Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Белов, М. И. Харитонов, Субэкспоненциальные
оценки в теореме Ширшова о высоте, *Матем. сб.*, 2012,
том 203, номер 4, 81–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7853>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 09:35:18

УДК 512.552+512.64+519.1

А. Я. Белов, М. И. Харитонов

Субэкспоненциальные оценки в теореме Ширшова о высоте

Пусть $F_{2,m}$ – свободное 2-порожденное ассоциативное кольцо с тождеством $x^m = 0$. В 1993 г. Е. И. Зельманов поставил вопрос об экспоненциальности роста класса нильпотентности кольца $F_{2,m}$ по m .

Мы отвечаем на вопрос Е. И. Зельманова, установив, что в l -порожденной ассоциативной алгебре с тождеством $x^d = 0$ класс нильпотентности меньше, чем $\Psi(d, d, l)$, где

$$\Psi(n, d, l) = 2^{18} l (nd)^{3 \log_3(nd) + 13} d^2.$$

Данный результат является следствием следующего факта, относящегося к комбинаторике слов. Пусть l , n и $d \geq n$ – некоторые натуральные числа. Тогда все слова над l -буквенным алфавитом длины не меньше, чем $\Psi(n, d, l)$, либо содержат x^d , либо являются n -разбиваемыми, где слово W называется n -разбиваемым, если его можно представить в виде $W = W_0 W_1 \cdots W_n$ так, что подслова $W_1, \dots, W_n$ идут в порядке лексикографического убывания. В доказательстве используется теорема Дилуорса (идея В. Н. Латышева). Мы показываем, что множество всех не n -разбиваемых слов над l -буквенным алфавитом имеет высоту $h < \Phi(n, l)$ над множеством слов степени не выше $n - 1$, где

$$\Phi(n, l) = 2^{87} l \cdot n^{12 \log_3 n + 48}.$$

Библиография: 40 названий.

Ключевые слова: теорема Ширшова о высоте, комбинаторика слов, n -разбиваемость, теоремы Дилуорса, проблемы бернсайдовского типа.

§ 1. Введение

1.1. Теорема Ширшова о высоте. В 1958 г. А. И. Ширшов доказал свою знаменитую теорему о высоте (см. [1], [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Назовем слово W n -разбиваемым, если W можно представить в виде $W = v u_1 u_2 \cdots u_n$ так, чтобы $u_1 \succ u_2 \succ \cdots \succ u_n$.

В этом случае при любой нетождественной перестановке σ подслов u_i получается слово $W_\sigma = v u_{\sigma(1)} u_{\sigma(2)} \cdots u_{\sigma(n)}$, лексикографически меньшее W . Это свойство некоторые авторы берут за основу определения понятия n -разбиваемости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Назовем PI-алгебру A алгеброй *ограниченной высоты* $h = \text{Ht}_Y(A)$ над множеством слов $Y = \{u_1, u_2, \dots\}$, если h – минимальное число такое, что любое слово x из A можно представить в виде

$$x = \sum_i \alpha_i u_{j(i,1)}^{k(i,1)} u_{j(i,2)}^{k(i,2)} \cdots u_{j(i,r_i)}^{k(i,r_i)},$$

причем $\{r_i\}$ не превосходят h . Множество Y называется *базисом Ширшова* для A .

Там, где это не вызывает недоразумений, для обозначения высоты будем использовать h вместо $\text{Ht}_Y(A)$.

ТЕОРЕМА ШИРШОВА О ВЫСОТЕ (см. [1], [2]). *Множество всех не n -разбиваемых слов в конечно порожденной алгебре с допустимым полиномиальным тождеством имеет ограниченную высоту H над множеством слов степени не выше $n - 1$.*

Проблемы бернсайдовского типа, связанные с теоремой о высоте, рассмотрены в обзоре [3]. Авторы убеждены, что теорема Ширшова о высоте является фундаментальным фактом комбинаторики слов безотносительно приложений к PI-теории. (Все наши доказательства не выходят за рамки работы со словами.) К сожалению, специалисты по комбинаторике данный факт должным образом пока не оценили. Что касается самого понятия n -разбиваемости, то оно также представляется фундаментальным. Оценки, полученные В. Н. Латышевым на $\xi_n(k)$ – количество не n -разбиваемых полилинейных слов от k символов, привели к фундаментальным результатам в PI-теории. Вместе с тем, это количество есть не что иное, как количество расстановок чисел от 1 до k таких, что никакие n из них (не обязательно стоящие подряд) не идут в порядке убывания. Этому же числу равно количество k -элементных перестановочно упорядоченных множеств диаметра n (множество называется *перестановочно упорядоченным*, если его порядок есть пересечение двух линейных порядков, *диаметр* упорядоченного множества – длина его максимальной антицепи).

Из теоремы о высоте вытекает решение ряда проблем теории колец. В самом деле, пусть в ассоциативной алгебре над полем выполняется полиномиальное тождество $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Можно доказать, что тогда в ней выполняется и допустимое полилинейное тождество (т.е. полиномиальное тождество, у которого хотя бы один коэффициент при членах высшей степени равен единице)

$$x_1 x_2 \cdots x_n = \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

где α_{σ} принадлежат основному полю. В этом случае, если $W = vu_1 u_2 \cdots u_n$ является n -разбиваемым, то для любой перестановки σ слово $W_{\sigma} = vu_{\sigma(1)} u_{\sigma(2)} \cdots u_{\sigma(n)}$ лексикографически меньше слова W , т.е. n -разбиваемое слово можно представить в виде линейной комбинации лексикографически меньших слов. Значит, PI-алгебра имеет базис из не n -разбиваемых слов. В силу теоремы Ширшова о высоте PI-алгебра имеет ограниченную высоту. Как следствие имеем, что если в PI-алгебре выполняется тождество $x^n = 0$, то эта алгебра –

нильпотентна, т.е. все ее слова длины больше, чем некоторое N , тождественно равны 0. Обзоры, посвященные теореме о высоте, содержатся в работах [4]–[8].

Из теоремы о высоте вытекает положительное решение проблемы Куроша и других проблем бернсайдовского типа для PI-колец. Ведь если Y – базис Ширшова и все элементы из Y алгебраичны, то алгебра A конечномерна. Тем самым теорема Ширшова дает явное указание множества элементов, алгебраичность которых ведет к конечномерности всей алгебры. Из этой теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.1 (Берель). *Пусть A – конечно порожденная PI-алгебра. Тогда*

$$\mathrm{GK}(A) < \infty.$$

Здесь $\mathrm{GK}(A)$ – это *размерность Гельфанда–Кириллова* алгебры A :

$$\mathrm{GK}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln V_A(n)}{\ln(n)},$$

где $V_A(n)$ есть функция роста алгебры A , т.е. размерность векторного пространства, порожденного словами степени не выше n от образующих A .

В самом деле, достаточно заметить, что число решений неравенства $k_1|v_1| + \dots + k_h|v_h| \leq n$, где $h \leq H$, превосходит N^H , и потому

$$\mathrm{GK}(A) \leq \mathrm{Ht}(A).$$

Число $m = \deg(A)$ будет обозначать *степень алгебры*, или минимальную степень тождества, которое в ней выполняется, число $n = \mathrm{Pid}(A)$ – *сложность* алгебры A , или максимальное k такое, что $\mathbb{M}_k$ – алгебра матриц размера k , принадлежит многообразию $\mathrm{Var}(A)$, порожденному алгеброй A .

Вместо понятия высоты удобнее пользоваться близким понятием *существенной высоты*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Алгебра A имеет *существенную высоту* $h = H_{\mathrm{Ess}}(A)$ над конечным множеством Y , называемым *s-базисом алгебры A* , если можно выбрать такое конечное множество $D \subset A$, что A линейно представима элементами вида $t_1 \dots t_l$, где $l \leq 2h + 1$, и $\forall i (t_i \in D \vee t_i = y_i^{k_i}; y_i \in Y)$, причем множество таких i , что $t_i \notin D$, содержит не более h элементов. Аналогично определяется *существенная высота множества слов*.

Говоря неформально, любое длинное слово есть произведение периодических частей и “прокладок” ограниченной длины. Существенная высота есть число таких периодических кусков, а обычная еще учитывает “прокладки”.

В связи с теоремой о высоте возникли следующие вопросы.

1. На какие классы колец можно распространить теорему о высоте?
2. Над какими Y алгебра A имеет ограниченную высоту? В частности, какие наборы слов можно взять в качестве $\{v_i\}$?
3. Как устроен вектор степеней $(k_1, \dots, k_h)$? Прежде всего: какие множества компонент этого вектора являются существенными, т.е. какие

наборы k_i могут быть одновременно неограниченными? Какова существенная высота? Верно ли, что множество векторов степеней обладает теми или иными свойствами регулярности?

4. Как оценить высоту?

Перейдем к обсуждению поставленных вопросов.

1.2. Неассоциативные обобщения. Теорема о высоте была распространена на некоторые классы колец, близких к ассоциативным. С. В. Пчелинцев в [9] доказал ее для альтернативного и $(-1, 1)$ случаев, С. П. Мищенко в [10] получил аналог теоремы о высоте для алгебр Ли с разреженным тождеством. В работе А. Я. Белова [11] теорема о высоте была доказана для некоторого класса колец, асимптотически близких к ассоциативным, куда входят, в частности, альтернативные и йордановы PI-алгебры.

1.3. Базисы Ширшова. Пусть A – PI-алгебра и подмножество $M \subseteq A$ является ее s -базисом. Тогда если все элементы множества M алгебраичны над K , то алгебра A конечномерна (проблема Куроша). Ограниченность существенной высоты над Y влечет “положительное решение проблемы Куроша над Y ”. Обратное утверждение менее тривиально.

ТЕОРЕМА 1 (А. Я. Белов). а) Пусть A – градуированная PI-алгебра, Y – конечное множество однородных элементов. Тогда если при всех n алгебра $A/Y^{(n)}$ нильпотентна, то Y есть s -базис A . Если при этом Y порождает A как алгебру, то Y – базис Ширшова алгебры A .

б) Пусть A – PI-алгебра, $M \subseteq A$ – некоторое курошево подмножество в A . Тогда M – s -базис алгебры A .

$Y^{(n)}$ обозначает идеал, порожденный n -ми степенями элементов из Y . Множество $M \subset A$ называется курошевым, если любая проекция $\pi: A \otimes K[X] \rightarrow A'$, в которой образ $\pi(M)$ цел над $\pi(K[X])$, конечномерна над $\pi(K[X])$. Мотивировкой этого понятия служит следующий пример. Пусть $A = \mathbb{Q}[x, 1/x]$. Любая проекция π такая, что $\pi(x)$ алгебраичен, имеет конечномерный образ. Однако множество $\{x\}$ не является s -базисом алгебры $\mathbb{Q}[x, 1/x]$. Таким образом, ограниченность существенной высоты есть некоммутативное обобщение свойства целости.

1.4. Базисы Ширшова, состоящие из слов. Описание базисов Ширшова, состоящих из слов, дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2 (см. [4], [12]). Множество слов Y является базисом Ширшова алгебры A тогда и только тогда, когда для любого слова и длины не выше $t = \text{Pid}(A)$ – сложности алгебры A – множество Y содержит слово, циклически сопряженное к некоторой степени слова u .

Аналогичный результат был независимо получен Г. П. Чекану и В. Дренски. Вопросы, связанные с локальной конечностью алгебр, с алгебраическими множествами слов степени не выше сложности алгебры, исследовались в работах [7], [13]–[18]. В этих же работах обсуждались вопросы, связанные с обобщением теоремы о независимости.

1.5. Существенная высота. Ясно, что размерность Гельфанда–Кириллова оценивается существенной высотой и что s -базис является базисом Ширшова тогда и только тогда, когда он порождает A как алгебру. В представимом случае имеет место и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 3 (А. Я. Белов; см. [4]). *Пусть A – конечно порожденная представимая алгебра и пусть $H_{\text{Ess}Y}(A) < \infty$. Тогда $H_{\text{Ess}Y}(A) = \text{GK}(A)$.*

СЛЕДСТВИЕ 1.2 (В. Т. Марков). *Размерность Гельфанда–Кириллова конечно порожденной представимой алгебры есть целое число.*

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Если $H_{\text{Ess}Y}(A) < \infty$ и алгебра A представима, то существенная высота $H_{\text{Ess}Y}(A)$ не зависит от выбора s -базиса Y .*

В этом случае размерность Гельфанда–Кириллова также равна существенной высоте в силу локальной представимости относительно свободных алгебр.

Строение векторов степеней. Хотя в представимом случае размерность Гельфанда–Кириллова и существенная высота ведут себя хорошо, даже тогда множество векторов степеней может быть устроено плохо, а именно может быть дополнением к множеству решений системы экспоненциально-полиномиальных диофантовых уравнений (см. [4]). Вот почему существует пример представимой алгебры с трансцендентным рядом Гильберта. Однако для относительно свободной алгебры ряд Гильберта рационален (см. [19]).

1.6. n -разбиваемость и теорема Дилуорса. Значение понятия n -разбиваемости выходит за рамки проблематики, относящейся к проблемам бернсайдовского типа. Оно играет роль и при изучении полилинейных слов, в оценке их количества, где *полилинейным* называется слово, в которое каждая буква входит не более одного раза. В. Н. Латышев применил теорему Дилуорса для получения оценки числа не m -разбиваемых полилинейных слов степени n над алфавитом $\{a_1, \dots, a_n\}$. Эта оценка – $(m-1)^{2n}$, и она близка к реальности. Напомним теорему Дилуорса.

ТЕОРЕМА ДИЛУОРСА. *Пусть n – наибольшее количество элементов антицепи данного конечного частично упорядоченного множества M . Тогда M можно разбить на n попарно непересекающихся цепей.*

Рассмотрим полилинейное слово W из n букв. Положим $a_i \succ a_j$, если $i > j$ и буква a_i стоит в слове W правее a_j . Условие не k -разбиваемости означает отсутствие антицепи из n элементов. Тогда по теореме Дилуорса все позиции (и, соответственно, буквы a_i) разбиваются на $n-1$ цепь. Сопоставим каждой цепи свой цвет. Тогда раскраска позиций и раскраска букв однозначно определяет слово W , а число таких раскрасок не превосходит

$$(n-1)^k \times (n-1)^k = (n-1)^{2k}.$$

Из данной оценки следует, что выполняются полилинейные тождества, отвечающие неприводимому модулю, диаграмма Юнга которого содержит квадрат n^4 . Это, в свою очередь, во-первых, позволило получить прозрачное доказательство теоремы Регева о том, что тензорное произведение PI-алгебр снова является PI-алгеброй, во-вторых, установить существование разреженного

тождества в общем случае, а также тождества Капелли в конечно порожденном случае (тем самым, в частности, доказать теорему о нильпотентности радикала), и в-третьих, осуществить “супертрюк” А. Р. Кемера, сводящий изучение тождеств общих алгебр к изучению супер-тождеств конечно порожденных супералгебр в нулевой характеристике. Смежные вопросы рассмотрены в работах [20]–[22].

Вопросы, связанные с перечислением полилинейных слов, не являющихся n -разбиваемыми, имеют самостоятельный интерес. (Например, существует биекция между не 3-разбиваемыми словами и числами Каталана.) С одной стороны, это чисто комбинаторная задача, с другой стороны, она связана с рядом коразмерностей для алгебры общих матриц. Исследование полилинейных слов представляется чрезвычайно важным. В. Н. Латышев (см., например, [23]) поставил проблему конечной базисуемости множества старших полилинейных слов для T -идеала относительно взятия надслов и изотонных подстановок. Из этой проблемы вытекает проблема Шпехта для полилинейных многочленов, имеется тесная связь с проблемой слабой нётеровости групповой алгебры бесконечной финитарной симметрической группы над полем положительной характеристики (для нулевой характеристики это было установлено А. Залесским). Для решения проблемы Латышева надо уметь переводить свойства T -идеалов на язык полилинейных слов. В работах [4], [11] была произведена попытка осуществить программу перевода структурных свойств алгебр на язык комбинаторики слов. На язык полилинейных слов такой перевод осуществить проще, в дальнейшем можно получить информацию и о словах общего вида.

В настоящей работе мы переносим технику В. Н. Латышева на не полилинейный случай, что позволяет получить субэкспоненциальную оценку в теореме Ширшова о высоте. Г. Р. Челноков предложил идею этого переноса в 1996 г.

1.7. Оценки высоты. Первоначальное доказательство А. И. Ширшова хотя и было чисто комбинаторным (оно основывалось на технике элиминации, развитой им в алгебрах Ли, в частности, в доказательстве теоремы о свободе), однако оно давало только примитивно рекурсивные оценки. Позднее А. Т. Колотов в [24] получил оценку на $\text{Ht}(A) \leq l^{l^n}$ ($n = \deg(A)$, l – число образующих). А. Я. Белов в работе [25] показал, что $\text{Ht}(n, l) < 2nl^{n+1}$. Экспоненциальная оценка теоремы Ширшова о высоте изложена также в работах [12], [26], [27]. Данные оценки улучшались в работах А. Клейна [28], [29]. В 2001 г. Е. С. Чибриков в работе [30] доказал, что $\text{Ht}(4, l) \geq (7k^2 - 2k)$. М. И. Харитонов получил в работах [27], [31], [32] оценки на структуру кусочной периодичности. В 2011 г. А. А. Лопатин [33] получил следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $C_{n,l}$ – степень нильпотентности свободной l -порожденной алгебры, удовлетворяющей тождеству $x^n = 0$. Пусть p – характеристика базового поля алгебры, $p > \frac{n}{2}$. Тогда

$$C_{n,l} < 4 \cdot 2^{n/2} l. \quad (1)$$

По определению $C_{n,l} \leq \Psi(n, n, l)$. Заметим, что для малых n оценка (1) меньше, чем полученная в данной работе оценка $\Psi(n, n, l)$, но при росте n оценка $\Psi(n, n, l)$ асимптотически лучше оценки (1).

Е. И. Зельманов поставил следующий вопрос в Днестровской тетради [34] в 1993 г.

ВОПРОС 1.1. Пусть $F_{2,m}$ – свободное 2-порожденное ассоциативное кольцо с тождеством $x^m = 0$. Верно ли, что класс нильпотентности кольца $F_{2,m}$ растет экспоненциально по m ?

Наша работа отвечает на вопрос Е. И. Зельманова следующим образом: в действительности искомый класс нильпотентности растет субэкспоненциально.

1.8. Полученные результаты. Основной результат работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 5. *Высота множества не n -разбиваемых слов над l -буквенным алфавитом относительно множества слов длины меньше n не превышает $\Phi(n, l)$, где*

$$\Phi(n, l) = E_1 l \cdot n^{E_2 + 12 \log_3 n}, \quad E_1 = 4^{21 \log_3 4 + 17}, \quad E_2 = 30 \log_3 4 + 10.$$

Из теоремы 5 путем некоторого огрубления и упрощения оценки получается, что при фиксированном l и $n \rightarrow \infty$

$$\Phi(n, l) < 2^{87} l \cdot n^{12 \log_3 n + 48} = n^{12(1+o(1)) \log_3 n},$$

а при фиксированном n и $l \rightarrow \infty$

$$\Phi(n, l) < C(n)l.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.4. *Высота l -порожденной PI-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством слов длины меньше n не превышает $\Phi(n, l)$.*

Кроме того, доказывается субэкспоненциальная оценка, которая лучше при малых n .

ТЕОРЕМА 6. *Высота множества не n -разбиваемых слов над l -буквенным алфавитом относительно множества слов длины меньше n не превышает $\Phi(n, l)$, где*

$$\Phi(n, l) = 2^{40} l \cdot n^{38 + 8 \log_2 n}.$$

Как следствие получаются субэкспоненциальные оценки на индекс нильпотентности l -порожденных ниль-алгебр степени n для произвольной характеристики.

Другим основным результатом нашей работы является следующая

ТЕОРЕМА 7. *Пусть l, n и $d \geq n$ – некоторые натуральные числа. Тогда все l -порожденные слова длины не меньше, чем $\Psi(n, d, l)$, либо содержат x^d , либо являются n -разбиваемыми, где*

$$\Psi(n, d, l) = 4^{5+3 \log_3 4} l (nd)^{3 \log_3 (nd) + (5+6 \log_3 4) d^2}.$$

Из теоремы 7 путем некоторого огрубления и упрощения оценки получается, что при фиксированном l и $nd \rightarrow \infty$

$$\Psi(n, d, l) < 2^{18} l (nd)^{3 \log_3(nd) + 13} d^2 = (nd)^{3(1+o(1)) \log_3(nd)},$$

а при фиксированном n и $l \rightarrow \infty$

$$\Psi(n, d, l) < C(n, d)l.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.5. Пусть l, d – некоторые натуральные числа. Пусть в ассоциативной l -порожденной алгебре A выполнено тождество $x^d = 0$. Тогда ее индекс нильпотентности меньше, чем $\Psi(d, d, l)$.

Кроме того, доказываемая субэкспоненциальная оценка, которая лучше при малых n и d .

ТЕОРЕМА 8. Пусть l, n и $d \geq n$ – некоторые натуральные числа. Тогда все l -порожденные слова длины не меньше, чем $\Psi(n, d, l)$, либо содержат x^d , либо являются n -разбиваемыми, где

$$\Psi(n, d, l) = 256l(nd)^{2 \log_2(nd) + 10} d^2.$$

Для вещественного числа x положим $\lceil x \rceil := -[-x]$. Таким образом мы округляем нецелые числа в большую сторону.

В процессе доказательства теоремы 5 доказываемая следующая теорема, оценивающая существенную высоту.

ТЕОРЕМА 9. Существенная высота l -порожденной PI-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством слов длины меньше n меньше, чем $\Upsilon(n, l)$, где

$$\Upsilon(n, l) = 2n^{3 \lceil \log_3 n \rceil + 4} l.$$

В работе [35] установлено, что индекс нильпотентности l -порожденного ниль-полукольца степени n совпадает с индексом нильпотентности l -порожденного ниль-кольца степени n , причем сложение не обязательно коммутативно. Там же приведены примеры не нильпотентных ниль-почтиколец индекса 2. Таким образом, наши результаты распространяются и на случай полуколец.

1.9. О нижних оценках. Сравним полученные результаты с нижней оценкой для высоты. Высота алгебры A не меньше ее размерности Гельфанда–Кириллова $GK(A)$. Для алгебры l -порожденных общих матриц порядка n данная размерность равна $(l-1)n^2 + 1$ (см. [36], а также [37]). В то же время, минимальная степень тождества этой алгебры равна $2n$ в силу теоремы Амицура–Левицкого. Имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Высота l -порожденной PI-алгебры степени n , а также множества не n -разбиваемых слов над l -буквенным алфавитом не меньше, чем $(l-1)n^2/4 + 1$.

Нижние оценки на индекс нильпотентности были установлены Е. Н. Кузьминым в работе [38]. Он привел пример 2-порожденной алгебры с тождеством $x^n = 0$, индекс нильпотентности которой строго больше $(n^2 + n - 2)/2$. Вопрос нахождения нижних оценок рассматривается в работе [31].

В то же время для случая нулевой характеристики и счетного числа образующих Ю. П. Размыслов (см., например, [39]) получил верхнюю оценку на индекс нильпотентности равную n^2 .

Сначала мы докажем теорему 7, а в § 4 займемся оценками существенной высоты, т.е. количества различных периодических фрагментов в не n -разбиваемом слове.

Авторы признательны В. Н. Латышеву, А. В. Михалеву и всем участникам семинара “Теория колец” за внимание к работе, а также участникам семинара МФТИ под руководством А. М. Райгородского.

§ 2. Оценки на появление степеней подслов

2.1. План доказательства теоремы 7. В леммах 2.1, 2.2 и 2.3 описываются достаточные условия для присутствия периода длины d в не n -разбиваемом слове W . В лемме 2.4 связываются понятия n -разбиваемости слова W и множества его хвостов. После этого определенным образом выбирается подмножество множества хвостов слова W , для которого можно применить теорему Дилуорса. Затем мы раскрашиваем хвосты и их первые буквы в соответствии с принадлежностью к цепям, полученным при применении теоремы Дилуорса.

Необходимо изучить, в какой позиции начинают отличаться соседние хвосты в каждой цепи. Также вызывает интерес то, с какой “частотой” эта позиция попадет в p -хвост для некоторого $p \leq n$. Потом мы несколько обобщаем наши рассуждения, деля хвосты на сегменты по несколько букв, а затем рассматривая, в какой сегмент попала позиция, в которой начинают отличаться друг от друга соседние хвосты в цепи. В лемме 3.2 связываются рассматриваемые “частоты” для p -хвостов и kp -хвостов для $k = 3$.

В завершение доказательства строится иерархическая структура на основе применения леммы 3.2, т.е. рассматриваются сначала сегменты n -хвостов, потом подсегменты этих сегментов и т.д. Далее мы рассматриваем наибольшее возможное количество хвостов из подмножества, для которого была применена теорема Дилуорса, после чего оцениваем сверху общее количество хвостов, а, значит, и букв слова W .

2.2. Свойства периодичности и n -разбиваемости. Пусть $a_1, \dots, a_l$ – алфавит, над которым проводится построение слов. Порядок $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_l$ индуцирует лексикографический порядок на словах над заданным алфавитом. Для удобства введем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. а) Если в слове v содержится подслово вида u^t , то будем говорить, что в слове v содержится период длины t .

б) Если слово u является началом слова v , то такие слова называют *несравнимыми*.

в) Слово v – *хвост* слова u , если найдется слово w такое, что $u = wv$.

г) Слово v – k -*хвост* слова u , если v состоит из k первых букв некоторого хвоста u .

г*) k -*начало* – то же самое, что и k -хвост.

д) Пусть слово u левее слова v , если начало слова u левее начала слова v .

Обозначим через $|u|$ длину слова u .

Для доказательства потребуются следующие достаточные условия наличия периода.

ЛЕММА 2.1. *В слове W длины x либо первые $[x/d]$ хвостов попарно сравнимы, либо в слове W найдется период длины d .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в слове W не нашлось слова вида u^d . Рассмотрим первые $[x/d]$ хвостов. Предположим, что среди них нашлись 2 несравнимых хвоста v_1 и v_2 . Пусть $v_1 = u \cdot v_2$. Тогда $v_2 = u \cdot v_3$ для некоторого v_3 . Тогда $v_1 = u^2 \cdot v_3$. Применяя такие рассуждения, получим, что $v_1 = u^d \cdot v_{d+1}$, так как $|u| < x/d$, $|v_2| \geq (d-1)x/d$. Противоречие.

ЛЕММА 2.2. *Если в слове V длины $k \cdot t$ не больше k различных подслов длины k , то V включает в себя период длины t .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму индукцией по k . База при $k = 1$ очевидна. Если найдется не больше, чем $(k-1)$ различных подслов длины $(k-1)$, то применим индукционное предположение. Если существуют k различных подслов длины $(k-1)$, то каждое подслово длины k однозначно определяется своими первыми $(k-1)$ буквами. Значит, $V = v^t$, где v – k -хвост V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. а) Слово W – n -*разбиваемо* в обычном смысле, если найдутся $u_1, u_2, \dots, u_n$ такие, что $W = v \cdot u_1 \cdots u_n$, при этом $u_1 \succ \cdots \succ u_n$.

б) В текущем доказательстве слово W будем называть n -*разбиваемым* в *хвостовом* смысле, если найдутся хвосты $u_1, \dots, u_n$ такие, что $u_1 \succ u_2 \succ \cdots \succ u_n$ и для любого $i = 1, 2, \dots, n-1$ начало u_i – слева от начала u_{i+1} . Если особо не оговорено противное, то под n -*разбиваемыми* словами мы подразумеваем n -разбиваемые в хвостовом смысле.

в) Слово W – n -*сократимое*, если оно либо n -разбиваемо в обычном смысле, либо найдется слово вида $u^d \subseteq W$.

Теперь опишем достаточное условие n -сократимости и его связь с n -разбиваемостью.

ЛЕММА 2.3. *Если в слове W найдутся n одинаковых непересекающихся подслов и длины $n \cdot d$, то W n -сократимое.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Рассмотрим хвосты $u_1, u_2, \dots, u_n$ слова u , которые начинаются с каждой из его первых n букв. Перенумеруем хвосты так, чтобы выполнялись неравенства $u_1 \succ \cdots \succ u_n$. По лемме 2.1

они несравнимы. Рассмотрим подслово u_1 , лежащее в самом левом экземпляре слова u , подслово u_2 – во втором слева, $\dots$, u_n – в n -м слева. Получили n -разбиение слова W . Противоречие.

ЛЕММА 2.4. *Если слово W является $4nd$ -разбиваемым, то оно n -сократимое.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Рассмотрим порядковые номера позиций букв a_i , где $a_1 < a_2 < \dots < a_{4nd}$, с которых начинаются хвосты u_i , разбивающие W . Положим $a_{4nd+1} = |W|$. Если W – не n -сократимое, то найдется такое число i , что $1 \leq i \leq 4(n-1)d+1$ и для любых $i \leq b < c \leq d < e \leq i+4d$ несравнимы $(a_c - a_b)$ -хвост u_b и $(a_e - a_d)$ -хвост u_d . Сравним числа $a_{i+2d} - a_i$ и $a_{i+4d} - a_{i+2d}$. Можно считать, что $a_{i+4d} - a_{i+2d} \geq a_{i+2d} - a_i$. Пусть $a_{j+1} - a_j = \inf_k (a_{k+1} - a_k)$, $0 \leq j < 2d$. Сравним числа j и d . Можно считать, что $j < d$. По предположению $(a_{2d} - a_j)$ -хвост u_j и $(a_{2d} - a_{j+1})$ -хвост u_{j+1} несравнимы с $(a_{4d} - a_{2d})$ -хвостом u_{2d} . Так как $a_{4d} - a_{2d} \geq a_{2d} - a_j > a_{2d} - a_{j+1}$, то $(a_{2d} - a_j)$ -хвост u_j и $(a_{2d} - a_{j+1})$ -хвост u_{j+1} несравнимы между собой. Так как

$$\frac{a_{2d} - a_j}{a_{2d} - a_{j+1}} \leq \frac{d+1}{d},$$

то $(a_{j+1} - a_j)$ -хвост u_j в степени d содержится в $(a_{2d} - a_j)$ -хвосте u_j . Противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Если слово W – не n -разбиваемо в обычном смысле, то W не $4nd$ -разбиваемо (в хвостовом смысле).*

Положим $p_{n,d} := 4nd - 1$.

Пусть W не n -сократимое слово. Тогда W не $(p_{n,d} + 1)$ -разбиваемое. Рассмотрим $U - [|W|/d]$ -хвост слова W . Пусть Ω – множество хвостов слова W , которые начинаются в U . Тогда по лемме 2.1 любые два элемента из Ω сравнимы. Естественным образом строится биекция между Ω , буквами U и натуральными числами от 1 до $|\Omega| = |U|$.

Введем слово θ такое, что θ лексикографически меньше любого слова.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В текущем доказательстве теоремы 7 все хвосты мы предполагаем лежащими в Ω .

§ 3. Оценки на появление периодических фрагментов

Применение теоремы Дилуорса. Для хвостов u и v положим $u < v$, если $u \prec v$ и, кроме того, u левее v . Тогда по теореме Дилуорса Ω можно разбить на $p_{n,d}$ цепей, где в каждой цепи $u \prec v$, если u левее v . Покрасим начальные позиции хвостов в $p_{n,d}$ цветов в соответствии с принадлежностью к цепям. Фиксируем натуральное число p . Каждому натуральному числу i от 1 до $|\Omega|$ сопоставим $B^p(i)$ – упорядоченный набор из $p_{n,d}$ слов $\{f(i, j)\}$, построенных по следующему правилу.

Для каждого $j = 1, 2, \dots, p_{n,d}$ положим

$$f(i, j) = \{\max f \leq i : f \text{ раскрашено в цвет } j\}.$$

Если такого f не найдется, то слово из $B^p(i)$ на позиции j считаем равным θ , в противном случае это слово считаем равным p -хвосту, который начинается с $f(i, j)$ -ой буквы.

Неформально говоря, мы наблюдаем, с какой скоростью хвосты “эволюционируют” в своих цепях, если рассматривать последовательность позиций слова W как ось времени.

3.1. Наборы $B^p(i)$, процесс на позициях.

ЛЕММА 3.1 (о процессе). *Дана последовательность S длины $|S|$, составленная из слов длины $k - 1$. Каждое из них состоит из $k - 2$ символов “0” и одной “1”. Пусть S удовлетворяет следующему условию:*

если для некоторого $0 < s \leq k - 1$ найдутся $p_{n,d}$ слов, в которых “1” стоит на s -м месте, то между первым и $p_{n,d}$ -м из этих слов найдется слово, в котором “1” стоит строго меньше, чем на s -м месте; $L(k - 1) = \sup_S |S|$.

Тогда $L(k - 1) \leq p_{n,d}^{k-1} - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $L(1) \leq p_{n,d} - 1$. Пусть $L(k - 1) \leq p_{n,d}^{k-1} - 1$. Покажем, что $L(k) \leq p_{n,d}^k - 1$. Рассмотрим слова, у которых символ “1” стоит на первом месте; их не больше $p_{n,d} - 1$. Между любыми двумя из них, а также перед первым и после последнего, количество слов не больше $L(k - 1) \leq p_{n,d}^{k-1} - 1$. Получаем, что

$$L(k) \leq p_{n,d} - 1 + (p_{n,d})((p_{n,d})^{k-1} - 1) = (p_{n,d})^k - 1.$$

Нам требуется ввести некоторую величину, которая бы численно оценивала скорость “эволюции” наборов $B^p(i)$. Положим

$$\psi(p) := \{\max k: B^p(i) = B^p(i + k - 1)\}.$$

В частности, по лемме 2.2 $\psi(p_{n,d}) \leq p_{n,d}d$.

Для заданного α определим разбиение последовательности первых $|\Omega|$ позиций i слова W на классы эквивалентности $\sim_\alpha$ следующим образом: $i \sim_\alpha j$, если $B^\alpha(i) = B^\alpha(j)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для любых натуральных $a < b$ имеем $\psi(a) \leq \psi(b)$.*

ЛЕММА 3.2 (основная). *Для любых натуральных чисел a, k верно неравенство*

$$\psi(a) \leq p_{n,d}^k \psi(k \cdot a) + k \cdot a.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим по наименьшему представителю из каждого класса $\sim_{k \cdot a}$. Получена последовательность позиций $\{i_j\}$. Теперь рассмотрим все i_j и $B^{k \cdot a}(i_j)$ из одного класса эквивалентности по $\sim_a$. Пусть он состоит из $B^{k \cdot a}(i_j)$ при $i_j \in [b, c)$. Обозначим за $\{i_j\}'$ отрезок последовательности $\{i_j\}$, для которого $i_j \in [b, c - k \cdot a)$.

Фиксируем некоторое натуральное число r , $1 \leq r \leq p_{n,d}$. Назовем все $k \cdot a$ -начала цвета r , начинающиеся с позиций слова W из $\{i_j\}'$, представителями типа r . Все представители типа r будут попарно различны, так как

они начинаются с наименьших позиций в классах эквивалентности по $\sim_{k \cdot a}$. Разобьем каждый представитель типа r на k сегментов длины a . Пронумеруем сегменты внутри каждого представителя типа r слева направо числами от нуля до $k - 1$. Если найдутся $p_{n,d} + 1$ представителей типа r , у которых совпадают первые $t - 1$ сегментов, но которые попарно различны в t -м, где t – натуральное число, $1 \leq t \leq k - 1$, то найдутся две первых буквы t -го сегмента одного цвета. Тогда позиции, с которых начинаются эти сегменты, входят в разные классы эквивалентности по $\sim_a$.

Применим лемму 3.1 следующим образом: во всех представителях типа r , кроме самого правого, будем считать сегменты *единичными*, если именно в них находится наименьшая позиция, в которой текущий представитель типа r отличается от предыдущего. Остальные сегменты считаем *нулевыми*.

Теперь можно применить лемму 3.1 (о процессе) с параметрами, совпадающими с заданными в условии леммы. Получаем, что в последовательности $\{i_j\}'$ будет не более $p_{n,d}^{k-1}$ представителей типа r . Тогда в последовательности $\{i_j\}'$ будет не более $p_{n,d}^k$ членов. Таким образом, $c - b \leq p_{n,d}^k \psi(k \cdot a) + k \cdot a$.

3.2. Завершение доказательств теорем 7 и 8. Пусть

$$a_0 = 3^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil}, \quad a_1 = 3^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil - 1}, \quad \dots, \quad a_{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil} = 1.$$

При этом $|W| \leq d|\Omega| + d$ в силу леммы 2.1.

Так как набор $B^1(i)$ принимает не более $1 + p_{n,d}l$ различных значений, то $|W| \leq d(1 + p_{n,d}l)\psi(1) + d$. По лемме 3.2

$$\begin{aligned} \psi(1) &< (p_{n,d}^3 + p_{n,d})\psi(3) < (p_{n,d}^3 + p_{n,d})^2\psi(9) \\ &< \dots < (p_{n,d}^3 + p_{n,d})^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil} \psi(p_{n,d}) \leq (p_{n,d}^3 + p_{n,d})^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil} p_{n,d}d. \end{aligned}$$

Подставляя $p_{n,d} = 4nd - 1$, получаем

$$|W| < 4^{5+3\log_3 4l(nd)} 3^{\log_3(nd)+(5+6\log_3 4)} d^2.$$

Отсюда имеем утверждение теоремы 7.

Доказательство теоремы 8 завершается также, только вместо последовательности

$$a_0 = 3^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil}, \quad a_1 = 3^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil - 1}, \quad \dots, \quad a_{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil} = 1$$

рассматривается последовательность

$$a_0 = 2^{\lceil \log_2 p_{n,d} \rceil}, \quad a_1 = 2^{\lceil \log_2 p_{n,d} \rceil - 1}, \quad \dots, \quad a_{\lceil \log_2 p_{n,d} \rceil} = 1.$$

§ 4. Оценка существенной высоты

В этом параграфе мы продолжаем доказывать основную теорему 5. Попутно доказывается теорема 9. Будем смотреть на позиции букв слова W как на ось времени, т.е. подслово u встретилось раньше подслова v , если u целиком лежит левее v внутри слова W .

4.1. Вычленение различных периодических фрагментов в слове W .

Обозначим через s количество подслов слова W с периодом длины меньше n , в которых период повторяется больше $2n$ раз и которые попарно разделены сравнимыми с предыдущим периодом подсловами длины больше n . Пронумеруем их от начала к концу слова: $x_1^{2n}, x_2^{2n}, \dots, x_s^{2n}$. Таким образом,

$$W = y_0 x_1^{2n} y_1 x_2^{2n} \dots x_s^{2n} y_s.$$

Если найдется i такое, что длина слова x_i не меньше n , то в слове x_i^2 найдутся n попарно сравнимых хвостов, а, значит, слово x_i^{2n} — n -разбиваемое. Получаем, что число s не меньше, чем существенная высота слова W над множеством слов длины меньше n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Слово u назовем *нециклическим*, если u нельзя представить в виде v^k , где $k > 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. *Слово-цикл* u — слово u со всеми его сдвигами по циклу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Слово W называется *сильно n -разбиваемым*, если его можно представить в виде $W = W_0 W_1 \dots W_n$, где подслова $W_1, \dots, W_n$ идут в порядке лексикографического убывания, и каждое из слов W_i , $i = 1, 2, \dots, n$, начинается с некоторого слова $z_i^k \in Z$, все z_i различны.

ЛЕММА 4.1. Если найдется число m , $1 \leq m < n$, такое, что существуют $2n - 1$ попарно несравнимых слов длины m $x_{i_1}, \dots, x_{i_{2n-1}}$, то W — n -разбиваемое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $x := x_{i_1}$. Тогда в слове W найдутся непересекающиеся подслова $x^{p_1} v'_1, \dots, x^{p_{2n-1}} v'_{2n-1}$, где $p_1, \dots, p_{2n-1}$ — некоторые натуральные числа, большие n , а $v'_1, \dots, v'_{2n-1}$ — некоторые слова длины m , сравнимые с x , $v'_1 = v_{i_1}$. Тогда среди слов $v'_1, \dots, v'_{2n-1}$ найдутся либо n лексикографически больших x , либо n лексикографически меньших x . Можно считать, что $v'_1, \dots, v'_n$ лексикографически больше x . Тогда в слове W найдутся подслова $v'_1, x v'_2, \dots, x^{n-1} v'_n$, идущие слева направо в порядке лексикографического убывания.

Рассмотрим некоторое число m , $1 \leq m < n$. Разобьем все x_i длины m на эквивалентности по сильной несравнимости и выберем по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Пусть это слова $x_{i_1}, \dots, x_{i_{s'}}$, где s' — некоторое натуральное число. Так как подслова x_i являются периодами, будем рассматривать их как слово-циклы.

Обозначим $v_k := x_{i_k}$.

Пусть $v(k, i)$, где i — натуральное число от 1 до m , — циклический сдвиг слова v_k на $(k - 1)$ позиций вправо, т.е. $v(k, 1) = v_k$, а первая буква слова $v(k, 2)$ является второй буквой слова v_k . Таким образом, $\{v(k, i)\}_{i=1}^m$ — слово-цикл слова v_k . Заметим, что для любых $1 \leq i_1, i_2 \leq p$, $1 \leq j_1, j_2 \leq m$ слово $v(i_1, j_1)$ сильно несравнимо со словом $v(i_2, j_2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Случаи $m = 2, 3, n - 1$ рассмотрены в работах [31], [27].

4.2. Применение теоремы Дилуорса. Рассмотрим множество слов $\Omega' = \{v(i, j)\}$, где $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq m$. Введем следующий порядок на словах $v(i, j)$: $v(i_1, j_1) \succ v(i_2, j_2)$, если $v(i_1, j_1) > v(i_2, j_2)$ и $i_1 > i_2$.

ЛЕММА 4.2. *Если в множестве Ω' для порядка $\succ$ найдется антицепь длины n , то слово W будет n -разбиваемым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть нашлась антицепь длины n из слов

$$v(i_1, j_1), v(i_2, j_2), \dots, v(i_n, j_n), \quad i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n.$$

Если все неравенства между i_k строгие, то слово W – n -разбиваемое по определению.

Предположим, что для некоторого числа r нашлись $i_{r+1} = \dots = i_{r+k}$, где либо $r = 0$, либо $i_r < i_{r+1}$. Кроме того, k – такое натуральное число, что либо $k = n - r$, либо $i_{r+k} < i_{r+k+1}$.

Слово $s_{i_{r+1}}$ периодическое, следовательно, оно представляется в виде произведения n экземпляров слова $v_{i_{r+1}}^2$, которое содержит слово-цикл $v_{i_{r+1}}$. Значит, в слове $s_{i_{r+1}}$ можно выбрать непересекающиеся подслова, идущие в порядке лексикографического убывания, равные $v(i_{r+1}, j_{r+1}), \dots, v(i_{r+k}, j_{r+k})$ соответственно. Таким же образом поступаем со всеми множествами равных индексов в последовательности $\{i_r\}_{r=1}^n$. Получаем n -разбиваемость слова W . Противоречие.

Значит, множество Ω' можно разбить на $n - 1$ цепь.

Положим $q_n = n - 1$.

4.3. Наборы $C^\alpha(i)$, процесс на позициях. Покрасим первые буквы слов из Ω' в q_n цветов в соответствии с принадлежностью к цепям. Покрасим также числа от 1 до $|\Omega'|$ в соответствующие цвета. Фиксируем натуральное число $\alpha \leq m$. Каждому числу i от 1 до $|\Omega'|$ сопоставим упорядоченный набор слов $C^\alpha(i)$, состоящий из q_n слов по следующему правилу.

Для каждого $j = 1, 2, \dots, q_n$ положим $f(i, j) = \{\max f \leq i : \text{существует } k \text{ такое, что } v(f, k) \text{ раскрашено в цвет } j \text{ и } \alpha\text{-хвост, который начинается с } f, \text{ состоит только из букв, являющихся первыми буквами хвостов из } \Omega'\}\}.$

Если такого f не найдется, то слово из $C^\alpha(i)$ считаем равным θ , в противном случае это слово считаем равным α -хвосту слова $v(f, k)$.

Положим $\varphi(a) = \{\max k : \text{для некоторого } i \text{ верно } C^a(i) = C^a(i + k - 1)\}.$

Для заданного $a \leq m$ определим разбиение последовательности слово-циклов $\{i\}$ слова W на классы эквивалентности следующим образом: $i \sim_a j$, если $C^a(i) = C^a(j)$.

Заметим, что построенная конструкция во многом аналогична построенной в доказательстве теоремы 7. Обращаем внимание на схожесть $B^a(i)$ и $C^a(i)$, а также $\psi(a)$ и $\varphi(a)$.

ЛЕММА 4.3. *Во введенных ранее обозначениях $\varphi(m) \leq q_n/m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В п. 4.1 слово-циклы были пронумерованы. Рассмотрим слово-циклы с номерами $i, i+1, \dots, i+[q_n/m]$. Ранее было показано, что каждый слово-цикл состоит из m различных слов. Рассмотрим теперь слова в слово-циклах $i, i+1, \dots, i+[q_n/m]$ как элементы множества Ω' . При таком рассмотрении у первых букв из слово-циклов появляются свои позиции. Всего рассматриваемых позиций не меньше n . Следовательно, среди них найдутся две позиции одного цвета. Тогда в силу сильной несравнимости слово-циклов имеем утверждение леммы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Для любых натуральных $a < b$ имеем $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

ЛЕММА 4.4 (основная). Для натуральных чисел a, k таких, что $ak \leq m$, верно неравенство

$$\varphi(a) \leq q_n^k \varphi(k \cdot a).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим по наименьшему представителю из каждого класса $\sim_{k \cdot a}$. Получена последовательность позиций $\{i_j\}$. Теперь рассмотрим все i_j и $C^{k \cdot a}(i_j)$ из одного класса эквивалентности по $\sim_a$. Пусть он состоит из $C^{k \cdot a}(i_j)$ при $i_j \in [b, c)$. Обозначим за $\{i_j\}'$ отрезок последовательности $\{i_j\}$, для которого $i_j \in [b, c)$.

Фиксируем некоторое натуральное число r , $1 \leq r \leq q_n$. Назовем все $k \cdot a$ -начала цвета r , начинающиеся с позиций слова W из $\{i_j\}'$, представителями типа r . Все представители типа r будут попарно различны, так как они начинаются с наименьших позиций в классах эквивалентности по $\sim_{k \cdot a}$. Разобьем каждый представитель типа r на k сегментов длины a . Пронумеруем сегменты внутри каждого представителя типа r слева направо числами от нуля до $k-1$. Если найдутся q_n+1 представителей типа r , у которых совпадают первые $t-1$ сегментов, но которые попарно различны в t -м, где t – натуральное число, $1 \leq t \leq k-1$, то найдутся две первые буквы t -го сегмента одного цвета. Тогда позиции, с которых начинаются эти сегменты, входят в разные классы эквивалентности по $\sim_a$.

Применим лемму 3.1 следующим образом: во всех представителях типа r , кроме самого правого, будем считать сегменты единичными, если именно в них находится наименьшая позиция, в которой текущий представитель типа r отличается от предыдущего. Остальные сегменты считаем нулевыми.

Теперь мы можем применить лемму 3.1 (о процессе) с параметрами, совпадающими с заданными в условии леммы. Получаем, что количество представителей типа r в последовательности $\{i_j\}'$ не превосходит q_n^{k-1} . Тогда в последовательности $\{i_j\}'$ будет не более q_n^k членов. Таким образом, $c-b \leq q_n^k \varphi(k \cdot a)$.

4.4. Завершение доказательства теоремы 9. Пусть

$$a_0 = 3^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil}, \quad a_1 = 3^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil - 1}, \quad \dots, \quad a_{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil} = 1.$$

Подставляя эти a_i в леммы 4.4 и 4.3, получаем, что

$$\varphi(1) \leq q_n^3 \varphi(3) \leq q_n^9 \varphi(9) \leq \dots \leq q_n^{3^{\lceil \log_3 m \rceil}} \varphi(m) \leq q_n^{3^{\lceil \log_3 m \rceil} + 1}.$$

Так как C_i^1 принимает не более $1 + q_n l$ различных значений, то

$$|\Omega'| < q_n^{3^{\lceil \log_3 m \rceil + 1}} (1 + q_n l) < n^{3^{\lceil \log_3 n \rceil + 2} l}.$$

По лемме 4.1 получаем, что количество x_i длины m меньше $2n^{3^{\lceil \log_3 n \rceil + 3} l}$.

Имеем, что количество всех x_i меньше $2n^{3^{\lceil \log_3 n \rceil + 4} l}$, т.е. $s < 2n^{3^{\lceil \log_3 n \rceil + 4} l}$. Таким образом, теорема 9 доказана.

§ 5. Доказательство основной теоремы 5 и теоремы 6

5.1. План доказательства. Будем далее под n -разбиваемым словом подразумевать n -разбиваемое в обычном смысле. Сначала мы находим необходимое количество фрагментов с длиной периода не меньше $2n$ в слове W . Это можно сделать, просто разбив слово W на подслова большой длины, к которым применяется теорема 7. Однако мы можем улучшить оценку, если сначала выделим в слове W периодический фрагмент с длиной периода не менее $4n$, затем рассмотрим W_1 – слово W с “вырезанным” периодическим фрагментом u_1 . У слова W_1 выделяем фрагмент с длиной периода не менее $4n$, после чего рассматриваем W_2 – слово W_1 с “вырезанным” периодическим фрагментом u_2 . У слова W_2 так же вырезаем периодический фрагмент. Далее продолжаем этот процесс, подробнее описанный в алгоритме ниже. Затем мы по вырезанным фрагментам восстанавливаем первоначальное слово W . После этого показывается, что в слове W подслово u_i чаще всего не является произведением большого количества не склеенных подслов. В лемме 5.1 доказывается, что применение алгоритма дает необходимое количество подслов слова W с длиной периода не меньше $2n$ среди вырезанных подслов.

5.2. Суммирование существенной высоты и степени нильпотентности. Пусть $\text{Ht}(w)$ – высота слова w над множеством слов степени не выше n . Рассмотрим слово W с высотой $\text{Ht}(W) > \Phi(n, l)$. Теперь для него проведем следующий алгоритм.

АЛГОРИТМ. Шаг 1. По теореме 7 в слове W найдется подслово с длиной периода $4n$. Пусть $W_0 = W = u'_1 x_{1'}^{4n} y'_1$, причем слово $x_{1'}$ нециклическое. Представим y'_1 в виде $y'_1 = x_{1'}^{r_2} y_1$, где r_2 – максимально возможное число. Слово u'_1 представим как $u'_1 = u_1 x_{1'}^{r_1}$, где r_1 – наибольшее возможное. Обозначим через f_1 следующее слово:

$$W_0 = u_1 x_{1'}^{4n+r_1+r_2} y_1 = u_1 f_1 y_1.$$

Назовем позиции, входящие в слово f_1 , *скупными*, последнюю позицию слова u_1 – *скупной типа 1*, вторую с конца позицию u_1 – *скупной типа 2*, и так далее, n -ю с конца позицию u_1 – *скупной типа n* . Положим $W_1 = u_1 y_1$.

Шаг k . Рассмотрим слова u_{k-1} , y_{k-1} , $W_{k-1} = u_{k-1} y_{k-1}$, построенные на предыдущем шаге. Если $|W_{k-1}| \geq \Phi(n, l)$, то применим теорему 7 к слову W с тем условием, что процесс в основной лемме 3.2 будет вестись только по не скупным позициям и скупным позициям типа больше ka , где k и a – параметры леммы 3.2.

Таким образом, в слове W_{k-1} найдется нециклическое подслово с длиной периода $4n$, так что

$$W_{k-1} = u'_k x_{k'}^{4n} y'_k.$$

При этом положим

$$r_1 := \sup\{r : u'_k = u_k x_{k'}^r\}, \quad r_2 := \sup\{r : y'_k = x_{k'}^r y_k\}.$$

(Отметим, что слова в наших рассуждениях могут быть пустыми.)

Определим f_k из равенства

$$W_{k-1} = u_k x_{k'}^{4n+r_1+r_2} y_k = u_k f_k y_k.$$

Назовем позиции, входящие в слово f_k , *скучными*, последнюю позицию слова u_k – *скучной типа 1*, вторую с конца позицию u_k – *скучной типа 2*, и так далее, n -ю с конца позицию u_k – *скучной типа n* . Если позиция в процессе алгоритма определяется как скучная двух типов, то будем считать ее скучной того типа, который меньше. Положим $W_k = u_k y_k$.

Проведем $4t + 1$ шагов алгоритма. Рассмотрим первоначальное слово W . Для каждого натурального i из отрезка $[1, 4t]$ имеет место равенство

$$W = w_0 f_i^{(1)} w_1 f_i^{(2)} \dots f_i^{(n_i)} w_{n_i}$$

для некоторых подслов w_j . Здесь $f_i = f_i^{(1)} \dots f_i^{(n_i)}$. Также мы считаем, что при $1 \leq j \leq n_i - 1$ подслово w_j непустое. Пусть $s(k)$ – количество индексов $i \in [1, 4t]$ таких, что $n_i = k$.

Для доказательства теоремы 7 требуется найти как можно больше длинных периодических фрагментов. Помочь в этом сможет следующая лемма.

ЛЕММА 5.1. *Во введенных ранее обозначениях $s = s(1) + s(2) \geq 2t$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Назовем *монолитным* подслово U слова W , если:

- 1) U является произведением слов вида $f_i^{(j)}$;
- 2) U не является подсловом слова, для которого выполняется предыдущее свойство 1.

Пусть после $(i - 1)$ -го шага алгоритма в слове W содержится k_{i-1} монолитных подслов. Заметим, что $k_i \leq k_{i-1} - n_i + 2$.

Тогда если $n_i \geq 3$, то $k_i \leq k_{i-1} - 1$. Если же $n_i \leq 2$, то $k_i \leq k_{i-1} + 1$. При этом $k_1 = 1$, $k_t \geq 1 = k_1$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Выполнено неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot s(k) \leq 10t \leq 5s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства леммы 5.1 получаем

$$\sum_{n_i \geq 3} (n_i - 2) \leq 2t.$$

По определению $\sum_{k=1}^{\infty} s(k) = 4t$, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} 2s(k) = 8t$. Складывая эти два неравенства и применяя лемму 5.1, получаем доказываемое неравенство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Высота слова W будет не больше*

$$\Psi(n, 4n, l) + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot s(k) \leq \Psi(n, 4n, l) + 5s.$$

Далее будем рассматривать только f_i с $n_i \leq 2$. Если $n_i = 1$, то положим $f'_i := f_i$. Если же $n_i = 2$, то положим $f'_i := f_i^{(j)}$, где $f_i^{(j)}$ – слово с наибольшей длиной между $f_i^{(1)}$ и $f_i^{(2)}$.

Слова f'_i упорядочим в соответствии с их близостью к началу W . Получим последовательность $f'_{m_1}, \dots, f'_{m_s}$, где $s' = s(1) + s(2)$; положим $f''_i := f'_{m_i}$. Пусть $f''_i = w'_i x_{i''}^{p_{i''}} w''_i$, где хотя бы одно из слов w'_i, w''_i пустое.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Можно считать, что мы первыми шагами алгоритма выбрали все те f_i , для которых $n_i = 1$.

Теперь рассмотрим z'_j – подслова W следующего вида:

$$z'_j = x_{(2j-1)''}^{p_{(2j-1)''} + 1} v_j, \quad 1 \geq 0, \quad |v_j| = |x_{(2j-1)''}|,$$

при этом v_j не равно $x_{(2j-1)''}$, начало z'_j совпадает с началом периодического подслова в f''_{2j-1} . Покажем, что z'_j не пересекаются.

В самом деле, если $f''_{2j-1} = f_{m_{2j-1}}$, то $z'_j = f_{m_{2j-1}} v_j$.

Если же $f''_{2j-1} = f_{m_{2j-1}}^{(k)}$, $k = 1, 2$, а подслово z'_j пересекается с подсловом z'_{j+1} , то $f''_{2j} \subset z'_j$. Так как слова $x_{(2j)''}$ и $x_{(2j-1)''}$ нециклические, то $|x_{(2j)''}| = |x_{(2j-1)''}|$. Но тогда длина периода в z'_j не меньше $4n$, что противоречит замечанию 5.1.

Тем самым доказана следующая лемма.

ЛЕММА 5.2. *В слове W с высотой не более $(\Psi(n, 4n, l) + 5s')$ найдется не менее s' непересекающихся периодических подслов, в которых период повторяется не менее $2n$ раз. Кроме того, между любыми двумя элементами данного множества периодических подслов найдется подслово длины периода более левого из выбранных элементов.*

5.3. Завершение доказательств основной теоремы 5 и теоремы 6.

Подставляя в лемму 5.2 вместо числа s' значение s из доказательства теоремы 9 получаем, что высота W не больше, чем

$$\Psi(n, 4n, l) + 5s < E_1 l \cdot n^{E_2 + 12 \log_3 n},$$

где $E_1 = 4^{21 \log_3 4 + 17}$, $E_2 = 30 \log_3 4 + 10$.

Тем самым мы получили утверждение основной теоремы 5.

Доказательство теоремы 6 завершается также, только в пункте 4.4 вместо последовательности

$$a_0 = 3^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil}, \quad a_1 = 3^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil - 1}, \dots, \quad a_{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil} = 1$$

рассматривается последовательность

$$a_0 = 2^{\lceil \log_2 p_{n,d} \rceil}, \quad a_1 = 2^{\lceil \log_2 p_{n,d} \rceil - 1}, \dots, \quad a_{\lceil \log_2 p_{n,d} \rceil} = 1,$$

а значение $\Psi(n, 4n, l)$ берется из теоремы 8.

§ 6. Комментарии

Представленная вниманию читателя техника, по всей видимости, позволяет улучшить полученную в настоящей работе оценку, но при этом она останется только субэкспоненциальной. Для получения полиномиальной оценки, если она существует, требуются новые идеи и методы.

В начале представленного решения при использовании теоремы Ширшова подслова большого слова используются прежде всего в качестве множества независимых элементов, а не набора тесно связанных друг с другом слов. Далее используется то, что буквы внутри подслов раскрашены. При учете раскраски только первых букв подслов получается экспоненциальная оценка. При рассмотрении раскраски всех букв подслов опять получается экспонента. Данный факт имеет место из-за построения иерархической системы подслов. Не исключено, что подробное рассмотрение приведенной связи подслов вкупе с изложенным выше решением позволит улучшить полученную оценку вплоть до полиномиальной.

Интересно также получить оценки на высоту алгебры над множеством слов степени не выше сложности алгебры (в англоязычной литературе PI-degree). В работе [4] получены экспоненциальные оценки, а для слов, не являющихся линейной комбинацией лексикографически меньших, в работе [40] получены надэкспоненциальные оценки.

Глубокие идеи оригинальных работ А. И. Ширшова [1], [2], восходящие к технике элиминации в алгебрах Ли, могут оказаться чрезвычайно полезными, в том числе и для улучшения оценок, несмотря на то, что оценки на высоту, полученные в этих работах, являются только примитивно рекурсивными.

Список литературы

- [1] А. И. Ширшов, “О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах”, *Матем. сб.*, **41(83)**:3 (1957), 381–394.
- [2] А. И. Ширшов, “О кольцах с тождественными соотношениями”, *Матем. сб.*, **43(85)**:2 (1957), 277–283.
- [3] E. I. Zel'manov, “On the nilpotency of nil algebras”, *Algebra – some current trends* (Varna, 1986), *Lecture Notes in Math.*, **1352**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 227–240.
- [4] A. Ya. Belov, V. V. Borisenko, V. N. Latyshev, “Monomial algebras”, *J. Math. Sci. (New York)*, **87**:3 (1997), 3463–3575.
- [5] A. R. Kemer, selected papers of A. I. Shirshov.
- [6] A. Kanel-Belov, L. H. Rowen, selected papers of A. I. Shirshov.
- [7] V. A. Ufnarovskij, “Combinatorial and asymptotic methods in algebra”, *Algebra VI*, *Encyclopaedia Math. Sci.*, **57**, Springer-Verlag, Berlin, 1995, 1–196.
- [8] V. Drensky, E. Formanek, *Polynomial identity rings*, *Adv. Courses Math. CRM Barcelona*, Birkhäuser, Basel, 2004.
- [9] С. В. Пчелинцев, “Теорема о высоте для альтернативных алгебр”, *Матем. сб.*, **124(166)**:4(8) (1984), 557–567; англ. пер.: S. V. Pchelintsev, “A theorem on height for alternative algebras”, *Math. USSR-Sb.*, **52**:2 (1985), 541–551.
- [10] С. П. Мищенко, “Вариант теоремы о высоте для алгебр Ли”, *Матем. заметки*, **47**:4 (1990), 83–89; англ. пер.: S. P. Mishchenko, “A variant of the height theorem for Lie algebras”, *Math. Notes*, **47**:4 (1990), 368–372.

- [11] А. Я. Белов, “О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n ”, *Матем. сб.*, **135(177)**:3 (1988), 373–384; англ. пер.: A. Ya. Belov, “On a Shirshov basis of relatively free algebras of complexity n ”, *Math. USSR-Sb.*, **63**:2 (1989), 363–374.
- [12] A. Kanel-Belov, L. H. Rowen, *Computational aspects of polynomial identities*, Res. Notes in Math., **9**, Peters, Wellesley, MA, 2005.
- [13] Gh. Ciocanu, “Independence and quasiregularity in algebras. II”, *Izv. Akad. Nauk Respub. Moldova Mat.*, **1** (1997), 70–77.
- [14] Г. П. Чекану, “О локальной конечности алгебр”, *Матем. исслед.*, **105** (1988), 153–171.
- [15] Г. П. Чекану, Е. П. Козухар, “Независимость и нильпотентность в алгебрах”, *Изв. АН Молдовы. Матем.*, **2** (1993), 51–62.
- [16] Г. П. Чекану, “Независимость и квазирегулярность в алгебрах”, *Докл. РАН*, **337**:3 (1994), 316–319; англ. пер.: G. P. Chekanu, “Independence and quasiregularity in algebras”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **50**:1 (1995), 84–89.
- [17] В. А. Уфнаровский, “Теорема о независимости и ее следствия”, *Матем. сб.*, **128(170)**:1(9) (1985), 124–132; англ. пер.: V. A. Ufnarovskii, “An independence theorem and its consequences”, *Math. USSR-Sb.*, **56**:1 (1987), 121–129.
- [18] В. А. Уфнаровский, Г. П. Чекану, “На нильпотентных матрицах”, *Матем. исслед.*, **85** (1985), 130–141.
- [19] А. Я. Белов, “О рациональности рядов Гильберта относительно свободных алгебр”, *УМН*, **52**:2 (1997), 153–154; англ. пер.: A. Ya. Belov, “On the rationality of Hilbert series of relatively free algebras”, *Russian Math. Surveys*, **52**:2 (1997), 394–395.
- [20] J. Berstel, D. Perrin, “The origins of combinatorics on words”, *European J. Combin.*, **28**:3 (2007), 996–1022.
- [21] M. Lothaire, *Combinatorics of words* (Waterloo, ON, Canada, 1982), Encyclopedia Math. Appl., **17**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983.
- [22] M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*, Encyclopedia Math. Appl., **90**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [23] В. Н. Латышев, “Комбинаторные порождающие полилинейных полиномиальных тождеств”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:2 (2006), 101–110; англ. пер.: V. N. Latyshev, “Combinatorial generators of the multilinear polynomial identities”, *J. Math. Sci.*, **149**:2 (2008), 1107–1112.
- [24] А. Г. Колотов, “О верхней оценке высоты в конечно порожденных алгебрах с тождествами”, *Сиб. матем. журн.*, **23**:1 (1982), 187–189.
- [25] A. Ya. Belov, “Some estimations for nilpotence of nill-algebras over a field of an arbitrary characteristic and height theorem”, *Comm. Algebra*, **20**:10 (1992), 2919–2922.
- [26] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras. Graduate course in algebra*, Springer-Verlag, Singapore, 2000.
- [27] М. И. Харитонов, “Оценки на структуру кусочной периодичности в теореме Ширшова о высоте”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, В печати.
- [28] A. A. Klein, “Indices of nilpotency in a PI-ring”, *Arch. Math. (Basel)*, **44**:4 (1985), 323–329.
- [29] A. A. Klein, “Bounds for indices of nilpotency and nility”, *Arch. Math. (Basel)*, **74**:1 (2000), 6–10.
- [30] Е. С. Чибриков, “О высоте Ширшова конечнопорожденной ассоциативной алгебры, удовлетворяющей тождеству степени четыре”, *Изв. Алтайского гос. ун-та*, **1** (2001), 52–56.
- [31] М. И. Харитонов, “Двусторонние оценки существенной высоты в теореме Ширшова о высоте”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2012, № 2, 24–28.

- [32] M. Kharitonov, *Estimations of the particular periodicity in case of the extremal periods in Shirshov's height theorem*, arXiv: [abs/1108.6295](https://arxiv.org/abs/1108.6295).
- [33] A. A. Lopatin, *On the nilpotency degree of the algebra with identity $x^n = 0$* , arXiv: [1106.0950](https://arxiv.org/abs/1106.0950).
- [34] *Днестровская тетрадь. Нерешенные проблемы теории колец и модулей*, 4-е изд., Изд. ин-та матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1993.
- [35] И. И. Богданов, “Теорема Нагаты–Хигмана для полуколец”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **7**:3 (2001), 651–658.
- [36] C. Procesi, *Rings with polynomial identities*, Marcel Dekker, New York, 1973.
- [37] А. Я. Белов, “Размерность Гельфанда–Кириллова относительно свободных ассоциативных алгебр”, *Матем. сб.*, **195**:12 (2004), 3–26; англ. пер.: A. Ya. Belov, “The Gel'fand–Kirillov dimension of relatively free associative algebras”, *Sb. Math.*, **195**:12 (2004), 1703–1726.
- [38] Е. Н. Кузьмин, “О теореме Нагаты–Хигмана”, *Сборник трудов, посвященный 60-летию акад. Ильева*, София, 1975, 101–107.
- [39] Ю. П. Размыслов, *Тождества алгебр и их представлений*, Наука, М., 1989; англ. пер.: Yu. P. Razmyslov, *Identities of algebras and their representations*, Transl. Math. Monogr., **138**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [40] А. Я. Белов, “Проблемы бернсайдовского типа, теоремы о высоте и о независимости”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:5 (2007), 19–79; англ. пер.: A. Ya. Belov, “Burnside-type problems, theorems on height, and independence”, *J. Math. Sci.*, **156**:2 (2009), 219–260.

А. Я. Белов (A. Ya. Belov)

Московский институт открытого образования

E-mail: kanel@mcme.ru

Поступила в редакцию

12.02.2011 и 17.10.2011

М. И. Харитонов (M. I. Kharitonov)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: mikhailo.kharitonov@gmail.com