Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Белов, О свойствах суммы модулей членов сгруппированного тригонометрического ряда, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 6, 35–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7851>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 06:06:32

УДК 517.518.4

А. С. Белов

О свойствах суммы модулей членов сгруппированного тригонометрического ряда

Изучаются абсолютная сходимость сгруппированного некоторым образом тригонометрического ряда с монотонными в каждой группе коэффициентами и свойства суммы модулей членов такого ряда. Найдены необходимые и достаточные условия принадлежности этой суммы к пространствам $L_{2\pi}^p$, $p \in [1, \infty]$, и оценки сверху и снизу через коэффициенты ряда.

Библиография: 9 названий.

Ключевые слова: абсолютная сходимость, сгруппированный тригонометрический ряд.

§ 1. Введение. Основные результаты

1.1. Пусть всюду далее $\Lambda = \{N_k\}_{k=0}^\infty$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, причем $N_0 = 1$. Эту последовательность будем далее считать фиксированной. Пусть последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ обладает следующим свойством: для каждого натурального числа j конечная последовательность $\{a_n\}_{n=N_{j-1}}^{N_j-1}$ не возрастает. Подчеркнем, что далее это свойство предполагается выполненным во всех теоремах и леммах. Цель этой статьи – изучить сходимость и свойства сумм сгруппированных рядов

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n \cos(nx) \right|, \quad (1.1)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n \sin(nx) \right|, \quad (1.2)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{N_{j-1} \leq k \leq m < N_j} \left| \sum_{n=k}^m a_n \cos(nx) \right|, \quad (1.3)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{N_{j-1} \leq k \leq m < N_j} \left| \sum_{n=k}^m a_n \sin(nx) \right|. \quad (1.4)$$

Суммы рядов (1.1)–(1.4) будем обозначать через $f(x)$, $g(x)$, $f^*(x)$, $g^*(x)$ соответственно, причем в случае расходимости ряда его сумма считается равной $+\infty$. Ясно, что функции f , g , f^* , g^* являются четными и имеют период 2π . В статье также будут получены некоторые оценки сверху и снизу функций $f(x)$, $g(x)$, $f^*(x)$, $g^*(x)$ через коэффициенты рядов (1.1)–(1.4).

1.2. В § 2 будет доказана

ТЕОРЕМА 1. а) Если

$$\Delta^* = \sum_{j=1}^{\infty} (a_{N_{j-1}} - a_{N_j-1}) < +\infty, \quad (1.5)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{N_j} = +\infty, \quad (1.6)$$

то каждый из рядов (1.1)–(1.4) расходится почти всюду (п.в.) и множество всех его точек сходимости является множеством первой категории.

б) Если

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{N_j} < +\infty, \quad (1.7)$$

то ряды (1.1) и (1.3) сходятся во всех точках x не кратных 2π , а ряды (1.2) и (1.4) сходятся во всех точках x , причем на любом отрезке, не содержащем кратных 2π точек, сходимость рядов (1.1)–(1.4) равномерна.

Таким образом, при условии (1.7) функции $f(x)$, $g(x)$, $f^*(x)$, $g^*(x)$ непрерывны на интервале $(0, 2\pi)$.

1.3. Ясно, что при условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \quad (1.8)$$

каждая из функций $f(x)$, $g(x)$, $f^*(x)$, $g^*(x)$ ограничена на всей прямой суммой ряда (1.8). Очевидно, что функция f (функция f^*) ограничена на интервале $(0, \pi)$ тогда и только тогда, когда все частные суммы ряда (1.1) (ряда (1.3)) равномерно ограничены на этом интервале, т.е. тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.8).

Для краткости всюду далее при всех натуральных N будем использовать обозначения

$$S(N) = \sum_{n=1}^N a_n, \quad P(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N n a_n, \quad (1.9)$$

$$A(N) = \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq N} \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N)} a_n, \quad (1.10)$$

где при всех $j \geq 1$ обозначено

$$V_j(N) = N_{j-1} + \min(N_j - N_{j-1}, N) - 1. \quad (1.11)$$

В § 3, используя идеи из [1], будет доказано, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. а) Если выполнены условия

$$P = \sup_{N \geq 1} P(N) < +\infty, \quad (1.12)$$

$$A = \sup_{N \geq 1} A(N) < +\infty, \quad (1.13)$$

то функции g и g^* ограничены на прямой и при всех x верны оценки

$$g(x) \leq g^*(x) \leq \sqrt{2}A + 2\pi P. \quad (1.14)$$

б) Если функция g , а тем более функция g^* , ограничена на интервале $(0, \pi)$, то выполнены условия (1.7), (1.12), (1.13) и справедлива оценка

$$A + P \leq 12 \sup_x g(x). \quad (1.15)$$

Кроме того, всегда

$$\sup_x g^*(x) \leq 38 \sup_x g(x). \quad (1.16)$$

1.4. При $1 \leq p < \infty$ для функции $h \in L_{2\pi}^p$ будем, как обычно, обозначать

$$\|h\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

При натуральных j будем пользоваться обозначением

$$M_j = \min(N_{j-1}, N_j - N_{j-1}). \quad (1.17)$$

Тогда в силу (1.11)

$$V_j(N_{j-1}) = M_j + N_{j-1} - 1 = \min(N_j, 2N_{j-1}) - 1. \quad (1.18)$$

Также будем применять обозначения

$$B = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} \frac{a_n}{n - N_{j-1} + 1}, \quad (1.19)$$

$$B_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N_{j-1})} \frac{a_n}{n - N_{j-1} + 1}, \quad (1.20)$$

$$B_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{S(N)}{N(N+1)}. \quad (1.21)$$

В § 4 будут доказаны следующие теорема 3 и леммы 1 и 2.

ЛЕММА 1. Верны (см. (1.10)) оценки

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{A(N)}{N(N+1)} \leq B_1 \leq B, \quad (1.22)$$

$$B_2 \leq B \leq B_1 + 2B_2. \quad (1.23)$$

ТЕОРЕМА 3. а) Если выполнено условие

$$B < +\infty, \quad (1.24)$$

то каждая из функций f, g, f^*, g^* интегрируема на интервале $(0, \pi)$ и верны оценки

$$\|f^*\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) dx \leq \frac{9}{2}B, \quad \|g^*\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^*(x) dx \leq \frac{9}{2}B. \quad (1.25)$$

б) Если некоторая из функций g, g^*, f^* интегрируема на интервале $(0, \pi)$, то выполнено условие (1.24) и справедливы оценки

$$B \leq 19\|g\|_1, \quad B \leq 24\|f^*\|_1. \quad (1.26)$$

В частности, всегда

$$\|g^*\|_1 \leq 86\|g\|_1. \quad (1.27)$$

с) Если функция f интегрируема на интервале $(0, \pi)$ и

$$B_2 < +\infty, \quad (1.28)$$

то выполнено условие (1.24) и верна оценка

$$B \leq 2B_2 + 12\|f\|_1. \quad (1.29)$$

В частности,

$$\|f^*\|_1 \leq 9B_2 + 54\|f\|_1. \quad (1.30)$$

д) Если функция f интегрируема на интервале $(0, \pi)$ и

$$\lambda = \sup_{j \geq 1} \frac{\ln N_j}{\ln(N_{j-1} + 1)} < +\infty, \quad (1.31)$$

то выполнено условие (1.24) и верны оценки

$$B \leq 12(\lambda + 1)\|f\|_1, \quad (1.32)$$

$$\|f^*\|_1 \leq 54(\lambda + 1)\|f\|_1. \quad (1.33)$$

ЛЕММА 2. Если

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-2} (a_n - a_{n+1}) \ln(n+1) < \infty, \quad (1.34)$$

то условие (1.24) эквивалентно каждому из следующих трех условий:

$$B_2 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}} \ln(M_j + 1) < \infty, \quad (1.35)$$

$$B_2 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_j-1} \ln(M_j + 1) < \infty, \quad (1.36)$$

$$B_2 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_j-1} \ln(N_j - N_{j-1} + 1) < \infty. \quad (1.37)$$

1.5. В § 5 будут доказаны следующие теорема 4 и лемма 3.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p \in (1, \infty)$.

а) Если выполнены условия

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S(N))^p}{N(N+1)} < +\infty, \quad (1.38)$$

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A(N))^p}{N(N+1)} < +\infty, \quad (1.39)$$

то функции $f, g, f^*, g^* \in L_{2\pi}^p$ и справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \left(\max \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f^*(x))^p dx, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g^*(x))^p dx \right\} \right)^{1/p} \\ & \leq 3 \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} + \sqrt{2} \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

б) Если хотя бы одна из функций f, g, f^*, g^* принадлежит пространству $L_{2\pi}^p$, то выполнены условия (1.38), (1.39) и справедлива оценка

$$\left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} + \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} \leq \frac{2^{14} p^2}{(p-1)} \min\{\|f\|_p, \|g\|_p\}. \quad (1.41)$$

В частности,

$$\max\{\|f^*\|_p, \|g^*\|_p\} \leq C_p \min\{\|f\|_p, \|g\|_p\}, \quad (1.42)$$

где $C_p = 2^{16} p^2 / (p-1)$.

ЛЕММА 3. Пусть $p \in (1, \infty)$. Тогда справедливы оценки

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A_1(N))^p}{N(N+1)} \leq \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A(N))^p}{N(N+1)} \leq C_p \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A_1(N))^p}{N(N+1)}, \quad (1.43)$$

где $C_p = 2^{3p+3} (2^{1/p} - 1)^{-p}$ и (см. (1.17))

$$A_1(N) = \sum_{j \geq 1: M_j \geq N} \sum_{n=N_{j-1}+N-1}^{N_{j-1}+N-1} a_n. \quad (1.44)$$

В частности, условие (1.39) эквивалентно условию

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A_1(N))^p}{N(N+1)} < +\infty. \quad (1.45)$$

1.6. При $x \in (0, \pi]$ положим (см. (1.10) и (1.9))

$$F(x) = \frac{3}{2}A\left(\left[\frac{\pi}{x}\right]\right) + \frac{3}{2}S\left(2\left[\frac{\pi}{x}\right] - 1\right), \quad (1.46)$$

$$G(x) = \frac{3}{2}A\left(\left[\frac{\pi}{x}\right]\right) + 7P\left(2\left[\frac{\pi}{x}\right] - 1\right), \quad (1.47)$$

где квадратные скобки обозначают целую часть. В § 6, собирая воедино полученные в предыдущих параграфах оценки, будет доказано, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5. При всех $x \in (0, \pi]$ верны оценки

$$g(x) \leq g^*(x) \leq G(x) \leq \frac{136}{x} \int_0^x g(v) dv + 124x \int_x^\pi \frac{g(v)}{v^2} dv, \quad (1.48)$$

$$f(x) \leq f^*(x) \leq F(x) \leq \frac{36}{x} \int_0^x f(v) dv + 15x \int_x^\pi \frac{f(v)}{v^2} dv. \quad (1.49)$$

Оценки (1.48) и (1.49) показывают, что в некоторых случаях функции f и f^* (функции g и g^*) ведут себя аналогично функции F (соответственно, функции G).

1.7. Пусть последовательность неотрицательных чисел $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ такова, что все $\varepsilon_j \in [0, 1]$. Для примера рассмотрим ряды (1.1)–(1.4) с коэффициентами

$$a_n = \frac{\varepsilon_j}{n} \quad \text{при } n = N_{j-1}, \dots, N_j - 1, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.50)$$

Пусть

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^\infty \varepsilon_j \left| \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} \frac{\cos(nx)}{n} \right|, \quad (1.51)$$

$$g_0(x) = \sum_{j=1}^\infty \varepsilon_j \left| \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} \frac{\sin(nx)}{n} \right|, \quad (1.52)$$

$$f_0^*(x) = \sum_{j=1}^\infty \varepsilon_j \max_{N_{j-1} \leq k \leq m < N_j} \left| \sum_{n=k}^m \frac{\cos(nx)}{n} \right|, \quad (1.53)$$

$$g_0^*(x) = \sum_{j=1}^\infty \varepsilon_j \max_{N_{j-1} \leq k \leq m < N_j} \left| \sum_{n=k}^m \frac{\sin(nx)}{n} \right|. \quad (1.54)$$

В этом случае имеем

$$\Delta^* = \sum_{j=1}^\infty (a_{N_{j-1}} - a_{N_j-1}) \leq \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{1}{N_{j-1}} - \frac{1}{N_j-1} \right) \leq \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{1}{N_{j-1}} - \frac{1}{N_j} \right) = 1$$

и условие (1.5) выполнено. Поэтому из теоремы 1 сразу получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. а) Если выполнено условие $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j / N_{j-1} = +\infty$, то каждый из рядов (1.51)–(1.54) расходится почти всюду и множество всех его точек сходимости является множеством первой категории.

б) Если

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_j}{N_{j-1}} < +\infty, \quad (1.55)$$

то ряды (1.51) и (1.53) сходятся во всех точках x не кратных 2π , а ряды (1.52) и (1.54) сходятся во всех точках x , причем на любом отрезке, не содержащем кратных 2π точек x , сходимость рядов (1.51)–(1.54) равномерна.

Поскольку в случае (1.50) из (1.9) и (1.12) имеем $P = \sup_{N \geq 1} P(N) \leq 1$ и (см. (1.18)) $2a_{V_j(N_{j-1})} \geq a_{N_{j-1}}$ при всех натуральных j , то (см. далее замечание 4) выполнено условие (5.25) с $\kappa = 1/2$. Поэтому из теоремы 2 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. а) Если выполнено условие

$$A_0 = \sup_{N \geq 1} \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq N} \varepsilon_j \frac{\min(N_j - N_{j-1}, N)}{N_{j-1}} < +\infty, \quad (1.56)$$

то функции g_0 и g_0^* ограничены на прямой.

б) Если функция g_0 , а тем более функция g_0^* , ограничена на интервале $(0, \pi)$, то выполнены условия (1.55), (1.56) и справедлива оценка

$$\sup_x g_0^*(x) \leq 38 \sup_x g_0(x).$$

Так как в случае (1.50) из (1.21) имеем

$$B_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-2} (a_n - a_{n+1}) \ln(n+1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n(n+1)} < \infty,$$

то условия (1.28) и (1.34) выполнены, и из теоремы 3 и леммы 2 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. а) Если выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \frac{\ln(N_j - N_{j-1} + 1)}{N_j} < \infty, \quad (1.57)$$

то каждая из функций f_0, g_0, f_0^*, g_0^* интегрируема на интервале $(0, \pi)$.

б) Если некоторая из функций g, g^*, f, f^* интегрируема на интервале $(0, \pi)$, то выполнено условие (1.57) и справедлива оценка

$$\|g_0^*\|_1 \leq 86 \|g_0\|_1.$$

Из леммы 2 также следует, что условие (1.57) эквивалентно условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \frac{\ln(M_j + 1)}{N_{j-1}} < \infty. \quad (1.58)$$

Наконец, в случае (1.50) из теоремы 4 и леммы 3 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $p \in (1, \infty)$.

а) Если выполнено условие

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{p-2} \left(\sum_{j \geq 1: M_j \geq N} \frac{\varepsilon_j}{N_{j-1}} \right)^p < +\infty, \quad (1.59)$$

то функции f_0, g_0, f_0^*, g_0^* принадлежат пространству $L_{2\pi}^p$.

б) Если хотя бы одна из функций f_0, g_0, f_0^*, g_0^* принадлежит пространству $L_{2\pi}^p$, то выполнено условие (1.59) и справедлива оценка

$$\max\{\|f_0^*\|_p, \|g_0^*\|_p\} \leq C_p \min\{\|f_0\|_p, \|g_0\|_p\},$$

где $C_p = 2^{16} p^2 / (p-1)$.

Поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1: M_j \geq N} \frac{\varepsilon_j}{N_j} &\leq \sum_{j \geq 1: M_j \geq N} \frac{\varepsilon_j}{N_{j-1}} \\ &\leq \sum_{j \geq 1: M_j \geq N} \frac{\varepsilon_j}{N_j} + \sum_{j \geq 1: M_j \geq N} \left(\frac{1}{N_{j-1}} - \frac{1}{N_j} \right) \leq \sum_{j \geq 1: M_j \geq N} \frac{\varepsilon_j}{N_j} + \frac{1}{N} \end{aligned}$$

и при $p \in (1, \infty)$ имеем

$$\left(\sum_{j \geq 1: M_j \geq N} \frac{\varepsilon_j}{N_{j-1}} \right)^p \leq \frac{2^{p-1}}{N^p} + 2^{p-1} \left(\sum_{j \geq 1: M_j \geq N} \frac{\varepsilon_j}{N_j} \right)^p,$$

то условие (1.59) эквивалентно условию

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{p-2} \left(\sum_{j \geq 1: M_j \geq N} \frac{\varepsilon_j}{N_j} \right)^p < +\infty.$$

Интересен случай, когда ε_j принимают только значения 0 и 1. В случае, когда все ε_j равны 1, предложения 1–4 вытекают из теорем работы [1]. В этом случае условие (1.56) появлялось в [2], условие (1.58) уже появлялось в [3] (см. также [4]), а условие (1.57) рассматривалось в [5]. Условие (1.59) является небольшим упрощением условия (1.45). Отметим, что суммы рядов (1.1)–(1.4) также изучались в работе [1], но предполагалось, что последовательность коэффициентов $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает. Поскольку в этой статье заранее предполагается только, что последовательность коэффициентов не возрастает в каждой группе, то как соответствующие доказательства, так и оценки, естественно усложнились.

Теперь перейдем к доказательствам сформулированных выше результатов.

§ 2. Исследование сходимости рядов (1.1)–(1.4)

2.1. Через $t(x)$ будем обозначать любую из функций $\cos(x)$ или $\sin(x)$. В этом случае другая из этих функций будет обозначаться через $t_1(x)$. Ясно, что в точках x кратных 2π ряды (1.2) и (1.4) всегда сходятся к нулю, а ряды (1.1) и (1.3) сходятся тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.8).

Если же точка x не кратна 2π , то исследование сходимости рядов (1.1), (1.3) и рядов (1.2), (1.4) аналогично. Поэтому мы будем рассматривать ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n t(nx) \right|, \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{N_{j-1} \leq k \leq m < N_j} \left| \sum_{n=k}^m a_n t(nx) \right|. \quad (2.2)$$

Подставляя в полученные ниже результаты $t = \cos$, или $t = \sin$, будем получать соответствующие результаты для рядов (1.1), (1.3), или (1.2), (1.4).

Заметим, что при всех натуральных $k \leq m$ справедливо равенство

$$\left| 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{n=k}^m t(nx) \right| = \left| t_1\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)x\right) - t_1\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right) \right| \quad (2.3)$$

и правая часть (2.3) всегда не превосходит 2.

2.2. Доказательство п. а) теоремы 1. Пусть выполнены условия (1.5), (1.6) и ряд (2.1) сходится на множестве положительной меры. Тогда найдется такое натуральное число q , что множество

$$E = E_q = \left\{ x \in (0, \pi) : \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n t(nx) \right| \leq q \right\}$$

имеет положительную меру. Для каждого натурального j и $x \in (0, \pi)$ из (2.3) получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} (a_{N_{j-1}} - a_n) t(nx) \right| &= \left| \sum_{n=N_{j-1}+1}^{N_j-1} (a_{n-1} - a_n) \sum_{\nu=n}^{N_j-1} t(\nu x) \right| \\ &\leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} \sum_{n=N_{j-1}+1}^{N_j-1} |a_{n-1} - a_n| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} |a_{N_{j-1}} - a_{N_j-1}|. \end{aligned}$$

Поэтому при $x \in E$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left| a_{N_{j-1}} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} t(nx) \right| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n t(nx) \right| \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} (a_{N_{j-1}} - a_n) t(nx) \right| \leq q + \frac{\Delta^*}{|\sin(x/2)|} \leq \frac{q + \Delta^*}{|\sin(x/2)|}. \end{aligned}$$

Из (2.3) вытекает, что

$$\left| t_1\left(\left(N_j - \frac{1}{2}\right)x\right) - t_1\left(\left(N_{j-1} - \frac{1}{2}\right)x\right) \right| = \left| 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} t(nx) \right|.$$

Следовательно, при всех $x \in E$ верна оценка

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}} \left| t_1 \left(\left(N_j - \frac{1}{2} \right) x \right) - t_1 \left(\left(N_{j-1} - \frac{1}{2} \right) x \right) \right| \leq 2q + 2\Delta^*,$$

и поэтому

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}} \int_E \left| t_1 \left(\left(N_j - \frac{1}{2} \right) x \right) - t_1 \left(\left(N_{j-1} - \frac{1}{2} \right) x \right) \right| dx \leq 2\pi(q + \Delta^*).$$

Но по следствию 4 из работы [6], где надо взять $\tau = 4$, $\delta = 1$, $J = [0, \pi]$, существует такая положительная постоянная c , которая зависит только от множества E , что верна оценка

$$\int_E \left| t_1 \left(\left(N_j - \frac{1}{2} \right) x \right) - t_1 \left(\left(N_{j-1} - \frac{1}{2} \right) x \right) \right| dx \geq c \quad \text{при всех } j \geq 1.$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}} \leq \frac{2\pi(q + \Delta^*)}{c},$$

а это противоречит условию (1.6). Следовательно, ряд (2.1) и, тем более, ряд (2.2), расходятся п.в. Поскольку для любого натурального q множество точек F_q , где сумма ряда (2.1) (ряда (2.2)) не превосходит q , является замкнутым и имеет меру нуль, то множество точек сходимости ряда (2.1) (ряда (2.2)), которое равно $\bigcup_{q=1}^{\infty} F_q$, имеет первую категорию. Пункт а) теоремы 1 доказан.

2.3. Доказательство п. б) теоремы 1. Пусть условие (1.7) выполнено. Возьмем любое число $\delta \in (0, \pi)$ и рассмотрим отрезок $I = [\delta, 2\pi - \delta]$. Тогда при $x \in I$ для любого натурального j и $N_{j-1} \leq k \leq m < N_j$ в силу преобразования Абеля и (2.3) имеем

$$\left| \sum_{n=k}^m a_n t(nx) \right| \leq \frac{a_k}{|\sin(x/2)|} \leq a_{N_{j-1}} \left(\sin \frac{\delta}{2} \right)^{-1}.$$

Следовательно, члены ряда (2.2), а значит и ряда (2.1), на отрезке $x \in I$ мажорируются членами сходящегося ряда $\sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}} (\sin(\delta/2))^{-1}$. Поэтому ряды (2.1) и (2.2) сходятся равномерно на I . Теорема 1 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Заметим, что в наиболее интересном случае, когда

$$a_n = \varepsilon_j a_n^* \quad \text{при } n = N_{j-1}, \dots, N_j - 1, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где последовательность неотрицательных чисел $\{a_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает и все $\varepsilon_j \in [0, 1]$, имеем

$$a_{N_{j-1}} - a_{N_j-1} = \varepsilon_j (a_{N_{j-1}}^* - a_{N_j-1}^*) \leq a_{N_{j-1}}^* - a_{N_j-1}^* \leq a_{N_{j-1}}^* - a_{N_j}^*,$$

и для суммы ряда (1.5) получаем оценку $\Delta^* \leq a_1^*$, т.е. в этом случае условие (1.5) выполнено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для каждого натурального j пусть $\{\Delta_n^*\}_{n=N_{j-1}}^{N_j-2}$ есть числа $\{a_n - a_{n+1}\}_{n=N_{j-1}}^{N_j-2}$, перенумерованные в порядке неубывания. Из приведенного доказательства теоремы 1 нетрудно видеть, что если вместо (1.5) выполнено следующее условие: для некоторого $s \geq 2$ ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-s} \Delta_n^* < \infty, \quad (2.4)$$

то при условии (1.6) утверждение а) теоремы 1 останется верным. Чтобы сделать идею доказательства более прозрачной, мы привели доказательство только для случая $s = 2$, когда условие (2.4) совпадает с условием (1.5).

§ 3. Исследование сумм рядов (1.2) и (1.4) на ограниченность

Будем использовать обозначения, введенные в п. 2.1, а также обозначения (1.9)–(1.13). Напомним, что квадратные скобки от числа означают его целую часть.

3.1. Вспомогательные леммы. Справедлива

ЛЕММА 4. Для любых натуральных чисел j, q и N таких, что $N_{j-1} \leq N < N_j$, и любого $x \in [\frac{\pi}{q+1}, \frac{\pi}{q}]$ верны оценки

$$\max_{N \leq k \leq m < N_j} \left| \sum_{n=k}^m a_n t(nx) \right| \leq \min \left\{ \sqrt{2} \sum_{n=N}^{N+q-1} a_n, \sum_{n=N}^{N_j-1} a_n \right\}, \quad (3.1)$$

$$\max_{N \leq k \leq m < N_j} \left| \sum_{n=k}^m a_n t(nx) \right| \leq \sqrt{2} \sum_{n=N}^{\min(N+q, N_j)-1} a_n, \quad (3.2)$$

$$\max_{N_{j-1} \leq k \leq m < N_j} \left| \sum_{n=k}^m a_n t(nx) \right| \leq \sqrt{2} \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(q)} a_n. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условиях леммы 4 и $N \leq k \leq m < N_j$ в силу преобразования Абеля, если $m \geq k + q$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=k}^m a_n t(nx) \right| &\leq \sum_{n=k}^{k+q-1} \left| \sum_{s \geq 0: n+qs \leq m} a_{n+qs} t(nx + qsx) \right| \\ &\leq \sum_{n=k}^{k+q-1} \frac{a_n}{|\sin(qx/2)|} \leq \sqrt{2} \sum_{n=k}^{k+q-1} a_n \leq \sqrt{2} \sum_{n=N}^{N+q-1} a_n, \end{aligned}$$

поскольку $2qx \geq (q+1)x \geq \pi$ и $\sin(qx/2) \geq 2^{-1/2}$. Если же $m < k + q$, то

$$\left| \sum_{n=k}^m a_n t(nx) \right| \leq \sum_{n=k}^m a_n \leq \sum_{n=N}^{m-k+N} a_n \leq \sum_{n=N}^{N+q-1} a_n.$$

В любом случае верна оценка (3.1), поскольку

$$\left| \sum_{n=k}^m a_n t(nx) \right| \leq \sum_{n=k}^m a_n \leq \sum_{n=N}^{N_j-1} a_n.$$

Из (3.1) сразу вытекает оценка (3.2), которая при $n = N_{j-1}$ превращается в оценку (3.3).

ЛЕММА 5. Для любого натурального числа q и $x \in [\frac{\pi}{q+1}, \frac{\pi}{q}]$ верны оценки

$$g(x) \leq g^*(x) \leq \frac{\pi}{q} \sum_{n=1}^{2q-1} n a_n + \sqrt{2} A(q) \leq 2\pi \min\{P(2q-1), P(2q)\} + \sqrt{2} A(q). \quad (3.4)$$

Более того, если $p \in [1, \infty)$, то

$$\begin{aligned} \|g\|_p &\leq \|g^*\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g^*(x))^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \sqrt{2} \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} + 4\pi \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(P(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть натуральное ν таково, что $N_{\nu-1} \leq q < N_{\nu}$. Тогда, используя оценки (3.3) и (3.2) при $N = q$, имеем

$$\begin{aligned} g(x) &\leq g^*(x) \leq \sum_{j=1}^{\nu-1} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} |a_n \sin(nx)| + \sum_{n=N_{\nu-1}}^{q-1} |a_n \sin(nx)| \\ &\quad + \max_{q \leq k \leq m < N_{\nu}} \left| \sum_{n=k}^m a_n \sin(nx) \right| + \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \max_{N_{j-1} \leq k \leq m < N_j} \left| \sum_{n=k}^m a_n \sin(nx) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{q-1} |a_n \sin(nx)| + \sqrt{2} \sum_{n=q}^{\min(2q, N_{\nu})-1} a_n + \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \sqrt{2} \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(q)} a_n \\ &\leq \sum_{n=1}^{q-1} a_n \frac{\pi n}{q} + \sqrt{2} \sum_{n=q}^{\min(2q, N_{\nu})-1} a_n \frac{n}{q} + \sqrt{2} A(q). \end{aligned}$$

Отсюда сразу вытекает оценка (3.4).

Из (1.9) и оценки (3.4) получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (g^*(x))^p dx \right)^{1/p} &= \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\pi/(N+1)}^{\pi/N} (g^*(x))^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2} A(N) + 2\pi \min\{P(2N-1), P(2N)\})^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} \\ &\leq \sqrt{2} \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} + 2\pi \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(\min\{P(2N-1), P(2N)\})^p}{N(N+1)} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку (3.5), поскольку

$$\begin{aligned} & \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(\min\{P(2N-1), P(2N)\})^p}{N(N+1)} \\ & \leq \sum_{N=1}^{\infty} 2 \left(\frac{(\min\{P(2N-1), P(2N)\})^p}{(2N-1)2N} + \frac{(\min\{P(2N-1), P(2N)\})^p}{2N(2N+1)} \right) \\ & \leq 2 \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{(P(2N-1))^p}{(2N-1)2N} + \frac{(P(2N))^p}{2N(2N+1)} \right) = 2 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(P(N))^p}{N(N+1)}. \end{aligned}$$

Лемма 5 полностью доказана.

Будем далее через

$$F_N(v) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \left(1 - \frac{k}{N+1} \right) \cos(kv)$$

обозначать ядро Фейера.

ЛЕММА 6. Если сумма $h(x)$ ряда (2.1) интегрируема на $(0, \pi)$, то для любого натурального числа N и $x \in [\frac{\pi}{N+1}, \frac{\pi}{N}]$ верны оценки

$$A(N) \leq \frac{8}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(v) h(v) dv, \quad (3.6)$$

$$A(N) \leq \frac{16}{x} \int_0^x h(v) dv + 8x \int_x^{\pi} \frac{h(v)}{v^2} dv. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что приводимое доказательство с небольшими, но существенными изменениями повторяет доказательство леммы 3.3 из работы [1]. Итак, из (2.1) для каждого натурального числа J имеем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq N, j \leq J} t(N_{j-1}v) F_N(v) \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n t(nv) \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^J F_N(v) \left| \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n t(nv) \right| \leq F_N(v) h(v). \end{aligned}$$

Поэтому, интегрируя это неравенство по v от $-\pi$ до π и разделив его на $\pi/4$, приходим к оценке

$$\begin{aligned} & \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq N, j \leq J} \sum_{k=0}^{\min\{N, N_j - N_{j-1} - 1\}} 2 \left(1 - \frac{k}{N+1} \right) a_{N_{j-1}+k} \\ & = \left| \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq N, j \leq J} \frac{4}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t(N_{j-1}v) F_N(v) \left(\sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n t(nv) \right) dv \right| \\ & \leq \frac{4}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(v) h(v) dv. \end{aligned}$$

В силу произвольности J отсюда получаем оценку

$$\sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq N} \sum_{k=0}^{\min\{(N+1)/2, N_j - N_{j-1} - 1\}} a_{N_{j-1}+k} \leq \frac{4}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(v) h(v) dv,$$

из которой, используя монотонность последовательности $\{a_n\}_{n=N_{j-1}}^{N_j-1}$, выводим оценку

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq N} \sum_{n=N_{j-1}}^{\min\{N_{j-1}+N+1, N_j-1\}} a_n &= \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq N} \sum_{n=0}^{\min\{N+1, N_j - N_{j-1} - 1\}} a_{N_{j-1}+n} \\ &\leq 2 \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq N} \sum_{k=0}^{\min\{(N+1)/2, N_j - N_{j-1} - 1\}} a_{N_{j-1}+k} \leq \frac{8}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(v) h(v) dv. \end{aligned}$$

Отсюда, из (1.10) и (1.11) оценка (3.6) следует немедленно. Поскольку

$$F_N(v) \leq \min\left(\frac{N+1}{2}, \frac{\pi^2}{2(N+1)v^2}\right) \quad \text{при } v \in (0, \pi],$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} F_N(v) h(v) dv &\leq \frac{(N+1)}{2} \int_0^x h(v) dv + \int_x^{\pi} \frac{\pi^2 h(v)}{2(N+1)v^2} dv \\ &\leq \frac{\pi}{x} \int_0^x h(v) dv + \frac{\pi}{2} x \int_x^{\pi} \frac{h(v)}{v^2} dv, \end{aligned} \quad (3.8)$$

и оценка (3.7) также получена. Лемма 6 доказана полностью.

ЛЕММА 7. а) Если функция g интегрируема на $(0, \pi)$, то для любого натурального числа N верны оценки

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(N+1)} \sum_{n=1}^{[(N+1)/2]} n a_n &\leq \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \frac{n a_n}{(N+1)} \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N\left(v - \frac{\pi}{2(N+1)}\right) g(v) dv. \end{aligned} \quad (3.9)$$

б) Если функция f интегрируема на $(0, \pi)$, то для любого натурального числа N верны оценки

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{[(N+1)/2]} a_n \leq \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) a_n \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(v) f(v) dv. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сумма $h(x)$ ряда (2.1) интегрируема на $(0, \pi)$ и число j таково, что $N_j > N$. Тогда средние Фейера

$$\begin{aligned} \sigma_N(x) &= \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) a_n t(nx) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{N_j-1} a_n t(nv)\right) F_N(v-x) dv \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(v) F_N(v-x) dv. \end{aligned}$$

Отсюда при $t = \sin$, $h = g$ и $x = \pi/(2(N+1))$ получаем оценку (3.9), а при $t = \cos$, $h = f$ и $x = 0$ имеем оценку (3.10). Лемма 7 доказана.

3.2. Доказательство теоремы 2. Пусть условия (1.12) и (1.13) выполнены. Прежде всего заметим, что поскольку

$$A \geq A(1) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}},$$

то из условия (1.13) вытекает условие (1.7). Из (1.9), (1.10), (1.12), (1.13) и (3.4) при каждом натуральном N и $x \in [\frac{\pi}{N+1}, \frac{\pi}{N}]$ получаем оценку

$$g(x) \leq g^*(x) \leq 2\pi P(2N-1) + \sqrt{2}A \leq 2\pi P + \sqrt{2}A,$$

из которой сразу вытекает ограниченность функций g и g^* на прямой и оценка (1.14). Пункт а) теоремы 2 доказан. Докажем п. б). Ограниченность функции g^* означает и ограниченность функции g . Поэтому предположим, что есть постоянная $K \in [0, +\infty)$ такая, что $g(x) \leq K$ при почти всех x . Тогда для любого натурального числа q из (3.9) при $N = 2q - 1$ имеем

$$\frac{1}{4q} \sum_{n=1}^q n a_n \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K F_N \left(v - \frac{\pi}{2(N+1)} \right) dv = K.$$

Следовательно (см. (1.9)), величина $P(q) \leq 4K$. Поэтому $P \leq 4K$. Из оценки (3.6) при $h = g$ и любом натуральном N выводим

$$A(N) \leq \frac{8}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(v) h(v) dv \leq \frac{8}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K F_N(v) dv \leq 8K.$$

Значит, $A \leq 8K$ и $A + P \leq 12K$. Этим получены условия (1.12) и (1.13), а также (1.7) и оценка (1.15). Из (1.14) вытекает (1.16), поскольку $8\pi + 8\sqrt{2} < 38$ и $\sqrt{2}A + 2\pi P \leq (8\pi + 8\sqrt{2})K$. Теорема 2 полностью доказана.

§ 4. Исследование сумм рядов (1.1)–(1.4) на интегрируемость

Будем использовать введенные в п. 2.1 обозначения, причем сумму ряда (2.2) будем обозначать $h^*(x)$.

4.1. Вспомогательные оценки. Верна следующая

ЛЕММА 8. Для любого натурального числа q и $x \in [\frac{\pi}{q+1}, \frac{\pi}{q}]$ верна (см. (1.10) и (1.9)) оценка

$$h^*(x) \leq \sqrt{2}A(q) + \sqrt{2}S(2q-1). \quad (4.1)$$

Более того, если $p \in [1, \infty)$, то

$$\|h^*\|_p \leq \sqrt{2} \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} + 3 \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p}. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть натуральное ν таково, что $N_{\nu-1} \leq q < N_\nu$. Тогда, используя при $N = q$ оценки (3.2) и (3.3), получаем

$$\begin{aligned} h^*(x) &\leq \sum_{j=1}^{\nu-1} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n + \sum_{n=N_{\nu-1}}^{q-1} a_n + \max_{q \leq k \leq m < N_\nu} \left| \sum_{n=k}^m a_n t(nx) \right| \\ &\quad + \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \max_{N_{j-1} \leq k \leq m < N_j} \left| \sum_{n=k}^m a_n t(nx) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{q-1} a_n + \sqrt{2} \sum_{n=q}^{\min(2q, N_\nu)-1} a_n + \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \sqrt{2} \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(q)} a_n \leq \sqrt{2} \sum_{n=1}^{2q-1} a_n + \sqrt{2} A(q), \end{aligned}$$

а это и есть оценка (4.1). Из оценки (4.1) имеем

$$\begin{aligned} \|h^*\|_p &= \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\pi/(N+1)}^{\pi/N} (h^*(x))^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}A(N) + \sqrt{2}S(2N-1))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} \\ &\leq \sqrt{2} \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} + \sqrt{2} \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S(2N-1))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Отсюда сразу получаем оценку (4.2), поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S(2N-1))^p}{N(N+1)} &\leq \sum_{N=1}^{\infty} 2 \left(\frac{(S(2N-1))^p}{(2N-1)2N} + \frac{(S(2N-1))^p}{2N(2N+1)} \right) \\ &\leq 2 \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{(S(2N-1))^p}{(2N-1)2N} + \frac{(S(2N))^p}{2N(2N+1)} \right) = 2 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S(N))^p}{N(N+1)}. \end{aligned}$$

Заметим, что оценка (4.1) (оценка (4.2)) верна и для функции f^* , и для функции g^* , но для последней справедлива и оценка (3.4) (оценка (3.5)).

4.2. Доказательство леммы 1. Из (1.18)–(1.20) сразу видим, что $B_1 \leq B$. Из (1.10) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{A(N)}{N(N+1)} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{N_{j-1}} \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N)} \frac{a_n}{N(N+1)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N_{j-1})} a_n \sum_{N=n+1-N_{j-1}}^{N_{j-1}} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N_{j-1})} \frac{a_n}{n+1-N_{j-1}} = B_1. \end{aligned}$$

Этим доказано (1.22). Из (1.21) получаем

$$B_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} \frac{a_n}{n} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} \frac{a_n}{n - N_{j-1} + 1} = B$$

и (см. (1.18))

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N_{j-1})} \frac{a_n}{n - N_{j-1} + 1} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}+1}^{N_{j-1}} \frac{2a_n}{2n - 2N_{j-1} + 2} \\ &\leq B_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}+1}^{N_{j-1}} \frac{2a_n}{n + 2} \leq B_1 + 2B_2. \end{aligned}$$

Этим доказано (1.23), а значит и лемма 1.

4.3. Доказательство п. а) теоремы 3. Из (1.20)–(1.23) и из оценки (4.2) при $p = 1$ получаем

$$\begin{aligned} \|h^*\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h^*(x) dx \leq \sqrt{2} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{A(N)}{N(N+1)} + 3 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{S(N)}{N(N+1)} \\ &\leq \sqrt{2}B_1 + 3B_2 \leq \frac{9}{2}B. \end{aligned}$$

Поэтому функции f^* и g^* интегрируемы на интервале $(0, \pi)$ и верны оценки (1.25). Пункт а) теоремы 3 доказан.

Заметим, что из условия (1.24) сразу вытекает условие (1.7).

4.4. Вспомогательные леммы. Справедливы следующие две леммы.

ЛЕММА 9. Для любых натуральных чисел $m \geq k \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum_{n=k}^{\min\{m, 2k-1\}} \frac{a_n}{n - k + 1} \leq \frac{6}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=k}^m a_n t(nx) \right| dx. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $m \geq k \geq 2$ имеем (см. [7; отдел 6, задачи 24 и 25])

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\min\{m, 2k-1\}} \frac{a_n}{n - k + 1} &\leq \sum_{n=k}^{\min\{m, 3k-3\}} \frac{a_n}{n - k + 1} \\ &= \left| \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t_1((k-1)x) \left(\sum_{n=k}^m a_n t(nx) \right) \left(\sum_{n=1}^{2k-2} \frac{\sin(nx)}{n} \right) dx \right| \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=k}^m a_n t(nx) \right| dx \max_x \left| \sum_{n=1}^{2k-2} \frac{\sin(nx)}{n} \right| \leq \frac{6}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=k}^m a_n t(nx) \right| dx. \end{aligned}$$

Отсюда получаем (4.3) при $k \geq 2$. Но

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=k}^m a_n t(nx) \right| dx \geq \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t(kx) \left(\sum_{n=k}^m a_n t(nx) \right) dx \right| \geq a_k.$$

Значит оценка (4.3) верна и при $k = 1$ также. Лемма 9 доказана.

Заметим, что в доказательстве леммы 9 используется только неотрицательность чисел $\{a_n\}_{n=k}^m$.

ЛЕММА 10. Если сумма $h(x)$ ряда (2.1) интегрируема на $(0, \pi)$, то верно неравенство

$$B_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N_{j-1})} \frac{a_n}{n+1-N_{j-1}} \leq \frac{6}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h(x)| dx = 12\|h\|_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1.18) достаточно в оценке (4.3) вставить $k = N_{j-1}$, $m = N_j - 1$ и затем полученные неравенства просуммировать по j .

4.5. Доказательство п. б) теоремы 3. Пусть функция $h = g$ интегрируема на $(0, \pi)$. Тогда

$$\begin{aligned} B_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \right) dx \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \frac{(\pi-x)}{2} dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \pi\|g\|_1. \end{aligned}$$

Отсюда, из (1.23) и леммы 10 видим, что $B \leq (12 + 2\pi)\|g\|_1 \leq 19\|g\|_1$. Поэтому условие (1.24) выполнено, верна первая оценка (1.26) и из (1.25) вытекает (1.27).

Если функция f^* интегрируема на $(0, \pi)$, то при $h = f$ верна лемма 10 и для каждого натурального числа N при $x \in [\frac{\pi}{4N+4}, \frac{\pi}{4N}]$ имеем

$$f^*(x) \geq \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) \geq \frac{2}{3} \sum_{n=1}^N a_n = \frac{2}{3} S(N).$$

Поэтому (см. (1.21))

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f^*(x) dx &\geq \int_0^{\pi/4} f^*(x) dx = \sum_{N=1}^{\infty} \int_{\pi/(4N+4)}^{\pi/(4N)} f^*(x) dx \\ &\geq \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\pi}{4N(N+1)} \frac{2}{3} S(N) = \frac{\pi}{6} B_2. \end{aligned}$$

Отсюда $B_2 \leq 6\|f^*\|_1$, следовательно, из леммы 10 и из (1.23) выводим, что $B \leq 12\|f\|_1 + 12\|f^*\|_1 \leq 24\|f^*\|_1$, т.е. условие (1.24) выполнено и верна вторая оценка (1.26). Пункт б) теоремы 3 доказан.

4.6. Доказательство п. с) теоремы 3. Пусть функция f интегрируема на $(0, \pi)$ и выполнено условие (1.28). Из леммы 10 при $h = f$ имеем $B_1 \leq 12\|f\|_1$. Отсюда и из (1.23) следует, что $B \leq 12\|f\|_1 + 2B_2$. Поэтому выполнено условие (1.24) и верна оценка (1.29). Из (1.25) и (1.29) вытекает (1.30).

4.7. Положим далее

$$H_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \quad \text{при } m \geq 1. \quad (4.4)$$

Тогда

$$H_m \geq 1, \quad H_m \geq \int_1^{m+1} \frac{dt}{t} = \ln(m+1), \quad H_m \leq 1 + \int_1^m \frac{dt}{t} = 1 + \ln m.$$

Поэтому при всех натуральных m верны оценки

$$\max\left(\ln(m+1), \frac{1+\ln m}{2}\right) \leq H_m \leq 1 + \ln m \leq 2\ln(m+1). \quad (4.5)$$

4.8. Доказательство п. d) теоремы 3. Из (4.3) и (1.18) для каждого натурального числа j при $k = N_{j-1}$ и $m = N_j - 1$ имеем, используя обозначения (4.4) и (1.17), оценки

$$\begin{aligned} & \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N_{j-1})} \frac{a_n}{n+1-N_{j-1}} \leq \frac{6}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n \cos(nx) \right| dx, \\ & \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} \frac{a_n}{n-N_{j-1}+1} \\ & \leq \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N_{j-1})} \frac{a_n}{n+1-N_{j-1}} + a_{V_j(N_{j-1})} \sum_{n=V_j(N_{j-1})+1}^{N_j-1} \frac{1}{n-N_{j-1}+1} \\ & \leq \left(1 + \frac{H_{N_j-N_{j-1}} - H_{M_j}}{H_{M_j}}\right) \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N_{j-1})} \frac{a_n}{n+1-N_{j-1}} \\ & \leq \left(\frac{H_{N_j-N_{j-1}}}{H_{M_j}}\right) \frac{6}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n \cos(nx) \right| dx. \end{aligned}$$

Суммируя эти оценки по всем натуральным j и замечая, что если $2N_{j-1} \geq N_j$, то $H_{N_j-N_{j-1}}/H_{M_j} = 1$, а если $2N_{j-1} < N_j$, то в силу (4.5) и (1.31) имеют место оценки

$$\frac{H_{N_j-N_{j-1}}}{H_{M_j}} = \frac{H_{N_j-N_{j-1}}}{H_{N_{j-1}}} \leq \frac{H_{N_{j-1}}}{H_{N_{j-1}}} \leq \frac{1+\ln N_j}{H_{N_{j-1}}} \leq 1 + \frac{\ln N_j}{\ln(N_{j-1}+1)} \leq 1 + \lambda,$$

сразу получаем (1.32), а значит и условие (1.24). Из (1.32) и (1.25) вытекает (1.33). Теорема 3 полностью доказана.

4.9. Доказательство леммы 2. Из (1.20), (1.17), (1.18) и (4.5) в обозначении (4.4) имеем оценки

$$\begin{aligned} B_1 & \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}} H_{M_j} \leq 2 \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}} \ln(M_j + 1), \\ B_1 & \geq \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}} H_{M_j} \geq \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}} \ln(M_j + 1), \\ B & \geq \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}} H_{N_j-N_{j-1}} \geq \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}} \ln(N_j - N_{j-1} + 1). \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.23) получаем

$$2\left(B_2 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_j-1} \ln(M_j + 1)\right) \geq 2B_2 + B_1 \geq B,$$

$$2B \geq B_2 + B \geq B_2 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_j-1} \ln(N_j - N_{j-1} + 1) \geq B_2 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_j-1} \ln(M_j + 1).$$

Значит, из условия (1.35) вытекает (1.24), из условия (1.24) следует (1.37), а из условия (1.37) немедленно вытекает (1.36). Докажем, что при условии (1.34) из (1.36) следует (1.35). Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (a_{N_j-1} - a_{N_j-1}) \ln(M_j + 1) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-2} (a_n - a_{n+1}) \ln(N_{j-1} + 1) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-2} (a_n - a_{n+1}) \ln(n + 1). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} B_2 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_j-1} \ln(M_j + 1) \\ \leq \left(B_2 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_j-1} \ln(M_j + 1)\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-2} (a_n - a_{n+1}) \ln(n + 1). \end{aligned}$$

Отсюда, из (1.34) и (1.36) вытекает (1.35). Лемма 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Полезно заметить, что при всех натуральных j в обозначении (4.4) верно равенство

$$\sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} \frac{a_n}{n - N_{j-1} + 1} = a_{N_j-1} H_{N_j-N_{j-1}} + \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-2} (a_n - a_{n+1}) H_{n+1-N_{j-1}}.$$

Поэтому из (1.19) имеем

$$B = \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_j-1} H_{N_j-N_{j-1}} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-2} (a_n - a_{n+1}) H_{n+1-N_{j-1}},$$

т.е. условия (1.24) и (1.37) останутся эквивалентными, если условие (1.34) заменить на условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-2} (a_n - a_{n+1}) \ln(n + 2 - N_{j-1}) < \infty.$$

§ 5. Доказательство теоремы 4 и леммы 3

Будем использовать введенные в п. 2.1 обозначения, причем сумму ряда (2.1) будем обозначать $h(x)$.

Пусть далее при $x > 0$ функция $\tau(x) = [\pi/x]$, т.е. целой части от π/x . Для суммы $h(x)$ ряда (2.1) через

$$M_h(x) = \sup_{0 < |u| \leq \pi} \frac{1}{u} \int_x^{x+u} h(v) dv$$

обозначим ее максимальной функцией Харди–Литтлвуда.

5.1. Некоторые дополнительные леммы. Для дальнейшего изложения нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 11. Если сумма $h(x)$ ряда (2.1) интегрируема на $(0, \pi)$, то для любого натурального числа N и $x \in [\frac{\pi}{N+1}, \frac{\pi}{N}]$ верна оценка

$$A(N) \leq 24M_h(x). \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in (0, \pi]$. Поскольку

$$\frac{1}{x} \int_0^x h(v) dv \leq M_h(x), \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} x \int_x^\pi \frac{h(v)}{v^2} dv &= \frac{x}{\pi^2} \int_x^\pi h(v) dv + x \int_x^\pi \frac{2}{v^3} \left(\int_x^v h(u) du \right) dv \\ &\leq \left(\frac{x(\pi-x)}{\pi^2} + x \int_x^\pi \frac{2(v-x)}{v^3} dv \right) M_h(x) = \frac{(\pi-x)}{\pi} M_h(x), \end{aligned} \quad (5.3)$$

то из (3.7) имеем (5.1).

ЛЕММА 12. Если сумма $f(x)$ ряда (1.1) интегрируема на $(0, \pi)$, то для любого натурального числа N и $x \in [\frac{\pi}{N+1}, \frac{\pi}{N}]$ верна оценка

$$S\left(\left[\frac{N+1}{2}\right]\right) \leq 6M_f(x). \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $h = f$ из (3.8) и (3.10), используя (5.2) и (5.3), получаем

$$S\left(\left[\frac{N+1}{2}\right]\right) \leq \frac{4}{\pi} \int_0^\pi F_N(v) f(v) dv \leq 6M_f(x).$$

ЛЕММА 13. Если сумма $g(x)$ ряда (1.2) интегрируема на $(0, \pi)$, то для любого натурального числа N и $x \in [\frac{\pi}{N+1}, \frac{\pi}{N}]$ верна оценка

$$P\left(\left[\frac{N+1}{2}\right]\right) \leq 48M_g(x). \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi F_N\left(v - \frac{\pi}{2(N+1)}\right) g(v) dv &\leq \frac{(N+1)}{2} \int_{-x}^x g(v) dv \\ &+ \int_x^\pi \frac{\pi^2 g(v)}{(N+1)} \left(v - \frac{\pi}{2(N+1)}\right)^{-2} dv \leq \frac{2\pi}{x} \int_0^x g(v) dv + 4\pi x \int_x^\pi \frac{g(v)}{v^2} dv, \end{aligned}$$

то из (3.9), (5.2) и (5.3) при $h = g$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}P\left(\left[\frac{N+1}{2}\right]\right) &\leq \frac{1}{2(N+1)} \sum_{n=1}^{[(N+1)/2]} na_n \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N\left(v - \frac{\pi}{2(N+1)}\right) g(v) dv \\ &\leq \frac{2}{x} \int_0^x g(v) dv + 4x \int_x^{\pi} \frac{g(v)}{v^2} dv \leq 6M_g(x), \end{aligned}$$

т.е. (5.5). Лемма 13 доказана.

Заметим (см. (1.9)), что $P(N) \leq S(N)$ при всех натуральных N . Оказывается верна

ЛЕММА 14. Если $p \in [1, \infty)$, то

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S(N))^p}{N(N+1)} \leq 2 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S([(N+1)/2]))^p}{N(N+1)}, \quad (5.6)$$

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(P(N))^p}{N(N+1)} \leq 2 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(P([(N+1)/2]))^p}{N(N+1)}, \quad (5.7)$$

$$\left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} \leq 32p \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(P(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p}. \quad (5.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S(N))^p}{N(N+1)} \leq \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{(S(N))^p}{N(2N-1)} + \frac{(S(N))^p}{N(2N+1)} \right) = 2 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S([(N+1)/2]))^p}{N(N+1)}.$$

Оценка (5.6) доказана. Аналогично, подставляя вместо S букву P , выводим (5.7). Далее, поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{P(k)}{k} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^k na_n = \sum_{n=1}^N na_n \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^2} \\ &\geq \sum_{n=1}^{[(N+1)/2]} na_n \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{4} S\left(\left[\frac{N+1}{2}\right]\right) \end{aligned}$$

и по неравенству Харди (см. [8; теорема 346])

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{P(n)}{n} \right)^p \leq (2p)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(P(n))^p}{n^2} \leq 2(2p)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(P(n))^p}{n(n+1)},$$

то

$$\frac{1}{4^p} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S([(N+1)/2]))^p}{N(N+1)} \leq 2(2p)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(P(n))^p}{n(n+1)}.$$

Отсюда и из (5.6) получаем

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S(N))^p}{N(N+1)} \leq 4(8p)^p \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(P(N))^p}{N(N+1)},$$

а эта оценка дает (5.8). Лемма 14 доказана.

Следующая оценка хорошо известна (см. [9; гл. 1, оценки (3.17)]).

ЛЕММА 15. Если $p \in (1, \infty)$ и сумма $h(x)$ ряда (2.1) такова, что $h \in L_{2\pi}^p$, то

$$\|M_h\|_p \leq \frac{4p}{p-1} \|h\|_p. \quad (5.9)$$

ЛЕММА 16. Если $p \in (1, \infty)$ и сумма $h(x)$ ряда (2.1) такова, что $h \in L_{2\pi}^p$, то

$$\left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} \leq 24 \|M_h\|_p \leq \frac{96p}{p-1} \|h\|_p. \quad (5.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$x\tau(x) \leq \pi, \quad x(\tau(x)+1) > \pi \quad \text{при всех } x \in (0, \pi]. \quad (5.11)$$

Если $h \in L_{2\pi}^p$, то по лемме 11 видим, что $A(\tau(x)) \leq 24M_h(x)$ при всех $x \in (0, \pi]$ и

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A(N))^p}{N(N+1)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (A(\tau(x)))^p dx \leq (24)^p \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (M_h(x))^p dx.$$

Отсюда и из (5.9) сразу получаем (5.10).

ЛЕММА 17. Для любых натуральных $N \leq K \leq 2N$ верны оценки

$$A(K) \leq 2A(N), \quad A_1(K) \leq 2A_1(N).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из (1.10) и (1.11) имеем

$$\begin{aligned} A(K) &= \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq K} \sum_{n=1}^{\min(N_j - N_{j-1}, K)} a_{n+N_{j-1}-1} \leq \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq N} \sum_{n=1}^{\min(N_j - N_{j-1}, 2N)} a_{n+N_{j-1}-1} \\ &\leq \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq N} 2 \sum_{n=1}^{\min(N_j - N_{j-1}, N)} a_{n+N_{j-1}-1} = 2A(N) \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned} A_1(K) &= \sum_{j \geq 1: M_j \geq K} \sum_{n=1}^K a_{n+N_{j-1}-1} \leq \sum_{j \geq 1: M_j \geq N} \sum_{n=1}^{\min(N_j - N_{j-1}, 2N)} a_{n+N_{j-1}-1} \\ &\leq \sum_{j \geq 1: M_j \geq N} 2 \sum_{n=1}^N a_{n+N_{j-1}-1} = 2A_1(N). \end{aligned}$$

5.2. Некоторые дополнительные теоремы. Следующие две теоремы дают оценки норм функций f и g .

ТЕОРЕМА 6. Если $p \in (1, \infty)$ и сумма $f(x)$ ряда (1.1) такова, что $f \in L_{2\pi}^p$, то

$$\left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} \leq 12 \|M_f\|_p, \quad (5.12)$$

$$\left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} + \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} \leq 36 \|M_f\|_p \leq \frac{144p}{p-1} \|f\|_p, \quad (5.13)$$

$$\|f^*\|_p \leq \frac{288p}{p-1} \|f\|_p. \quad (5.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5.4) и (5.11) имеем $S([(\tau(x) + 1)/2]) \leq 6M_f(x)$ при всех $x \in (0, \pi]$. Поэтому

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S([(N+1)/2]))^p}{N(N+1)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(S\left(\left[\frac{\tau(x)+1}{2}\right]\right) \right)^p dx \leq 6^p \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (M_f(x))^p dx. \quad (5.15)$$

Отсюда и из (5.6) сразу получаем (5.12). Из (5.12), (5.10) и (5.9) следует (5.13). Из (5.10), (5.12), (4.2) при $h = f$ и (5.9) выводим (5.14).

ТЕОРЕМА 7. Если $p \in (1, \infty)$ и сумма $g(x)$ ряда (1.2) такова, что $g \in L_{2\pi}^p$, то

$$\left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(P(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} \leq 96 \|M_g\|_p, \quad (5.16)$$

$$\left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(P(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} + \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} \leq 120 \|M_g\|_p \leq \frac{480p}{p-1} \|g\|_p, \quad (5.17)$$

$$\|g^*\|_p \leq \frac{7 \cdot 2^{10} p}{p-1} \|g\|_p, \quad (5.18)$$

$$\left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(S(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} + \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A(N))^p}{N(N+1)} \right)^{1/p} \leq (3 \cdot 2^{10} p + 24) \|M_g\|_p \leq \frac{2^{14} p^2}{p-1} \|g\|_p. \quad (5.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5.5) и (5.11) видим, что $P([(\tau(x) + 1)/2]) \leq 48M_g(x)$ при всех $x \in (0, \pi]$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(P([(N+1)/2]))^p}{N(N+1)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(P\left(\left[\frac{\tau(x)+1}{2}\right]\right) \right)^p dx \\ &\leq 48^p \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (M_g(x))^p dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из (5.7) сразу получаем (5.16). Из (5.16), (5.10) и (5.9) следует (5.17). Из (5.10), (5.16), (3.5) при $h = g$ и (5.9) выводим оценку (5.18). Наконец, из (5.10), (5.16), (5.8) и (5.9) получаем (5.19).

5.3. Доказательство теоремы 4. Пусть условия (1.38) и (1.39) выполнены. Тогда верно неравенство (4.2), из которого при $h^* = f^*$ и при $h^* = g^*$ получаем (1.40). Пункт а) доказан. Докажем п. б). Если $f \in L_{2\pi}^p$, то верна оценка (5.13). Если же $g \in L_{2\pi}^p$, то имеет место оценка (5.19). В любом случае верна оценка (1.41). Из (1.41) и (1.40) вытекает оценка (1.42). Теорема 4 полностью доказана.

5.4. Доказательство леммы 3. Из (1.44), (1.17), (1.10) и (1.11) получаем, что

$$A_1(N) \leq A(N) \quad \text{при всех } N \geq 1, \quad (5.20)$$

$$A_1(1) = A(1) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}} \quad (5.21)$$

и при всех натуральных m верна оценка

$$\begin{aligned} A(2^m) &= A_1(2^m) + \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq 2^m, N_j - N_{j-1} < 2^m} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n \\ &\leq A_1(2^m) + 2 \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq 2^m, 2^k \leq N_j - N_{j-1} < 2^{k+1}} \sum_{n=0}^{2^k-1} a_{n+N_{j-1}} \\ &\leq A_1(2^m) + 2 \sum_{k=0}^{m-1} A_1(2^k). \end{aligned}$$

Отсюда и из (5.21) вытекает, что

$$A(2^m) \leq 2 \sum_{k=0}^m A_1(2^k) \quad \text{при всех } m \geq 0. \quad (5.22)$$

Если $2^m \leq N \leq 2^{m+1}$, $m \geq 0$, то по лемме 17 имеем $A(N) \leq 2A(2^m)$ и $2A_1(N) \geq A_1(2^{m+1})$. Поэтому

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A(N))^p}{N(N+1)} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{N=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{(2A(2^m))^p}{2^{2m}} = 2^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(A(2^m))^p}{2^m}. \quad (5.23)$$

Из (5.22) при $\varepsilon = 1/p$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(A(2^m))^p}{2^m} &\leq 2^p \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \left(\sum_{k=0}^m A_1(2^k) \right)^p \\ &\leq 2^p \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \left(\sum_{k=0}^m 2^{\varepsilon k} \right)^{p-1} \left(\sum_{k=0}^m 2^{-\varepsilon k(p-1)} (A_1(2^k))^p \right) \\ &\leq 2^p (1 - 2^{-\varepsilon})^{1-p} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{\varepsilon m(p-1)-m} \sum_{k=0}^m 2^{-\varepsilon k(p-1)} (A_1(2^k))^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^p (1 - 2^{-\varepsilon})^{1-p} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=k}^{\infty} 2^{-\varepsilon m} \right) 2^{-\varepsilon k(p-1)} (A_1(2^k))^p \\
&= 2^p (1 - 2^{-1/p})^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} (A_1(2^k))^p.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} (A_1(2^k))^p &= (A_1(1))^p + \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m-1} (A_1(2^{m+1}))^p \\
&\leq (A_1(1))^p + \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-2m-1} \sum_{N=2^m+1}^{2^{m+1}} (2A_1(N))^p \\
&\leq (A_1(1))^p + \sum_{m=0}^{\infty} 2^{p+1} \sum_{N=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{(A_1(N))^p}{N^2} \\
&\leq 2^{p+1} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A_1(N))^p}{N^2} \leq 2^{p+2} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A_1(N))^p}{N(N+1)}.
\end{aligned}$$

Отсюда, из (5.23) и (5.24) получаем

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A(N))^p}{N(N+1)} \leq 2^{3p+2} (1 - 2^{-1/p})^{-p} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A_1(N))^p}{N(N+1)}.$$

Это неравенство и (5.20) дают (1.43). Лемма 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условия в теоремах 2 и 4 можно несколько упростить, если предположить, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет следующему условию: существует такое число $\kappa \in (0, 1]$, что

$$a_{V_j(N_{j-1})} \geq \kappa a_{N_{j-1}} \quad \text{при всех } j \geq 1. \tag{5.25}$$

В этом случае при натуральных N из (1.10), (1.11) и (1.44) имеем

$$\begin{aligned}
A(N) &\leq \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq N} a_{N_{j-1}} \min(N_j - N_{j-1}, N), \\
A(N) &\geq \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq N} a_{V_j(N_{j-1})} \min(N_j - N_{j-1}, N) \\
&\geq \kappa \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq N} a_{N_{j-1}} \min(N_j - N_{j-1}, N), \\
A_1(N) &\leq N \sum_{j \geq 1: M_j \geq N} a_{N_{j-1}}, \\
A_1(N) &\geq N \sum_{j \geq 1: M_j \geq N} a_{V_j(N_{j-1})} \geq \kappa N \sum_{j \geq 1: M_j \geq N} a_{N_{j-1}}.
\end{aligned}$$

В этом случае, т.е. при условии (5.25), условие (1.13) эквивалентно условию

$$\sup_{N \geq 1} \sum_{j \geq 1: N_{j-1} \geq N} a_{N_{j-1}} \min(N_j - N_{j-1}, N) < \infty,$$

а условие (1.45) эквивалентно условию

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{p-2} \left(\sum_{j \geq 1: M_j \geq N} a_{N_{j-1}} \right)^p < \infty.$$

§ 6. Поточечные оценки сумм рядов (1.1)–(1.4)

Напомним, что при $x > 0$ функция $\tau(x) = [\pi/x]$.

6.1. Доказательство теоремы 5. Пусть $x \in (\frac{\pi}{N+1}, \frac{\pi}{N}]$ при некотором натуральном числе N . Тогда $N = \tau(x) = [\pi/x]$. Из лемм 5 и 8 имеем

$$\begin{aligned} g(x) &\leq g^*(x) \leq 2\pi P(2N-1) + \sqrt{2}A(N) \leq G(x), \\ f(x) &\leq f^*(x) \leq \sqrt{2}S(2N-1) + \sqrt{2}A(N) \leq F(x). \end{aligned}$$

Из леммы 7, подставляя в (3.9) вместо буквы N величину $4N-3$, выводим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}P(2N-1) &= \frac{1}{4(2N-1)} \sum_{n=1}^{2N-1} na_n \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_{4N-3} \left(v - \frac{\pi}{4(2N-1)} \right) g(v) dv \\ &\leq \frac{(2N-1)}{\pi} \int_{-x}^x g(v) dv + \int_x^{\pi} \frac{\pi g(v)}{2(2N-1)} \left(v - \frac{\pi}{4(2N-1)} \right)^{-2} dv \\ &\leq \frac{4}{x} \int_0^x g(v) dv + 4x \int_x^{\pi} \frac{g(v)}{v^2} dv, \end{aligned}$$

таким образом

$$P(2N-1) \leq \frac{16}{x} \int_0^x g(v) dv + 16x \int_x^{\pi} \frac{g(v)}{v^2} dv.$$

Отсюда, из (1.47) и из (3.7) сразу получаем оценку (1.48). Из леммы 7, подставляя в (3.10) вместо буквы N величину $4N-3$, видим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S(2N-1) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{2N-1} a_n \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_{4N-3}(v) f(v) dv \\ &\leq \frac{2(2N-1)}{\pi} \int_0^x f(v) dv + \int_x^{\pi} \frac{\pi f(v)}{2(2N-1)v^2} dv \\ &\leq \frac{4}{x} \int_0^x f(v) dv + x \int_x^{\pi} \frac{f(v)}{v^2} dv, \end{aligned}$$

таким образом

$$S(2N-1) \leq \frac{8}{x} \int_0^x f(v) dv + 2x \int_x^{\pi} \frac{f(v)}{v^2} dv.$$

Отсюда, из (1.46) и (3.7) сразу получаем оценку (1.49). Теорема 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При изучении сумм рядов (1.1)–(1.4) достаточно было бы заранее предполагать, что последовательность коэффициентов неотрицательна и монотонна в каждой группе, т.е. либо не возрастает, либо не убывает. Более того, случай, когда в группе коэффициенты не убывают, проще для изучения, чем случай, когда коэффициенты в группе не возрастают. Однако такое обобщение ведет к некоторому усложнению обозначений и увеличению объема статьи. Поэтому в этой статье мы остановились только на случае, когда коэффициенты в группе не возрастают.

Список литературы

- [1] А. С. Белов, “О сумме модулей членов сгруппированного тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами”, *Вестн. Ивановского гос. ун-та. Сер. Биология. Химия. Физика. Матем.*, 2006, № 3, 107–121.
- [2] А. С. Белов, С. А. Теляковский, “Усиление теорем Дирихле–Жордана и Янга о рядах Фурье функций ограниченной вариации”, *Матем. сб.*, **198**:6 (2007), 25–40; англ. пер.: A. S. Belov, S. A. Telyakovskii, “Refinement of the Dirichlet–Jordan and Young’s theorems on Fourier series of functions of bounded variation”, *Sb. Math.*, **198**:6 (2007), 777–791.
- [3] S. A. Telyakovskii, “Some properties of Fourier series of functions with bounded variation”, *East J. Approx.*, **10**:1–2 (2004), 215–218.
- [4] С. А. Теляковский, “Некоторые свойства рядов Фурье функций ограниченной вариации. II”, *Теория функций*, Сборник научных трудов, Тр. ИММ УрО РАН, **11**, 2005, 168–174; англ. пер.: S. A. Telyakovskii, “Some properties of Fourier series of functions with bounded variation. II”, *Function theory*, Proc. Steklov Inst. Math., Suppl. 2, МАИК Nauka, Moscow, 2005, 188–195.
- [5] R. M. Trigub, “A note on the paper of S. A. Telyakovskii: “Some properties of Fourier series of functions with bounded variation””, *East J. Approx.*, **13**:1 (2007), 1–6.
- [6] А. С. Белов, “Оценки норм тригонометрических полиномов на интервалах и множествах”, *Anal. Math.*, **5**:2 (1979), 89–117.
- [7] Г. Поля, Г. Серё, *Задачи и теоремы из анализа. Часть вторая*, Наука, М., 1978; пер. с нем.: G. Pólya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, v. II, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1964.
- [8] Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Поля, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.
- [9] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. I, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.

А. С. Белов (A. S. Belov)

Ивановский государственный университет

E-mail: asbel@ivanovo.ac.ru

Поступила в редакцию

04.02.2011