{D}(X)$. Все эти пространства снабжаются обычными топологиями и являются полными локально выпуклыми пространствами.

Пусть dg – мера Хаара на группе G . Предположим, что группа G унимодулярна (т.е. мера Хаара инвариантна относительно правых и левых сдвигов) и пусть на многообразии X существует положительная G -инвариантная мера, которую будем обозначать dx .

Через $\mathcal{D}'(G)$ и $\mathcal{D}'(X)$ будем обозначать пространства обобщенных функций на G и X соответственно, т.е. множества линейных непрерывных функционалов на пространствах $\mathcal{D}(G)$ и $\mathcal{E}(X)$. Для $f \in \mathcal{D}'(G)$ (или $f \in \mathcal{D}'(X)$) и $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ (соответственно $\varphi \in \mathcal{D}(X)$) пусть $\langle f, \varphi \rangle$ – значение линейного функционала f на функции φ . Обычным образом пространство $C(G)$ вкладывается в $\mathcal{D}'(G)$ ($C(X)$ вкладывается в $\mathcal{D}'(X)$), если положить

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_G f(g) \varphi(g) dg, \quad f \in C(G), \quad \varphi \in \mathcal{D}(G), \quad (2.1)$$

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_X f(x) \varphi(x) dx, \quad f \in C(X), \quad \varphi \in \mathcal{D}(X). \quad (2.2)$$

Для любого $h \in G$ оператор левого сдвига L_h , действующий на функциях на группе G , определяется формулой

$$L_h: f(g) \mapsto f(hg), \quad g \in G. \quad (2.3)$$

Оператор L_h является линейным непрерывным оператором на пространствах $C(G)$, $\mathcal{E}(G)$, $C_c(G)$, $\mathcal{D}(G)$. На обобщенные функции действие оператора L_h распространяется по формуле

$$\langle L_h f, \varphi \rangle := \langle f, L_{h^{-1}} \varphi \rangle, \quad f \in \mathcal{D}'(G), \quad \varphi \in \mathcal{D}(G).$$

Пусть o – некоторая фиксированная точка многообразия X , $H = \{g \in G : og = o\}$ – стационарная подгруппа точки o . Тогда H является замкнутой подгруппой в группе G . Фактор-пространство $H \backslash G$ (т.е. множество правых смежных классов) естественным образом снабжается структурой гладкого многообразия (см., например, [24; гл. 3]). Отображение $H \backslash G \ni Hg \mapsto og \in X$ является диффеоморфизмом гладкого многообразия $H \backslash G$ на X (см. [24; теорема 3.62]).

Любую функцию $f(x)$ на X можно отождествить с функцией $\tilde{f}(g)$ на группе G , если положить

$$\tilde{f}(g) := f(og), \quad g \in G. \quad (2.4)$$

Отображение $\lambda: f(x) \mapsto \tilde{f}(g)$ является изоморфизмом топологического векторного пространства $\mathcal{E}(X)$ на подпространство $\mathcal{E}_H(G) \subset \mathcal{E}(G)$, где

$$\mathcal{E}_H(G) := \{f \in \mathcal{E}(G) : L_h f = f \ \forall h \in H\}.$$

Пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'(X)$ можно вложить в пространство $\mathcal{D}'(G)$. Для этого для любой функции $\varphi(g) \in \mathcal{D}(G)$ определим функцию $\bar{\varphi}(x)$ на X формулой

$$\bar{\varphi}(x) := \int_H \varphi(hg) dh, \quad x = og \in X, \quad g \in G, \quad (2.5)$$

где dh – правоинвариантная мера на группе H . Известно (см. [25; лемма 1.10]), что отображение $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ является линейным непрерывным отображением пространства $\mathcal{D}(G)$ на все пространство $\mathcal{D}(X)$. Если подходящим образом нормировать меру Хаара на группе G , то можно считать, что выполняется условие

$$\int_G \varphi(g) dg = \int_X \bar{\varphi}(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(G) \quad (2.6)$$

(см. [25; теорема 1.9]).

Для $f \in \mathcal{D}'(X)$ определим обобщенную функцию $\tilde{f} \in \mathcal{D}'(G)$ равенством

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle := \langle f, \bar{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(G). \quad (2.7)$$

Отображение $\lambda: f \mapsto \tilde{f}$ является изоморфизмом топологического векторного пространства $\mathcal{D}'(X)$ на подпространство $\mathcal{D}'_H(G) \subset \mathcal{D}'(G)$, где

$$\mathcal{D}'_H(G) := \{f \in \mathcal{D}'(G) : L_h f = f \ \forall h \in H\}.$$

На функциях $f \in \mathcal{E}(X)$ отображение λ совпадает с введенным ранее отображением.

Пространства $C_c(G)$ и $\mathcal{D}(G)$ являются ассоциативными топологическими алгебрами относительно свертки

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(h) = \int_G \varphi_1(hg^{-1})\varphi_2(g) dg, \quad h \in G. \quad (2.8)$$

Обычным образом свертка определяется и для других классов функций на G . В частности, свертка $\varphi * f$ определена для любых функций $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ и $f \in \mathcal{D}'(G)$.

Любое представление T группы G (представления групп Ли всегда предполагаются непрерывными) в полном локально выпуклом пространстве (ЛВП) V индуцирует действие алгебры $C_c(G)$ в пространстве V

$$\varphi * v := \int_G \varphi(g)T(g^{-1})v dg \quad \forall \varphi \in C_c(G), \quad \forall v \in V, \quad (2.9)$$

интеграл в (2.9) можно понимать как интеграл Римана от функции со значениями в ЛВП V .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть T и T_0 – представления группы G в полных ЛВП V и V_0 соответственно, и пусть выполняются следующие условия:

- 1) $V_0 \subseteq V$ и это вложение непрерывное;
- 2) $T(g)|_{V_0} = T_0(g)$ для любого $g \in G$;
- 3) для любых $v \in V$ и $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ вектор $\varphi * v \in V_0$ и отображение $v \mapsto \varphi * v$ из V в V_0 непрерывно.

Тогда между замкнутыми линейными G -инвариантными подпространствами в пространствах V и V_0 существует взаимно однозначное соответствие, которое получается сопоставлением каждому инвариантному подпространству $H_0 \subseteq V_0$ его замыкания $H = [H_0]$ в V . То же соответствие получается, если сопоставить каждому инвариантному подпространству $H \subseteq V$ подпространство $H_0 = H \cap V_0 \subseteq V_0$.

Доказательство см. в [14; предложение 2.1].

В дальнейшем предложение 2.1 будет применяться для случая, когда V и V_0 – τ -инвариантные функциональные пространства на X , X – верхняя пола светового конуса, $G = \mathbb{R} \oplus \text{SO}_0(1, 2)$, T и T_0 – ограничения квазирегулярного представления τ на пространства V и V_0 соответственно.

Пусть $V = \mathcal{F}$ – любое пространство типа 1 (т.е. $\mathcal{E}(X) \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}'(X)$, см. § 1), $V_0 = \mathcal{E}(X)$. В этом случае условия 1) и 2) предложения 2.1 очевидны. Для доказательства условия 3) достаточно показать, что если $f \in \mathcal{D}'(X)$ и $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, то $\varphi * f \in \mathcal{E}(X)$ и отображение $f \mapsto \varphi * f$ из $\mathcal{D}'(X)$ в $\mathcal{E}(X)$ непрерывно. Воспользуемся тем, что отображение $\lambda: f \mapsto \tilde{f}$ является изоморфизмом топологических векторных пространств $\mathcal{D}'(X)$ на $\mathcal{D}'_H(G) \subseteq \mathcal{D}'(G)$ и $\mathcal{E}(X)$ на $\mathcal{E}_H(G) \subseteq \mathcal{E}(G)$. Легко видеть, что $\lambda(\varphi * f)$ совпадает со сверткой функций $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ и $\tilde{f} \in \mathcal{D}'(G)$ на группе G . Из свойств свертки известно, что свертка функции из $\mathcal{D}(G)$ и обобщенной функции из $\mathcal{D}'(G)$ есть функция из класса $\mathcal{E}(G)$, поэтому $\lambda(\varphi * f) \in \mathcal{E}_H(G)$ и, следовательно, $\varphi * f \in \mathcal{E}(X)$. Непрерывность отображения $f \mapsto \varphi * f$ из $\mathcal{D}'(X)$ в $\mathcal{E}(X)$ также следует из свойств свертки.

Из предложения 2.1 вытекает, что инвариантные подпространства в произвольном функциональном пространстве $\mathcal{F}$ типа 1 и в пространстве $\mathcal{E}(X)$ находятся во взаимно однозначном соответствии.

Пространства $C_{(\nu)}(X)$ и $C_{(\nu)}^m(X)$ определены в § 1. Проверим, что эти пространства τ -инвариантны. Для $x = (x_0, x_1, x_2) \in X$ число $|x|$ определено формулой (1.8). Если $g = (t, u) \in G$, $t \in \mathbb{R}$, $u = (u_{ij}) \in \text{SO}_0(1, 2)$, то определим число

$$|g| := |t| + \ln u_{00}. \quad (2.10)$$

Так как $u_{00} \geq 1$, то $\ln u_{00} \geq 0$ и $|g| \geq 0$. Проверим, что справедливы неравенства

$$|xg| \leq \ln 2 + |x| + |g|, \quad x \in X, \quad g \in G, \quad (2.11)$$

$$|g_1 g_2| \leq \ln 2 + |g_1| + |g_2|, \quad g_1, g_2 \in G. \quad (2.12)$$

Если $x = (x_0, x_1, x_2)$, $g = (t, u)$, $u = (u_{ij})$, $0 \leq i, j \leq 2$, то

$$\begin{aligned} (xg)_0 &= e^t(x_0 u_{00} + x_1 u_{10} + x_2 u_{20}) \leq e^t(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)^{1/2}(u_{00}^2 + u_{10}^2 + u_{20}^2)^{1/2} \\ &\leq e^t(2x_0^2)^{1/2}(2u_{00}^2)^{1/2} = e^t 2x_0 u_{00}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

При этом использовано неравенство Коши–Буняковского и соотношения

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad u_{00}^2 - u_{10}^2 - u_{20}^2 = 1.$$

Из (2.13) вытекает, что

$$|xg| = |\ln(xg)_0| \leq \ln 2 + |\ln x_0| + |t| + \ln u_{00} = \ln 2 + |x| + |g|,$$

что доказывает неравенство (2.11). Неравенство (2.12) доказывается аналогично.

Отметим еще, что

$$|g^{-1}| = |g|, \quad g \in G, \quad (2.14)$$

и $|g| = 0$ тогда и только тогда, когда $g \in K$, где K – подгруппа в группе G , определенная в (1.12). Если в неравенство (2.11) подставить xg вместо x и g^{-1} вместо g , то с учетом (2.14) получим

$$|x| \leq \ln 2 + |xg| + |g|. \quad (2.15)$$

Из (2.11) и (2.15) вытекает неравенство

$$||xg| - |x|| \leq \ln 2 + |g|. \quad (2.16)$$

Пусть $f \in C_{(\nu)}(X)$, тогда

$$|f(x)|e^{-\nu|x|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

Из (2.16) легко получить неравенство

$$e^{-\nu|x|} \leq A(g, \nu)e^{-\nu|xg|}, \quad x \in X, \quad g \in G, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad (2.18)$$

где

$$A(g, \nu) = e^{|\nu|(\ln 2 + |g|)}. \quad (2.19)$$

Из (2.17) и (2.18) следует, что

$$|f(xg)|e^{-\nu|x|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty,$$

поэтому $\tau(g)f \in C_{(\nu)}(X)$. Отметим также, что из (2.18) вытекает, что

$$\|\tau(g)f\|_{(\nu)} \leq A(g, \nu)\|f\|_{(\nu)}, \quad f \in C_{(\nu)}(X), \quad (2.20)$$

где $\|\cdot\|_{(\nu)}$ – норма в пространстве $C_{(\nu)}(X)$ (см. (1.10)).

Чтобы доказать, что $\tau(g)f$ непрерывно зависит от g в пространстве $C_{(\nu)}(X)$ достаточно доказать, что

$$\|\tau(g)f - f\|_{(\nu)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad g \rightarrow e, \quad (2.21)$$

e – единичный элемент группы G . Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Выберем число $R > 0$ так, чтобы при $|x| > R/2$ выполнялось неравенство

$$|f(x)|e^{-\nu|x|} < \frac{1}{3}\varepsilon e^{-|\nu|} \quad (2.22)$$

(это возможно по (2.17)). Так как $B_R := \{x : |x| \leq R\}$ является компактным подмножеством в X , то существует окрестность единицы U в группе G такая, что

$$|f(gx) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon e^{-|\nu|R} \quad (2.23)$$

при всех $x \in B_R$, $g \in U$. Так как $|e| = 0$, то можно выбрать окрестность U так, чтобы дополнительно выполнялись условия

$$|g| < 1 - \ln 2 \quad \text{при } g \in U, \quad (2.24)$$

$$|xg| \geq \frac{R}{2} \quad \text{при } |x| > R \text{ и } g \in U. \quad (2.25)$$

Из (2.23) вытекает, что

$$|f(xg) - f(x)|e^{-\nu|x|} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при } |x| \leq R, \quad g \in U. \quad (2.26)$$

Из (2.18), (2.19), (2.22), (2.24) и (2.25) следует, что при $|x| > R$, $g \in U$ справедливы неравенства

$$|f(xg)|e^{-\nu|x|} \leq e^{|\nu|(\ln 2 + |g|)}|f(xg)|e^{-\nu|xg|} \leq e^{|\nu|}\frac{1}{3}\varepsilon e^{-|\nu|} = \frac{1}{3}\varepsilon,$$

откуда

$$|f(xg) - f(x)|e^{-\nu|x|} \leq |f(xg)|e^{-\nu|x|} + |f(x)|e^{-\nu|x|} \leq \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon e^{-|\nu|} \leq \frac{2}{3}\varepsilon. \quad (2.27)$$

Окончательно, из (2.26) и (2.27) получаем, что при $g \in U$

$$\begin{aligned} \|\tau(g)f - f\|_{(\nu)} &\leq \sup_{|x| \leq R} |f(xg) - f(x)|e^{-\nu|x|} + \sup_{|x| > R} |f(xg) - f(x)|e^{-\nu|x|} \\ &< \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

что доказывает (2.21).

Тем самым доказано, что пространство $C_{(\nu)}(X)$ является τ -инвариантным функциональным пространством. Аналогично доказывается, что τ -инвариантным функциональным пространством являются пространства $C_{(\nu)}^m(X)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \in \mathbb{R}$. Из τ -инвариантности пространств $C_{(\nu)}^m(X)$ и из определения топологии в пространствах $C_{(\nu)}^\infty(X)$, $\mathcal{S}_*(X)$, $\mathcal{E}_*(X)$, $\mathcal{S}'_*(X)$ вытекает, что эти пространства также являются τ -инвариантными функциональными пространствами.

Если $\mathcal{F}$ – любое функциональное пространство типа 2 (т.е. $\mathcal{E}_*(X) \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}'_*(X)$), то пара пространств $V_0 = \mathcal{E}_*(X)$ и $V = \mathcal{F}$ удовлетворяет условиям предложения 2.1. Условия 1) и 2) очевидны, а для проверки условия 3) достаточно показать, что для любых $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, $f \in \mathcal{S}'_*(X)$ функция $\varphi * f$ принадлежит пространству $\mathcal{E}_*(X)$ и непрерывно зависит от f . Это доказывается аналогично тому, как в теории обобщенных функций доказывается, что свертка обобщенной функции медленного роста и основной функции является функцией класса C^∞ , растущей вместе со всеми производными не быстрее некоторого полинома (см., например, [26; гл. I, п. 6]). Из предложения 2.1

вытекает, что между инвариантными подпространствами в функциональных пространствах $\mathcal{E}_*(X)$ и $\mathcal{F}$ имеется взаимно однозначное соответствие.

Приведем примеры функциональных пространств типа 2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $k > 0$. Обозначим через $L_k^p(X)$ множество всех измеримых функций $f(x)$ на X , для которых

$$\mathfrak{n}_{p,k}(f) := \left(\int_X |f(x)|^p e^{-k|x|} dx \right)^{1/p} < \infty \quad (2.28)$$

(во всех функциональных пространствах, не состоящих из непрерывных функций, функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры нуль).

Пространство $L_k^p(X)$ является банаховым пространством относительно нормы $\mathfrak{n}_{p,k}$. Пространство

$$L_*^p(X) := \bigcup_{k>0} L_k^p(X)$$

снабдим топологией индуктивного предела банаховых пространств $L_k^p(X)$.

Проверим, что из $f \in L_k^p(X)$ следует $\tau(g)f \in L_k^p(X)$ для любого $g \in G$. Действительно, используя неравенство (2.18) и инвариантность меры dx , получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_{p,k}(\tau(g)f) &= \left(\int_X |f(xg)|^p e^{-k|x|} dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_X A(g,k) |f(xg)|^p e^{-k|xg|} dx \right)^{1/p} = (A(g,k))^{1/p} \mathfrak{n}_{p,k}(f) < \infty. \end{aligned}$$

Легко также проверить, что отображение $g \mapsto \tau(g)f$ из G в $L_k^p(X)$ непрерывно, т.е. $L_k^p(X)$ и $L_*^p(X)$ являются τ -инвариантными функциональными пространствами.

Пространство $L_*^p(X)$ является функциональным пространством типа 2, т.е. $\mathcal{E}_*(X) \subseteq L_*^p(X) \subseteq \mathcal{S}'_*(X)$, причем вложения непрерывны (вложение $L_*^p(X) \subseteq \mathcal{S}'_*(X)$ задается формулой (1.6)).

Приведем необходимые для дальнейшего сведения из теории представлений групп Ли (см. [27]–[30]). Временно пусть G – произвольная связная группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, K – компактная подгруппа в группе G , $T: G \mapsto GL(\mathcal{F})$ – непрерывное представление группы G в полном локально выпуклом пространстве $\mathcal{F}$.

Вектор $v \in \mathcal{F}$ называется *гладким (аналитическим)*, если отображение $g \mapsto T(g)v$ из G в $\mathcal{F}$ бесконечно дифференцируемое (соответственно аналитическое). Пусть $\mathcal{F}_\infty$ – множество гладких векторов пространства $\mathcal{F}$. На пространстве $\mathcal{F}_\infty$ определено действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которое задается формулой

$$\xi v := \frac{d}{ds} T(\exp(s\xi))v \Big|_{s=0}, \quad v \in \mathcal{F}_\infty, \quad \xi \in \mathfrak{g}, \quad (2.29)$$

где $\exp: \mathfrak{g} \mapsto G$ – экспоненциальное отображение.

Вектор $v \in \mathcal{F}$ называется K -финитным, если линейная оболочка векторов $T(u)v$ при $u \in K$ конечномерна. Пусть $\mathcal{F}_\sigma$ – множество всех гладких K -финитных векторов, а $\mathcal{F}_\#$ – множество всех аналитических K -финитных

векторов пространства $\mathcal{F}$. Множества $\mathcal{F}_\sigma$ и $\mathcal{F}_\#$ являются линейными подпространствами (вообще говоря не замкнутыми) пространства $\mathcal{F}$. Эти подпространства $\mathfrak{g}$ -инвариантны, т.е. инвариантны относительно действия (2.29) алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а также K -инвариантны, т.е.

$$T(u)(\mathcal{F}_\sigma) \subseteq \mathcal{F}_\sigma, \quad T(u)(\mathcal{F}_\#) \subseteq \mathcal{F}_\# \quad \forall u \in K.$$

Если H – замкнутое линейное T -инвариантное подпространство пространства $\mathcal{F}$, то подпространства $H_\sigma := H \cap \mathcal{F}_\sigma$ и $H_\# := H \cap \mathcal{F}_\#$ являются $\mathfrak{g}$ -инвариантными и K -инвариантными подпространствами в $\mathcal{F}_\sigma$ и $\mathcal{F}_\#$ соответственно. Подпространство H_σ плотно в H . Если $\mathcal{F}$ – банахово пространство, то и подпространство $H_\#$ плотно в H (см. [30; гл. 4, § 4]), но в общем случае, когда $\mathcal{F}$ – полное локально выпуклое пространство, $H_\#$ может и не быть плотным в H . Отметим также, что если W – произвольное $\mathfrak{g}$ -инвариантное линейное подпространство в $\mathcal{F}_\#$, то его замыкание $[W]$ будет T -инвариантным подпространством в $\mathcal{F}$.

Обозначим через Λ множество классов эквивалентности неприводимых конечномерных представлений группы K . Для $\lambda \in \Lambda$ пусть $\rho^\lambda: K \mapsto GL(E^\lambda)$ – соответствующее неприводимое конечномерное представление группы K , E^λ – пространство представления. Если $\rho: K \mapsto GL(V)$ – произвольное представление группы K в пространстве V , то через $V^{(\lambda)}$ обозначим максимальное K -инвариантное линейное подпространство в V , представление в котором кратно ρ^λ . В частности, используя в качестве ρ ограничение представления T на подгруппу K , получаем подпространства $\mathcal{F}^{(\lambda)} \subseteq \mathcal{F}$. Подпространства $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ являются замкнутыми и K -инвариантными подпространствами пространства $\mathcal{F}$. Пусть

$$\mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)} := \mathcal{F}^{(\lambda)} \cap \mathcal{F}_\sigma, \quad \mathcal{F}_\#^{(\lambda)} := \mathcal{F}^{(\lambda)} \cap \mathcal{F}_\#. \quad (2.30)$$

Для любого замкнутого T -инвариантного подпространства $H \subseteq \mathcal{F}$ полагаем

$$H^{(\lambda)} := H \cap \mathcal{F}^{(\lambda)}, \quad H_\sigma^{(\lambda)} := H \cap \mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}, \quad H_\#^{(\lambda)} := H \cap \mathcal{F}_\#^{(\lambda)}. \quad (2.31)$$

Тогда подпространства H_σ и $H_\#$ раскладываются в алгебраическую прямую сумму

$$H_\sigma = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_\sigma^{(\lambda)}, \quad H_\# = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_\#^{(\lambda)},$$

а так как H_σ плотно в H и $H_\sigma^{(\lambda)} \subseteq H^{(\lambda)}$, то H совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ суммы подпространств $H^{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda$.

Вернемся к случаю, когда $G = \mathbb{R} \oplus \mathrm{SO}_0(1, 2)$, X – верхняя пола светового конуса, $\mathcal{F}$ – функциональное пространство типа 1 или типа 2, $T = \tau$ – квазирегулярное представление группы G в пространстве $\mathcal{F}$. Компактная подгруппа K определена в (1.12). В этом случае множество Λ отождествляется с $\mathbb{Z}$, все неприводимые представления группы K одномерны и задаются формулами $\rho^n(k(\theta)) := e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ пространство $\mathcal{F}^{(n)}$ состоит из всех функций $f(x) \in \mathcal{F}$, удовлетворяющих условию

$$f(xk(\theta)) = e^{in\theta} f(x) \quad \forall k(\theta) \in K. \quad (2.32)$$

Пусть H – инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$. Как и ранее определяются подпространства $\mathcal{F}_\sigma$, $\mathcal{F}_\#$, H_σ и $H_\#$. Подпространства $\mathcal{F}_\sigma^{(n)}$, $\mathcal{F}_\#^{(n)}$, $H^{(n)}$, $H_\sigma^{(n)}$ и $H_\#^{(n)}$ определяются формулами (2.30) и (2.31) с заменой λ на n .

Инвариантная мера на группе K задается формулой

$$\int_K f(k) dk = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(k(\theta)) d\theta. \quad (2.33)$$

Оператор проектирования пространства $\mathcal{F}$ на подпространство $\mathcal{F}^{(n)}$ имеет вид

$$\pi_n: f \mapsto \int_K e^{-in\theta} \tau(k) f dk, \quad k = k(\theta), \quad (2.34)$$

где интеграл в правой части понимается как интеграл Римана от вектор-функции со значениями в локально выпуклом пространстве $\mathcal{F}$. Легко видеть, что

$$\pi_n(\mathcal{F}_\sigma) = \mathcal{F}_\sigma^{(n)}, \quad \pi_n(\mathcal{F}_\#) = \mathcal{F}_\#^{(n)}. \quad (2.35)$$

Если H – инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$, то $\pi_n(H) = H^{(n)}$, $\pi_n(H_\sigma) = H_\sigma^{(n)}$, $\pi_n(H_\#) = H_\#^{(n)}$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}$ – функциональные пространства одного типа, причем $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ (вложение непрерывное). Пусть H_0 – произвольное инвариантное подпространство в $\mathcal{F}_0$, а $H = [H_0]$ – его замыкание в $\mathcal{F}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$

$$H^{(n)} = [H_0^{(n)}], \quad (2.36)$$

где $[H_0^{(n)}]$ – замыкание $H_0^{(n)}$ в пространстве $\mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $[H_0^{(n)}] \subseteq H^{(n)}$. Докажем обратное включение. Пусть $f \in H^{(n)}$. Так как $H^{(n)} \subseteq H = [H_0]$, то существует направленность $\{f_\alpha\}$ (α пробегает некоторое направленное множество) такая, что $f_\alpha \in H_0$ и $f_\alpha \rightarrow f$ в пространстве $\mathcal{F}$. Так как оператор проектирования π_n непрерывен в $\mathcal{F}$, то $\pi_n(f_\alpha) \rightarrow \pi_n(f) = f$, а так как π_n переводит H_0 в $H_0^{(n)}$, то $\pi_n(f_\alpha) \in H_0^{(n)}$. Следовательно $f \in [H_0^{(n)}]$, откуда вытекает включение $H^{(n)} \subseteq [H_0^{(n)}]$.

Определение инвариантных ячеек в пространстве $\mathcal{F}^{(n)}$ дано в § 1 (см. определение 1.3). Пусть $s(\mathcal{F}^{(n)})$ – множество всех инвариантных ячеек в пространстве $\mathcal{F}^{(n)}$. Если выполняются условия леммы 2.1 и $H_0^{(n)} \in s(\mathcal{F}_0^{(n)})$, то из леммы 2.1 вытекает, что $[H_0^{(n)}] \in s(\mathcal{F}^{(n)})$. Определим отображения $\alpha: s(\mathcal{F}_0^{(n)}) \mapsto s(\mathcal{F}^{(n)})$ и $\beta: s(\mathcal{F}^{(n)}) \mapsto s(\mathcal{F}_0^{(n)})$ формулами

$$\alpha(H_0^{(n)}) := [H_0^{(n)}], \quad \beta(H^{(n)}) := H^{(n)} \cap \mathcal{F}_0,$$

где $H_0^{(n)} \in s(\mathcal{F}_0^{(n)})$, $H^{(n)} \in s(\mathcal{F}^{(n)})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть выполняются условия леммы 2.1, тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$ отображения α и β являются взаимно обратными биективными отображениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H_0^{(n)}$ – инвариантная ячейка в $\mathcal{F}_0^{(n)}$, соответствующая инвариантному подпространству $H_0 \subseteq \mathcal{F}_0$, тогда согласно лемме 2.1

$H^{(n)} = \alpha(H_0^{(n)})$ – инвариантная ячейка, соответствующая инвариантному подпространству $H = [H_0] \subseteq \mathcal{F}$. По предложению 2.1 $H \cap \mathcal{F}_0 = H_0$, поэтому

$$H^{(n)} \cap \mathcal{F}_0^{(n)} = (H \cap \mathcal{F}_0) \cap \mathcal{F}_0^{(n)} = H_0 \cap \mathcal{F}_0^{(n)} = H_0^{(n)},$$

следовательно, $\beta(\alpha(H_0^{(n)})) = H_0^{(n)}$, т.е. $\beta \circ \alpha$ есть тождественное отображение множества $s(\mathcal{F}_0^{(n)})$ в себя.

Теперь пусть $H^{(n)}$ – произвольная инвариантная ячейка в $\mathcal{F}^{(n)}$, соответствующая инвариантному подпространству $H \subseteq \mathcal{F}$. Пусть инвариантное подпространство $H_0 = H \cap \mathcal{F}_0$ и $H_0^{(n)}$ – соответствующая ему ячейка в $\mathcal{F}_0^{(n)}$, тогда

$$H_0^{(n)} = H_0 \cap \mathcal{F}_0^{(n)} = H \cap \mathcal{F}_0^{(n)} = (H \cap \mathcal{F}^{(n)}) \cap \mathcal{F}_0^{(n)} = H^{(n)} \cap \mathcal{F}_0^{(n)}.$$

По предложению 2.1 $[H_0] = H$, откуда по лемме 2.1 $[H_0^{(n)}] = H^{(n)}$, т.е.

$$\alpha(\beta(H^{(n)})) = H^{(n)}.$$

Следовательно $\alpha \circ \beta$ является тождественным отображением множества $s(\mathcal{F}^{(n)})$ в себя.

В следующем предложении дается внутреннее описание инвариантных ячеек в $\mathcal{F}^{(n)}$. Определим операторы $A_n(g)$, $n \in \mathbb{Z}$, $g \in G$, в пространстве $\mathcal{F}$ формулой

$$A_n(g)f := \pi_n(\tau(g)f), \quad f \in \mathcal{F}. \quad (2.37)$$

Очевидно, что $A_n(g)$ являются непрерывными операторами в пространстве $\mathcal{F}$ и $A_n(g)(\mathcal{F}^{(n)}) \subseteq \mathcal{F}^{(n)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Замкнутое линейное подпространство $U \subseteq \mathcal{F}^{(n)}$ является инвариантной ячейкой тогда и только тогда, когда*

$$A_n(g)(U) \subseteq U \quad \forall g \in G. \quad (2.38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $U = H^{(n)}$ для некоторого инвариантного подпространства $H \subseteq \mathcal{F}$, то (2.38) очевидно.

Обратно, пусть U – замкнутое линейное подпространство в $\mathcal{F}^{(n)}$ и выполняется условие (2.38). Обозначим через H замыкание линейной оболочки всех функций вида $\tau(g)f$, $f \in U$, $g \in G$. Очевидно, что H является инвариантным подпространством в $\mathcal{F}$. Так как $\pi_n(\tau(g)f) = A_n(g)f \in U$ для всех $f \in U$, $g \in G$, то $H^{(n)} = \pi_n(H) = U$, т.е. U является инвариантной ячейкой, соответствующей инвариантному подпространству H .

Напомним, что для любых чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}$ подпространство $V_{\lambda,r}^{(n)} \subseteq \mathcal{E}^{(n)}(X)$ определено в (1.16). Из явного вида базиса в пространстве $V_{\lambda,r}^{(n)}$ (см. (1.17)) следует, что $V_{\lambda,r}^{(n)} \subseteq \mathcal{E}_*^{(n)}(X)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Подпространство $V_{\lambda,r}^{(n)}$ является инвариантной ячейкой в пространстве $\mathcal{F}^{(n)}$ для любого пространства $\mathcal{F}$ типа 1 или типа 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $V_{\lambda,r}^{(n)} \subseteq \mathcal{E}_*^{(n)}(X) \subseteq \mathcal{E}^{(n)}(X)$, то подпространство $V_{\lambda,r}^{(n)}$ содержится в $\mathcal{F}^{(n)}$ для любого пространства $\mathcal{F}$ типа 1 или типа 2. Так как пространство $V_{\lambda,r}^{(n)}$ конечномерно, то оно является замкнутым подпространством в $\mathcal{F}^{(n)}$. Из того, что оператор δ коммутирует с операторами $A_n(g)$ следует, что

$$A_n(g)(V_{\lambda,r}^{(n)}) \subseteq V_{\lambda,r}^{(n)},$$

поэтому, по предложению 2.3 $V_{\lambda,r}^{(n)}$ является инвариантной ячейкой в $\mathcal{F}^{(n)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $\mathcal{F}$ – функциональное пространство типа 1 или типа 2. Если теорема 1.2 справедлива для пространства $\mathcal{F}$, то она справедлива и для всех функциональных пространств того же типа, что и пространство $\mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для определенности предположим, что теорема 1.2 справедлива для функционального пространства $\mathcal{F}$ типа 1. Докажем, что теорема 1.2 будет справедлива и для функционального пространства $\mathcal{E}(X)$.

Пусть $H_0^{(n)}$ – произвольная инвариантная ячейка в пространстве $\mathcal{E}^{(n)}(X)$, причем $H_0^{(n)} \neq \mathcal{E}^{(n)}(X)$, и пусть $H^{(n)} = [H_0^{(n)}]_{\mathcal{F}}$ – замыкание ячейки $H_0^{(n)}$ в пространстве $\mathcal{F}$. По предложению 2.2 $H^{(n)}$ является инвариантной ячейкой в $\mathcal{F}^{(n)}$ и $H^{(n)} \neq \mathcal{F}^{(n)}$. Так как теорема 1.2 справедлива для пространства $\mathcal{F}$, то ячейка $H^{(n)}$ имеет вид

$$H^{(n)} = \left[\sum_{\lambda \in \sigma} V_{\lambda, r_\lambda} \right]_{\mathcal{F}},$$

где σ – спектр ячейки $H^{(n)}$. Обозначим

$$W = \left[\sum_{\lambda \in \sigma} V_{\lambda, r_\lambda} \right]_{\mathcal{E}(X)}.$$

Так как каждое подпространство V_{λ, r_λ} является инвариантной ячейкой в $\mathcal{E}^{(n)}(X)$ (следствие 2.1), то и подпространство W будет инвариантной ячейкой в $\mathcal{E}^{(n)}(X)$. Так как $[W]_{\mathcal{F}} = H^{(n)} = [H_0^{(n)}]_{\mathcal{F}}$, то из предложения 2.2 следует, что $W = H_0^{(n)}$, т.е. теорема 1.2 справедлива для пространства $\mathcal{E}(X)$, причем спектры ячеек $H_0^{(n)}$ и $H^{(n)} = [H_0^{(n)}]_{\mathcal{F}}$ совпадают.

2) Докажем теперь, что теорема 1.2 справедлива для произвольного функционального пространства $\mathcal{F}_1$ типа 1.

Пусть $H^{(n)}$ – инвариантная ячейка в пространстве $\mathcal{F}_1^{(n)}$, причем $H^{(n)} \neq \mathcal{F}_1^{(n)}$. Положим $H_0^{(n)} := H^{(n)} \cap \mathcal{E}^{(n)}(X)$. Тогда $H_0^{(n)}$ – инвариантная ячейка в $\mathcal{E}^{(n)}(X)$, и поскольку теорема 1.2 справедлива в пространстве $\mathcal{E}(X)$,

$$H_0^{(n)} = \left[\sum_{\lambda \in \sigma} V_{\lambda, r_\lambda} \right]_{\mathcal{E}(X)},$$

где σ – спектр ячейки $H_0^{(n)}$. По предложению 2.2 $[H_0^{(n)}]_{\mathcal{F}_1} = H^{(n)}$, поэтому

$$H^{(n)} = \left[\sum_{\lambda \in \sigma} V_{\lambda, r_\lambda} \right]_{\mathcal{F}_1}.$$

Следовательно, теорема 1.2 справедлива для пространства $\mathcal{F}_1$, причем спектры инвариантных ячеек $H^{(n)} \subseteq \mathcal{F}_1^{(n)}$ и $H_0^{(n)} = H^{(n)} \cap \mathcal{E}^{(n)}(X) \subseteq \mathcal{E}^{(n)}(X)$ совпадают.

Для случая, когда $\mathcal{F}$ – функциональное пространство типа 2, предложение 2.4 доказывается аналогично, только в доказательстве необходимо всюду заменить пространство $\mathcal{E}(X)$ на $\mathcal{E}_*(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть $\mathcal{F}$ – функциональное пространство типа 1 или типа 2. Если теорема 1.3 справедлива для пространства $\mathcal{F}$, то эта теорема справедлива и для всех функциональных пространств того же типа, что и пространство $\mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}$ – функциональные пространства одного типа, причем $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ (вложение непрерывное). По предложению 2.1 между инвариантными подпространствами в $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}$ имеется взаимно однозначное соответствие. Пусть $H_0 \subseteq \mathcal{F}_0$ и $H \subseteq \mathcal{F}$ – соответствующие друг другу инвариантные подпространства, тогда $[H_0]_{\mathcal{F}} = H$ и $H \cap \mathcal{F}_0 = H_0$. Пусть $H_0^{(n)}$ и $H^{(n)}$ – ячейки инвариантных подпространств H_0 и H . По предложению 2.2 $[H_0^{(n)}]_{\mathcal{F}} = H^{(n)}$ и $H^{(n)} \cap \mathcal{F}_0^{(n)} = H_0^{(n)}$, откуда следует, что спектры ячеек $H_0^{(n)}$ и $H^{(n)}$ совпадают. Из совпадения спектров ячеек $H_0^{(n)}$ и $H^{(n)}$ легко получить, что теорема 1.3 справедлива для пространства $\mathcal{F}_0$ тогда и только тогда, когда она справедлива для пространства $\mathcal{F}$.

Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_1$ – функциональные пространства одного типа, то существует пространство $\mathcal{F}_0$ того же типа такое, что $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1$ (вложения непрерывны). В качестве пространства $\mathcal{F}_0$ можно взять $\mathcal{E}(X)$, если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_1$ – пространства типа 1, и $\mathcal{E}_*(X)$, если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_1$ – пространства типа 2. Если теорема 1.3 справедлива для пространства $\mathcal{F}$, то она будет справедлива и для пространства $\mathcal{F}_0$, а из справедливости для $\mathcal{F}_0$ вытекает справедливость теоремы 1.3 для пространства $\mathcal{F}_1$, что доказывает предложение 2.5.

Из предложений 2.4 и 2.5 вытекает, что теоремы 1.2 и 1.3 достаточно доказать для какого-нибудь пространства типа 1 и для какого-нибудь пространства типа 2. В следующем параграфе эти теоремы будут доказаны для пространства $C(X)$ типа 1 и пространства $C_*(X) = C^0(X)$ типа 2.

Приведем еще один результат, который будет использоваться при доказательстве теоремы 1.2. Для любого $k > 0$ обозначим через $L_k^2(\mathbb{R})$ банахово пространство, состоящее из всех измеримых функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$ (функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры нуль) для которых конечна норма

$$\|f\|_{2,k} := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 e^{-k|x|} dx \right)^{1/2}.$$

Пусть

$$L_*^2(\mathbb{R}) := \bigcup_{k>0} L_k^2(\mathbb{R}).$$

Пространство $L_*^2(\mathbb{R})$ снабжается топологией индуктивного предела банаховых пространств $L_k^2(\mathbb{R})$ и становится полным локально выпуклым пространством.

Через $C_k(\mathbb{R})$ обозначим множество всех непрерывных функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$|f(x)|e^{-k|x|} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (2.39)$$

Множество $C_k(\mathbb{R})$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{\infty, k} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| e^{-k|x|}. \quad (2.40)$$

Пространство

$$C_*(\mathbb{R}) := \bigcup_{k>0} C_k(\mathbb{R})$$

снабжается топологией индуктивного предела банаховых пространств $C_k(\mathbb{R})$ и становится полным локально выпуклым пространством.

Пусть $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ – одно из пространств $L_*^2(\mathbb{R})$ или $C_*(\mathbb{R})$. Замкнутое линейное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R})$ будем называть *инвариантным* подпространством, если оно инвариантно относительно сдвигов, т.е. из $f(x) \in H$ следует $f(x+a) \in H$ для любого $a \in \mathbb{R}$. В следующем предложении дается описание инвариантных подпространств в пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Как и в § 1 для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}$ пусть $V_{\lambda, r}$ – линейное подпространство, порожденное функциями (1.2). Очевидно, что $V_{\lambda, r} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

В [31] получено описание инвариантных подпространств в некоторых топологических векторных функциональных пространствах на $\mathbb{R}$. Среди этих пространств содержатся, в частности, пространства $C_*(\mathbb{R})$ и $L_*^2(\mathbb{R})$. Следующее предложение является частным случаем теоремы 1.1 из [31].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ – одно из пространств $L_*^2(\mathbb{R})$ или $C_*(\mathbb{R})$. Для любого инвариантного подпространства $H \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $H \neq \mathcal{F}(\mathbb{R})$, существует единственный конечный или счетный набор комплексных чисел σ (каждое число λ может входить в σ с конечной кратностью r_λ) такой, что H совпадает с замыканием в $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ суммы подпространств $V_{\lambda, r}$, где λ пробегает множество σ , $r = r_\lambda$. Множество σ будем называть спектром инвариантного подпространства H .

Для того чтобы конечный или счетный набор $\sigma \subset \mathbb{C}$ был спектром некоторого инвариантного подпространства в $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (S2) теоремы 1.2.

§ 3. Доказательства основных теорем

В группе $\mathrm{SO}_0(1, 2) \subset G$ определим 1-параметрические подгруппы

$$A := \left\{ a(t) := \begin{pmatrix} \mathrm{ch} t & \mathrm{sh} t & 0 \\ \mathrm{sh} t & \mathrm{ch} t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$N := \left\{ n(t) := \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} & t \\ -\frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & -t \\ t & t & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Две другие 1-параметрические подгруппы группы g определены в § 1: подгруппа растяжений $\Gamma = \{\gamma(t), t \in \mathbb{R}\}$ (см. (1.3)) и подгруппа $K = \{k(\theta), \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ (см. (1.12)).

Каждый элемент ξ из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G будем отождествлять с дифференциальным оператором на многообразии X , определенным формулой (1.7). В качестве базиса в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ возьмем следующие дифференциальные операторы $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$:

$$\begin{aligned}\xi_0 f(x) &:= \delta f(x) = \left. \frac{d}{ds} f(x\gamma(s)) \right|_{s=0}, & \xi_1 f(x) &:= \left. \frac{d}{d\theta} f(xk(\theta)) \right|_{\theta=0}, \\ \xi_2 f(x) &:= \left. \frac{d}{ds} f(xa(s)) \right|_{s=0}, & \xi_3 f(x) &:= \left. \frac{d}{ds} f(xn(s)) \right|_{s=0}.\end{aligned}$$

Пусть $p_0 = (1, 1, 0) \in X$. Отображение

$$(t, \varphi) \mapsto x = p_0 \gamma(t) k(\varphi) = (e^t, e^t \cos \varphi, -e^t \sin \varphi)$$

является диффеоморфизмом многообразия $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ ($\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) на многообразие X . Числа (t, φ) будем использовать в качестве параметров точки x на X . Легко видеть, что в параметрах (t, φ) дифференциальные операторы $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ имеют вид

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \partial_t, & \xi_1 &= \partial_\varphi, \\ \xi_2 &= (\cos \varphi) \partial_t - (\sin \varphi) \partial_\varphi, & \xi_3 &= (\sin \varphi) \partial_t + (\cos \varphi - 1) \partial_\varphi.\end{aligned}$$

Введем еще другой базис Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, который немного отличается от базиса $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$. Пусть $Y_j := \xi_j$ при $j = 0, 1, 2$ и

$$Y_3 := \xi_3 + \xi_1 = (\sin \varphi) \partial_t + (\cos \varphi) \partial_\varphi.$$

Определим также операторы

$$Y_+ := Y_2 + iY_3, \quad Y_- := Y_2 - iY_3.$$

Пусть $\mathcal{F}$ – произвольное функциональное пространство типа 1 или типа 2. Пространства $\mathcal{F}_\sigma$ и $\mathcal{F}_\#$ определены в § 1. Если H – инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$, то $H_\sigma := H \cap \mathcal{F}_\sigma$, $H_\# := H \cap \mathcal{F}_\#$. Если $\xi \in \mathfrak{g}$, то $\xi(H_\sigma) \subseteq H_\sigma$ и $\xi(H_\#) \subseteq H_\#$. Как в § 2, для любого $n \in \mathbb{Z}$ определяются пространства $\mathcal{F}^{(n)}$, $\mathcal{F}_\sigma^{(n)}$, $\mathcal{F}_\#^{(n)}$, $H^{(n)}$, $H_\sigma^{(n)}$, $H_\#^{(n)}$.

Любую функцию $f(x) \in \mathcal{F}_\sigma^{(n)}$ можно представить в виде

$$f(x) = e^{in\varphi} \tilde{f}(t), \tag{3.1}$$

где $x = p_0 \gamma(t) k(\varphi)$, $\tilde{f}(t) = f(p_0 \gamma(t)) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Из (3.1) вытекает, что

$$Y_0 f(x) = \delta f(x) = e^{in\varphi} \partial_t \tilde{f}(t), \tag{3.2}$$

$$Y_1 f(x) = in e^{in\varphi} \tilde{f}(t), \tag{3.3}$$

$$Y_+ f(x) = e^{i(n+1)\varphi} (\partial_t \tilde{f}(t) - n \tilde{f}(t)), \tag{3.4}$$

$$Y_- f(x) = e^{i(n-1)\varphi} (\partial_t \tilde{f}(t) + n \tilde{f}(t)), \tag{3.5}$$

откуда следует, что операторы Y_0 и Y_1 переводят пространства $\mathcal{F}_\sigma^{(n)}$ и $\mathcal{F}_\#^{(n)}$ в себя, а операторы Y_+ и Y_- переводят пространства $\mathcal{F}_\sigma^{(n)}$ и $\mathcal{F}_\#^{(n)}$ в $\mathcal{F}_\sigma^{(n\pm 1)}$ и $\mathcal{F}_\#^{(n\pm 1)}$ соответственно. Если $H^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, – инвариантные ячейки, соответствующие одному инвариантному подпространству $H \subseteq \mathcal{F}$, то операторы $Y_0 = \delta$ и Y_1 переводят $H_\sigma^{(n)}$ и $H_\#^{(n)}$ в себя, а операторы Y_+ и Y_- переводят $H_\sigma^{(n)}$ и $H_\#^{(n)}$ в $H_\sigma^{(n\pm 1)}$ и $H_\#^{(n\pm 1)}$ соответственно. Будем обозначать через $Y_+^{(n)}$ и $Y_-^{(n)}$ ограничения операторов Y_+ и Y_- на пространство $\mathcal{F}_\sigma^{(n)}$, тогда

$$Y_+^{(n)}: \mathcal{F}_\sigma^{(n)} \mapsto \mathcal{F}_\sigma^{(n+1)}, \quad Y_-^{(n)}: \mathcal{F}_\sigma^{(n)} \mapsto \mathcal{F}_\sigma^{(n-1)}.$$

Из явного вида операторов δ , $Y_+^{(n)}$, $Y_-^{(n)}$ (см. (3.2), (3.4), (3.5)) вытекают следующие соотношения:

$$\delta Y_\pm^{(n)} = Y_\pm^{(n)} \delta, \quad (3.6)$$

$$Y_-^{(n+1)} Y_+^{(n)} = \delta^2 + \delta - n(n+1)I, \quad (3.7)$$

$$Y_+^{(n-1)} Y_+^{(n)} = \delta^2 + \delta - n(n-1)I, \quad (3.8)$$

где I – тождественный оператор.

Если функция $f(x)$ принадлежит пространству $\mathcal{F}^{(n)}$, то ее можно представить в виде (3.1), где $x = p_0 \gamma(t) k(\varphi)$, $\tilde{f}(t) = f(p_0 \gamma(t))$ – функция на $\mathbb{R}$. Определим отображение

$$\alpha_n: f(x) \mapsto \tilde{f}(t)$$

из пространства $\mathcal{F}^{(n)}$ на некоторое функциональное пространство $\alpha_n(\mathcal{F}^{(n)})$, состоящее из функций на $\mathbb{R}$. В следующей лемме описывается образ $\alpha_n(\mathcal{F}^{(n)})$ для случаев, когда $\mathcal{F} = C(X)$ или $\mathcal{F} = C_*(X)$.

ЛЕММА 3.1. *Отображение α_n является изоморфизмом топологических векторных пространств $C(X)^{(n)}$ на $C(\mathbb{R})$ и $C_*(X)^{(n)}$ на $C_*(\mathbb{R})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как (t, φ) являются гладкими (и тем более непрерывными) параметрами на X , то функция $f(x) = e^{in\varphi} \tilde{f}(t)$ непрерывна на X тогда и только тогда, когда функция $\tilde{f}(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Поэтому α_n биективно отображает $C(X)^{(n)}$ на $C(\mathbb{R})$ и, как легко видеть, является изоморфизмом этих топологических векторных пространств.

Пусть $f(x) \in C(X)^{(n)}$. Заметим, что $|x| = |t|$ при $x = p_0 \gamma(t) k(\varphi) \in X$, где $|x|$ определяется формулой (1.8). Поэтому функция $f(x)$ удовлетворяет условию (1.9) тогда и только тогда, когда функция $\tilde{f}(t)$ удовлетворяет условию (2.39) и при этом

$$\|f\|_{(k)} = \|\tilde{f}\|_{\infty, k}.$$

Следовательно отображение α_n является изоморфизмом топологических векторных пространств $C_*(X)^{(n)}$ и $C_*(\mathbb{R})$.

ЛЕММА 3.2. *Функции из пространства $V_{\lambda, r}^{(n)}$ являются аналитическими векторами квазирегулярного представления τ в топологических векторных пространствах $C_*(X)$ и $C(X)$, т.е.*

$$V_{\lambda, r}^{(n)} \subseteq C_*(X)_\#^{(n)} \quad \text{и} \quad V_{\lambda, r}^{(n)} \subseteq C(X)_\#^{(n)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $C_*(X) \subset C(X)$ (вложение непрерывное), то достаточно показать, что $V_{\lambda,r}^{(n)} \subset C_*(X)_{\#}^{(n)}$. Базис в пространстве $V_{\lambda,r}^{(n)}$ образуют функции (1.17), которые можно также записать в виде

$$e_{\lambda,j}^{(n)}(x) := t^j e^{\lambda t} e^{in\varphi}, \quad j = 0, 1, \dots, r-1, \quad (3.9)$$

при $x = p_0\gamma(t)k(\varphi) \in X$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует на пространстве $C^\infty(X)$ по формуле (1.7) и это действие естественным образом продолжается до действия универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$. Будем обозначать это действие через af при $a \in U(\mathfrak{g})$, $f \in C^\infty(X)$. С другой стороны, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует на гладких функциях на группе G по формуле

$$(\mathfrak{R}_\xi \Phi)(g) := \left. \frac{d}{ds} \Phi(g \exp(s\xi)) \right|_{s=0}, \quad (3.10)$$

$\xi \in \mathfrak{g}$, $\Phi(g) \in C^\infty(G)$. Это действие также продолжается до действия универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$. Будем обозначать это действие $\mathfrak{R}_a \Phi$, $a \in U(\mathfrak{g})$, при этом

$$\mathfrak{R}_{ab} \Phi = \mathfrak{R}_a(\mathfrak{R}_b \Phi) \quad \forall a, b \in U(\mathfrak{g}).$$

Для любой функции $f \in C^\infty(X)$ определим функцию $\Phi_f(g) := \tau(g)f$. Функция Φ_f является гладкой (класса C^∞) функцией на группе G со значениями в топологическом векторном пространстве $C^\infty(X)$. Легко видеть, что справедливо равенство

$$\mathfrak{R}_a \Phi_f = \phi_{af} \quad \forall f \in C^\infty(X), \quad a \in U(\mathfrak{g}). \quad (3.11)$$

Определим следующий элемент $\Delta \in U(\mathfrak{g})$:

$$\Delta := \frac{1}{2}(Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 - Y_0), \quad (3.12)$$

где Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 – введенный ранее базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Если рассматривать Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 как дифференциальные операторы на X , то

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \quad f \in C^\infty(X), \quad x = p_0\gamma(t)k(\varphi). \quad (3.13)$$

Из (3.9) и (3.13) легко получить, что каждая функция $u(x) = e_{\lambda,j}^{(n)}(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\Delta - \lambda^2 + n^2)^j u = 0. \quad (3.14)$$

Возьмем произвольное число d , удовлетворяющее условию $d > |\lambda|$. Тогда все функции $e_{\lambda,j}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, принадлежат пространству $C_d^\infty(X)$ и, в частности, банахову пространству $C_d(X)$. Пусть $u(x) = e_{\lambda,j}^{(n)}(x)$. Рассмотрим функцию $\Phi_u(g) := \tau(g)u$ на группе G со значениями в банаховом пространстве $C_d(X)$. Из (3.11) и (3.14) вытекает, что

$$(\mathfrak{R}_\Delta - \lambda^2 + n^2)^j \Phi_u = \Phi_{(\Delta - \lambda^2 + n^2)^j u} = 0.$$

Оператор $\mathfrak{R}_\Delta$ является эллиптическим дифференциальным оператором на группе Ли G , поэтому функция Φ_u удовлетворяет эллиптическому дифференциальному уравнению

$$(\mathfrak{R}_\Delta - \lambda^2 + n^2)^j \Phi_u = 0.$$

Из теоремы регулярности для решений эллиптических дифференциальных уравнений (см., например, [32; приложения 4 и 5]) следует, что функция $\Phi_u(g)$ является аналитической функцией на многообразии G , т.е. функция $u(x)$ является аналитическим вектором представления τ в банаховом пространстве $C_d(X)$. Следовательно $u \in C_d(X)_\#^{(n)} \subset C_*(X)_\#^{(n)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Из предложения 2.4 вытекает, что теореме 1.2 достаточно доказать для пространств $C(X)$ и $C_*(X)$. Пусть $\mathcal{F}$ – одно из пространств $C(X)$ или $C_*(X)$, через $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ будем обозначать пространство $C(\mathbb{R})$ при $\mathcal{F} = C(X)$ и пространство $C_*(\mathbb{R})$ при $\mathcal{F} = C_*(X)$. По лемме 3.1 для любого $n \in \mathbb{Z}$ отображение α_n является изоморфизмом топологического векторного пространства $\mathcal{F}^{(n)}$ на $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Пусть $H^{(n)}$ – некоторая инвариантная ячейка в $\mathcal{F}^{(n)}$, не совпадающая со всем пространством $\mathcal{F}^{(n)}$. Если $f(x) \in H^{(n)}$, то $f(x\gamma(s)) \in H^{(n)}$ при любом $s \in \mathbb{R}$. Очевидно, что, если $\alpha_n(f(x)) = \tilde{f}(t)$, то $\alpha_n(f(x\gamma(s))) = \tilde{f}(t+s)$. Пусть $\tilde{H}^{(n)} = \alpha_n(H^{(n)})$, тогда $\tilde{H}^{(n)}$ является замкнутым линейным подпространством в $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, инвариантным относительно преобразований $\tilde{f}(t) \mapsto \tilde{f}(t+s)$ для любого $s \in \mathbb{R}$. По теореме 1.1 и предложению 2.6 пространство $\tilde{H}^{(n)}$ описывается своим спектром $\sigma \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющем условию (S1) при $\mathcal{F} = C(X)$ и условию (S2) при $\mathcal{F} = C_*(X)$, и при этом $\tilde{H}^{(n)}$ совпадает с замыканием в $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ суммы подпространств V_{λ, r_λ} , где λ пробегает σ , r_λ – кратность числа λ в σ . Так как $\alpha_n(V_{\lambda, r}^{(n)}) = V_{\lambda, n}$, то подпространство $H^{(n)}$ совпадает с замыканием в $\mathcal{F}^{(n)}$ суммы подпространств $V_{\lambda, r_\lambda}^{(n)}$. Тем самым доказан п. 1) теоремы 1.2.

Пусть σ – произвольный набор комплексных чисел, удовлетворяющий условию (S1) при $\mathcal{F} = C(X)$ или условию (S2) при $\mathcal{F} = C_*(X)$. Для доказательства пп. 2) и 3) теоремы 1.2 достаточно доказать, что найдется инвариантная ячейка $H^{(n)} \subset \mathcal{F}^{(n)}$, спектр которой совпадает с σ .

Пусть $\tilde{U}$ – замыкание в $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ суммы подпространств V_{λ, r_λ} , где λ пробегает множество σ , а r_λ – кратность числа λ в σ . По теореме 1.1 и предложению 2.6 $\tilde{U} \neq \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Пусть $U = \alpha_n^{-1}(\tilde{U})$. Тогда U является замкнутым линейным подпространством в $\mathcal{F}^{(n)}$, совпадающим с замыканием суммы подпространств $V_{\lambda, r_\lambda}^{(n)}$, $\lambda \in \sigma$. Так как каждое подпространство $V_{\lambda, r}^{(n)}$ является инвариантной ячейкой в $\mathcal{F}^{(n)}$ (следствие 2.1), то, по предложению 2.3, U также будет инвариантной ячейкой в $\mathcal{F}^{(n)}$. Спектр инвариантной ячейки U совпадает со спектром подпространства $\tilde{U} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$, т.е. совпадает с σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. 1) Из предложения 2.5 вытекает, что теореме 1.3 достаточно доказать для пространств $C(X)$ и $C_*(X)$. Далее пусть $\mathcal{F}$ – одно из пространств $C(X)$ или $C_*(X)$. Операторы

$$Y_\pm^{(n)}: \mathcal{F}_\#^{(n)} \mapsto \mathcal{F}_\#^{(n \pm 1)}, \quad \delta: \mathcal{F}_\#^{(n)} \mapsto \mathcal{F}_\#^{(n)} \quad (3.15)$$

задаются формулами (3.4), (3.5) и (3.2). Из этих формул и из явного вида базиса в пространстве $V_{\lambda,r}^{(n)}$ (см. (3.9)) легко получить, что для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}$ выполняются равенства

$$Y_+^{(n)}(V_{\lambda,r}^{(n)}) = \begin{cases} V_{\lambda,r}^{(n+1)} & \text{при } \lambda \neq n, \\ V_{\lambda,r-1}^{(n+1)} & \text{при } \lambda = n, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$Y_-^{(n)}(V_{\lambda,r}^{(n)}) = \begin{cases} V_{\lambda,r}^{(n-1)} & \text{при } \lambda \neq -n, \\ V_{\lambda,r-1}^{(n-1)} & \text{при } \lambda = -n. \end{cases} \quad (3.17)$$

При этом мы по определению полагаем, что $V_{\lambda,0}^{(n)} := \{0\}$.

2) Пусть H – инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$, $H^{(n)}$ – соответствующие ему ячейки, $H_{\#}^{(n)} = H^{(n)} \cap \mathcal{F}_{\#}^{(n)}$. Так как ячейки $H^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, соответствуют одному инвариантному подпространству, то $Y_{\pm}(H_{\#}^{(n)}) \subset H_{\#}^{(n \pm 1)}$ и $\delta(H_{\#}^{(n)}) \subset H_{\#}^{(n)}$. Пусть $\sigma(n)$ – спектр ячейки $H^{(n)}$ и пусть $r_{\lambda}^{(n)}$ – кратность числа λ в $\sigma(n)$. Число λ входит в $\sigma(n)$ с кратностью r тогда и только тогда, когда $V_{\lambda,r}^{(n)} \subseteq H^{(n)}$, а так как $V_{\lambda,r}^{(n)} \subset \mathcal{F}_{\#}^{(n)}$ (по лемме 3.2), то $V_{\lambda,r}^{(n)} \subseteq H_{\#}^{(n)}$.

Определим, как связаны кратности числа $\lambda \in \mathbb{C}$ в спектрах соседних ячеек $H^{(m)}$ и $H^{(m+1)}$, $m \in \mathbb{Z}$. Пусть r – кратность числа λ в $\sigma(m)$, s – кратность числа λ в $\sigma(m+1)$. Так как $Y_+^{(m)}(H_{\#}^{(m)}) \subseteq H_{\#}^{(m+1)}$, то $Y_+^{(m)}(V_{\lambda,m}^{(m)}) \subseteq V_{\lambda,s}^{(m+1)}$, откуда с учетом (3.16) вытекает, что $r \leq s$ при $\lambda \neq m$ и $r-1 \leq s$ при $\lambda = m$. Аналогично, так как $Y_-^{(m+1)}(H_{\#}^{(m+1)}) \subseteq H_{\#}^{(m)}$, то $Y_-^{(m+1)}(V_{\lambda,s}^{(m+1)}) \subseteq V_{\lambda,r}^{(m)}$, откуда с учетом (3.17) вытекает, что $s \leq r$ при $\lambda \neq -(m+1)$ и $s-1 \leq r$ при $\lambda = -(m+1)$. Эквивалентно можно сказать, что спектры $\sigma(m)$ и $\sigma(m+1)$ должны совпадать за исключением чисел m и $-(m+1)$, кратности которых могут отличаться: кратность $r_m^{(m+1)}$ может равняться $r_m^{(m)}$ или $r_m^{(m)} - 1$, кратность $r_{-m-1}^{(m+1)}$ может равняться $r_{-m-1}^{(m)}$ или $r_{-m-1}^{(m)} + 1$.

Из полученных условий на спектры соседних ячеек $H^{(m)}$ и $H^{(m+1)}$ вытекает, что при $\lambda \notin \mathbb{Z}$ кратности $r_{\lambda}^{(n)}$ числа λ в спектрах $\sigma(n)$ не зависят от n , а при $\lambda = k \in \mathbb{Z}$ кратности $r_k^{(n)}$ могут изменяться в зависимости от n , но так, чтобы выполнялись условия 2) и 3) теоремы 1.3. Тем самым доказана необходимость условий 1), 2) и 3) теоремы 1.3.

3) Пусть в каждом подпространстве $\mathcal{F}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, задана инвариантная ячейка U_n , которая описывается спектром $\sigma(n)$. Предположим, что для спектров $\sigma(n)$ выполняются условия 1), 2) и 3) теоремы 1.3. Докажем, что найдется единое инвариантное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$, которому соответствуют все ячейки U_n (т.е. $U_n = H \cap \mathcal{F}^{(n)}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$).

В каждой ячейке U_n возьмем сумму (без замыкания) всех подпространств $V_{\lambda,r}^{(n)}$, где λ пробегает спектр $\sigma(n)$, а r – кратность числа λ в этом спектре. Обозначим это линейное подпространство W_n . Так как $V_{\lambda,r}^{(n)} \subseteq \mathcal{F}_{\#}^{(n)}$ (лемма 3.2), то $W_n \subseteq \mathcal{F}_{\#}^{(n)}$. Пусть

$$W = \sum_{n \in \mathbb{Z}} W_n,$$

тогда W является линейным подпространством в $\mathcal{F}_\#$. Так как выполнены условия 1), 2), 3) теоремы 1.3, то из равенств (3.16) и (3.17), а также из того, что $\delta(V_{\lambda,r}^{(n)}) \subseteq V_{\lambda,r}^{(n)}$, вытекает, что

$$Y_+^{(n)}(W_n) \subseteq W_{n+1}, \quad Y_-^{(n)}(W_n) \subseteq W_{n-1} \quad (3.18)$$

для любого $n \in \mathbb{Z}$.

Из (3.18), с учетом того, что операторы $Y_\pm^{(n)}$ представляют собой ограничения операторов $Y_\pm$ на $\mathcal{F}_\#^{(n)}$, вытекает, что $Y_+(W) \subseteq W$ и $Y_-(W) \subseteq W$. Кроме того, $Y_0(W) = \delta(W) \subseteq W$ и из формулы (3.3) вытекает, что $Y_1(W) \subseteq W$. Так как базисные векторы X_0, X_1, X_2, X_3 алгебры Ли $\mathfrak{g}$ являются линейными комбинациями векторов Y_0, Y_1, Y_+, Y_- , то

$$X(W) \subseteq W \quad \forall X \in \mathfrak{g}. \quad (3.19)$$

Пусть $H = [W]$ – замыкание W в пространстве $\mathcal{F}$. Из того, что $W \subseteq \mathcal{F}_\#$ и из (3.19) следует, что H является инвариантным подпространством в $\mathcal{F}$. Докажем, что U_n совпадает с ячейкой $H^{(n)}$ пространства H .

Заметим, что $H^{(n)} = \pi_n(H)$, где π_n – оператор проектирования пространства $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}^{(n)}$ (см. (2.34)). Так как $U_n \subseteq H$, то $U_n = \pi_n(U_n) \subseteq H^{(n)}$. С другой стороны, пусть $f \in H^{(n)}$. Так как, в частности, $f \in H$, то найдется направленность $\{f_\alpha\} \subset W$ такая, что $f_\alpha \rightarrow f$ в пространстве $\mathcal{F}$. Если $f_\alpha \in W$, то $\pi_n(f_\alpha) \in W_n \subseteq U_n$. Из непрерывности проектора π_n вытекает, что $\pi_n(f_\alpha) \rightarrow \pi_n(f) = f$, а так как U_n – замкнутое подпространство в $\mathcal{F}$, то $f \in U_n$, т.е. $H^{(n)} \subseteq U_n$. Тем самым доказано, что $U_n = H^{(n)}$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, т.е. ячейки U_n соответствуют одному инвариантному подпространству.

Список литературы

- [1] C. A. Berenstein, “Spectral synthesis on symmetric spaces”, *Integral geometry* (Brunswick, Maine, 1984), *Contemp. Math.*, **63**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 1–25.
- [2] C. A. Berenstein, R. Gay, “Sur la synthèse spectrale dans les espaces symétriques”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **65**:3 (1986), 323–333.
- [3] A. Wawrzyńczyk, “Spectral analysis and synthesis on symmetric spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, **127**:1 (1987), 1–17.
- [4] L. Schwartz, “Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques”, *Ann. of Math.* (2), **48** (1947), 857–929.
- [5] Д. И. Гуревич, “Контрпримеры к проблеме Л. Шварца”, *Функци. анализ и его прил.*, **9**:2 (1975), 29–35; англ. пер.: D. I. Gurevich, “Counterexamples to a problem of L. Schwartz”, *Funct. Anal. Appl.*, **9**:2 (1975), 116–120.
- [6] B. Malgrange, “Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution”, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **6** (1956), 271–355.
- [7] L. Ehrenpreis, *Fourier analysis in several complex variables*, Wiley, New York–London–Sydney, 1970.
- [8] В. П. Паламо́дов, *Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами*, “Наука”, М., 1967; англ. пер.: V. P. Palamodov, *Linear differential operators with constant coefficients*, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1970.

- [9] S. S. Platonov, "Invariant subspaces in certain function spaces on Euclidean space", *Math. Scand.*, **76**:1 (1995), 115–138.
- [10] С. С. Платонов, "Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на евклидовом пространстве", Тр. Петрозаводского гос. ун-та. Сер. матем., **2**, Изд-во ПетрГУ, Петрозаводск, 1995, 92–112; англ. пер.: S. S. Platonov, "Invariant subspaces in certain function spaces on Euclidean space", *Math. Scand.*, **76**:1 (1995), 115–138.
- [11] С. С. Платонов, "Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах полиномиального роста на $\mathbb{R}^n$ ", Тр. Петрозаводского гос. ун-та. Сер. матем., **4**, Изд-во ПетрГУ, Петрозаводск, 1997, 105–124.
- [12] С. С. Платонов, "Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на n -мерном пространстве Лобачевского", *Матем. сб.*, **137(179)**:4(12) (1988), 435–461; англ. пер.: S. S. Platonov, "Invariant subspaces in certain function spaces on n -dimensional Lobachevsky space", *Math. USSR-Sb.*, **65**:2 (1990), 439–464.
- [13] С. С. Платонов, "О спектральном синтезе на симметрических пространствах ранга 1", *Алгебра и анализ*, **4**:4 (1992), 174–187; англ. пер.: S. S. Platonov, "Spectral synthesis on symmetric spaces of rank 1", *St. Petersburg Math. J.*, **4**:4 (1993), 777–788.
- [14] С. С. Платонов, "Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах. I", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:5 (1995), 127–172; англ. пер.: S. S. Platonov, "Invariant subspaces of some function spaces on symmetric spaces. I", *Izv. Math.*, **59**:5 (1995), 1007–1050.
- [15] С. С. Платонов, "Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах. II", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:2 (1998), 131–168; англ. пер.: S. S. Platonov, "Invariant subspaces in some function spaces on symmetric spaces. II", *Izv. Math.*, **62**:2 (1998), 339–374.
- [16] С. С. Платонов, "Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах. III", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:1 (2002), 167–202; англ. пер.: S. S. Platonov, "Invariant subspaces in some function spaces on symmetric spaces. III", *Izv. Math.*, **66**:1 (2002), 165–200.
- [17] L. Ehrenpreis, F. J. Mautner, "Some properties of the Fourier-transform on semisimple Lie groups. III", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90** (1959), 431–484.
- [18] П. К. Рашевский, "Описание замкнутых инвариантных подпространств в некоторых функциональных пространствах", Тр. ММО, **38**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1979, 139–185; англ. пер.: P. K. Rashevskij, "Description of the closed invariant subspaces of certain function spaces", *Trans. Mosc. Math. Soc.*, **2** (1980), 137–182.
- [19] С. С. Платонов, "Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на группе $SL(2, \mathbb{C})$ ", *Тр. сем. по вект. и тенз. анализу*, **21** (1983), 191–258.
- [20] С. С. Платонов, "Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на группе движений евклидовой плоскости", *Сиб. матем. журн.*, **31**:3 (1990), 135–146; англ. пер.: S. S. Platonov, "Invariant subspaces of some functional spaces on the group of motions of the Euclidean plane", *Siberian Math. J.*, **31**:3 (1990), 472–481.
- [21] С. С. Платонов, "Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на простейшей разрешимой группе Ли", *Матем. заметки*, **35**:1 (1984), 19–30; англ. пер.: S. S. Platonov, "Invariant subspaces in certain function spaces on the simplest solvable Lie group", *Math. Notes*, **35**:1 (1984), 12–18.
- [22] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные функции. Выпуск 1. Обобщенные функции и действия над ними*, ГИФМЛ, М., 1958; нем. пер.: I. M. Gelfand, G. E. Schilow, *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen). I: Verallgemeinerte Funktionen und das Rechnen mit ihnen*, VEB, Berlin, 1960.

- [23] A. Wawrzyńczyk, “Spectral analysis on upper light cone in $\mathbb{R}^3$ and the Radon transform”, *Canad. J. Math.*, **40**:6 (1988), 1458–1481.
- [24] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Foresman, Glenview, IL–London, 1971.
- [25] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Pure Appl. Math., **113**, Academic Press, Orlando, FL, 1984.
- [26] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. S. Vladimirov, *Generalized functions in mathematical physics*, Mir, Moscow, 1979.
- [27] G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups*. I, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
- [28] Д. П. Желобенко, *Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли*, Наука, М., 1974.
- [29] V. S. Varadarajan, *Harmonic analysis on real reductive groups*, Lecture Notes in Math., **576**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
- [30] Д. П. Желобенко, А. И. Штерн, *Представления групп Ли*, Наука, М., 1983.
- [31] С. С. Платонов, “Спектральный синтез в некоторых функциональных топологических векторных пространствах”, *Алгебра и анализ*, **22**:5 (2010), 154–185; англ. пер.: S. S. Platonov, “Spectral synthesis in some topological vector spaces of functions”, *St. Petersburg Math. J.*, **22**:5 (2011), 813–833.
- [32] С. Ленг, *$SL_2(\mathbb{R})$* , Мир, М., 1977; пер. с англ.: S. Lang, *$SL_2(\mathbb{R})$* , Addison-Wesley, Reading, MA, 1975.

С. С. Платонов (S. S. Platonov)

Математический факультет

Петрозаводского государственного университета

E-mail: platonov@psu.karelia.ru

Поступила в редакцию

18.01.2011