Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Б. Жуков, О теории ветвления в случае несовершенного поля вычетов, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 12, 3–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm785>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 09:27:48

УДК 512.62

И. Б. Жуков

О теории ветвления в случае несовершенного поля вычетов

Статья посвящена теории ветвления для полных дискретно нормированных полей, у которых поле вычетов имеет простую характеристику p и обладает p -базисом мощности 1. К этому классу относятся, в частности, двумерные локальные и локально-глобальные поля. Для таких полей предлагается новое определение фильтрации ветвления. Оказывается, что при этом можно определить аналоги функций Хассе–Эрбрана с полным набором обычных свойств. Благодаря этому удастся построить фильтрацию ветвления с верхней нумерацией, а также теорию ветвления бесконечных расширений.

Более подробно изучается случай равнохарактеристических двумерных локальных полей. Для таких полей строится некоторая фильтрация на второй K -группе поля, отличная от индуцированной стандартной фильтрацией на мультипликативной группе. Доказано, что отображение взаимности двумерной локальной теории полей классов отождествляет построенную фильтрацию с фильтрацией ветвления.

Библиография: 18 названий.

Пусть K – полное дискретно нормированное поле с полем вычетов $\overline{K}$, $\text{char } \overline{K} = p > 0$. Если $\overline{K}$ – совершенное поле, для алгебраических расширений K существует красивая теория ветвления. Для конечного расширения Галуа L/K с группой Галуа G можно ввести каноническую фильтрацию (G_i) на G , имеющую весьма естественное поведение по отношению к подрасширениям L/K . А именно если H – нормальная подгруппа в G , то $H_i = G_i \cap H$ и $(G/H)^j = (G^j H)/H$ (в последнем соотношении использована верхняя нумерация подгрупп ветвления $G^j = G_{\psi(j)}$, где функция Хассе–Эрбрана $\psi = \psi_{L/K}$ легко вычисляется исходя из порядков подгрупп G_i). Эта “верхняя” фильтрация на G согласована с теорией полей классов. В частности, если L/K абелево, а поля вычетов конечны (квазиконечны), то $\theta(U_j) = G^j$ для всех $j = 0, 1, \dots$, где $\theta: K^* \rightarrow G$ – отображение взаимности, а (U_j) – фильтрация на K^* , определяемая нормированием. Полное изложение всех этих фактов приводится, например, в [1; гл. IV, XV].

Однако если $\overline{K}$ не является совершенным, какой-либо приемлемой теории верхней нумерации подгрупп ветвления не существует. “Нижние” подгруппы ветвления можно определить по-прежнему, но при этом фильтрация ветвления на G не будет определять таковую на G/H . (Примеры приводятся, в частности, в [2], [3].)

В настоящей статье рассматривается класс полей K , для которых $[\overline{K} : \overline{K}^p] = p$. (Это соотношение выполняется, в частности, когда K – двумерное локальное поле.) В случае $\text{char } K = p$ мы рассматриваем относительную ситуацию K/k : пред-

Работа выполнена при поддержке гранта LMS, исследовательского гранта Ноттингемского университета (ROF2/039) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 97-01-00058-а и 00-01-00140).

полагается, что в K зафиксировано полное подполе k с совершенным полем вычетов. (В смешаннохарактеристическом случае, т.е. когда $\text{char } K = 0$, подполе k может быть выбрано канонически.) Для расширения Галуа L/K мы вводим новую нижнюю фильтрацию на $\text{Gal}(L/K)$, проиндексированную специальным линейно упорядоченным множеством $\mathbb{I}$ (см. § 1). Далее, можно определить функцию Хассе–Эрбрана $\Psi_{L/K}: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ с полным набором обычных свойств. Благодаря существованию такой функции можно построить теорию верхних подгрупп ветвления, а также теорию ветвления бесконечных расширений.

Если рассматривать абелевы расширения экспоненты p , то фильтрация ветвления определяет двойственную фильтрацию на аддитивной (соответственно мультипликативной) группе K по двойственности Артина–Шрайера (соответственно Куммера). В случае $e_{K/k} = 1$ двойственная фильтрация явно описана в § 2.

В § 3 мы рассматриваем случай, когда поле K снабжено дискретным нормированием ранга 2. (Основные примеры – двумерные локальные или локально-глобальные поля.) В этом случае вводится новое индексное множество $\mathbb{I}_2 \supset \mathbb{I}$ и строятся более тонкие нижняя и верхняя фильтрации на группах Галуа расширений K .

В оставшейся части статьи изучается случай равнохарактеристического двумерного локального поля K . Мы вводим некоторую фильтрацию на группе $K_2^{\text{top}} K$, отличную от фильтрации, индуцированной нормированием. Наша фильтрация проиндексирована множеством $\mathbb{I}_2$; у нее более естественное поведение по отношению к отображению нормы, чем у обычной фильтрации. Наконец, мы доказываем, что отображение ветвления двумерной локальной теории полей классов (см. [4], [5]) отождествляет эту фильтрацию с фильтрацией ветвления из § 3.

В работах В. А. Абрашкина предложенный здесь подход к теории ветвления был распространен на n -мерные локальные поля. Это дало возможность сформулировать и доказать для высших локальных полей аналог анабелевой гипотезы Гротендика [6], [7].

Автор выражает благодарность Университету Ноттингема за гостеприимство, дружественную и стимулирующую атмосферу. Автор глубоко признателен И. Б. Фесенко за многочисленные ценные обсуждения и щедрую помощь во время визита автора в Ноттингем.

Окончательная версия работы была написана в IHES (Бюр-на-Иветте) в 2001 году. Автор хотел бы выразить благодарность этому институту за гостеприимство и поддержку.

§ 0. Определения, обозначения и предварительные сведения

0.1. Общие обозначения. Пусть p обозначает простое число, равное характеристике полей вычетов всех рассматриваемых дискретно нормированных полей; $v_p(a)$ – p -адический показатель рационального или p -адического числа a .

Пусть K – поле, снабженное дискретным нормированием ранга 1. Тогда

- v_K – (нормализованное) нормирование на K , а также его продолжение на алгебраическое замыкание K (такое продолжение будет единственным, если K полное);
- $\mathcal{O}_K$ – кольцо нормирования;
- $\mathfrak{M}_K$ – максимальный идеал $\mathcal{O}_K$;
- $\overline{K} = \mathcal{O}_K / \mathfrak{M}_K$;

- $U_K = \mathcal{O}_K^*$;
- $U_K(m) = \{u \in \mathcal{O}_K \mid v_K(u-1) \geq m\}$, $m \geq 1$;
- $\mathcal{R}_K$ состоит из представителей Тайхмюллера элементов максимального совершенного подполя в $\overline{K}$;
- $e(K/F) = \min\{v_K(\rho) \mid \rho \in F, v_K(\rho) > 0\}$, где F – подполе K такое, что $v_K|_F$ не является тривиальным нормированием.

Говорят, что конечное расширение L/K *свирено разветвлено*, если

$$[L : K] = [\overline{L} : \overline{K}]_{\text{insep}}.$$

Группа $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ линейно упорядочена следующим образом:

$$(a_1, a_2) < (b_1, b_2) \iff \text{либо } a_2 < b_2, \text{ либо } a_2 = b_2 \text{ и } a_1 < b_1;$$

$$\mathbb{Q}_+ = \{i \in \mathbb{Q} \mid i > 0\}, \mathbb{Q}_+^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+.$$

0.2. Устранение высшего ветвления. (См. [3], [8]–[10].) Пусть K – полное дискретно нормированное поле произвольной характеристики с полем вычетов $\overline{K}$ характеристики $p > 0$.

Если характеристика K равна нулю, обозначим через k множество всех $x \in K$, алгебраических над полем частных k_0 кольца $W(F)$, где $F = \bigcap \overline{K}^{p^i}$. Очевидно, k представляет собой полное подполе поля K с совершенным полем вычетов и является максимальным по отношению к данному свойству.

Далее, если $\text{char } K = p$, зафиксируем в K *базовое подполе* B , которое полно по отношению к нормированию на K и имеет поле вычетов $\mathbb{F}_p$. (Возможные базовые подполя суть в точности всевозможные $\mathbb{F}_p((\tau))$, где $v_K(\tau) > 0$.) В этом случае обозначим через k_0 пополнение $B(\mathcal{R}_K)$, а через k – алгебраическое замыкание k_0 в K .

В обоих случаях будем называть k *подполем констант* поля K . Обозначим через v_0 нормирование $K^* \rightarrow \mathbb{Q}$, эквивалентное v_K и такое, что $v_0|_{k_0} = v_{k_0}$. Положим $e_K = e(K/k_0) = v_0(\pi)^{-1}$, где π – любой простой элемент K .

Расширение L/K будем называть *константным*, если $L = lK$, где l – некоторое алгебраическое расширение k . Очевидно, в этом случае l представляет собой подполе констант поля L . Отметим, что конечные сепарабельные константные расширения K – это в точности расширения $K(a)/K$, где a алгебраичен и сепарабелен над k . Будем говорить, что расширение почти константное, если оно вкладывается в композит константного и неразветвленного. Равносильно, L/K почти константное, если $K'L/K'$ является константным для некоторого неразветвленного расширения K'/K . Отметим следующие свойства.

1. Композит двух почти константных расширений является почти константным. Таким образом, можно рассматривать максимальное почти константное подрасширение данного конечного расширения.

2. Любое промежуточное расширение внутри почти константного расширения является почти константным. В самом деле, пусть $K \subset K' \subset L' \subset L$. Имеем $L \subset CU$, где C/K – константное расширение, а U/K – неразветвленное. Тогда $L' \subset (CK')(UK')$, CK'/K' константное, UK'/K' неразветвленное.

3. Если L/K и M/L почти константные, то и M/K почти константное.

В самом деле, LU/U и MU'/U' будут константными для некоторых неразветвленных расширений U/K и U'/L . Пусть U'' – подполе инерции в U'/K . Тогда $U' =$

$U''L$, откуда $MU' = MU''$. Расширение UU''/K неразветвлено, LUU''/UU'' и MUU''/LUU'' константные, откуда M/K почти константное.

4. Любое ручное расширение является почти константным.

Мы присвоим название *инфернальные* противоположному типу расширений. А именно будем называть конечное расширение L/K инфернальным, если единственным почти константным подрасширением в L/K является само K . Следующие два свойства доказаны в [10; 1.2].

1. Если L/K инфернальное, то любое промежуточное расширение в L/K инфернальное.

2. Если L/K инфернальное, то $K'L/K'$ инфернальное для любого почти константного расширения K'/K .

Будем говорить, что поле K *стандартное*, если $e_{K/k} = 1$. Очевидно, что любое неразветвленное, или константное, или свирепое разветвленное конечное расширение стандартного поля также является стандартным полем.

Далее, будем говорить, что поле K *почти стандартное*, если существует неразветвленное расширение L/K такое, что L стандартное. Легко доказать, что почти константное или свирепое разветвленное конечное расширение почти стандартного поля – почти стандартное поле.

Следующее утверждение представляет собой частный случай теоремы 3.2.1 из [10]. Однако в этом частном случае мы можем дать более простое доказательство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.1. Пусть K – полное дискретно нормированное поле, $\text{char } K = p$, k – подполе констант поля K , L/K – инфернальное расширение. Тогда найдется конечное чисто несепарабельное расширение l/k такое, что lK почти стандартное и lL/lK свирепое разветвлено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что K является конечным расширением стандартного поля K_0 . Например, можно записать $K = H((\pi))$ и взять $K_0 = H((\pi_0))$, где π_0 – простой элемент базового подполя. Пусть K_1/K_0 – максимальное почти константное подрасширение в K/K_0 . Тогда K/K_1 инфернальное и K_1 почти стандартное. Достаточно проверить оба утверждения для K_2L/K_2K , где K_2/K_1 – любое заданное неразветвленное расширение. Следовательно, мы можем без потери общности предполагать, что K_1 стандартное.

Теперь достаточно проверить, что lL/lK_1 свирепое разветвлено для некоторого чисто несепарабельного l/k_1 , где k_1 – подполе констант в K_1 . Используя индукцию по $[L : K_1]$, мы можем свести доказательство этого утверждения к случаю $[L : K_1] = p$.

Сперва предположим, что L/K_1 несепарабельно; тогда $L = K_1(x)$, $x^p = a \in K_1$. Из того, что L/K_1 инфернально, следует, что $\{v_{K_1}(a - b^p - c) \mid b \in K_1, c \in k_1\}$ ограничено сверху. Тогда можно записать $a = a_0 + b^p + c$ с максимально возможным $v_{K_1}(a_0) < \infty$. Пусть $l = k_1(\pi_l)$, где π_l^p – простой элемент в k_1 . Тогда $lL = lK_1(\sqrt[p]{a_0})$ свирепое разветвлено над lK_1 .

Далее, предположим, что L/K_1 сепарабельное и нормальное. Тогда $L = K_1(x)$, $x^p - x = a \in K_1$. Пусть π – простой элемент в k_1 . Тогда можно предположить, что $K_1 = H_1((\pi))$.

Запишем $a = a_0 + \wp(b) + c$, $b \in K_1$, $c \in k_1$, с максимальным возможным $v(a_0)$. Предположим, что $v(a_0) \geq 0$. Тогда $L \subset K_1(x_0, x_c)$, $x_0^p - x_0 = a_0$, $x_c^p - x_c = c$,

откуда L/K_1 почти константное; получили противоречие. Следовательно, $v(a_0) = -n < 0$.

Пусть $s = s_{L/K_1} = \min\{r \mid \overline{\pi^n a_0} \in (\overline{K_1})^{p^r}\}$. Имеем $s < \infty$ в силу максимальной степени $v(a_0)$. Теперь применим индукцию по s .

Если $s_{L/K_1} = 0$, то уже $L(\pi')/K_1(\pi')$ свирепо разветвлено, где $(\pi')^p = \pi$. Если $s \geq 1$, ясно, что $(p, n) = 1$. Обозначим $L' = L(\pi')$, $K' = K_1(\pi')$, $(\pi')^p = \pi$. Будем различать два случая:

- 1) a_0 можно записать в виде $a_0 = \sum_{i=-n}^{[-n/p]} b_i^p \pi^i + a_1$, где $b_i \in H$, $v_K(a_1) > -n/p$; тогда $a_0 \equiv b_m(\pi')^m + \dots \pmod{\wp(K')}$, где $m = -n/p$, многоточие обозначает члены более высокого порядка, и мы получаем $s_{L'/K'} = s_{L/K_1} - 1$;
- 2) a_0 нельзя записать в таком виде; тогда непосредственно видно, что $s_{L'/K'} = 0$.

В обоих случаях к L'/K' применяется индуктивное предположение.

Остается рассмотреть случай, когда L/K_1 имеет степень p , сепарабельное, но не является нормальным. Пусть L_1/K_1 – нормальное замыкание L/K_1 , K_2/K_1 – максимальное ручное подрасширение L_1/K_1 . Тогда $[L_1 : K_2] = p$, L_1/K_2 нормальное и K_2 почти стандартное. Мы можем применить уже рассмотренный случай к UL_1/U , где U – подходящее неразветвленное расширение K_2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.2 [8]. Пусть L/K – конечное расширение полных дискретно нормированных полей, k – подполе констант K . Тогда существует конечное расширение l/k такое, что $e(lL/lK) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{char } K = p$. Пусть K'/K – максимальное почти константное подрасширение в L/K , k' – подполе констант в K' . Тогда K' почти стандартное и L/K' инфернальное. Существует l_1/k такое, что $l_1 K'/l_1 K$ неразветвлено. По предложению 0.1 существует l_2/k' такое, что $l_2 L/l_2 K'$ свирепо разветвлено. Пусть $l = l_1 l_2$. Тогда lK'/lK неразветвлено, lL/lK' свирепо разветвлено, откуда $e(lL/lK) = 1$.

В случае $\text{char } K = 0$ рассуждение практически такое же. Вместо чисто несепарабельных расширений l/k можно брать циклические расширения с достаточно большими скачками ветвления. Подробности доказательства приведены в [9], [10].

СЛЕДСТВИЕ 0.3. Пусть K – полное дискретно нормированное поле, k – подполе констант в K . Тогда существует конечное расширение l/k такое, что lK стандартное.

0.3. Двумерные локальные поля. (См. [11]–[13].) Мы будем пользоваться терминологией и обозначениями из [11], [12]. В частности, двумерное локальное поле – это поле K , полное относительно дискретного нормирования v и такое, что его поле вычетов $\overline{K}$ представляет собой полное дискретно нормированное поле с совершенным полем вычетов. На протяжении всей статьи будет предполагаться, что характеристика $\overline{K}$ равна p .

Система локальных параметров в K – это любая пара (t, π) , где $v(\pi) = 1$, $v(t) = 0$ и класс вычетов t в $\overline{K}$ представляет собой простой элемент этого поля. Выбор такой системы определяет на K дискретное нормирование ранга 2, и все получаемые таким образом нормирования эквивалентны между собой. Группа главных единиц K по отношению к любому из этих нормирований ранга 2 обозначается через V_K . Далее, группа главных единиц по отношению к нормированию ранга 1

на K обозначается через $U_K(1)$. Иными словами, V_K (соответственно $U_K(1)$) состоит из всех $a \in \mathcal{O}_K$ таких, что класс вычетов a в $\bar{K}$ принадлежит $\mathcal{O}_{\bar{K}}^*$ (соответственно равен единице).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.4. Пусть K – двумерное локальное поле (характеристики 0 или p), k – подполе констант поля K . Тогда K стандартное, если и только если $K \simeq k\{\{t\}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вложение $k\{\{T\}\} \rightarrow K$, которое отображает $f(T)$ в $f(t)$. Его образ естественно обозначить $k\{\{t\}\}$. Тогда $K/k\{\{t\}\}$ – вполне разветвленное расширение с индексом ветвления $e(K/k)$.

0.4. Топологические K -группы. (См. [11], [14], [15].)

ЛЕММА 0.5. Пусть F – поле, $\alpha, \beta \in F^*$, $\alpha, \beta \neq 0, 1$, $\alpha\beta \neq \alpha - 1$. Тогда $\{1 - \alpha, 1 - \beta\} = \{\alpha(1 - \beta), 1 - (1 - \alpha^{-1})^{-1}\beta\}$ в K_2F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя соотношение Стейнберга, получаем

$$\begin{aligned} \{1 - \alpha, 1 - \beta\} &= \{1 - \alpha + \alpha\beta, 1 - \beta\} - \left\{1 + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha}, 1 - \beta\right\} \\ &= -\{1 - \alpha + \alpha\beta, \alpha\} - \left\{1 + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha}, 1 - \beta\right\} \\ &= -\left\{1 + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha}, \alpha\right\} - \left\{1 + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha}, 1 - \beta\right\} \\ &= \left\{\alpha(1 - \beta), 1 + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha}\right\}. \end{aligned}$$

Напомним определение и некоторые свойства топологических K -групп $K_2^{\text{top}}K$.

Пусть K – двумерное локальное поле. Топология на K_2K определяется как наиболее тонкая топология, для которой естественное отображение $K^* \times K^* \rightarrow K_2K$ секвенциально непрерывно и вычитание в K_2K секвенциально непрерывно. Тогда пересечение всех окрестностей нуля в K_2K совпадает с $\bigcap_{l \geq 1} lK_2K$. Группа $K_2K / \bigcap_{l \geq 1} lK_2K$ с фактортопологией обозначается $K_2^{\text{top}}K$. Когда это не приводит к путанице, класс символа $\{a, b\} \in K_2K$ в $K_2^{\text{top}}K$ также обозначается $\{a, b\}$.

Обозначим через $VK_2^{\text{top}}K$ (соответственно $U(1)K_2^{\text{top}}K$) подгруппу в $K_2^{\text{top}}K$, порожденную всеми символами $\{u, x\}$, где $x \in K$ и $u \in V_K$ (соответственно $u \in U_K(1)$).

Далее, следуя [11; гл. VI] и [14], дадим альтернативное описание топологии на $VK_2^{\text{top}}K$.

Пусть τ – топология на множестве X . Секвенциальное насыщение τ определяется как наиболее тонкая топология τ' на X такая, что множество сходящихся последовательностей для τ' такое же, как и для τ . Для топологических пространств X, Y топология $*$ -произведения на $X \times Y$ – это секвенциальное насыщение топологии произведения.

ТЕОРЕМА 0.6 [11; 6.6], [14; теорема 4.6]. Пусть (t, π) – локальные параметры K . Тогда гомоморфизм

$$\begin{aligned} g: V_K \times V_K &\rightarrow VK_2^{\text{top}}K, \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \{\alpha, \pi\} + \{\beta, t\}, \end{aligned}$$

индуцирует гомеоморфизм между $(V_K \times V_K)/\text{Ker } g$ и $VK_2^{\text{top}}K$. Здесь группа $(V_K \times V_K)/\text{Ker } g$ снабжена фактортопологией топологии $*$ -произведения.

СЛЕДСТВИЕ 0.7. Любая окрестность нуля в $VK_2^{\text{top}}K$ содержит $p^n VK_2^{\text{top}}K$ для некоторого n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – окрестность нуля в $VK_2^{\text{top}}K$. Если доказываемое утверждение ложно, то для любого $i \geq 1$ существует $a_i \in p^i VK_2^{\text{top}}K$ такое, что $a_i \notin U$. Пусть $a_i = p^i b_i$, $b_i = \{\alpha_i, \pi\} + \{\beta_i, t\}$, $\alpha_i, \beta_i \in V_K$. В силу [15; лемма 1.6] любая окрестность единицы в K содержит $V_K^{p^m}$ для некоторого m . Следовательно, $\alpha_i^{p^i}, \beta_i^{p^i} \rightarrow 1$, откуда $a_i \rightarrow 0$ в $VK_2^{\text{top}}K$ по теореме 0.6.

Пусть A – подгруппа в $VK_2^{\text{top}}K$. Обозначим через $\text{Cl } A$ пересечение всех открытых подгрупп, содержащих A . Выбор обозначения объясняется тем фактом, что любая замкнутая подгруппа в $VK_2^{\text{top}}K$ совпадает с пересечением всех содержащих ее открытых подгрупп, как показано в [14; доказательство теоремы 4.6]. Произвольный набор образующих A будем называть набором *топологических образующих* для $\text{Cl } A$. Будем также говорить, что A *плотна* в $\text{Cl } A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.8. Пусть L/K – конечное расширение, A – любая подгруппа в $VK_2^{\text{top}}K$. Тогда $N_{L/K} \text{Cl } A = \text{Cl } N_{L/K} A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [11; 6.8.2] норма любой замкнутой подгруппы замкнута и, следовательно, $N_{L/K} \text{Cl } A \supset \text{Cl } N_{L/K} A$.

Обратно, пусть U' – открытая подгруппа в $VK_2^{\text{top}}L$, содержащая $N_{L/K} A$. По следствию 0.7 U' содержит $p^n VK_2^{\text{top}}L$ для некоторого n . Тогда $N_{L/K}^{-1}(U')$ – открытая подгруппа $VK_2^{\text{top}}K$; это объясняется в [15; следствие 4.4] и в [11; 6.8.2]. Отсюда следует $\text{Cl } A \subset N_{L/K}^{-1}(U')$, и мы получаем $N_{L/K} \text{Cl } A \subset \text{Cl } N_{L/K} A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.9. Пусть K – двумерное локальное поле с последним полем вычетов F , $\text{char } K = p$. Тогда любой элемент $a \in U(1)K_2^{\text{top}}K$ можно однозначно записать в виде

$$a = \sum_{\substack{i \geq 1, j \in \mathbb{Z} \\ (j,p)=1 \\ \theta \in B}} c_{ij\theta} \{\pi, 1 + \theta \pi^i t^j\} + \sum_{\substack{i \geq 1, j \in \mathbb{Z} \\ (i,p)=1, (j,p) \neq 1 \\ \theta \in B}} c_{ij\theta} \{t, 1 + \theta \pi^i t^j\},$$

где B – некоторый фиксированный $\mathbb{F}_p$ -базис F , $c_{ij\theta} \in \mathbb{Z}_p$. Здесь для любого натурального числа n множество $\{(j, i) \mid v_p(c_{ij\theta}) < n \text{ для некоторого } \theta\}$ является допустимым, т.е. $p^n \mid c_{ij\theta}$ для любого достаточно маленького $j < j(i)$ и любого θ .

Существование и единственность разложения доказывается в [4; § 2, предложения 1, 3] для конечного F и в [16; предложение 2.4] в общем случае. Оставшееся утверждение следует из [13]; оно нам не понадобится.

§1. Общая теория ветвления

1.1. Определения. Будем использовать следующее обозначение:

$$\mathbb{I} = \{-1, 0\} \cup \{(c, i) \mid i \in \mathbb{Q}, i > 0\} \cup \{(c, \infty)\} \cup \{(i, i) \mid i \in \mathbb{Q}, i > 0\} \cup \{\infty\}.$$

Это множество будет служить множеством индексов для верхней и нижней нумерации подгрупп ветвления, которые мы собираемся ввести. (Выбор символов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{i}$ указывает на связь с (почти) *константными* и *инфернальными* расширениями соответственно.) Множество $\mathbb{I}$ будет рассматриваться как линейно упорядоченное следующим образом:

$$\begin{aligned} -1 < 0 < (\mathbf{c}, i) < (\mathbf{i}, j) < \infty \text{ при любых } i, j, \\ (\mathbf{c}, i) < (\mathbf{c}, j) \text{ при любых } i < j, \\ (\mathbf{i}, i) < (\mathbf{i}, j) \text{ при любых } i < j. \end{aligned}$$

Пусть K – полное дискретно нормированное поле произвольной характеристики с полем вычетов $\overline{K}$ характеристики $p > 0$. Мы предполагаем, что $[\overline{K} : \overline{K}^p] = p$.

Пусть L/K – конечное расширение Галуа, $G = \text{Gal}(L/K)$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{I}$ определим в G подгруппу G_α .

Положим $G_{-1} = G$ и обозначим через G_0 подгруппу инерции в G , т.е.

$$G_0 = \{g \in G \mid g(a) - a \in \mathfrak{M}_L \text{ при всех } a \in \mathcal{O}_L\}.$$

Обозначим через $K_{\mathbf{c}}/K$ максимальное почти константное подрасширение в L/K . Чтобы ввести подгруппы $G_{(\mathbf{c}, i)} = G_{\mathbf{c}, i}$, рассмотрим сперва случай, когда $K_{\mathbf{c}}/K$ константное и не содержит нетривиального неразветвленного подрасширения. Тогда $K_{\mathbf{c}} = lK$, и мы располагаем естественной проекцией

$$\text{pr}: \text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(K_{\mathbf{c}}/K) = \text{Gal}(l/k) = \text{Gal}(l/k)_0,$$

где l и k – подполя констант в L и K соответственно. Тогда полагаем $G_{\mathbf{c}, i} = \text{pr}^{-1}(\text{Gal}(l/k)_i)$. В общем случае возьмем неразветвленное расширение K'/K такое, что $K'L/K'$ не содержит нетривиального неразветвленного подрасширения и максимальное почти константное подрасширение в $K'L/K'$ (т.е. $K'K_{\mathbf{c}}/K'$) является константным. Положим $G_{\mathbf{c}, i} = \text{Gal}(K'L/K')_{\mathbf{c}, i}$. Легко видеть, что выбор K' не играет никакой роли.

Далее,

$$G_{\mathbf{c}, \infty} = \text{Gal}(L/K_{\mathbf{c}}) = G_{\mathbf{c}, m}$$

для достаточно больших m . Перейдем теперь к определению $G_{(\mathbf{i}, i)} = G_{\mathbf{i}, i}$, $i > 0$.

Предположим, что $K_{\mathbf{c}}$ стандартное и $L/K_{\mathbf{c}}$ свирепо разветвлено. Пусть $t \in \mathcal{O}_L$, $\bar{t} \notin \overline{L}^p$. По определению

$$G_{\mathbf{i}, i} = \{g \in \text{Gal}(L/K_{\mathbf{c}}) \mid v_0(g(t) - t) \geq i\}$$

для всех $i > 0$.

Напомним, что $v_0 = v_{k_0}$; таким образом, $v_0(L^*) = e_L^{-1}\mathbb{Z}$. Отметим, что в рассматриваемом случае $G_{\mathbf{i}, i} = G_{ie_L - 1}$ в обозначениях [17]. Это следует непосредственно из определения обычных подгрупп ветвления в [17; (4.3)]. Следовательно, $G_{\mathbf{i}, i}$ не зависит от выбора t .

В общем случае выберем конечное расширение l'/l такое, что $l'K_{\mathbf{c}}$ стандартное и $e(l'L/l'K_{\mathbf{c}}) = 1$, см. предложение 0.2 и следствие 0.3. Ясно, что $\text{Gal}(l'L/l'K_{\mathbf{c}}) = \text{Gal}(L/K_{\mathbf{c}})$. Далее, $l'L/l'K_{\mathbf{c}}$ инфернальное, откуда следует, что в $l'L/l'K_{\mathbf{c}}$ нет нетривиального неразветвленного подрасширения. Имеем $e(l'L/l'K_{\mathbf{c}}) = 1$, это значит, что $l'L/l'K_{\mathbf{c}}$ свирепо разветвленное. Полагаем по определению

$$G_{\mathbf{i}, i} = \text{Gal}(l'L/l'K_{\mathbf{c}})_{\mathbf{i}, i} = \text{Gal}(l'L/l'K)_{\mathbf{i}, i}$$

для всех $i > 0$.

Наконец, положим $G_\infty = \{e\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. $G_{\mathbf{i},i}$ не зависит от выбора l' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть l'/l и l''/l – такие конечные расширения, что $l'K_{\mathbf{c}}$ и $l''K_{\mathbf{c}}$ стандартные и

$$e(l'L/l'K_{\mathbf{c}}) = e(l''L/l''K_{\mathbf{c}}) = 1.$$

Тогда $l'l''K_{\mathbf{c}}$ стандартное и $e(l'l''L/l'l''K_{\mathbf{c}}) = 1$. Следовательно, мы можем считать, что $l' \subset l''$. Пусть $t \in \mathcal{O}_{l'L}$, $\bar{t} \notin (\overline{l'L})^p$. Тогда имеем $t \in \mathcal{O}_{l''L}$, $\bar{t} \notin (\overline{l''L})^p$, и мы можем заключить, что $\text{Gal}(l''L/l''K_{\mathbf{c}})_{\mathbf{i},i} = \text{Gal}(l'L/l'K_{\mathbf{c}})_{\mathbf{i},i}$ в силу определения $G_{\mathbf{i},i}$ в свирепо разветвленном случае.

Таким образом, мы определили G_{α} для всех $\alpha \in \mathbb{I}$, и непосредственно видно, что из $\alpha < \beta$ следует $G_{\alpha} \supseteq G_{\beta}$. Будем говорить, что $\alpha \in \mathbb{I}$ является *скачком* для L/K , если $G_{\alpha} \neq G_{\beta}$ при любом $\beta > \alpha$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Для любого $\alpha \in \mathbb{I}$ G_{α} – нормальная подгруппа в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидно при $\alpha = -1, \infty$. Хорошо известно, что G_0 – нормальная подгруппа; см., например, [17; (4.3)]. Далее, пусть $\alpha = (\mathbf{c}, i)$. Можно считать, что расширение K'/K в определении $G_{\mathbf{c},i}$ нормальное. Пусть $g \in G$, $h \in G_{\alpha}$. Продолжим g и h на $K'L/K$ таким образом, что $h \in \text{Gal}(K'L/K')$; это можно сделать, поскольку $h \in G_{\alpha} \subset G_0$. Мы видим, что

$$ghg^{-1}|_{K'} = g|_{K'} \cdot g^{-1}|_{K'} = e,$$

откуда $ghg^{-1} \in \text{Gal}(K'L/K') = G_0$.

Пусть $K'_{\mathbf{c}}/K$ – максимальное почти константное подрасширение в $K'L/K'$, и пусть k', l' – подполя констант в K' и $K'L$ соответственно. Имеем $g(k') = k'$, откуда $g(K'_{\mathbf{c}}) = K'_{\mathbf{c}}$. Получаем

$$\begin{aligned} \text{pr}(ghg^{-1}) &= g|_{K'_{\mathbf{c}}} \cdot h|_{K'_{\mathbf{c}}} \cdot g^{-1}|_{K'_{\mathbf{c}}} \in g \text{Gal}(l'/k')_i g^{-1} \\ &= \text{Gal}(g(l')/g(k'))_i = \text{Gal}(l'/k')_i. \end{aligned}$$

Это доказывает наше утверждение также в случае $\alpha = (\mathbf{c}, \infty)$.

В случае $\alpha = (\mathbf{i}, i)$ применимо то же рассуждение. В самом деле, l'/l в определении можно выбрать нормальным, а неравенство $v_0(g(t) - t) \geq i$ устойчиво по отношению к автоморфизмам дискретно нормированных полей.

1.2. Совместимость с подгруппами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть H – подгруппа в G . Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{I}$ имеем $H_{\alpha} = H \cap G_{\alpha}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидно при $\alpha = -1, 0, \infty$. Далее, обозначим через M промежуточное поле в L/K , которое соответствует H . Тогда $K_{\mathbf{c}}M/M$ почти константное, откуда $K_{\mathbf{c}}M \subset M_{\mathbf{c}}$. С другой стороны, $L/K_{\mathbf{c}}M$ инфернальное, и мы заключаем, что $K_{\mathbf{c}}M = M_{\mathbf{c}}$. Это доказывает наше утверждение при $\alpha = (\mathbf{c}, \infty)$. Далее, если $e(\tilde{l}L/\tilde{l}K_{\mathbf{c}}) = 1$, то также $e(\tilde{l}L/\tilde{l}M_{\mathbf{c}}) = 1$. Теперь ясно, что

$$H_{\mathbf{i},i} = \text{Gal}(L/M_{\mathbf{c}}) \cap G_{\mathbf{i},i} = H_{\mathbf{c},\infty} \cap G_{\mathbf{i},i} = H \cap G_{\mathbf{i},i}$$

при всех $i > 0$.

Наконец, пусть $\alpha = (\mathbf{c}, i)$. Обозначим через K'/K любое неразветвленное расширение такое, что $K'L/K'$ не содержит нетривиального неразветвленного подрасширения и максимальное почти константное подрасширение в $K'L/K'$ является константным. Тогда $K'L/K'M$ также обладает двумя этими свойствами. Пусть k', l', m' — подполя констант в $K', K'L, K'M$ соответственно. Тогда естественная проекция $\text{Gal}(K'L/K'M) \rightarrow \text{Gal}(l'/m')$ является ограничением естественной проекции $\text{pr}: \text{Gal}(K'L/K') \rightarrow \text{Gal}(l'/k')$. Следовательно,

$$\begin{aligned} H_\alpha &= H \cap \text{pr}^{-1}(\text{Gal}(l'/m')_i) \\ &= H \cap \text{pr}^{-1}(\text{Gal}(l'/m') \cap \text{Gal}(l'/k')_i) \\ &= H \cap \text{Gal}(K'L/m'K') \cap \text{Gal}(K'L/K')_\alpha \\ &= H \cap G_\alpha; \end{aligned}$$

последнее равенство следует из

$$H \cap \text{Gal}(K'L/K')_\alpha \subset H \cap \text{Gal}(K'L/K') = \text{Gal}(K'L/K'M) \subset \text{Gal}(K'L/m'K').$$

1.3. Функции Хассе–Эрбрана и совместимость с факторгруппами.

Чтобы вычислить ветвление на факторгруппе G/H , мы должны уметь выражать число ветвления данного элемента $\sigma \in G/H$ через числа ветвления его представителей в G . Для константных расширений мы используем предложение 3 и лемму 5 из [1; гл. IV]. Теперь сделаем такое же вычисление для случая свирепо разветвленного L/K .

Пусть $t \in \mathcal{O}_L, \bar{t} \notin \bar{L}^p$ и

$$i_G(g) = v_0(g(t) - t) = \max\{i \mid g \in G_{\mathbf{i}, i}\}$$

для $g \in G = \text{Gal}(L/K), g \neq 1$.

ЛЕММА 1.4. Пусть L/K свирепо разветвлено, H — нормальная подгруппа в G , $\sigma \in G/H, \sigma \neq 1$. Тогда

$$i_{G/H}(\sigma) = i_G(g_1) + \dots + i_G(g_n),$$

где $g_1, \dots, g_n$ — все представители σ в G .

Доказательство аналогично [1; гл. IV, доказательство предложения 3].

Пусть L/K — произвольное конечное расширение Галуа, $K_{\mathbf{c}}/K$ — максимальное почти константное подрасширение в L/K . Определим $\Phi_{L/K}: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_{L/K}(\alpha) &= \alpha \text{ при } \alpha = -1, 0, (\mathbf{c}, \infty), \infty, \\ \Phi_{L/K}((\mathbf{c}, i)) &= \left(\mathbf{c}, \frac{1}{e(L/K)} \int_0^i |\text{Gal}(K_{\mathbf{c}}/K)_{\mathbf{c}, t}| dt \right) \text{ при всех } i > 0, \\ \Phi_{L/K}((\mathbf{i}, i)) &= \left(\mathbf{i}, \int_0^i |\text{Gal}(L/K)_{\mathbf{i}, t}| dt \right) \text{ при всех } i > 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что отображение $\Phi_{L/K}$ биективное и возрастающее. Введем также $\Psi_{L/K} = \Phi_{L/K}^{-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Пусть L/K и M/K – конечные расширения Галуа, $M \subset L$. Тогда $\Phi_{L/K} = \Phi_{M/K} \circ \Phi_{L/M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение непосредственно вытекает из определений в следующих трех случаях: L/K почти константное; L/K инфернальное (по лемме 1.4); M/K почти константное, тогда как L/M инфернальное.

Пусть теперь M/K инфернальное, а L/M почти константное. Тогда существует почти константное расширение Галуа L'/K такое, что $L = L'M$ (доказательство такое же, как у первого свойства инфернальных расширений в п. 0.2.) Расширение L'/K является в действительности максимальным почти константным подрасширением в L/K . По определению $\Phi_{M/K} = \Phi_{L/L'}$. Также легко видеть, что $\Phi_{L'/K} = \Phi_{L/M}$. Эти две функции коммутируют, поскольку $\Phi_{M/K}$ влияет только на “инфернальную” часть $\mathbb{I}$, а $\Phi_{L'/K}$ – только на “константную”. Следовательно,

$$\Phi_{M/K} \circ \Phi_{L/M} = \Phi_{L/L'} \circ \Phi_{L'/K} = \Phi_{L'/K} \circ \Phi_{L/L'} = \Phi_{L/K}.$$

В общем случае пусть T/M – максимальное почти константное подрасширение в L/M , а S/K – в M/K . Ясно, что T/S – расширение Галуа. Пусть T'/S – максимальное почти константное подрасширение в нем. Тогда T' , очевидно, также максимальное почти константное подрасширение в L/K и, следовательно, нормально над K . Имеем теперь

$$\begin{aligned} \Phi_{L/K} &= \Phi_{L/T'} \circ \Phi_{T'/K} \\ &= \Phi_{L/T} \circ \Phi_{T/T'} \circ \Phi_{T'/S} \circ \Phi_{S/K} \\ &= \Phi_{L/T} \circ \Phi_{T/S} \circ \Phi_{S/K} \\ &= \Phi_{L/T} \circ \Phi_{T/M} \circ \Phi_{M/S} \circ \Phi_{S/K} \\ &= \Phi_{L/M} \circ \Phi_{M/K}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. Пусть $G = \text{Gal}(L/K)$, H – нормальная подгруппа в G , M – соответствующее промежуточное поле. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{I}$ имеем $(G/H)_\alpha = G_{\Psi_{L/M}(\alpha)}H/H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случаи $\alpha = -1, \alpha = \infty$ тривиальны.

Пусть $\alpha = 0$. Если $g \in G_0$, то g действует тривиально на $\overline{M} \subset \overline{L}$, откуда $gH \in (G/H)_0$. Обратно, пусть $gH \in (G/H)_0$. Тогда образ g в $\text{Gal}(\overline{L}/\overline{K})$ – это $\overline{h} \in \text{Gal}(\overline{L}/\overline{M})$. Если h – прообраз $\overline{h}$ в $H = \text{Gal}(L/M)$, то $gh^{-1} \in G_0$, откуда $gH \in G_0H/H$.

Пусть $\alpha = (c, i)$, $0 < i \leq \infty$. Рассмотрим сперва случай, когда K_c/K константное и не содержит нетривиальных неразветвленных подрасширений. Пусть k, l, m – подполя констант K, L, M соответственно. Рассмотрим коммутативную диаграмму естественных эпиморфизмов

$$\begin{array}{ccc} \text{Gal}(L/K) & \xrightarrow{\text{pr}_L} & \text{Gal}(l/k) \\ \varrho \downarrow & & \downarrow q \\ \text{Gal}(M/K) & \xrightarrow{\text{pr}_M} & \text{Gal}(m/k) \end{array}.$$

Достаточно доказать, что $Q^{-1}((G/H)_\alpha) = G_{\Psi_{L/M}(\alpha)}H$. Имеем

$$\begin{aligned}
Q^{-1}((G/H)_\alpha) &= Q^{-1}(\text{pr}_M^{-1}(\text{Gal}(m/k)_i)) \\
&= \text{pr}_L^{-1}(q^{-1}(\text{Gal}(m/k)_i)) \\
&= \text{pr}_L^{-1}(q^{-1}(\text{Gal}(l/k)_{\psi_{l/m}(i)} \text{Gal}(l/m)/\text{Gal}(l/m))) \\
&= \text{pr}_L^{-1}(\text{Gal}(l/k)_{\psi_{l/m}(i)} \text{Gal}(l/m)) \\
&= G_{\mathbf{c}, \psi_{l/m}(i)} \cdot \text{Gal}(L/mK) \\
&= G_{\Psi_{L/M}(\alpha)} \cdot \text{Gal}(L/mK) \\
&\supset G_{\Psi_{L/M}(\alpha)}H.
\end{aligned}$$

Остается доказать, что $\text{Gal}(L/mK) \subset G_{\Psi_{L/M}(\alpha)}H$. Пусть $g \in \text{Gal}(L/mK)$, тогда $\text{pr}_L(g) \in \text{Gal}(l/m)$. Пусть h — любой прообраз $\text{pr}_L(g)$ в $H = \text{Gal}(L/M)$; тогда $gh^{-1} \in \text{Gal}(L/lK) = G_{\mathbf{c}, \infty} \subset G_{\Psi_{L/M}(\alpha)}$.

В общем случае возьмем K'/K как в доказательстве предложения 1.3; $H' = \text{Gal}(K'L/K'M)$. Тогда $\Psi_{L/M} = \Psi_{K'L/K'M}$ и

$$\text{Gal}(K'M/K')_\alpha = \text{Gal}(K'L/K')_{\Psi_{L/M}(\alpha)}H'/H'.$$

Естественное вложение $\text{Gal}(K'M/K') \hookrightarrow G/H$ отождествляет эти группы с $(G/H)_\alpha$ и $G_{\Psi_{L/M}(\alpha)}H/H$ соответственно.

Наконец, пусть $\alpha = (\mathbf{i}, i)$. Обозначим через $K_\mathbf{c}^L$ и $K_\mathbf{c}^M$ максимальные почти константные подрасширения в L/K и M/K соответственно; имеем $K_\mathbf{c}^M \subset K_\mathbf{c}^L$. Рассмотрим случай, когда $K_\mathbf{c}^L$ и $K_\mathbf{c}^M$ стандартные, а $L/K_\mathbf{c}^M$ свирепо разветвлено. В этом случае мы используем лемму 1.4 и рассуждаем так же, как в [1; гл. 4, леммы 3, 4, 5]. В общем случае возьмем конечное расширение l'/l такое, что $l'K_\mathbf{c}^M$ и $l'K_\mathbf{c}^L$ стандартные и $e(l'L/l'K_\mathbf{c}^M) = 1$. Тогда $G_{\Psi_{L/M}(\alpha)} = \text{Gal}(l'L/l'K)_{\Psi_{L/M}(\alpha)}$ и $(G/H)_\alpha = \text{Gal}(l'M/l'K)_\alpha$. Поскольку $\Psi_{L/M}(\alpha) = \Psi_{l'L/l'M}(\alpha)$ при $\alpha \geq (\mathbf{c}, \infty)$, имеем $\text{Gal}(l'M/l'K)_\alpha = \text{Gal}(l'L/l'K)_{\Psi_{L/M}(\alpha)}H'/H'$, где $H' = \text{Gal}(l'L/l'M)$; в G/H это дает $(G/H)_\alpha = G_{\Psi_{L/M}(\alpha)}H/H$.

1.4. Верхняя нумерация. Как обычно, обозначим $G^\alpha = G_{\Psi_{L/K}(\alpha)}$ для всех $\alpha \in \mathbb{I}$. Тогда предложение 1.6 можно переформулировать следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 1.7. Пусть G — группа Галуа конечного расширения Галуа поля K , H — нормальная подгруппа в G . Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{I}$ имеем $(G/H)^\alpha = G^\alpha H/H$.

Пусть L/K — произвольное расширение Галуа, $L = \bigcup L_i$, L_i/K — конечные расширения Галуа, $G = \text{Gal}(L/K)$. Тогда полагаем по определению

$$G^\alpha = \varprojlim \text{Gal}(L_i/K)^\alpha, \quad L^\alpha = L^{G^\alpha}.$$

Далее, можно определить $K_\alpha = (K^{\text{sep}})^\alpha$ для всех $\alpha \in \mathbb{I}$. Тогда $K_{-1} = K$, $K_0 = K^{\text{ur}}$, $K_{\mathbf{c},1} = K^{\text{tr}}$, $K_{\mathbf{c},\infty} = K^{\text{ur}}k^{\text{sep}}$, $K_\infty = K^{\text{sep}}$, где k — подполе констант в K .

1.5. Примеры. Во всех примерах $K = F((\pi))$ – поле характеристики p , стандартное, причем $\pi \in k$; t – элемент $F \setminus F^p$. Будем считать $v_0(\pi) = 1$.

1. Пусть L – поле разложения многочлена $X^p - X - \pi^{-pi}t$, где $i > 0$. Тогда единственный скачок нижней фильтрации для L/K равен $(\mathbf{i}, i)$, а единственный скачок верхней фильтрации равен $(\mathbf{i}, pi)$.

В самом деле, L/K свирепо разветвлено и $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\pi^i x]$, где x – корень $X^p - X - \pi^{-pi}t$.

2. Пусть L – поле разложения многочлена $X^p - X - \pi^{-i}t$, где $i > 0$ и i взаимно просто с p . Тогда единственный скачок нижней фильтрации равен $(\mathbf{i}, i/p)$, а единственный скачок верхней фильтрации равен $(\mathbf{i}, i)$.

В этом случае L/K инфернально, но вполне разветвлено. Для подсчета ветвления рассмотрим $l' = k(\pi_1)$, $\pi_1^p = \pi$. Тогда $l'L/l'K$ свирепо разветвлено и минимальный многочлен этого расширения равен $X^p - X - \pi_1^{-pi}t$. Теперь применим предыдущий пример с учетом того, что $v_0(\pi_1) = p^{-1}$.

3. Пусть L – поле разложения многочлена $X^p - X - \pi^{-i}t^{p^j}$, где $i > 0$ и i взаимно просто с p . Тогда единственный скачок нижней фильтрации равен $(\mathbf{i}, i/p^{j+1})$, а единственный скачок верхней фильтрации равен $(\mathbf{i}, i/p^j)$.

В этом случае возьмем $l' = k(\pi_{j+1})$, $\pi_{j+1}^{p^{j+1}} = \pi$. Тогда

$$\pi^{-i}t^{p^j} \equiv \pi_{j+1}^{-pi}t \pmod{\wp(l'K)}.$$

Следовательно, $l'L = l'K(x)$, где x – корень многочлена $X^p - X - \pi_{j+1}^{-pi}t$. Мы делаем вывод, что $l'L/l'K$ свирепо разветвлено, и скачки могут быть вычислены как в первом примере.

4. Пусть L – поле разложения многочлена $X^p - X - \pi^{-i}$, где $i > 0$ и i взаимно просто с p . Тогда единственный скачок нижней фильтрации равен $(\mathbf{c}, i)$, а единственный скачок верхней фильтрации тоже равен $(\mathbf{c}, i)$.

§ 2. Пример: абелевы расширения показателя p

Начнем со случая $\text{char } K = p$. В этом случае группу характеров группы $\text{Gal}(K)$ показателя p можно отождествить по теории Артина–Шрайера с группой $K/\wp(K)$, где $\text{Gal}(K)$ – абсолютная группа Галуа поля K , а $\wp: K \rightarrow K$ – отображение Артина–Шрайера $x \mapsto x^p - x$. Поскольку на группе $\text{Gal}(K)$ есть убывающая фильтрация, проиндексированная $\mathbb{I}$, на аддитивной группе K возникает возрастающая фильтрация, проиндексированная $\mathbb{I}$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{I}$. Обозначим через $A_\alpha = A_{\alpha, K}$ множество таких $a \in K$, что многочлен $X^p - X - a$ разлагается на линейные множители в K_α . Эти A_α образуют возрастающую фильтрацию на K :

$$\wp(K) = A_{-1} \subseteq A_0 \subseteq A_{\mathbf{c}, 1} \subseteq \dots \subseteq A_\infty = K.$$

Очевидно, что $A_0 = \mathcal{O}_K + \wp(K)$. Далее, легко получить, что $A_{\mathbf{c}, i} = \mathfrak{M}_k^{-i} + A_0$ для всех целых $i > 0$ и $A_{\mathbf{c}, \infty} = k + A_0$. Что касается $A_{\mathbf{i}, i}$, эти подгруппы можно вычислить явно только в предположении, что K стандартное.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть K стандартное, т.е. $K = F((\pi))$, где $\pi \in k$. Тогда

$$A_{\mathbf{i}, i} = k + A_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \pi^{-p^l i} F^{p^l} [[\pi]]. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a принадлежит правой части (2.1), x – корень многочлена $X^p - X - a$. Чтобы доказать, что $K(x) \subset K_{\mathbf{i},i}$, достаточно рассмотреть следующие случаи:

- 1) $a \in k$, тогда $K(x)/K$ константное, откуда $K(x) \subset K_{\mathbf{e},\infty} \subset K_{\mathbf{i},i}$;
- 2) $a \in \mathcal{O}_K$, тогда $K(x)/K$ неразветвленное, откуда $K(x) \subset K_0 \subset K_{\mathbf{i},i}$;
- 3) $a \in \pi^{-p^l i} F^{p^l} [[\pi]]$. В поле $K' = K(\pi')$, где $\pi'^{p^l} = \pi$, имеем $a = b^{p^l}$, $b \in \pi'^{-p^l i} F[[\pi']]$. Заметим, что $b^{p^l} \equiv b \pmod{\wp(K')}$, откуда $K'(x) = K'(x')$, $x'^p - x' = b$. Ясно, что $v_0(x') = p^{-1}v_0(b) \geq -p^{-1}i$. Без потери общности можно предположить, что $K(x)/K$ инфернальное. По предложению 0.1 существует такое конечное константное расширение K''/K' , что $K''(x)/K''$ свирепо разветвлено. Если g – образующая $\text{Gal}(K''(x)/K'')$, имеем

$$v_0(g(x') - x') = 0,$$

откуда единственный скачок нижней фильтрации не больше $(\mathbf{i}, p^{-1}i)$ и единственный скачок верхней фильтрации не больше $(\mathbf{i}, i)$. Отсюда вытекает, что $K(x) \subset K_{\mathbf{i},i}$ и $a \in A_{\mathbf{i},i}$.

Обратно, предположим, что $a \in A_{\mathbf{i},i}$, $x^p - x = a$. Если $K(x)/K$ почти константное, то a можно записать в виде $a_u + a_c$ так, что $K(x_u)/K$ неразветвленное, а $K(x_c)/K$ константное, $x_c^p - x_c = a_c \in K$, $x_u^p - x_u = a_u \in K$. Отсюда следует $a_c \in k + \wp(K)$ и $a_u \in \mathcal{O}_K + \wp(K)$, что завершает рассуждение.

Остается рассмотреть случай инфернального $K(x)/K$. Пусть

$$a = b_m \pi^{-m} + b_{m-1} \pi^{-(m-1)} + \dots,$$

где $b_j \in F$. Прибавляя элемент из $k \subset A_{\mathbf{e},\infty} \subset A_{\mathbf{i},i}$ к a , мы можем считать, что $b_j = d_j^{p^{l_j}}$, где $d_j \notin F^p$. Аналогично, прибавляя элемент из $\wp(K)$, мы можем считать, что для любого j либо $p \nmid j$, либо $l_j = 0$. Рассмотрим отношения $\varkappa_j = e_K^{-1} j / p^{l_j}$ (e_K играет роль абсолютного индекса ветвления). Значения $\varkappa_j$ попарно различны (из $\varkappa_r = \varkappa_s$ следовало бы, что по крайней мере одна из дробей r/p^{l_r} и s/p^{l_s} является сократимой). Отметим, что значение $\varkappa = \max(\varkappa_j)$ остается неизменным при замене K на $K(\sqrt[p]{\pi})$.

Теперь пусть $K' = K(\pi')$, где $\pi'^{p^N} = \pi$, $N = \max(l_j) + 1$. Легко видеть, что $K'(x) = K'(x')$,

$$x'^p - x' = \pi'^{-\varkappa e_{K'}} d + \dots,$$

$d \notin F^p$. Поскольку $p \mid \varkappa e_{K'}$, мы делаем вывод, что $K'(x)/K$ свирепо разветвлено и скачок ветвления в верхней нумерации равен $\varkappa$. Это означает, что $\varkappa \leq i$ и a лежит в правой части (2.1).

Теперь перейдем к случаю, когда $\text{char } K = 0$ и K содержит все корни p -й степени из единицы.

Пусть $\alpha \in \mathbb{I}$. Обозначим через B_α множество таких $b \in K^*$, что $\sqrt[p]{b} \in K_\alpha$. Эти B_α образуют возрастающую фильтрацию на K^* :

$$(K^*)^p = B_{-1} \subseteq B_0 \subseteq B_{\mathbf{e},1} \subseteq \dots \subseteq B_\infty = K^*.$$

Очевидно, что $B_0 = U_{\frac{pe}{p-1}, K} \cdot (K^*)^p$, где $e = e_K$. Далее, легко получить, что

$$B_{c,i} = \begin{cases} U_{\frac{pe}{p-1}-i, k} B_0, & i < \frac{pe}{p-1}, \\ k^* B_0, & i \geq \frac{pe}{p-1}. \end{cases}$$

Если K стандартное, то $B_{i,i}$ порождается $k^* B_0$ и всеми элементами вида $1 + \pi^j a p^m$, где $j \geq 0$, $a \in \mathcal{O}_K$ и m – минимальное неотрицательное целое такое, что

$$\frac{pe}{p-1} - j \leq p^m i.$$

§ 3. Тонкая теория ветвления

Предположим, что на алгебраическом замыкании поля вычетов K также задано нормирование $w: (\overline{K}^{\text{sep}})^* \rightarrow \mathbb{Q}$ такое, что ограничение w на $\overline{K}$ – дискретное нормирование. Ясно, что ограничение w на максимальное совершенное подполе $\overline{K}$ – тривиальное нормирование. Основным примером служит двумерное локальное поле K . В этом случае $\overline{K}$ – это поле рядов Лорана над совершенным полем F . В качестве w можно взять продолжение нормирования, имеющегося на $\overline{K}$, на поле $\overline{K}^{\text{sep}}$. Другой пример – двумерное локально-глобальное поле, т.е. $\overline{K}$ – поле алгебраических функций одной переменной над совершенным полем. (В этом случае имеется много неэквивалентных нормирований w .)

Теперь определим каноническое (с точностью до выбора базового подполя и до выбора w) нормирование $\mathbf{v}_0$ ранга 2 на K .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть k – подполе констант в K . Тогда существует единственное нормирование $\mathbf{v}_0 = (v_1, v_2): (K^{\text{alg}})^* \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ такое, что $v_2(a) = v_0(a)$ при всех $a \in K^*$, $v_1(u) = w(\overline{u})$ при всех $u \in U_{K^{\text{alg}}}$ и $\mathbf{v}_0(c) = (0, v_0(c))$ при всех $c \in k$. Группа значений $\mathbf{v}_0|_{K^*}$ изоморфна $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π_0 – простой элемент k_0 . Для $a \in K^{\text{alg}}$ пусть $v_0(a) = m/n$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\pi_0^{-m} a^n \in U_{K^{\text{alg}}}$ и мы видим, что единственное возможное значение $\mathbf{v}_0(a)$ – это $(w(\pi_0^{-m} a^n)/n, m/n)$. Группа значений $\mathbf{v}_0|_{K^*}$ порождается $\mathbf{v}_0(\pi)$ и $(1, 0)$, где π – простой элемент K .

Введем индексное множество

$$\mathbb{I}_2 = \mathbb{I} \cup \{(i_1, i_2) \mid i_1, i_2 \in \mathbb{Q}, i_2 > 0\}.$$

Продолжим на $\mathbb{I}_2$ отношение порядка, имеющееся на $\mathbb{I}$, полагая

$$(\mathbf{i}, i_2) < (i_1, i_2) < (i'_1, i_2) < (\mathbf{i}, i'_2)$$

при всех $i_2 < i'_2$, $i_1 < i'_1$.

Перейдем к определению G_{i_1, i_2} , где G – группа Галуа данного конечного расширения Галуа L/K . Предположим сперва, что K_c стандартное и L/K_c свирепо разветвлено. Пусть $t \in \mathcal{O}_L$, $\overline{t} \notin \overline{L}^p$. Полагаем по определению

$$G_{i_1, i_2} = \left\{ g \in \text{Gal}(L/K_c) \mid \mathbf{v}_0 \left(\frac{g(t)}{t} - 1 \right) \geq (i_1, i_2) \right\},$$

где $i_1, i_2 \in \mathbb{Q}$, $i_2 > 0$.

Заметим, что $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_{K_{\mathbf{c}}}[t]$, откуда видно, что из $\mathbf{v}_0(g(t)t^{-1} - 1) \geq (i_1, i_2)$ следует $\mathbf{v}_0(g(a)a^{-1} - 1) \geq (i_1, i_2)$ при всех $a \in \mathcal{O}_L$, $a \neq 0$. Это доказывает независимость G_{i_1, i_2} от выбора t .

В общем случае выберем l'/l так, что $l'K_{\mathbf{c}}$ стандартное и $l'L/l'K_{\mathbf{c}}$ свирепо разветвлено; положим

$$G_{i_1, i_2} = \text{Gal}(l'L/l'K_{\mathbf{c}})_{i_1, i_2}.$$

Как в §1, мы видим, что G_{i_1, i_2} не зависит от выбора l' . (Следовательно, играет роль только выбор k_0 и w .)

Будем говорить, что $\alpha \in \mathbb{I}_2$ – скачок для L/K , если $G_{\alpha} \neq G_{\beta}$ при всех $\beta > \alpha$. Легко видеть, что любой скачок равен либо -1 , либо 0 , либо $(\mathbf{c}, i)$ с целым i , либо (i_1, i_2) .

Как и в п. 1.3, строятся функции Хассе–Эрбрана $\Phi_{2, L/K}: \mathbb{I}_2 \rightarrow \mathbb{I}_2$ и $\Psi_{2, L/K} = \Phi_{2, L/K}^{-1}$, которые продолжают Φ и Ψ соответственно. А именно

$$\begin{aligned} \Phi_{2, L/K}((i_1, i_2)) &= \int_{(0,0)}^{(i_1, i_2)} |\text{Gal}(L/K)_t| dt \\ &= \sum_{i=1}^m (h_i - h_{i-1}) |\text{Gal}(L/K)_{h_i}| + ((i_1, i_2) - h_m) |\text{Gal}(L/K)_{i_1, i_2}|, \end{aligned}$$

где $h_1 < \dots < h_m$ – это все скачки для L/K между $(0, 0)$ и (i_1, i_2) , $h_0 = (0, 0)$.

Утверждения пп. 1.2–1.4 остаются в силе, если заменить $\mathbb{I}$, Φ , Ψ на $\mathbb{I}_2$, Φ_2 , Ψ_2 соответственно. В дальнейшем мы будем писать Φ и Ψ вместо Φ_2 и Ψ_2 .

§4. Подгруппы S_{α} в $U(1)K_2^{\text{top}}K$

В оставшейся части статьи K обозначает двумерное локальное поле (см. п. 0.3) такое, что $\text{char } K = p$. Зафиксируем в K базовое подполе. Подполе констант поля K обозначим через k .

Зафиксируем дискретное нормирование ранга 1 на первом поле вычетов поля K . У него есть единственное продолжение до нормирования $w: (\overline{K}^{\text{alg}})^* \rightarrow \mathbb{Q}$. Мы не требуем $w(\overline{K}^*) \subset \mathbb{Z}$. Тогда определено нормирование $\mathbf{v}_0 = (v_1, v_2): (K^{\text{alg}})^* \rightarrow \mathbb{Q}^2$, см. §3. Пусть t, π – локальные параметры поля K . Введем матрицу

$$\mathbf{e}_{\pi, t} = \begin{pmatrix} v_1(t) & v_2(t) \\ v_1(\pi) & v_2(\pi) \end{pmatrix}^{-1}.$$

Легко видеть, что нормирование $\mathbf{v}_K: K^* \rightarrow \mathbb{Z}^2$, которое ассоциировано с π и t , можно записать в виде $\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_0|_K \cdot \mathbf{e}_{\pi, t}$. В большинстве случаев мы не будем упоминать явно, что мы зафиксировали некоторые локальные параметры t, π в K .

Иногда будем использовать обозначение $U_{\alpha, K}$ для $\{u \in K \mid \mathbf{v}_0(u - 1) \geq \alpha\}$.

Введем подгруппы

$$\begin{aligned} Q_{\alpha} &= Q_{\alpha, K} = \langle \{c, u\} \mid c \in k, u \in K, \mathbf{v}_0(u - 1) \geq \alpha \rangle \subset U(1)K_2^{\text{top}}K, \\ Q_{\alpha}^{(n)} &= \{a \in U(1)K_2^{\text{top}}K \mid p^n a \in Q_{\alpha}\}, \\ S_{\alpha} &= S_{\alpha, K} = \text{Cl} \bigcup_{n \geq 0} Q_{p^n \alpha}^{(n)}, \end{aligned}$$

где $\alpha \in \mathbb{Q}_+^2$, $n \geq 0$.

Чтобы проверить, что S_α является подгруппой в $U(1)K_2^{\text{top}}K$, заметим, что $pQ_\alpha \subset Q_{p\alpha}$. Следовательно, $Q_\alpha^{(n)} \subset Q_{p\alpha}^{(n+1)}$ при всех n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть K стандартное, π, t – такие локальные параметры K , что π является константой. Тогда следующие элементы $U(1)K_2^{\text{top}}K$ топологически порождают S_α :

$$\begin{aligned} p^{r_{ij}}\{\pi, 1 + \theta\pi^i t^j\}, & \quad \theta \in B, \quad (j, p) = 1, \\ p^{r_{ij}}\{t, 1 + \theta\pi^i t^j\}, & \quad \theta \in B, \quad (i, p) = 1, \quad (j, p) \neq 1, \quad j \neq 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где B – некоторый фиксированный $\mathbb{F}_p$ -базис последнего поля вычетов поля K , $r_{ij} = r_{ij}(\alpha)$ обозначает наименьшее неотрицательное целое число такое, что $p^{r_{ij}}(j, i) \geq p^{v_p(j)}\alpha\mathbf{e}_{\pi, t}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. В условиях предложения 4.1 подгруппа $pS_{\alpha/p}$ в совокупности со следующими элементами $U(1)K_2^{\text{top}}K$

$$\begin{aligned} \{\pi, 1 + \theta\pi^i t^j\}, & \quad \theta \in B, \quad p \nmid j, \quad (j, i) \geq \alpha\mathbf{e}_{\pi, t}, \\ \{t, 1 + \theta\pi^i t^j\}, & \quad \theta \in B, \quad p \nmid i, \quad p \mid j, \quad (j, i) \geq p^{v_p(j)}\alpha\mathbf{e}_{\pi, t}, \end{aligned}$$

топологически порождает S_α .

(Можно сказать, что перечисленные элементы являются топологическими образующими S_α по модулю $pS_{\alpha/p}$.)

СЛЕДСТВИЕ 4.3. В условиях предложения 4.1 пусть

$$a_{ij\theta} = \begin{cases} \{\pi, u_{ij\theta}\}, & \theta \in B, \quad p \nmid j, \quad (j, i) \geq \alpha\mathbf{e}_{\pi, t}, \\ \{t, u_{ij\theta}\}, & \theta \in B, \quad p \nmid i, \quad p \mid j, \quad (j, i) \geq p^{v_p(j)}\alpha\mathbf{e}_{\pi, t}, \end{cases}$$

где $u_{ij\theta} \equiv 1 + \theta\pi^i t^j \pmod{U_K(j+1, i)}$. Предположим, что все $a_{ij\theta}$ лежат в S_α и $u_{ij\theta}$ образуют часть системы топологических образующих K^* . Тогда все $a_{ij\theta}$ являются топологическими образующими S_α по модулю $pS_{\alpha/p}$.

Далее, при фиксированном t для любых $j \neq 0$ и $i > 0$ обозначим

$$W_{ij} = W_{ij, K} = \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu t^{\nu j} \mid c_\nu \in k, \quad v_k(c_\nu) \geq \nu i \right\}.$$

Очевидно, W_{ij} – подгруппа в K^* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть $K = k\{\{t\}\}$, π – простой элемент k , $\alpha \in \mathbb{Q}_+^2$, $j \neq 0$, $i > 0$, $(j, i) \geq p^{v_p(j)}\alpha\mathbf{e}_{\pi, t}$. Тогда для любого $u \in W_{ij}$ имеем $\{t, u\} \in S_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЙ 4.1 и 4.4. Обозначим через A_α^0 подгруппу $U(1)K_2^{\text{top}}K$, порожденную всеми элементами (4.1), и положим $A_\alpha = \text{Cl } A_\alpha^0$. Обозначим $B_d = \{\theta p^d \mid \theta \in B\}$, $d \geq 0$. Это также $\mathbb{F}_p$ -базис F .

Шаг 1. $A_\alpha \subset S_\alpha$.

Пусть $(i, p) = 1$, $(j, p) \neq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \{\pi, 1 + \theta \pi^i t^j\} &= i^{-1} \{\pi^i, 1 + \theta \pi^i t^j\} \\ &= i^{-1} \{-\theta t^j, 1 + \theta \pi^i t^j\} \\ &= i^{-1} j \{t, 1 + \theta \pi^i t^j\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

откуда $p^{v_p(j)} \{t, 1 + \theta \pi^i t^j\} \in Q_\beta$, $\beta = (j, i) \mathbf{e}_{\pi, t}^{-1}$. Если $r_{ij} \leq v_p(j)$, имеем

$$p^{r_{ij}} \{t, 1 + \theta \pi^i t^j\} \in Q_\beta^{(v_p(j) - r_{ij})} \subset S_{p^{r_{ij} - v_p(j)} \beta} \subset S_\alpha.$$

Если $r_{ij} > v_p(j)$, имеем

$$p^{r_{ij}} \{t, 1 + \theta \pi^i t^j\} \in p^{r_{ij} - v_p(j)} Q_\beta \subset Q_{p^{r_{ij} - v_p(j)} \beta} \subset S_\alpha.$$

Аналогично, при $(j, p) = 1$ имеем

$$p^{r_{ij}} \{\pi, 1 + \theta \pi^i t^j\} \in p^{r_{ij}} Q_\beta \subset Q_{p^{r_{ij}} \beta} \subset S_\alpha.$$

Следовательно, $A_\alpha^0 \subset S_\alpha$ и $A_\alpha \subset S_\alpha$.

Шаг 2. Элементы $p^{r_{ij}} \{\pi, 1 + \theta \pi^i t^j\}$ и $p^{r_{ij}} \{t, 1 + \theta \pi^i t^j\}$ лежат в A_α при всех $i > 0$, $j \neq 0$ и $\theta \in B_d$, $d = \min(v_p(i), v_p(j))$.

Если $(i, p) = 1$, $(j, p) \neq 1$, символ $p^{r_{ij}} \{t, 1 + \theta \pi^i t^j\}$ является кратным $p^{r_{ij}} \{t, 1 + \theta \pi^i t^j\}$, см. (4.2). Случай $(j, p) = 1$ аналогичен. Если $d = \min(v_p(i), v_p(j)) > 0$, $i = p^d i_0$ и $j = p^d j_0$, имеем $r_{i_0 j_0} = r_{ij}$ и для $\tau = \pi, t$

$$p^{r_{ij}} \{\tau, 1 + \theta \pi^i t^j\} = p^d \cdot p^{r_{i_0 j_0}} \{\tau, 1 + \theta_0 \pi^{i_0} t^{j_0}\} \in A_\alpha.$$

Шаг 3. Элементы $\{t, u\}$ (из предложения 4.4) принадлежат A_α .

Любой элемент W_{ij} можно записать в виде бесконечного произведения $1 + \theta \pi^m t^{nj}$, $m \geq ni > 0$, $\theta \in B_d$, $d = \min(v_p(m), v_p(ni))$. Имеем

$$(nj, m) \geq (nj, ni) \geq np^{v_p(j)} \alpha \mathbf{e}_{\pi, t} \geq p^{v_p(n)} p^{v_p(j)} \alpha \mathbf{e}_{\pi, t} = p^{v_p(nj)} \alpha \mathbf{e}_{\pi, t}.$$

Следовательно, $r_{m, nj} = 0$ и $\{t, 1 + \theta \pi^m t^{nj}\}$ лежат в A_α согласно шагу 2.

Шаг 4. Из $Q_\alpha \subset A_\alpha$ (при всех α) следует $S_\alpha \subset A_\alpha$.

В самом деле, A_α состоит из всех $a \in U(1)K_2^{\text{top}}K$ таких, что в стандартном разложении a (как в предложении 0.9) выполнено $v_p(c_{ij\theta}) \geq r_{ij}(\alpha)$, $j \neq 0$, и $c_{ij\theta} = 0$, $j = 0$. Поскольку $\max(r_{ij}(p^n \alpha), n) = r_{ij}(\alpha) + n$, мы получаем

$$A_{p^n \alpha} \cap p^n U(1)K_2^{\text{top}}K = p^n A_\alpha.$$

Следовательно, из $Q_\alpha \subset A_\alpha$ следует $Q_{p^n \alpha}^{(n)} \subset A_\alpha$.

Шаг 5. $Q_\alpha \subset A_\alpha$.

Группа Q_α топологически порождается $\{\pi, 1 + \theta\pi^i t^j\}$ и $\{1 + \eta\pi^r, 1 + \theta\pi^i t^j\}$, где $\theta, \eta \in B$, $(j, i) \geq \alpha e_{\pi, t}$, а r – любое натуральное число. Необходимо проверить, что эти элементы лежат в A_α .

Если $j = 0$, то все эти элементы равны нулю, поскольку $K_2^{\text{top}} k = 0$ (см. [18; теорема 1]). Таким образом, можно считать $j \neq 0$. Мы можем также свести задачу к случаю $p \nmid (i, j)$. В самом деле, если $\min(v_p(i), v_p(j)) = d > 0$, имеем

$$\{\pi, 1 + \theta\pi^i t^j\} = p^d \{\pi, 1 + \theta p^{-d} \pi^{i_0} t^{j_0}\} \in p^d A_{\alpha/p^d} \subset A_\alpha$$

и то же самое для $\{1 + \eta\pi^r, 1 + \theta\pi^i t^j\}$.

Если $(j, p) = 1$, имеем $r_{ji}(\alpha) = 0$, и $\{\pi, 1 + \theta\pi^i t^j\}$ представляет собой в точности один из элементов (4.1). Если $(j, p) \neq 1$, имеем $r_{ji}(\alpha) \leq v_p(j)$, и согласно (4.2) $\{\pi, 1 + \theta\pi^i t^j\}$ будет кратным $p^{r_{ij}} \{t, 1 + \theta\pi^i t^j\}$, т.е. одного из элементов (4.1).

Наконец, по лемме 0.5

$$\begin{aligned} \{1 + \eta\pi^r, 1 + \theta\pi^i t^j\} &= -\{1 + \theta\pi^i t^j, 1 + \eta\pi^r\} \\ &= -\{-\theta\pi^i t^j(1 + \eta\pi^r), w\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$w = 1 + \frac{\theta\eta\pi^{i+r}t^j}{1 + \theta\pi^i t^j} \in W_{ij} \cap U_K(i+r).$$

Символ $\{-\theta, w\}$ бесконечно делим и, следовательно, равен нулю в $K_2^{\text{top}} K$. Получаем

$$\{1 + \eta\pi^r, 1 + \theta\pi^i t^j\} = -i\{\pi, w\} - j\{t, w\} - \{1 + \eta\pi^r, w\}.$$

Мы уже знаем из предыдущего абзаца, что $\{\pi, w\} \in A_\alpha$. Далее, $j\{t, w\}$ является кратным $p^{v_p(j)}\{t, w\}$ и $\{t, w\} \in A_{\alpha/p^{v_p(j)}}$ по шагу 3. Следовательно, $j\{t, w\} \in p^{v_p(j)} A_{\alpha/p^{v_p(j)}} \subset A_\alpha$. Применяя то же самое преобразование (4.3) к $\{1 + \eta\pi^r, w\}$, мы разлагаем $\{1 + \eta\pi^r, 1 + \theta\pi^i t^j\}$ в сходящуюся сумму элементов A_α .

§ 5. Поведение S_α в некоторых типах расширений

5.1. В этом параграфе мы считаем, что K представляет собой равнохарактеристическое двумерное локальное поле со следующим дополнительным свойством.

(*) Пусть L/K – любое конечное неразветвленное расширение. Тогда расширение l/k также неразветвленное, где k и l обозначают подполя констант полей K и L соответственно.

Класс таких полей стабилен относительно перехода к константному или неразветвленному расширению. Однако почти константные расширения поля K не обязаны обладать тем же свойством; в этом легко убедиться, присоединив корень многочлена $X^p - X - \pi^{-1} - t$ к $\mathbb{F}_p((\pi))\{\{t\}\}$. Отметим, что любое стандартное поле обладает свойством (*).

Из условия (*) и предложения 0.1 легко следует, что некоторое константное число несепабельное расширение K является стандартным.

Целью этого параграфа является доказательство следующих трех утверждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть L/K – неразветвленное расширение, и пусть $\alpha \in \mathbb{Q}_+^2$. Тогда $N_{L/K}S_{\alpha,L} = S_{\alpha,K}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть L/K – константное вполне разветвленное расширение, и пусть $\alpha \in \mathbb{Q}_+^2$. Тогда $N_{L/K}S_{\alpha,L} = S_{\alpha,K}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть K стандартное, L/K – циклическое свирепое разветвленное расширение степени p , имеющее в нижней нумерации скачок ветвления h , и пусть $\alpha \in \mathbb{Q}_+^2$. Тогда

- 1) $N_{L/K}S_{\alpha,L} = S_{\alpha+(p-1)h,K}$, если $\alpha > h$;
- 2) $N_{L/K}S_{\alpha,L}$ – подгруппа в $S_{p\alpha,K}$, если $\alpha \leq h$;
- 3) $(S_{p\alpha,K} : N_{L/K}S_{\alpha,L}) = p$, если $\alpha \leq h$, а последнее поле вычетов поля K квазиконечное.

Для доказательства удобно ввести обозначение $S_{\alpha,K}^0 = \bigcup_{n \geq 0} Q_{p^n \alpha}^{(n)}$. Тогда $S_{\alpha,K} = \text{Cl } S_{\alpha,K}^0$ и, чтобы доказать, скажем, предложение 5.1, достаточно проверить, что в условиях предложения группа $N_{L/K}S_{\alpha,L}^0$ плотна в $S_{\alpha,K}$.

5.2. Пусть L/K – конечное расширение. Поскольку в $VK_2^{\text{top}}K$ нет кручения, естественное отображение $VK_2^{\text{top}}K \rightarrow VK_2^{\text{top}}L$ инъективно, и можно отождествить $VK_2^{\text{top}}K$ с подгруппой в $VK_2^{\text{top}}L$.

ЛЕММА 5.4. Пусть L/K – несепабельное степени p . Тогда

$$VK_2^{\text{top}}K \subset pVK_2^{\text{top}}L.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L/K вполне разветвлено. Пусть π, t – локальные параметры в L . Тогда π^p, t – локальные параметры в K . В $VK_2^{\text{top}}K$ можно выбрать систему топологических образующих вида $\{\pi^p, 1 + \theta(\pi^p)^i t^j\}$, $p \nmid j$, и $\{t, 1 + \theta(\pi^p)^i t^j\}$, $p \mid j$. Очевидно, все эти образующие лежат в $pVK_2^{\text{top}}L$.

В случае свирепо разветвленного расширения доказательство аналогично, но π и t меняются ролями.

ЛЕММА 5.5. Пусть L/K – несепабельное константное расширение степени p . Тогда $S_{\alpha,K}^0 \subset S_{p\alpha,L}^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что $Q_{\alpha,K} \subset Q_{p\alpha,L}$. Пусть l и k – подполя констант в L и K соответственно. Тогда $k = l^p$,

$$\begin{aligned} Q_{\alpha,K} &= \langle \{c^p, u\} \mid c \in l, u \in K, \mathbf{v}_0(u-1) \geq \alpha \rangle \\ &\subset \langle \{c^p, u\} \mid c \in l, u \in L, \mathbf{v}_0(u-1) \geq \alpha \rangle \\ &= \langle \{c, u^p\} \mid c \in l, u \in L, \mathbf{v}_0(u-1) \geq \alpha \rangle \\ &\subset \langle \{c, u\} \mid c \in l, u \in L, \mathbf{v}_0(u-1) \geq p\alpha \rangle \\ &= Q_{p\alpha,L}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. Пусть L/K – константное чисто несепабельное вполне разветвленное расширение, и пусть $\alpha \in \mathbb{Q}_+^2$. Тогда $N_{L/K}S_{\alpha,L} = S_{\alpha,K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать $[L : K] = p$. Пусть π – простой элемент в подполе констант поля L . Имеем

$$\begin{aligned} N_{L/K}(pQ_{\alpha,L}) &= N_{L/K}(\langle \{c^p, u\} \mid c \in l, u \in L, \mathbf{v}_0(u-1) \geq \alpha \rangle) \\ &= \langle \{c^p, u^p\} \mid c \in l, u \in L, \mathbf{v}_0(u-1) \geq \alpha \rangle \\ &\subset \langle \{c^p, u\} \mid c \in l, u \in K, \mathbf{v}_0(u-1) \geq p\alpha \rangle \\ &= Q_{p\alpha,K}, \end{aligned}$$

откуда $N_{L/K}Q_{\alpha,L} \subset S_{\alpha,K}$ и $N_{L/K}S_{\alpha,L} \subset S_{\alpha,K}$ при всех $\alpha \in \mathbb{Q}_+^2$. Обратно, пусть $a \in S_{\alpha,K}^0$. Тогда $a = pb = N_{L/K}b$, $b \in VK_2^{\text{top}}L$ по лемме 5.4. По лемме 5.5 $pb \in S_{p\alpha,L}^0$, откуда $b \in S_{\alpha,L}^0$.

5.3. Доказательство предложения 5.1. По предложению 0.1 и условию $(*)$ существует чисто несепарабельное константное расширение K'/K такое, что K' стандартное. Ввиду предложения 5.6 можно считать без потери общности, что $K' = K = k\{\{t\}\}$, $L = l\{\{t\}\}$. Зафиксируем простой элемент $\pi \in k$, он будет также простым элементом в l .

Чтобы доказать, что $N_{L/K}S_{\alpha,L} \subset S_{\alpha,K}$, достаточно проверить, что нормы всех стандартных топологических образующих $N_{L/K}S_{\alpha,L}$ (как в предложении 4.1) принадлежат $S_{\alpha,K}$. Поскольку $p^r S_{\alpha/p^r,K} \subset S_{\alpha,K}$, можно рассматривать только случай $r_{ij} = 0$. Для $(j, i) \geq \alpha \mathbf{e}_{\pi,t}$ имеем

$$N_{L/K}\{\pi, 1 + \theta\pi^i t^j\} = \{\pi, N_{L/K}(1 + \theta\pi^i t^j)\} \in Q_{\alpha,K} \subset S_{\alpha,K}$$

по определению $Q_{\alpha,K}$. Далее, при $(j, i) \geq p^{v_p(j)}\alpha \mathbf{e}_{\pi,t}$ имеем

$$N_{L/K}\{t, 1 + \theta\pi^i t^j\} = \{t, N_{L/K}(1 + \theta\pi^i t^j)\} \in S_{\alpha,K}.$$

В самом деле, все сопряженные с $1 + \theta\pi^i t^j$ лежат в $W_{ij,L}$, откуда $N_{L/K}(1 + \theta\pi^i t^j) \in W_{ij,L} \cap K = W_{ij,K}$, и мы можем применить предложение 4.4.

Обратно, чтобы доказать, что $S_{\alpha,K} \subset N_{L/K}S_{\alpha,L}$, достаточно проверить, что все стандартные топологические образующие $S_{\alpha,K}$ лежат в $N_{L/K}S_{\alpha,L}$ (см. предложение 0.8). Вновь все легко сводится к случаю $r_{ij} = 0$. Имеем $1 + \theta\pi^i t^j \in N_{L/K}U_L(j, i)$, откуда

$$\{\pi, 1 + \theta\pi^i t^j\} \in N_{L/K}Q_{\alpha,L} \subset N_{L/K}S_{\alpha,L}$$

при $(j, i) \geq \alpha \mathbf{e}_{\pi,t}$. Чтобы убедиться, что $\{t, 1 + \theta\pi^i t^j\} \in N_{L/K}S_{\alpha,L}$ при $(j, i) \geq p^{v_p(j)}\alpha \mathbf{e}_{\pi,t}$, заметим, что нормы топологических образующих $W_{ij,L}$ топологически порождают $W_{ij,K}$, откуда $N_{L/K}W_{ij,L} = W_{ij,K}$.

5.4. Доказательство предложения 5.2. Пусть L/K – константное вполне разветвленное расширение. Обозначим через $\tilde{L}/K$ нормальное замыкание L/K , через K'/K – максимальное неразветвленное подрасширение в $\tilde{L}/K$ и через L'/L – максимальное неразветвленное подрасширение в $\tilde{L}/L$. По предложению 5.1 $S_{\alpha,L} = N_{L'/L}S_{\alpha,L'}$, $S_{\alpha,K} = N_{K'/K}S_{\alpha,K'}$ и достаточно доказать предложение для $\tilde{L}/L'$ и $\tilde{L}/K'$.

Следовательно, можно считать, что L/K нормальное и, далее, что L/K циклическое простой степени. Как и в п. 5.3, существует чисто несепарабельное константное расширение K'/K такое, что K' стандартное. Ввиду предложения 5.6 можно без потери общности предположить, что $K' = K$.

Пусть π, t – локальные параметры в L такие, что π – константа. Тогда π_0, t – локальные параметры в K , где $\pi_0 = N_{L/K}\pi$; имеем $K = k\{\{t\}\}$.

Начнем со случая $[L : K] = p$. Пусть скачок ветвления расширения L/K равен (c, h) .

Сперва докажем, что $N_{L/K}S_{\alpha,L} \subset S_{\alpha,K}$. Заметим, что группа $\{\{\pi, u\} \mid v_0(u-1) \geq \alpha\}$ топологически порождена

$$\begin{aligned} \{\pi, 1 + \theta\pi_0^i t^j\}, \quad (j, pi) \geq \alpha e_{\pi,t}, \\ \{\pi, 1 + \theta\pi^i t^j\}, \quad (i, p) = 1, \quad (j, i) \geq \alpha e_{\pi,t}. \end{aligned}$$

Из предложения 4.1 следует, что $S_{\alpha,L}$ топологически порождена этими элементами и всеми $p^{r_{ij}}\{t, 1 + \theta\pi^i t^j\}$ из предложения 4.1. Как и в п. 5.3, достаточно рассматривать только те (j, i) , для которых $r_{ij} = 0$. Заметим также, что из $(i, p) = 1$ следует, что $\{\pi, 1 + \theta\pi^i t^j\}$ представляет собой кратное $\{t, 1 + \theta\pi^i t^j\}$ (см. (4.2)).

Следовательно, $N_{L/K}Q_{\alpha,L}$ топологически порождена

$$N_{L/K}\{\pi, 1 + \theta\pi_0^i t^j\} = \{\pi_0, 1 + \theta\pi_0^i t^j\}, \quad (j, pi) \geq \alpha e_{\pi,t} \quad (\text{т.е. } (j, i) \geq \alpha e_{\pi_0,t}),$$

и

$$\begin{aligned} N_{L/K}\{t, 1 + \theta\pi^i t^j\} &= \{t, N_{L/K}(1 + \theta\pi^i t^j)\} \\ &= \left\{t, 1 + \sum_{\nu=1}^p c_\nu t^{\nu j}\right\}, \quad (i, p) = 1, \quad (j, i) \geq v_p(j)\alpha e_{\pi,t}. \end{aligned}$$

Здесь $c_\nu \in k$, $v_k(c_\nu) \geq \frac{1}{p}(\nu i + (p-1)h)$, $\nu = 1, \dots, p-1$; $v_k(c_p) = i$. Тогда из предложения 4.4 следует, что $N_{L/K}\{t, 1 + \theta\pi^i t^j\} \in S_{\alpha,K}$ (заметим, что $(j, i/p) \geq v_p(j)\alpha e_{\pi_0,t}$).

Остается доказать, что $N_{L/K}S_{\alpha,L}$ плотна в $S_{\alpha,K}$. Ввиду предложения 0.8 достаточно доказать, что $N_{L/K}S_{\alpha,L} + pS_{\alpha/p,K}$ плотна в $S_{\alpha,K}$. Для этого построим систему топологических образующих $a_{ij\theta}$ для $S_{\alpha,K}/pS_{\alpha/p,K}$, как в следствии 4.3, такую, что $a_{ij\theta} \in N_{L/K}S_{\alpha,L}$. Здесь мы наложим дополнительное ограничение на все $a_{ij\theta}$ с $v_p(i) = 0$. Пусть $j = p^m j_0$, $m = v_p(j)$. Мы потребуем, чтобы $a_{ij\theta} = \{t, u_{ij\theta}\}$, где

$$u_{ij\theta} = 1 + \sum_{\nu=p^m}^{\infty} c_\nu t^{\nu j_0}, \quad (5.1)$$

$$c_\nu \in k, v_k(c_\nu) \geq \frac{i}{p^m} \nu.$$

Применим индукцию по $v_p(j)$. Если $v_p(j) = 0$, возьмем $a_{ij\theta} = N_{L/K}\{\pi, 1 + \theta\pi_0^i t^j\}$ для всех $(j, i) \geq \alpha e_{\pi_0,t}$.

Предположим, что $a_{ij\theta}$ с $v_p(j) \leq n$ уже построены. Возьмем пару (j, i) , $v_p(j) = n+1$, $(j, i) \geq p^{n+1}\alpha e_{\pi_0,t}$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} N_{L/K}\{t, 1 + \theta\pi^i t^{j/p}\} &= \{t, N_{L/K}(1 + \theta\pi^i t^{j/p})\} \\ &= \left\{t, 1 + \sum_{r=1}^{p-1} c_r t^{rj/p} + \theta^p \pi_0^i t^j\right\}, \end{aligned}$$

где $c_r \in k$, $v_k(c_r) \geq r + (p-1)h$. Возьмем $a_{ij\eta^p} = N_{L/K}\{t, 1 + \eta\pi^i t^j/p\}$, если $(j, i) < (0, h)$. В оставшемся случае легко видеть, что для некоторых целых $m_{rs\theta}$, $r = 1, \dots, p-1$, $s \geq v_k(c_r)$, $\theta \in B$ имеем

$$N_{L/K}(1 + \eta\pi^i t^j/p) \prod_{r,s,\theta} u_{rj/p,s,\theta}^{m_{rs\theta}} \equiv 1 + \eta^p \pi_0^i t^j \pmod{U_{j+1,i,K}}.$$

Левую часть последнего соотношения можно взять в качестве $u_{ij\eta^p}$. Непосредственно видно, что при этом окажется выполнено (5.1), и мы положим $a_{ij\eta^p} = \{t, u_{ij\eta^p}\}$.

Тогда все полученные $a_{ij\theta}$ принадлежат $N_{L/K}S_{\alpha,L}$; они топологически порождают факторгруппу $S_{\alpha,K}/pS_{\alpha/p,K}$ по следствию 4.3.

Остается рассмотреть случай $[L : K] = q \neq p$. Поскольку $Q_{\alpha,K} = qQ_{\alpha,K}$, имеем

$$S_{\alpha,K} = qS_{\alpha,K} = N_{L/K}S_{\alpha,K} \subset N_{L/K}S_{\alpha,L}.$$

Обратное можно доказать как в п. 5.3.

5.5. Доказательство предложения 5.3. Пусть π и t — локальные параметры в L . Тогда π и $t_0 = N_{L/K}t$ — локальные параметры в K .

Сперва докажем, что $N_{L/K}S_{\alpha,L} \subset S_{p\alpha,K}$ при $\alpha \leq h$. Достаточно проверить, что $N_{L/K}(S_{\alpha,L}/pS_{\alpha/p,L}) \subset S_{p\alpha,K}/pS_{\alpha,K}$. Факторгруппа $S_{\alpha,L}/pS_{\alpha/p,L}$ порождается классами $N_{L/K}\{\pi, 1 + \theta\pi^i t^j\}$, $(j, i) \geq \alpha\mathbf{e}_{\pi,t}$, и $N_{L/K}\{t, 1 + \theta\pi^i t_0^j\}$, $(j, i) \geq p^{v_p(j)+1}\alpha\mathbf{e}_{\pi,t}$; здесь используется предложение 4.4. Имеем

$$\begin{aligned} N_{L/K}\{\pi, 1 + \theta\pi^i t^j\} &= \{\pi, N_{L/K}(1 + \theta\pi^i t^j)\} \in S_{p\alpha,K}, \\ N_{L/K}\{t, 1 + \theta\pi^i t_0^j\} &= \{t_0, 1 + \theta\pi^i t_0^j\} \in S_{p\alpha,K}. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что $N_{L/K}S_{\alpha,L} \subset S_{\alpha+(p-1)h}$ при $\alpha \geq h$.

Далее, имеем $N_{L/K}Q_{\alpha,L} = Q_{\alpha+(p-1)h,K}$ при всех $\alpha > h$. Пусть $n > 0$. Введем обозначение $K_n = k\{\{t_0^{p^n}\}\} \subset K$, $L_n = k\{\{t^{p^n}\}\} \subset L$, где k — подполе констант поля K . Тогда L_n/K_n — свирепое разветвленное расширение со скачком ветвления $p^n h$. Следовательно,

$$p^n N_{L/K}Q_{p^n \alpha, L}^{(n)} = N_{L_n/K_n}Q_{p^n \alpha, L_n} = Q_{p^n \alpha + (p-1)p^n h, K_n} = p^n Q_{p^n \alpha + p^n (p-1)h, K}^{(n)},$$

откуда $N_{L/K}Q_{p^n \alpha, L}^{(n)} = Q_{p^n \alpha + p^n (p-1)h, K}^{(n)}$. Поскольку все $Q_{p^n \alpha, L}^{(n)}$ топологически порождают $S_{\alpha,K}$, мы получаем, что $N_{L/K}S_{\alpha,L} = S_{\alpha+(p-1)h,K}$ при всех $\alpha > h$.

Остается доказать третью часть предложения. Пусть последнее поле вычетов поля K квазиконечно. Тогда отображение

$$N_{L/K} : U_L(j, i)/U_L(j+1, i) \rightarrow U_K(j, pi)/U_K(j+1, pi)$$

при $(j, i) = \alpha\mathbf{e}_{\pi,t}$ имеет коядро порядка p . Пусть $u \in U_K(j, pi)$ порождает это коядро. Тогда $\{\pi, u\} \notin N_{L/K}K_2^{\text{top}}L$ и $\{\pi, u\} \in Q_{h,K} \subset S_{\alpha,K}$ при всех $\alpha \leq h$. Это показывает, что $(S_{p\alpha,K} : N_{L/K}S_{\alpha,L}) \geq p$ при $\alpha \leq h$.

Если воспользоваться подполями K_n и L_n , мы легко вычислим все $N_{L/K}\{\pi, 1 + \theta\pi^i t^j\}$ и $N_{L/K}\{t, 1 + \theta\pi^i t_0^j\}$. Получаем, что $N_{L/K}S_{\alpha,L}$ вместе с $\{\pi, u\}$ порождают $S_{p\alpha,K}$ при всех $\alpha \leq h$, откуда $(S_{p\alpha,K} : N_{L/K}S_{\alpha,L}) \leq p$ при $\alpha \leq h$.

§ 6. Фильтрация на $K_2^{\text{top}}K$ и отображение взаимности

В этом параграфе K – двумерное локальное поле с квазиконечным полем вычетов, $\text{char } K = \text{char } \bar{K} = p$.

6.1. Для любого $\alpha \in \mathbb{I}_2$ мы введем подгруппу $\text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}}K \subset K_2^{\text{top}}K$ таким образом, что $\text{Fil}_\beta K_2^{\text{top}}K \subset \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}}K$ всякий раз, когда $\alpha < \beta$. Легко видеть, что для некоторого неразветвленного расширения $\tilde{K}/K$ поле $\tilde{K}$ удовлетворяет условию (*), см. § 5. Обозначим

- $\text{Fil}_\infty K_2^{\text{top}}K = 0$;
- $\text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}}K = N_{\tilde{K}/K} S_{\alpha, \tilde{K}}$ при $\alpha \in \mathbb{Q}_+^2$;
- $\text{Fil}_{i, \alpha_2} K_2^{\text{top}}K = \text{Cl} \bigcup_{\alpha_1 \in \mathbb{Q}} \text{Fil}_{\alpha_1, \alpha_2} K_2^{\text{top}}K$ при $\alpha_2 \in \mathbb{Q}_+$;
- $\text{Fil}_{c, \infty} K_2^{\text{top}}K = T_K := \text{Cl} \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}_+^2} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}}K$;
- $\text{Fil}_{c, i} K_2^{\text{top}}K = T_K + \{\{t, u\} \mid u \in k, v(u-1) \geq i\}$ для всех $i \in \mathbb{Q}_+$, если $K = k\{\{t\}\}$ стандартное;
- $\text{Fil}_{c, i} K_2^{\text{top}}K = N_{K'/K} \text{Fil}_{c, i} K_2^{\text{top}}K'$, если K обладает свойством (*) и K' представляет собой стандартное поле, являющееся чисто несепарабельным константным расширением K ;
- $\text{Fil}_{c, i} K_2^{\text{top}}K = N_{\tilde{K}/K} \text{Fil}_{c, i} K_2^{\text{top}}\tilde{K}$ в общем случае, где $\tilde{K}/K$ представляет собой неразветвленное расширение такое, что $\tilde{K}$ удовлетворяет (*);
- $\text{Fil}_0 K_2^{\text{top}}K = U(1)K_2^{\text{top}}K + \{\{t, \theta\} \mid \theta \in \mathcal{R}_K\}$;
- $\text{Fil}_{-1} K_2^{\text{top}}K = K_2^{\text{top}}K$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Подгруппы $\text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}}K$ корректно определены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Независимость от выбора $\tilde{K}$ следует из предложения 5.1 и из того, что $N_{k''/k'} U_{i, k''} = U_{i, k'}$ для неразветвленного k''/k' . Если $u' \in U_K$, $u \in U_k(1)$, то из определения Q_α следует $\{u', u\} \in T_K$. Это доказывает независимость от выбора t . Независимость от выбора K' следует из двух наблюдений:

- 1) $N_{K''/K'} T_{K''} = T_{K'}$, если $K'' = k''\{\{t\}\}$, $K' = k'\{\{t\}\}$, k''/k' чисто несепарабельно;
- 2) если k''/k' чисто несепарабельно, то $N_{k''/k'} U_{i, k''} = U_{i, k'}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. $\bigcup_{\alpha > 0} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}}K = U(1)K_2^{\text{top}}K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидно, если K стандартное. Далее,

$$N_{K'/K} U(1)K_2^{\text{top}}K' = U(1)K_2^{\text{top}}K,$$

если K'/K чисто несепарабельное или неразветвленное.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если K стандартное, то, очевидно,

$$\text{Fil}_{c, i} K_2^{\text{top}}K = T_K + U(i)K_2^{\text{top}}K$$

для положительных целых i .

6.2. Отображение нормы в чисто несепарабельном константном расширении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Пусть L/K – конечное чисто несепарабельное константное расширение. Тогда $N_{L/K} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}}L = \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}}K$ для всех $\alpha \in \mathbb{I}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = (\mathbf{i}, \alpha_2)$ или $\alpha \in \mathbb{Q}_+^2$ см. предложение 5.2. Случаи $\alpha = -1, (\mathbf{c}, \infty), \infty$ тривиальны. При $\alpha = (\mathbf{c}, i)$ достаточно применить рассуждения доказательства предложения 6.1. Наконец, пусть $\alpha = 0$. Имеем

$$N_{L/K} U(1) K_2^{\text{top}} L = U(1) K_2^{\text{top}} K$$

и

$$N_{L/K}(\{t, \theta\}) = \{t, \theta^{p^n}\}$$

при всех $\theta \in \mathcal{R}_K = \mathcal{R}_L$, где $p^n = [L : K]$. Следовательно,

$$N_{L/K} \text{Fil}_0 K_2^{\text{top}} L = \text{Fil}_0 K_2^{\text{top}} K.$$

6.3. Отображение нормы в циклическом расширении простой степени.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Пусть L/K – циклическое расширение простой степени, $G = \text{Gal}(L/K)$, $h \in \mathbb{I}_2$ – единственный скачок ветвления для L/K (в частности, $G_h = G$). Тогда:

- 1) если $\alpha > h$, то $N_{L/K} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L = \text{Fil}_{\Phi_{L/K}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K$;
- 2) если $\alpha \leq h$, то $N_{L/K} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L$ представляет собой подгруппу в $\text{Fil}_{\Phi_{L/K}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K$ индекса $[L : K]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Сведем доказываемое предложение к случаю, когда и K , и L почти стандартные. Выберем чисто несепарабельное k'/k такое, что $K' = k'K$ и $L' = k'L$ почти стандартные. Легко видеть, что $\Phi_{L'/K'} = \Phi_{L/K}$. Предположим, что предложение справедливо для L'/K' .

Пусть $\alpha > h$. Тогда

$$\begin{aligned} N_{L/K} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L &= N_{L/K} N_{L'/L} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L' \\ &= N_{K'/K} \text{Fil}_{\Phi_{L'/K'}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K' \\ &= N_{K'/K} \text{Fil}_{\Phi_{L/K}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K' \\ &= \text{Fil}_{\Phi_{L/K}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K. \end{aligned}$$

Пусть $\alpha \leq h$. Тогда

$$\text{Fil}_{\Phi_{L'/K'}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K' \supset N_{L'/K'} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L' \supset \text{Fil}_\beta K_2^{\text{top}} K'$$

для любого $\beta > \Phi_{L'/K'}(\alpha)$. Применяя $N_{K'/K}$ к последней формуле, мы получаем в силу предложения 6.3:

$$\text{Fil}_{\Phi_{L/K}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K \supset N_{L/K} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L \supset \text{Fil}_\beta K_2^{\text{top}} K$$

для любого $\beta > \Phi_{L/K}(\alpha)$. По теории полей классов $K_2^{\text{top}} K' / N_{L'/K'} K_2^{\text{top}} L'$ – циклическая группа простой степени. Следовательно, $K_2^{\text{top}} K'$ порождается подгруппой $N_{L'/K'} K_2^{\text{top}} L'$ и элементом a , где $a \notin \text{Fil}_\beta K_2^{\text{top}} K'$ при любом $\beta > \Phi_{L/K}(\alpha)$. Следовательно, $K_2^{\text{top}} K$ порождается $N_{K'/K} a$ и $N_{K'/K} N_{L'/K'} K_2^{\text{top}} L'$. Поскольку

$$N_{K'/K} a \in N_{K'/K} \text{Fil}_{\Phi_{L/K}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K' = \text{Fil}_{\Phi_{L/K}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K',$$

мы получаем, что $(\text{Fil}_{\Phi_{L/K}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K : N_{L/K} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L) = [L : K]$.

2. Рассмотрим случай, когда K почти стандартное и $h = -1$, т.е. L/K неразветвлено. При $\alpha \geq (\mathbf{c}, \infty)$ утверждение следует прямо из определения Fil_α с использованием предложения 0.8. Случай $\alpha = (\mathbf{c}, i)$ также следует непосредственно из определения Fil_α . Далее,

$$\begin{aligned} N_{L/K} \text{Fil}_0 K_2^{\text{top}} L &= N_{L/K} (U(1) K_2^{\text{top}} L + \{t\} \cdot \mathcal{R}_L) \\ &= N_{L/K} U(1) K_2^{\text{top}} L + \{t\} \cdot N_{L/K} \mathcal{R}_L \\ &= U(1) K_2^{\text{top}} K + \{t\} \cdot \mathcal{R}_K. \end{aligned}$$

Наконец, $N_{L/K} \text{Fil}_{-1} K_2^{\text{top}} L = N_{L/K} K_2^{\text{top}} L$ является подгруппой индекса $[L : K]$ в $K_2^{\text{top}} K$ по теории полей классов.

Приведенное рассуждение также сводит предложение к случаю, когда K и L стандартные. В самом деле, поскольку K и L почти стандартные, существует неразветвленное расширение K'/K такое, что K' и $K'L$ стандартные. Мы можем, следовательно, отождествить $\text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} K$ с $S_{\alpha, K}$, а $\text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L$ с $S_{\alpha, L}$.

3. Пусть K стандартное, $h = (\mathbf{c}, H)$, $H > 0$, или $h = H = 0$. В обоих случаях L/K – константное расширение. Пусть k и l – подполя констант в K и L соответственно. Тогда l/k – циклическое расширение со скачком ветвления H . По предложению 5.2 получаем $N_{L/K} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L = \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} K$ для всех $\alpha \geq (\mathbf{c}, \infty)$. Пусть $\alpha = (\mathbf{c}, i)$ или $\alpha = 0 = i$. Тогда

$$N_{L/K} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L = N_{L/K} T_L + N_{L/K} (\{t\} \cdot U_{i,l}) = T_K + \{t\} \cdot N_{L/K} U_{i,l}.$$

Остается заметить, что $N_{L/K} U_{i,l} \subset U_{\varphi_{l/k}(i), k}$, эти группы равны при $i > H$ и $(U_{\varphi_{l/k}(i), k} : N_{L/K} U_{i,l}) = [l : k] = [L : K]$ при $i \leq H$, потому что последние поля вычетов квазиконечны.

4. В оставшемся случае L/K инфернальное. Поскольку K и L стандартные, то $L = k\{\{t\}\}$, $K = k\{\{N_{L/K} t\}\}$; L/K свирепо разветвлено, и можно применить предложение 5.3. Это доказывает предложение при $\alpha \geq (\mathbf{c}, \infty)$. При $\alpha < (\mathbf{c}, \infty)$ заметим, что $N_{L/K} (\{t\} \cdot U_{i,k}) = \{N_{L/K} t\} \cdot U_{i,k}$.

6.4. Основные теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть L/K – конечное абелево расширение, $\alpha \in \mathbb{I}_2$.

Тогда $N_{L/K} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L$ является подгруппой в $\text{Fil}_{\Phi_{L/K}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K$ индекса $|\text{Gal}(L/K)_\alpha|$. Кроме того,

$$\text{Fil}_{\Phi_{L/K}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K \cap N_{L/K} K_2^{\text{top}} L = N_{L/K} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по $[L : K]$. Если $[L : K]$ – простое число, то утверждение теоремы совпадает с предложением 6.4. В общем случае пусть h – минимальный скачок ветвления в L/K , $G'' = \bigcup_{\alpha > h} G_\alpha$, $G' \supset G''$ такова, что $(G : G')$ – простое число, $K' = L^{G'}$.

Пусть $\alpha > h$. По индуктивному предположению $N_{L/K'} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L$ является подгруппой в $\text{Fil}_{\Phi_{L/K'}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K'$ индекса $|\text{Gal}(L/K')_\alpha| = |\text{Gal}(L/K)_\alpha|$. Применяя

$N_{K'/K}$, получаем, что $N_{L/K} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L$ является подгруппой индекса не больше $|\text{Gal}(L/K)_\alpha|$ в

$$\text{Fil}_{\Phi_{K'/K}(\Phi_{L/K'}(\alpha))} K_2^{\text{top}} K = \text{Fil}_{\Phi_{L/K}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K.$$

Если этот индекс меньше чем $|\text{Gal}(L/K)_\alpha|$, мы легко получаем, что

$$(\text{Fil}_{\Phi_{L/K}(h)} K_2^{\text{top}} K : N_{L/K} \text{Fil}_h K_2^{\text{top}} L) < |\text{Gal}(L/K)_h| \cdot [K' : K] = [L : K].$$

С другой стороны, также по индукции по $[L : K]$ отображение нормы индуцирует эпиморфизм $K_2^{\text{top}} L / \text{Fil}_h K_2^{\text{top}} L$ на $K_2^{\text{top}} K / \text{Fil}_{\Phi_{L/K}(h)} K_2^{\text{top}} K$, откуда $(K_2^{\text{top}} K : N_{L/K} K_2^{\text{top}} L) < [L : K]$, получаем противоречие с теорией полей классов.

В случае $\alpha \leq h$ имеем $(\text{Fil}_{\Phi_{L/K}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K : N_{L/K} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L) \geq [L : K]$ по теории полей классов и

$$\begin{aligned} & (\text{Fil}_{\Phi_{L/K}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K : N_{L/K} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L) \\ &= (\text{Fil}_{\Phi_{L/K}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K : N_{K'/K} \text{Fil}_{\Phi_{L/K'}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K') \\ & \quad \times (N_{K'/K} \text{Fil}_{\Phi_{L/K'}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K' : N_{L/K} \text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} L) \\ & \leq [K' : K][L : K'] = [L : K]. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть L/K – конечное абелево расширение,

$$\Theta : K_2^{\text{top}} K / N_{L/K} K_2^{\text{top}} L \rightarrow \text{Gal}(L/K)$$

– отображение взаимности. Тогда

$$\Theta(\text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} K \bmod N_{L/K} K_2^{\text{top}} L) = \text{Gal}(L/K)^\alpha$$

при любом $\alpha \in \mathbb{I}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = \text{Gal}(L/K)$, $\beta < \alpha$, $K' = L^{G^\alpha}$.

Тогда $\text{Gal}(K'/K)^\alpha$ тривиальна и $\text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} K \subset N_{K'/K} \text{Fil}_{\Phi_{K'/K}(\alpha)} K_2^{\text{top}} K'$ по теореме 1. Отсюда следует

$$\Theta(\text{Fil}_\alpha K_2^{\text{top}} K \bmod N_{L/K} K_2^{\text{top}} L) \subset \text{Gal}(L/K') = \text{Gal}(L/K)^\alpha.$$

Остается сравнить индексы двух подгрупп при помощи второго утверждения в теореме 1.

Список литературы

1. *Serre J.-P.* Corps locaux. Paris: Hermann, 1968.
2. *Ломадзе В. Г.* К теории ветвления двумерных локальных полей // Матем. сб. 1979. Т. 109. № 3. С. 378–394.
3. *Nyodo O.* Wild ramification in the imperfect residue field case // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 12. P. 287–314.
4. *Паршин А. Н.* Локальная теория полей классов // Труды МИАН. 1984. Т. 165. С. 143–170.
5. *Фесенко И. Б.* Теория полей классов многомерных локальных полей нулевой характеристики с полем вычетов положительной характеристики // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 3. С. 165–196.
6. *Abrashkin V. A.* Towards explicit description of the ramification filtration in the 2-dimensional case // Proceedings of the conference “Ramification theory of arithmetic schemes”. Luminy, 1999 / ed. B. Erez (to appear); <http://maths.dur.ac.uk/pure/ps/va-mmud1.ps>.
7. *Абрашкин В. А.* Аналог гипотезы Гротендика для 2-мерных локальных полей конечной характеристики // Труды МИАН. 2003. Т. 241. С. 8–42.
8. *Epp H.* Eliminating wild ramification // Invent. Math. 1973. V. 19. P. 235–249.
9. *Жуков И. Б.* Структурная теорема для полных полей // Труды С.-Пб. матем. об-ва. 1995. Т. 3. С. 215–234.
10. *Жуков И. Б., Коротеев М. В.* Устранение высшего ветвления // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. № 6. С. 153–177.
11. *Fesenko I. B., Kurihara M. (ed.)* Invitation to higher local fields. Coventry: Geom. Topol. Publ., 2000. (Geom. Topol. Monogr. V. 3.); <http://www.maths.warwick.ac.uk/gt/gtmcontents3.html>.
12. *Жуков И. Б., Мадунц А. И.* Многомерные полные поля: топология и другие основные понятия // Труды С.-Пб. матем. об-ва. 1995. Т. 3. С. 4–46.
13. *Жуков И. Б., Мадунц А. И.* Аддитивные и мультипликативные разложения в многомерных локальных полях // Записки научн. сем. ПОМИ. 2000. Т. 272. С. 186–196.
14. *Фесенко И. Б.* Секвенциальные топологии и факторы милноровских K -групп многомерных локальных полей // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. С. 198–221.
15. *Жуков И. Б.* Милноровские и топологические K -группы многомерных полных полей // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9. № 1. С. 98–147.
16. *Fesenko I. B.* Abelian local p -class field theory // Math. Ann. 1995. V. 301. P. 561–586.
17. *Fesenko I. B., Vostokov S. V.* Local fields and their extensions: a constructive approach. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.
18. *Kahn B.* L’anneau de Milnor d’un corps local à corps résiduel parfait // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1984. V. 34. № 4. P. 19–65.

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: Igor.Zhukov@mail.ru

Поступила в редакцию
 25.05.2003