Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, Вариация равновесной энергии и S -свойство стационарного компакта, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 12, 113–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7854>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:39:35

УДК 517.53

А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин

Вариация равновесной энергии и S -свойство стационарного компакта

В работе исследуется вариация равновесной энергии для некоторого функционала достаточно общего вида, естественным образом возникающего при решении ряда задач теории рациональной аппроксимации многозначных аналитических функций.

Основной результат работы заключается в следующем: для рассматриваемого функционала энергии и некоторого класса допустимых компактов, связанного с аппроксимируемой функцией, соответствующий стационарный компакт вполне характеризуется так называемым S -свойством.

Библиография: 38 названий.

Ключевые слова: рациональные приближения, ортогональные многочлены, аппроксимации Паде, равновесные распределения, стационарный компакт, S -свойство.

§ 1. Введение

1.1. Компакты, обладающие определенным свойством “симметрии”, естественным образом возникают в различных задачах теории рациональной аппроксимации аналитических функций. Подобным свойством симметрии обладают и экстремальные кривые, являющиеся решением ряда классических экстремальных задач геометрической теории функций (см. [1]–[5]). В этой теории экстремальные кривые обычно описываются как траектории некоторого квадратичного дифференциала; связь изучаемых здесь симметричных компактов с квадратичными дифференциалами обсуждается ниже в следствии 1.

Хорошо известно, что при решении многих актуальных задач теории аппроксимаций аналитических функций принципиально важную роль играет вопрос о существовании компакта, обладающего S -свойством (см. [6]–[17]). Такие компакты состоят из конечного числа аналитических дуг, разбивают плоскость на конечное число областей и обладают определенным свойством симметрии.

В настоящей работе мы исследуем вариацию равновесной энергии для некоторого смешанного (гриново-логарифмического) функционала вида (2), естественным образом возникающего при решении ряда задач теории рациональной

Работа первого автора выполнена при поддержке Junta de Andalucía (grants № FQM-229, № P09-FQM-4643), и the Ministry of Science and Innovation of Spain (project № MTM2008-06689-C02-01), работа третьего автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00330-а) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8033.2010.1).

аппроксимации многозначных аналитических функций (см. [18]–[22]). Соответствующий класс “допустимых” компактов, в котором ищется решение экстремальной задачи (6), определяется аналитическими свойствами аппроксимируемой функции (эта функция фиксируется в некотором классе многозначных аналитических функций, тем самым фиксируется и соответствующий класс допустимых компактов; см. п. 1.3). Экстремальный компакт, для которого (в классе допустимых компактов) достигается супремум равновесного функционала энергии, будем называть *стационарным (относительно этого функционала) компактом* (см. определение 2).

Основной результат настоящей работы – теорема 1 – состоит в том, что для рассматриваемого функционала энергии (2) и класса допустимых компактов $\mathcal{K}_f$ (см. определение 1) эти понятия оказываются равносильными: стационарный компакт вполне характеризуется S -свойством (7).

Ниже мы в основном следуем схемам работ [13], [14], [23] (см. также [24]).

1.2. Приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть $E = [-1, 1]$ – единичный отрезок на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Через $M_1(E)$ обозначим множество всех единичных (положительных борелевских) мер, носители которых принадлежат E . Для произвольного компакта $K \subset \mathbb{C} \setminus E$ через $D(K)$ обозначим ту связную компоненту его дополнения, которая содержит отрезок E ; в дальнейшем будем предполагать, что область $D(K)$ регулярна относительно решения задачи Дирихле и $g_K(z, \zeta)$ – соответствующая области $D(K)$ функция Грина с особенностью в точке $z = \zeta \in D(K)$. Для произвольной меры $\mu \in M_1(E)$ определены логарифмический и гринов (по отношению к области $D(K)$) потенциалы:

$$V^\mu(z) = \int_{-1}^1 \log \frac{1}{|z-x|} d\mu(x), \quad G_K^\mu(z) = \int_{-1}^1 g_K(z, x) d\mu(x), \quad z \notin E \quad (1)$$

(полагаем $g_K(z, x) \equiv 0$ при $z \in K, x \in E$). Пусть $\theta \in [0, \infty)$ – произвольное фиксированное число. Для фиксированного компакта K существует единственная мера $\lambda(\theta) = \lambda^K(\theta) \in M_1(E)$, минимизирующая функционал энергии

$$\begin{aligned} J_\theta(K; \mu) &:= \iint_{E \times E} \left(\theta \log \frac{1}{|x-y|} + g_K(x, y) \right) d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \int_E (\theta V^\mu(x) + G_K^\mu(x)) d\mu(x) \end{aligned} \quad (2)$$

в классе всех мер $\mu \in M_1(E)$, т.е.

$$J_\theta(K; \lambda^K) = \min_{\mu \in M_1(E)} J_\theta(K; \mu).$$

Экстремальная мера $\lambda(\theta)$ и только эта мера (в классе $M_1(E)$) является равновесной мерой для смешанного (гриново-логарифмического) потенциала $\theta V^\mu(z) + G_K^\mu(z)$. Другими словами, мера $\lambda(\theta)$ – единственная мера из класса $M_1(E)$, для которой на E имеет место соотношение равновесия

$$\theta V^{\lambda(\theta)}(x) + G_K^{\lambda(\theta)}(x) \equiv w(\theta) = \text{const}, \quad x \in E, \quad (3)$$

$w(\theta) = w^K(\theta)$ – соответствующая постоянная равновесия; при этом

$$J_\theta(K; \lambda) = w(\theta)$$

(см. [9], [25], [26]).

1.3. Введем определения и обозначения, связанные с классом аналитических функций, рассматриваемых в настоящей работе.

Пусть $\Sigma = \{a_1, \dots, a_p\} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $p \geq 2$, – конечное множество, симметричное относительно вещественной прямой. В дальнейшем рассматриваются только функции f , голоморфные и вещественнозначные на отрезке E , допускающие аналитическое продолжение с отрезка E по любому пути, лежащему в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma$, при этом $f \notin \mathcal{H}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$. Множество таких функций будем обозначать через $\mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$. Будем также считать, что каждая точка $a_j \in \Sigma$ является особой точкой функции f многозначного характера.

Пусть $\mathcal{K}$ – множество всех непустых компактов на плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, а $m(K)$ – число связных компонент компакта $K \in \mathcal{K}$.

Положим

$$\mathcal{K}^{(m)} = \{K \in \mathcal{K} : m(K) \leq m\}.$$

Таким образом, $\mathcal{K}^{(1)}$ – множество континуумов, и если $K \in \mathcal{K}^{(m)}$, то $K = \bigcup_{j=1}^{m'} \gamma_j$, где $\gamma_j \subset \mathcal{K}^{(1)}$, $j = 1, \dots, m'$, $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$, $m' \leq m$; континуумы γ_j будем называть *компонентами* K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{K}_f$ есть множество элементов $K \in \mathcal{K}^{(p-1)}$ таких, что:

- 1) $f(z)$ допускает голоморфное (однозначное аналитическое) продолжение в область $D(K)$, т.е. $f \in \mathcal{H}(D(K))$;
- 2) любая компонента $\gamma_j \subset K$ содержит не менее двух точек из множества Σ .

Произвольный компакт $K \in \mathcal{K}_f$ будем называть *допустимым* для заданной многозначной аналитической функции f (вещественной и голоморфной на отрезке E).

В дальнейшем функция $f \in \mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$ предполагается фиксированной. Тем самым фиксируется и соответствующий ей класс допустимых компактов $\mathcal{K}_f$. Функционал энергии (2) рассматривается при произвольном $\theta \in [0, \infty)$ для этого фиксированного класса компактов $\mathcal{K}_f$.

Отметим, что с точки зрения теории рациональной аппроксимации наибольший интерес представляют значения $\theta = 0, 1, 3$ (см. [18]–[22]).

Основные результаты настоящей работы анонсированы в [24].

§ 2. Формулировки основных результатов

2.1. Фиксируем произвольное $\theta \in [0, \infty)$, для этого θ рассмотрим функционал энергии (2); явное указание на параметр θ в дальнейшем иногда опускаем. Пусть $\lambda^K \in M_1(E)$ – равновесная мера с носителем на E , соответствующая

компакту $K \in \mathcal{K}_f$ (см. (3)); мера λ^K вполне характеризуется тем, что она является экстремальной мерой, т.е.

$$J_\theta(K; \lambda^K) = \min_{\mu \in M_1(E)} J_\theta(K; \mu). \quad (4)$$

Рассмотрим следующую теоретико-потенциальную задачу:

$$\sup_{K \in \mathcal{K}_f} J_\theta(K; \lambda^K) = \sup_{K \in \mathcal{K}_f} \min_{\mu \in M_1(E)} J_\theta(K; \mu). \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Компакт $F = F(\theta) \in \mathcal{K}_f$ назовем *стационарным* (в классе $\mathcal{K}_f$) для задачи (5), если для этого компакта в (5) достигается супремум, т.е. выполняется равенство

$$J_\theta(F; \lambda^F) = \max_{K \in \mathcal{K}_f} J_\theta(K; \lambda^K). \quad (6)$$

Вопрос о существовании стационарных компактов (в заданном классе $\mathcal{K}_f$) – отдельный вопрос. Эта задача, вообще говоря, не может быть решена с помощью методов, разработанных в связи с проблемой модулей (см. [1]), так как заранее неизвестно, какому именно гомотопическому классу принадлежит такой компакт. В связи с задачей (5), связанной с конкретным функционалом энергии (2), естественным образом возникает вопрос о существовании стационарного компакта $F = F(\theta)$. Доказать существование такого компакта удается в наиболее интересных случаях значений параметра $\theta = 0, 1, 3$ (подробнее см. [20] и [17]). При этом указанным различным значениям θ соответствуют, вообще говоря, разные стационарные компакты $F(0), F(1), F(3)$ (в зафиксированном классе $\mathcal{K}_f$). В § 4 приведено описание этих компактов в терминах, непосредственно связанных с соответствующими римановыми поверхностями. Отметим, что такие компакты могут совпадать для различных значений параметра $\theta = 0, 1, 3$ только в исключительных случаях (см. [18]–[20]).

С точки зрения приложения теории потенциала к исследованию сходимости рациональных аппроксимаций многозначных аналитических функций представляет непосредственный интерес не само свойство стационарности (6), а тесно связанное с ним S -свойство допустимого компакта.

Приведем определение S -свойства допустимого компакта, соответствующего экстремальной задаче (6) для функционала энергии (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что не разбивающий плоскость и состоящий из конечного числа кусочно аналитических дуг допустимый компакт $\Gamma = \Gamma(\theta) \in \mathcal{K}_f$ обладает S -свойством (или является S -симметричным), если

$$\frac{\partial G_\Gamma^\lambda}{\partial n_+}(\zeta) = \frac{\partial G_\Gamma^\lambda}{\partial n_-}(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma^0, \quad (7)$$

где $\lambda = \lambda^\Gamma(\theta) \in M_1(E)$ – соответствующая равновесная мера, Γ^0 – объединение всех открытых дуг, принадлежащих компактному Γ , $\partial/\partial n_\pm$ – нормальные производные, взятые с противоположных сторон Γ^0 .

Отметим, что рассматриваемый здесь функционал энергии (2) оказывается таким, что вид соотношения (7), определяющего S -свойство, не зависит от параметра θ . Однако равновесная мера $\lambda = \lambda^\Gamma(\theta) \in M_1(E)$ и сам S -симметричный компакт $\Gamma = \Gamma(\theta)$ зависят от θ . Эти компакты (но не соответствующие им равновесные меры) могут совпадать только в исключительных случаях. Например, для марковской функции $f = \hat{\sigma}$, у которой носитель меры – отрезок $[c, d]$ вещественной прямой, $[c, d] \cap E = \emptyset$, имеем

$$\hat{\sigma}(z) = \int_c^d \frac{d\sigma(x)}{z-x}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [c, d]. \quad (8)$$

Для такой функции $\Gamma(\theta) = [c, d]$ при $\theta = 0, 1, 3$ (см. [18]–[20]).

Основной результат настоящей работы состоит в том, что для рассматриваемого здесь функционала энергии (2) и класса $\mathcal{K}_f$ допустимых компактов (см. определение 1) введенные понятия оказываются равносильными: стационарный компакт $F = F(\theta) \in \mathcal{K}_f$ (если он существует) всегда обладает S -свойством (7). При этом для $\theta = 0, 1, 3$ он существует, является единственным и указанное S -свойство его вполне характеризует. Следовательно, $F(\theta) = \Gamma(\theta)$. Обозначение $\Gamma(\theta)$ в настоящей работе в дальнейшем не используется.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F = F(\theta) \in \mathcal{K}_f$ – стационарный компакт для задачи (5) (состоящий из конечного числа континуумов). Тогда F не разбивает плоскость, не имеет внутренних точек и обладает S -свойством (7).

Подчеркнем, что условие $F \in \mathcal{K}_f$ предполагает, что компакт F состоит из конечного числа континуумов. В дальнейшем нам удобно ввести следующее обозначение для числа p точек ветвления: $p = m - 2$ и считать, что все $a_j \neq \infty$.

Теорема 1 является следствием теоремы 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F \in \mathcal{K}_f$ – стационарный компакт для задачи (5). Рассмотрим полином $A_m(z) = (z^2 - 1)(z - a_1) \cdots (z - a_{m-2})$, где $\{a_1, \dots, a_{m-2}\} = \Sigma$ и все $a_j \neq \infty$. Тогда для равновесной меры $\lambda = \lambda^F$ компакта F справедливо следующее соотношение (“необходимое условие” стационарности):

$$\theta(\hat{\lambda}(z))^2 + (\mathcal{P}'_{F,\lambda}(z))^2 \equiv \frac{B_{m-1}(z)}{A_m(z)}, \quad z \in D(F) \setminus E, \quad (9)$$

где $B_{m-1}(z)$ – некоторый полином степени меньше или равной $m - 1$,

$$\hat{\lambda}(z) = \int (z - x)^{-1} d\lambda(x)$$

– преобразование Коши меры λ ,

$$\mathcal{P}_{F,\lambda}(z) = \int_{-1}^1 P(z, x) d\lambda(x),$$

$P(z, x) = g_F(z, x) + ig_F^*(z, x)$ – комплексная функция Грина для области $D(F)$.

Отметим, что в силу равенства

$$\widehat{\lambda}(z) = -\mathcal{V}'_{\lambda}(z), \quad \text{где } \mathcal{V}_{\lambda}(z) = \int \log \frac{1}{z-x} d\lambda(x),$$

соотношение (9) можно представить в следующем виде:

$$\theta(\mathcal{V}'_{\lambda}(z))^2 + (\mathcal{P}'_{F,\lambda}(z))^2 \equiv \frac{B_{m-1}(z)}{A_m(z)}.$$

Приведем теперь некоторые следствия формулы (9) (ср. с [4; § 4, п. 4.3, теорема XII], [6], [7], [9]).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Стационарный компакт $F \in \mathcal{K}_f$ состоит из замыканий критических траекторий квадратичного дифференциала*

$$R(\zeta) d\zeta^2 = -\left\{ \frac{B_{m-1}(\zeta)}{A_m(\zeta)} - \theta(\widehat{\lambda}(\zeta))^2 \right\} d\zeta^2, \quad (10)$$

при этом для гринова потенциала равновесной меры, соответствующей компакт F , справедливо следующее представление:

$$G_F^{\lambda}(z) = \int_{-1}^1 g_F(z, x) d\lambda(x) = \operatorname{Re} \int_{a_1}^z \sqrt{\frac{B_{m-1}(\zeta)}{A_m(\zeta)} - \theta(\widehat{\lambda}(\zeta))^2} d\zeta \quad (11)$$

(путь интегрирования в (11) не пересекает отрезок E).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Равновесная мера $\lambda^F \in M_1(E)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на отрезке E и имеет следующий вид:*

$$d\lambda^F(x) = \frac{\rho_{\theta}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (12)$$

где весовая функция ρ_{θ} голоморфна и положительна на интервале $(-1, 1)$.

Отметим, что в частном случае при $\theta = 0$ из (11) вытекает представление

$$G_F^{\lambda}(z) = \int_{-1}^1 g_F(z, x) d\lambda(x) = \operatorname{Re} \int_{a_1}^z \sqrt{\frac{B_{m-1}(\zeta)}{A_m(\zeta)}} d\zeta, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (E \cup F),$$

которое позволяет однозначно определить равновесную меру λ и стационарный компакт F , если известен полином B_{m-1} (ср. с [1], [7], [23]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теоретико-потенциальную задачу (5) можно переформулировать эквивалентным образом в других терминах (см. [17], [20], [21]). Зафиксируем параметр $\theta \in [0, \infty)$ и класс допустимых компактов $\mathcal{K}_f$. При условии, что $D(K) \ni \infty$, экстремальная задача (4) в классе единичных мер $M_1(E)$ с носителями на E эквивалентна следующей экстремальной задаче в классе единичных мер $M_1(K)$ с носителями на K :

$$\inf_{\nu \in M_1(K)} J^{\varphi}(K; \nu), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} J^\varphi(K; \nu) &:= \iint_{K \times K} \left\{ \theta \log \frac{1}{|z - \zeta|} + g_E(z, \zeta) + \theta g(z, \infty) + \theta g(\zeta, \infty) \right\} d\nu(z) d\nu(\zeta) \\ &= \int_K \{ \theta V^\nu(z) + G_E^\nu(z) \} d\nu(z) + 2 \int_K \theta g_E(z, \infty) d\nu(z), \end{aligned} \quad (14)$$

$g_E(z, \zeta)$ – функция Грина для дополнения к отрезку E с особенностью в точке $z = \zeta$,

$$G_E^\nu(z) := \int_K g_E(z, \zeta) d\nu(\zeta) \quad (15)$$

– гринов (относительно $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$) потенциал меры $\nu \in M_1(K)$. Иначе говоря, $J^\varphi(K; \nu)$ – энергия меры ν относительно смешанного гриново-логарифмического ядра $-\theta \log |z - \zeta| + g_E(z, \zeta)$ во внешнем поле $\varphi(z) := \theta g(z, \infty)$. Пусть $\lambda_K \in M_1(K)$ – соответствующая задаче (13) экстремальная мера:

$$J^\varphi(K; \lambda_K) = \min_{\nu \in M_1(K)} J^\varphi(K; \nu). \quad (16)$$

Тогда эта же мера $\lambda = \lambda_K$ является (единственной) равновесной мерой для потенциала $\theta V^\nu + G_E^\nu$ во внешнем поле φ :

$$\theta V^\nu(z) + G_E^\nu(z) + \varphi(z) \equiv w_K, \quad z \in K, \quad (17)$$

w_K – соответствующая постоянная равновесия.

Можно показать (см. [17], [21]), что для равновесных мер λ^K и λ_K , соответствующих функционалам энергии (2) и (14), справедливо соотношение

$$J^\varphi(K; \lambda_K) = (1 + \theta)J(K; \lambda^K) - \theta^2 \gamma_E, \quad (18)$$

где $\gamma_E = \log 2$ – постоянная Робена для отрезка $E = [-1, 1]$. Непосредственно из (18) вытекает, что при фиксированном компакте E (в нашем случае $E = [-1, 1]$) две экстремальные задачи

$$\sup_{K \in \mathcal{K}_f} J(K; \lambda^K) = \sup_{K \in \mathcal{K}_f} \inf_{\mu \in M_1(E)} J(K; \mu), \quad (19)$$

$$\sup_{K \in \mathcal{K}_f} J^\varphi(K; \lambda_K) = \sup_{K \in \mathcal{K}_f} \inf_{\nu \in M_1(K)} J^\varphi(K; \nu) \quad (20)$$

эквивалентны, а сами равновесные меры $\lambda^K \in M_1(E)$ и $\lambda_K \in M_1(K)$ для компакта K связаны соотношением $\lambda_K = \beta_D(\lambda^K)$, где $\beta_D(\cdot)$ – выметание меры из области $D = D(K)$ на ее границу.

В этой новой постановке задача (19) допускает такую геометрическую интерпретацию, которая позволяет сделать следующий вывод: при $\theta = 0, 1, 3$ стационарный компакт $F \in \mathcal{K}_f$ существует и состоит из конечного числа континуумов. Следовательно, в этой ситуации применима теорема 1 и оказывается, что стационарный компакт всегда обладает S-свойством.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вопрос о единственности компакта $F = F(\theta) \in \mathcal{K}_f$ решается следующим образом. При $\theta = 0, 1, 3$ теоретико-потенциальная задача (5) оказывается связанной с задачей о сходимости соответствующих “оптимальных” рациональных аппроксимаций $f_n(z; \theta)$ функции $f(z)$. На основе S -свойства стационарного компакта стандартным методом (см. [9], а также [20]–[22]) устанавливается, что $f_n(z; \theta) \xrightarrow{\text{cap}} f(z)$ в области $D(F(\theta)) := \overline{\mathbb{C}} \setminus F(\theta)$ (здесь “ $\xrightarrow{\text{cap}}$ ” означает сходимость по логарифмической емкости; определение этого понятия см., например, в [27]–[29]). Непосредственно отсюда и следует единственность компакта $F(\theta)$, $\theta = 0, 1, 3$. В каждом из этих трех случаев для равновесных мер $\lambda^F(\theta) \in M_1(E)$ и $\lambda_F(\theta) \in M_1(F)$, соответствующих (единственному) стационарному компактному F , справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1}{n}\mu(Q_n) \rightarrow \lambda_F, \quad \frac{1}{2n}\mu(\omega_{2n}) \rightarrow \lambda^F \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (21)$$

где Q_n , $\deg Q_n \leq n$, – знаменатель рациональной дроби f_n , а ω_{2n} , $\deg \omega_{2n} \leq 2n + 1$, – полином, в нулях¹ которого эта рациональная дробь интерполирует исходную функцию f . Скорость сходимости рациональных функций $f_n(z; \theta)$ к $f(z)$ в области D задается функцией $\exp\{-G_F^{\lambda^F}(z)\} < 1$, $z \in D$.

Таким образом, реализуется следующая стандартная схема рассуждений (см. [9]):

- 1) существует стационарный компакт F для функционала энергии (2);
- 2) компакт F обладает S -свойством (7) (поэтому в допустимом классе $\mathcal{K}_f$ существует S -компакт $\Gamma = F$);
- 3) $f_n \rightarrow f$ в максимальной области голоморфности D ;
- 4) S -компакт единственный.

Максимальность области голоморфности D функции f понимается так: дополнение F к ней минимально в том смысле, что величина e^{-w_K} , которую естественно считать аналогом емкости, минимальна для $K = F$, $K \in \mathcal{K}_f$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Все утверждения теорем 1, 2 сохраняются, если при определении класса функций $\mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$ вместо голоморфных функций допустить мероморфные функции.

Таким образом, при условии существования экстремального компакта, решающего задачу (5), все его дальнейшие свойства экстремального компакта, решающего задачу (5), устанавливаются общим вариационным методом, применимым при произвольном $\theta \in [0, \infty)$ (см. пп. 3.1–3.7).

§ 3. Доказательство теорем 2 и 1

3.1. Схема доказательства теоремы 2 в целом вполне аналогична рассуждениям работ [13], [14], [23], [30] (см. также [1; гл. 0]) и основана на “малой” вариации стационарного компакта $F = F(\theta)$, оставляющей неподвижными точки ветвления² $\{a_1, \dots, a_{m-2}\}$ функции f и концевые точки ± 1 единичного отрезка.

¹Все они лежат на E .

²В дальнейшем нам удобно считать число p точек ветвления f равным $m - 2$.

При такой вариации новый компакт $\tilde{F}$ по-прежнему является допустимым, а его энергия (2) не увеличивается. Отсюда уже вытекает соотношение (9), связывающее комплексные логарифмический и гринов потенциалы равновесной меры λ^F . Непосредственно из этого соотношения вытекает S -свойство (7).

Зафиксируем параметр $\theta \in [0, \infty)$. Пусть $F = F(\theta) \in \mathcal{K}_f$ – стационарный компакт для задачи (6). Тем самым в дальнейшем мы предполагаем, что F состоит из конечного числа континуумов. Пусть $a_1, \dots, a_{m-2} \in F$ – особые точки функции f , лежащие на компакте F . Положим $A_m(z) = (z^2 - 1) \prod_{j=1}^{m-2} (z - a_j)$. Зафиксируем произвольную точку $b_0 \in \mathbb{C} \setminus (E \cup F)$ и некоторую ее окрестность $U_0 = \{b : |b - b_0| < r_0\}$ такую, что замыкание $\bar{U}_0 \subset \mathbb{C} \setminus (E \cup F)$. Рассмотрим следующее преобразование:

$$z_t = z + th(z), \quad \text{где } h(z) = \frac{A_m(z)}{(z - b)^{m+1}}, \quad (22)$$

t – “малый” комплексный параметр, $b \in U_0$. Пусть V_0 – некоторая окрестность компакта F , $V_0 \subset \bar{\mathbb{C}} \setminus (E \cup U_0)$. Ясно, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $|t| \leq \varepsilon_0$ преобразование (22) конформно и однолистно в области $\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{U}_0$, при этом компакт F преобразуется в допустимый компакт $F_t \in \mathcal{K}_f$ такой, что $F_t \subset V_0$ (F_t состоит из конечного числа континуумов). При преобразовании (22) точки ± 1 остаются неподвижными, а если b_0 , b и t вещественные, то отрезок E переходит в себя. Пусть $D_t = D(F_t)$ – та компонента дополнения к F_t , которая содержит отрезок E . Обозначим через $g_D(z, \zeta)$ и $g_{D_t}(z, \zeta)$ функции Грина областей D и D_t соответственно. В дальнейшем предполагается, что точки z, ζ лежат вне окрестности V_0 и $F_t \subset V_0$ при всех $|t| \leq \varepsilon_0$.

Получим теперь формулу для следующей вариации функции Грина области $D = D(K)$, где $K \in \mathcal{K}_f$ – произвольный компакт:

$$\delta_t g(z, \zeta) := g_{D_t}(z_t, \zeta_t) - g_D(z, \zeta); \quad (23)$$

предполагается, что $|t| \leq \varepsilon_0$, где ε_0 достаточно мало, точки $z, \zeta \in U$, где $U \Subset \bar{\mathbb{C}} \setminus V_0$.

ЛЕММА 1. Пусть компакт $K \in \mathcal{K}_f$ состоит из конечного числа континуумов, $D = D(K)$, точка $b \in D$ фиксирована,

$$z_t = z + th(z), \quad \text{где } h(z) = \frac{A_m(z)}{(z - b)^{m+1}}, \quad (24)$$

$$A_m(z) = (z^2 - 1)(z - a_1) \cdots (z - a_{m-2}), \quad \{a_1, \dots, a_{m-2}\} = \Sigma \subset K,$$

t – “малый” комплексный параметр, $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 0$.

Тогда при $t \rightarrow 0$ равномерно по $z, \zeta \in U$, где $U \Subset D$, справедлива следующая асимптотическая формула для вариации (23) функции Грина области D :

$$\delta_t g(z, \zeta) := \operatorname{Re} \left\{ \frac{t}{m!} \frac{d^m}{dw^m} (P'(w, z) P'(w, \zeta) A_m(w)) \right\}_{w=b} + O(t^2), \quad t \rightarrow 0, \quad (25)$$

где $D_t = D(K_t)$, $P(w, z)$ – комплексная функция Грина для области D ,

$$P'(w, z) = \frac{2\partial g_D(w, z)}{\partial w}.$$

Следующие пп. 3.2–3.4 посвящены доказательству леммы 1 (см. также замечания 4, 5, где предложен другой способ доказательства формулы (25)).

3.2. В этом пункте мы получим формулу (25) для разности (23) в предположении, что $\infty \in D$ и область D такова, что ее граница $\gamma = \partial D$ состоит из конечного числа замкнутых аналитических дуг. Для рассматриваемого здесь случая произвольного допустимого компакта K и области $D = D(K)$ нужная нам вариационная формула для функции Грина $g(z, \zeta) = g_D(z, \zeta)$ будет получена в п. 3.3 предельным переходом. В обозначениях функции Грина индекс D в этом пункте мы опускаем.

Итак, предположим, что область D удовлетворяет вышеперечисленным условиям, а все точки $a_1, \dots, a_{m-2}$ лежат в дополнении к D и внутри соответствующих аналитических дуг, составляющих γ . При $|t| \leq \varepsilon_0$ преобразование (22) переводит область D в область D_t такого же топологического типа: $\gamma_t = \partial D_t$ состоит из такого же числа замкнутых аналитических дуг, содержащих внутри себя все точки $a_1, \dots, a_{m-2}$. Предположим, что $\partial D_t \in V_0$ при всех t , $|t| \leq \varepsilon_0$ (полагаем $D_0 = D$), где область V_0 лежит в дополнении к $E \cup U_0$. При сделанных предположениях мы можем воспользоваться следующей общей формулой, полученной в [31]:

$$\delta g_D(z, \zeta) := g_{D_t}(z, \zeta) - g_D(z, \zeta) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{t}{2\pi i} \int_{\gamma} P'(w, \zeta) P'(w, z) h(w) dw \right\} + O(t^2). \quad (26)$$

Преобразуем правую часть формулы (26) с учетом явного вида (22) преобразования $z \mapsto z_t$. Напомним следующее представление для комплексной функции Грина $P(w, z)$ области D :

$$P(w, z) = \log \frac{1}{w - z} + U(w, z), \quad w \in D, \quad z \in \bar{D}, \quad (27)$$

где $U(w, z)$ – многозначная аналитическая функция переменного w в области D (при этом $z \in \bar{D}$ рассматривается как параметр). Из (27) вытекает, что

$$P'(w, z) = -\frac{1}{w - z} + U'(w, z), \quad (28)$$

где функция $U'(w, z)$ – однозначная аналитическая функция переменного w в области D . Функция $h(w) = A_m(w)/(z - w)^{m+1}$ имеет в точке $w = b$ единственный полюс кратности $m + 1$. Следовательно, по теореме о вычетах для интеграла под знаком вещественной части в (26) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} P'(w, z) P'(w, \zeta) h(w) dw &= -P'(z, \zeta) h(z) - P'(\zeta, z) h(\zeta) \\ &+ \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dw^m} \{ P'(w, z) P'(w, \zeta) A_m(w) \} \Big|_{w=b}. \end{aligned} \quad (29)$$

Из (29) вытекает следующее асимптотическое представление для вариации (23) функции Грина:

$$\delta g(z, \zeta) := g_{D_t}(z, \zeta) - g_D(z, \zeta) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{t}{m!} \frac{d^m}{dw^m} (P'(w, z) P'(w, \zeta) A_m(w)) \right\} \Big|_{w=b} - P'(z, \zeta) h(z) - P'(\zeta, z) h(\zeta) \Big\} + O(t^2). \quad (30)$$

3.3. Формула (30) получена нами в предположении, что граница варьируемой при помощи преобразования (22) области D состоит из конечного числа замкнутых аналитических кривых, а переменные $z, \zeta \in U \Subset D$. Докажем теперь формулу (30) для области $D = D(K)$, где K – произвольный компакт, состоящий из конечного числа континуумов.

Пусть по-прежнему $z, \zeta \in U \Subset D \setminus V_0 = D(K) \setminus V_0$, и пусть $\tilde{D}$ – произвольная область, граница которой удовлетворяет условиям п. 3.2, и такая, что $U \Subset \tilde{D} \Subset D$. По доказанному в п. 3.2 для функции Грина области $\tilde{D}$ справедлива следующая вариационная формула:

$$\delta g_{\tilde{D}}(z, \zeta) := g_{\tilde{D}_t}(z, \zeta) - g_{\tilde{D}}(z, \zeta) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{t}{m!} \frac{d^m}{dw^m} (P'_{\tilde{D}}(w, z) P'_{\tilde{D}}(w, \zeta) A_m(w)) \right\} \Big|_{w=b} - P'_{\tilde{D}}(z, \zeta) h(z) - P'_{\tilde{D}}(\zeta, z) h(\zeta) \Big\} + O(t^2). \quad (31)$$

Соотношение (31) справедливо равномерно по $z, \zeta \in U$ и $b \in U_0$. Анализ доказательства, проведенного в п. 3.2, показывает, что величины, входящие в остаточный член $O(t^2)$ в (31), зависят только от интегралов от производных гармонических функций, связанных с областью $\tilde{D}$. “Устремим” теперь область $\tilde{D}$ к области D таким образом, что $\tilde{\gamma} = \partial \tilde{D} \rightarrow \partial D(K)$ и область $\tilde{D}$ по-прежнему удовлетворяет всем условиям, перечисленным в п. 3.2. В силу того, что значения вышеуказанных интегралов от гармонических функций не зависят от кривых интегрирования, мы можем при таком процессе “предельного перехода” зафиксировать кривые, по которым ведется интегрирование, и считать, например, что интегрирование ведется по границе $\tilde{\gamma}_0$ некоторой начальной области $\tilde{D}_0$. Тогда при $\tilde{D} \rightarrow D$ (в вышеуказанном смысле) все гармонические функции для $\tilde{D}$, входящие в $O(t^2)$, будут вместе со всеми своими производными равномерно на $\tilde{\gamma}_0$ сходиться к соответствующим функциям для D , так что величина $O(t^2)$ будет оставаться равномерно ограниченной для $z, \zeta \in U$. Для этих же z, ζ, w величины, связанные с функцией Грина для области $\tilde{D}$, будут сходиться к соответствующим величинам для области $D = D(K)$. Таким образом, из формулы (31) предельным переходом получается следующая вариационная формула для функции Грина области D :

$$\delta g_D(z, \zeta) := g_{D_t}(z, \zeta) - g_D(z, \zeta) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{t}{m!} \frac{d^m}{dw^m} (P'(w, z) P'(w, \zeta) A_m(w)) \right\} \Big|_{w=b} - P'(z, \zeta) h(z) - P'(\zeta, z) h(\zeta) \Big\} + O(t^2). \quad (32)$$

Наконец, непосредственно из формулы Тейлора получаем, что

$$g_{D_t}(z_t, \zeta_t) - g_{D_t}(z, \zeta) = \operatorname{Re}\{P'(z, \zeta)th(z) + P'(\zeta, z)th(\zeta)\} + O(t^2) \quad (33)$$

равномерно по $z, \zeta \in U$ и $b \in U_0$. Складывая левые и правые части формул (32) и (33), получаем следующую окончательную формулу для вариации функции Грина области D при преобразовании (22), учитывающую и вариацию переменных z, ζ :

$$\begin{aligned} \delta_t g_D(z, \zeta) &:= g_{D_t}(z_t, \zeta_t) - g_D(z, \zeta) \\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{t}{m!}\left(P'(w, z)P'(w, \zeta)A_m(w)\right)_{w=b}^{(m)}\right\} + O(t^2) \end{aligned} \quad (34)$$

(указание на область D при записи комплексной функции Грина здесь и в дальнейшем опускаем, производная комплексной функции Грина $P(w, \cdot)$ всегда берется по ее первому аргументу: $P'(w, \cdot) = 2\partial g(w, \cdot)/\partial w$).

Лемма 1 доказана.

Отметим, что ниже (см. замечания 4, 5) предложен другой способ доказательства формулы (25).

3.4. Аналогично [23] для вариации $z_t = z + th(z)$ логарифмического ядра получаем, что

$$\begin{aligned} \delta_t \log \frac{1}{|z - \zeta|} &:= \log \frac{1}{|z_t - \zeta_t|} - \log \frac{1}{|z - \zeta|} = -\operatorname{Re}\left\{\log\left(1 + t \frac{h(z) - h(\zeta)}{z - \zeta}\right)\right\} \\ &= -\operatorname{Re}\left\{t \frac{h(z) - h(\zeta)}{z - \zeta}\right\} + O(t^2). \end{aligned} \quad (35)$$

Нетрудно увидеть, что для рассматриваемого здесь преобразования (22) имеем

$$\frac{h(z) - h(\zeta)}{z - \zeta} = -\frac{1}{m!}\left(\frac{A_m(w)}{(z - w)(\zeta - w)}\right)_{w=b}^{(m)}. \quad (36)$$

Следовательно, с учетом (36) вариация (35) логарифмического ядра принимает следующий вид:

$$\delta_t \log \frac{1}{|z - \zeta|} = \operatorname{Re}\left\{\frac{t}{m!}\left(\frac{A_m(w)}{(z - w)(\zeta - w)}\right)_{w=b}^{(m)}\right\} + O(t^2) \quad (37)$$

(ср. с (34)).

Так как допустимые компакты симметричны относительно вещественной прямой, то в дальнейшем мы предполагаем, что малый параметр t и параметр возмущения b являются вещественными.

3.5. Докажем теперь, что в случае стационарного компакта $F \in \mathcal{K}_f$ и области $D = D(F)$ полученные асимптотические формулы для функции Грина (34)

и логарифмического ядра (37) порождают следующее “асимптотическое” неравенство для функционала энергии (2) равновесной меры $\lambda = \lambda^F$ (параметр θ мы не указываем):

$$\begin{aligned} \delta_t J(F) &:= J(F_t; \lambda^{F_t}) - J(F; \lambda^F) \\ &\geq \operatorname{Re} \left\{ \frac{t}{m!} (A_m(w) [\theta(\widehat{\lambda}(w))^2 + (\mathcal{P}'_{F,\lambda}(w))^2]^{(m)}_{w=b} \right\} + o(t), \quad t \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (38)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $\lambda = \lambda^F$,

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}(w) &= -\mathcal{V}'_{\lambda}(w) = \int_E \frac{d\lambda(x)}{w-x}, \quad \mathcal{V}_{\lambda}(w) = \int_E \log \frac{1}{w-x} d\lambda(x), \\ \mathcal{P}_{F,\lambda}(w) &= \int_E P(w, x) d\lambda(x). \end{aligned}$$

В дальнейшем мы считаем параметры b и t вещественными. Напомним, что при вариации (22) имеем $F \mapsto F_t$, $D \mapsto D_t := D(F_t)$. Так как t и b вещественные, то отрезок E переходит в себя, при этом точки ± 1 остаются неподвижными, поэтому $M_1(E) \mapsto M_1(E)$. Такая вариация стандартным образом порождает вариацию мер $\mu \in M_1(E)$: $\mu \mapsto \mu^t$, $\mu^t(e_t) = \mu(e)$ для произвольного μ -измеримого множества $e \subset E$. Таким образом,

$$d\mu^t(x_t) = d\mu(x), \quad x \in E.$$

Используя соотношения (34) и (35) и равенство $d\mu(x) = d\mu^t(x_t)$, получаем

$$\begin{aligned} \delta J_t(F; \mu) &:= J(F_t; \mu^t) - J(F; \mu) \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{t}{m!} \left(\left[\theta(\widehat{\mu}(w))^2 + \left(\int_E P'(w, x) d\mu(x) \right)^2 \right] A_m(w) \right)^{(m)}_{w=b} \right\} + O(t^2), \end{aligned} \quad (39)$$

где $0 < |t| \leq \varepsilon_0$, $b \in U_0$, при этом t и b теперь вещественные; при выводе (39) из (34) и (37) мы воспользовались тем, что дифференцирование производится по переменному w , а интегрирование – по независимым переменным z, ζ .

При $b \in U_0 \cap \mathbb{R}$ и $\mu \in M_1(E)$ положим

$$R(\mu; b) = R(\mu) := \frac{1}{m!} \left(\left[\theta(\widehat{\mu}(w))^2 + \left(\int_E P'(w, x) d\mu(x) \right)^2 \right] A_m(w) \right)^{(m)}_{w=b}. \quad (40)$$

Из вещественной симметрии компактов семейства $\mathcal{K}_f$ вытекает, что функционал $R(\mu)$ вещественнозначный, т.е. $R(\mu) \in \mathbb{R}$. Справедлива следующая лемма (ср. с [23; лемма 1.2]).

ЛЕММА 2. Пусть $\sigma_t \in M_1(E)$ – такая мера, что $(\sigma_t)^t = \lambda^{F_t}$. Тогда в условиях теоремы 2 имеем $R(\sigma_t) \rightarrow R(\lambda^F)$ при $t \rightarrow 0$ равномерно по $b \in U_0 \cap \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (39) вытекает, что

$$J(F_t; (\lambda^F)^t) - J(F; \lambda^F) = \operatorname{Re}\{tR(\lambda^F)\} + O(t^2) = O(t), \quad (41)$$

$$J(F_t; \lambda^{F_t}) - J(F; \sigma_t) = \operatorname{Re}\{tR(\sigma_t)\} + O(t^2) = O(t). \quad (42)$$

По определению экстремальной меры имеем

$$J(F; \sigma_t) \geq J(F; \lambda^F), \quad (43)$$

$$J(F_t; (\lambda^F)^t) \geq J(F_t, \lambda^{F_t}). \quad (44)$$

Из (44), (41) и (42) получаем, что

$$J(F, \sigma_t) + O(t) = J(F_t, \lambda^{F_t}) \leq J(F_t; (\lambda^F)^t) = J(F; \lambda^F) + O(t).$$

Следовательно,

$$J(F, \sigma_t) \leq J(F, \lambda^F) + O(t). \quad (45)$$

Из (43) и (45) вытекает, что

$$J(F, \sigma_t) \rightarrow J(F, \lambda^F) \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad (46)$$

По принципу понижения (см. [25; гл. I, § 3, теорема 1.3]) имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} J(F, \sigma_t) \geq J(F, \sigma), \quad \text{где } \sigma_t \rightarrow \sigma \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad (47)$$

Из (46) и (47) в силу экстремальности (4) и единственности равновесной меры λ^F вытекает, что $\sigma = \lambda^F$, т.е. $\sigma_t \rightarrow \lambda^F$, $t \rightarrow 0$ (см. [25; гл. I, § 4]). Следовательно, $R(\sigma_t) \rightarrow R(\lambda^F)$ равномерно по $b \in U_0 \cap \mathbb{R}$ (см. [25; гл. I, § 4]).

Лемма 2 доказана.

Теперь из общей формулы (39), леммы 2 и (43) для вариации равновесной меры λ^F получаем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} 0 &\geq J(F_t; \lambda^{F_t}) - J(F; \lambda^F) \geq J(F_t; \lambda^{F_t}) - J(F; \sigma_t) \\ &= \operatorname{Re}\{tR(\sigma_t)\} + O(t^2) = \operatorname{Re}\{tR(\lambda)\} + o(t) \\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{t}{m!} \left(\left[\theta(\widehat{\lambda}^F(w))^2 + \left(\int_E P'(w, x) d\lambda^F(x) \right)^2 \right] A_m(w) \right)_{w=b}^{(m)} \right\} + o(t) \end{aligned} \quad (48)$$

(подчеркнем, что в формуле (48) в силу леммы 2 вместо $O(t^2)$ возникло $o(t)$). В силу стационарности компакта F имеем $\delta_t J(F; \lambda^F) \leq 0$. Поскольку $t = \pm \varepsilon$ произвольно мало, из (48) стандартными рассуждениями (см., например, [13], [23]) получаем следующее соотношение (“необходимое условие” стационарности F):

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dw^m} \left(\left[\theta(\widehat{\lambda}^F(w))^2 + \left(\int_E P'(w, x) d\lambda^F(x) \right)^2 \right] A_m(w) \right) &\equiv 0, \\ |w - b_0| &\leq r_0, \quad w \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (49)$$

Из (49) вытекает, что

$$\theta(\widehat{\lambda}(w))^2 + \left(\int_E P'(w, x) d\lambda(x) \right)^2 \equiv \frac{B_{m-1}(w)}{A_m(w)}, \quad |w - b_0| \leq r_0, \quad w \in \mathbb{R},$$

где $B_{m-1}(w)$ – некоторый многочлен, $\deg B_{m-1} \leq m-1$. Отсюда уже в силу единственности аналитического продолжения получаем, что

$$\theta(\widehat{\lambda}(w))^2 + \left(\int_E P'(w, x) d\lambda(x) \right)^2 \equiv \frac{B_{m-1}(w)}{A_m(w)}, \quad w \in D(F) \setminus E. \quad (50)$$

Таким образом, для равновесной меры $\lambda = \lambda^F \in M_1(E)$, соответствующей стационарному компакт $F \in \mathcal{K}_f$, выполняется соотношение

$$\theta(\widehat{\lambda}(z))^2 + (\mathcal{P}'_{F,\lambda}(z))^2 \equiv \frac{B_{m-1}(z)}{A_m(z)}, \quad z \in D(F) \setminus E. \quad (51)$$

Соотношение (9) и теорема 2 доказаны.

3.6. Докажем теперь теорему 1.

Покажем сначала, что стационарный компакт F не разбивает плоскость и не имеет внутренних точек. Предположим, что это не так. Пусть, например, $\text{int } F \neq \emptyset$. Множество $\text{int } F$ симметрично относительно вещественной прямой. Предположим, что $\text{int } F \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ и, следовательно, на вещественной прямой найдется точка $b_0 \in \text{int } F$ (в общем случае надо взять две точки $b_0, \bar{b}_0 \in \text{int } F$ и сделать очевидные изменения в нижеследующих рассуждениях). Пусть $r_0 > 0$ достаточно мало, $U_{r_0} = \{b : b_0 - r_0 < b < b_0 + r_0\} \subset \text{int } F$. Положим, как и выше,

$$h(z) = \frac{A_m(z)}{(z-b)^{m+1}}, \quad z \notin U_{r_0},$$

и определим стандартную вариацию $z_t = z + th(z)$. Так как $b \notin D = D(F)$, то $\delta_t g_D(z, \zeta) \equiv 0$ при $z, \zeta \in D$ в силу конформной инвариантности функции Грина. Для вариации логарифмического ядра по-прежнему имеем

$$\begin{aligned} \delta_t \log \frac{1}{|z - \zeta|} &:= \log \frac{1}{|z_t - \zeta_t|} - \log \frac{1}{|z - \zeta|} = -\text{Re} \left\{ \log \left(1 + t \frac{h(z) - h(\zeta)}{z - \zeta} \right) \right\} \\ &= -\text{Re} \left\{ t \frac{h(z) - h(\zeta)}{z - \zeta} \right\} + O(t^2) \end{aligned}$$

(см. (35)). Отсюда при помощи стандартных рассуждений (см. пп. 3.2–3.5) получаем, что необходимым условием стационарности F является следующее соотношение:

$$(\widehat{\lambda}(z))^2 \equiv \frac{B_{m-1}(z)}{A_m(z)}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E. \quad (52)$$

Но поскольку $\lambda \in M_1(E)$, функция $\widehat{\lambda}$ голоморфна вне E . Следовательно, из (52) вытекает, что $B_{m-1}(z)/A_m(z) \equiv \text{const}/(z^2 - 1)$. Значит, равновесная мера λ не зависит ни от θ , ни от компакта F и совпадает с чебышёвской равновесной мерой, чего быть не может. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение: стационарный компакт не имеет внутренних точек (ср. с [1; гл. 0], а также с [32]).

Аналогичным образом можно доказать, что стационарный компакт не разбивает плоскость.

3.7. Завершим теперь доказательство теоремы 1. Из соотношения (39) вытекает следующее представление для гринова потенциала $G_F^\lambda(z)$ стационарного компакта F :

$$G_F^\lambda(z) := \int_{-1}^1 g_F(x, z) d\lambda(x) = \operatorname{Re} \int_{a_1}^z \sqrt{\frac{B_{m-1}(\zeta)}{A_m(\zeta)} - \theta(\widehat{\lambda}(\zeta))^2} d\zeta, \quad (53)$$

где путь интегрирования от точки a_1 до z не пересекает отрезка E . Так как $\operatorname{supp} \lambda = E$, то выражение

$$R(\zeta) d\zeta^2 = -\left\{ \frac{B_{m-1}(\zeta)}{A_m(\zeta)} - \theta(\widehat{\lambda}(\zeta))^2 \right\} d\zeta^2 \quad (54)$$

является мероморфным квадратичным дифференциалом в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$, все полюсы которого – простые. Отсюда с учетом доказанных выше свойств стационарного компакта F получаем, что F состоит из конечного числа аналитических дуг (замыканий критических траекторий квадратичного дифференциала (54)) и обладает S -свойством (7).

Теорема 1 доказана.

3.8. Сделаем несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Формула (9) может быть получена и с помощью модификации хорошо известной вариации Шиффера (см. [33], а также [34], [35]), имеющей следующий вид:

$$z_t = z + \frac{e^{i\varphi} \rho^2}{z - z_0} = z + \frac{t}{z - z_0}, \quad z_0 \in D, \quad t = e^{i\varphi} \rho^2, \quad (55)$$

$\rho \in \mathbb{R}$ – малый параметр.

Действительно, вариация (55) приводит к следующей асимптотической формуле для вариации функции Грина:

$$\delta_t g(z, \zeta) = \operatorname{Re}\{t P'(z_0, z) P'(z_0, \zeta)\} + O(t^2), \quad t \rightarrow 0, \quad (56)$$

где $P'(w, z) = 2\partial g(w, z)/\partial w$ (см. [33], [35]). Рассмотрим теперь вариацию

$$z_t = z + th(z), \quad h(z) = \frac{A_m(z)}{q_m(z)}, \quad (57)$$

$$A_m(z) = (z^2 - 1)(z - a_1) \cdots (z - a_{m-2}), \quad q_m(z) = \prod_{j=0}^m (z - z_j),$$

$z_0, z_1, \dots, z_m$ – произвольные различные точки области D или ее дополнения. Так как

$$\frac{A_m(z)}{q_m(z)} = \sum_{j=0}^m \frac{A_m(z_j)}{q'_m(z_j)} \frac{1}{z - z_j}, \quad (58)$$

то вариация (57) имеет следующий вид:

$$z_t = z + t \sum_{j=0}^m \frac{c_j}{z - z_j}, \quad c_j = \frac{A_m(z_j)}{q'_m(z_j)}. \quad (59)$$

Таким образом, вариация (57) представляет собой “композицию” классических вариаций Шиффера (55). Для вариации функции Грина при преобразовании (57) имеет место следующая (обобщенная) асимптотическая формула Шиффера:

$$\delta_t g(z, \zeta) = \operatorname{Re} \left\{ t \sum_{j=0}^m \frac{A_m(z_j)}{q'_m(z_j)} P'(z_j, z) P'(z_j, \zeta) \right\} + O(t^2), \quad t \rightarrow 0. \quad (60)$$

Нетрудно проверить непосредственно, что при преобразовании (57) вариация логарифмического ядра имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta_t \log \frac{1}{|z - \zeta|} &:= \log \frac{1}{|z_t - \zeta_t|} - \log \frac{1}{|z - \zeta|} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ t \sum_{j=0}^m \frac{A_m(z_j)}{q'_m(z_j)} \frac{1}{(z - z_j)(\zeta - z_j)} \right\} + O(t^2), \quad t \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Рассуждая, как и в пп. 3.2–3.4, из (25) и (61) получаем следующую асимптотическую формулу для вариации энергии произвольной меры $\mu \in M_1(E)$ и произвольного допустимого компакта $K \in \mathcal{K}_f$:

$$\begin{aligned} \delta_t J(K; \mu) &:= J(K_t; \mu^t) - J(K; \mu) = \operatorname{Re} \left\{ t \left(\theta \sum_{j=0}^m \frac{A_m(z_j)}{q'_m(z_j)} (\hat{\mu}(z_j))^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=0}^m \frac{A_m(z_j)}{q'_m(z_j)} (\mathcal{P}'_{K, \mu}(z_j))^2 \right) \right\} + O(t^2), \quad t \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Применим теперь эту формулу (62) для стационарного компакта F и соответствующей равновесной меры $\lambda = \lambda^F$. Тогда, как и в п. 3.5, с помощью леммы 2 получим следующее “необходимое условие” стационарности F :

$$\sum_{j=0}^m \frac{A_m(z_j)}{q'_m(z_j)} (\theta(\hat{\lambda}(z_j))^2 + (\mathcal{P}'_{F, \lambda}(z_j))^2) = 0 \quad (63)$$

для произвольных различных точек $z_0, z_1, \dots, z_m$ области D или ее дополнения. Пусть точки $z_0, z_1, \dots, z_m$ принадлежат области D . Устремим теперь все эти точки к одной и той же произвольной точке $z \in D \setminus E$. В пределе из (63) получим следующее соотношение:

$$\frac{d^m}{dz^m} \{ A_m(z) (\theta(\hat{\lambda}(z))^2 + (\mathcal{P}'_{F, \lambda}(z))^2) \} \equiv 0, \quad z \in D \setminus E. \quad (64)$$

Из (64) вытекает нужное нам равенство (9).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. С учетом уже известного ответа (25) и соотношения

$$P'(w, z) \equiv 0, \quad w \in D, \quad z \in \partial D \quad (65)$$

(см. [34; формула (178'')]), формула (25) для преобразования (22) может быть получена очень просто и непосредственно из формулы Тейлора (ср. с [34; с. 229]), а именно,

$$g_{D_t}(z_t, \zeta_t) = g_{D_t}(z, \zeta) + \operatorname{Re} \{ P'(z, \zeta) t h(z) + P'(\zeta, z) t h(\zeta) \} + o(t), \quad t \rightarrow 0, \quad (66)$$

$z, \zeta \in D$. Заметим, что функция, стоящая в правой части (66), на границе ∂D_t области D_t близка к функции Грина исходной области D и имеет в точке $z = \zeta$ нужную логарифмическую особенность. Но кроме этого, эта функция имеет особенность в точке $z = b$ (“центре” вариации). Следуя [34], рассмотрим функцию

$$R(z, \zeta; b) := \operatorname{Re} \left\{ \frac{t}{m!} \frac{d^m}{dw^m} (A_m(w) P'(w, z) P'(w, \zeta)) \Big|_{w=b} \right\}. \quad (67)$$

Функция R – гармоническая функция переменных z и ζ всюду в D , кроме точки b . Так как справедливо соотношение (65), то функция R обращается в нуль на границе D . В точке b особенность функции R совпадает с особенностью функции, стоящей в правой части (66). Следовательно, после вычитания функции R из обеих частей (66) мы, с одной стороны, не изменим граничных значений новой функции, с другой – получим новую функцию без особенности в точке b . Следовательно, эта новая функция с точностью $o(t)$ совпадает с функцией Грина области D , т.е.

$$g_{D_t}(z_t, \zeta_t) - \operatorname{Re} \left\{ \frac{t}{m!} \frac{d^m}{dw^m} (A_m(w) P'(w, z) P'(w, \zeta)) \Big|_{w=b} \right\} = g_D(z, \zeta) + o(t). \quad (68)$$

Из (68) вытекает нужная формула (25) (с $o(t)$ вместо $O(t^2)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Соотношение $\delta_t J(F, \lambda^F) \leq 0$ выполняется в силу стационарности компакта $F \in \mathcal{K}_f$, где величина $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет неравенству $0 < |t| \leq \varepsilon_0$. Ограничение $t \in \mathbb{R}$ связано с тем, что допустимые компакты $K \in \mathcal{K}_f$ симметричны относительно вещественной оси, а вариация $K \mapsto K_t$ не должна выводить новый компакт из класса $\mathcal{K}_f$. По этой же причине мы выбираем точку $b_0 \in \mathbb{R} \setminus (E \cup F)$ и рассматриваем вещественный интервал $b \in (b_0 - \varepsilon_0, b_0 + \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$. Но и этого произвола нам оказывается вполне достаточно для вывода необходимого условия стационарности – формулы (49) (ср. с [1; гл. 0]). Действительно, из вещественной симметрии произвольного компакта $K \in \mathcal{K}_f$ вытекает вещественность величины $R(\mu)$ (см. (40)) для любой меры $\mu \in M_1(E)$. Поэтому из (48) с помощью вариации малого вещественного параметра $t = \pm|t| \neq 0$ мы получаем, что необходимым условием стационарности компакта F является выполнение равенства

$$R(\lambda; b) \equiv 0, \quad b \in (b_0 - \varepsilon, b_0 + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0. \quad (69)$$

Отсюда уже по теореме о единственности аналитического продолжения получаем, что при всех $z \in \mathbb{C} \setminus (E \cup F)$ справедливо соотношение (51). Если особые точки функции f расположены несимметрично относительно вещественной прямой (и, следовательно, f не является вещественнозначной на отрезке E), то и стационарный компакт для задачи (20) не будет, вообще говоря, симметричен относительно вещественной прямой. В этом случае вариацию необходимо производить с малым комплексным параметром t . При этом варьироваться неизбежно будет не только компакт $F \in \mathcal{K}_f$, но и исходный отрезок

$E = [-1, 1]$. Соответствующим образом преобразуется и класс рассматриваемых мер: вместо $M_1(E)$ получим $M_1(E_t)$. Поэтому теоретико-потенциальная задача вида (5) должна рассматриваться уже для пары компактов, т.е. для конденсатора (E_t, K_t) , где $K, K_t \in \mathcal{K}_f$, E_t – “допустимый” континуум, содержащий точки ± 1 . Таким образом, “свободной” станет и вторая пластина, соединяющая точки ± 1 . Вариационная формула (48) и соотношение (9) сохранятся, однако носителем равновесной меры λ будет уже не исходный отрезок E , а некоторая аналитическая дуга (траектория квадратичного дифференциала (10)), соединяющая точки ± 1 (ср., например, с [36]).

§ 4. Описание стационарного компакта при $\theta = 0, 1, 3$ в терминах римановой поверхности

4.1. Пусть параметр $\theta = 1$. Если соответствующий стационарный компакт $F = F(1)$ состоит из $s = s(1)$ непересекающихся аналитических дуг, попарно соединяющих точки ветвления $a'_1, \dots, a'_{2s} \in \Sigma$ функции f , то он допускает наглядное описание в терминах, связанных с четырехлистной римановой поверхностью рода $g = s - 1$.

Построим сначала двулистную риманову поверхность $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \cup \mathfrak{R}^{(2)}$ следующим образом. Возьмем два экземпляра римановой сферы $\mathbb{C}$, разрезанные по отрезку $E = [-1, 1]$, и переклеим по разрезу. Полученная двулистная риманова поверхность $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \cup \mathfrak{R}^{(2)}$ эквивалентна римановой сфере. Определим на $\mathfrak{R}$ функцию $u(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}$, следующим образом: $u(z^{(1)}) = G_F^\lambda(z)$, $u(z^{(2)}) = w - V^\lambda(z)$. Непосредственно из условия равновесия (3) вытекает, что u – гармоническая функция на $\mathfrak{R} \setminus (F^{(1)} \cup \{\infty^{(2)}\})$. Кроме того, $u \equiv 0$ на компакте $F^{(1)}$ и $u(z^{(2)}) = \log|z| + w + o(1)$ при $z^{(2)} \rightarrow \infty^{(2)}$. Возьмем теперь два экземпляра $\mathfrak{R}$, разрезанные по компакту $F^{(1)}$, и переклеим их между собой по соответствующим разрезам. Получим четырехлистную риманову поверхность $\mathfrak{R}_1$ рода $g = s - 1$. Так как $u \equiv 0$ на $F^{(1)}$, то u гармонически продолжается с одного экземпляра $\mathfrak{R}$ на другой с переменной знака. Продолженная функция гармонична на $\mathfrak{R}_1$ всюду, кроме точек $\mathbf{z} = \infty^{(2)}, \infty^{(3)}$, где она имеет логарифмические особенности: $\log|z|$ при $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(2)}$ и $-\log|z|$ при $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(3)}$. Следовательно,

$$u(\mathbf{z}) = \operatorname{Re} W(\mathbf{z}), \quad W(\mathbf{z}) = \int_{a'_1}^{\mathbf{z}} dW(\zeta),$$

где $dW(\mathbf{z}) = dW(\mathbf{z}; \infty^{(2)}, \infty^{(3)})$ – (единственный) абелев дифференциал на $\mathfrak{R}_1$ с чисто мнимыми периодами и особенностью вида $1/z$ в точке $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ и вида $-1/z$ в точке $\mathbf{z} = \infty^{(3)}$. Компакт F соответствует нулевой линии уровня функции $\operatorname{Re} W(\mathbf{z})$:

$$F = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \operatorname{Re} W(\mathbf{z}) = 0\} \setminus E.$$

Функция $u(\mathbf{z}) = g_{F^{(1)}}(\mathbf{z}, \infty^{(2)})$ – функция Грина для области $\mathfrak{R} \setminus F^{(1)}$ с особенностью в точке $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$, а $w = \gamma^{(2)}$ – постоянная Робена для этой функции Грина. Таким образом, задача о максимуме постоянной w соответствует задаче о минимуме $e^{-\gamma^{(2)}}$, т.е. минимуме логарифмической емкости.

Пусть $c_k = c_k(f)$ – коэффициенты Фурье при разложении функции f в ряд по ортонормированным полиномам Чебышёва. Нетрудно видеть, что при $\theta = 1$ стационарный компакт $F(1)$ является образом компакта Шталя для степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k$, $c_k = c_k(f)$, при отображении, задаваемом функцией Жуковского $z = (\zeta + \zeta^{-1})/2$ (см. [20], [21]).

4.2. Если для параметра $\theta = 3$ стационарный компакт $F = F(3)$ состоит из $s = s(3)$ непересекающихся аналитических дуг, попарно соединяющих точки ветвления $a_1'', \dots, a_{2s}'' \in \Sigma$ функции f , то он допускает наглядное описание в терминах, связанных с шестилистной римановой поверхностью рода $g = s - 1$.

Построим сначала трехлистную риманову поверхность $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \cup \mathfrak{R}^{(2)} \cup \mathfrak{R}^{(3)}$ следующим образом. Возьмем три экземпляра римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$. На первом проведем разрез по отрезку $E = [-1, 1]$, на втором – по E и дугам ℓ_j , $j = 1, \dots, s$, составляющим F , на третьем – только по дугам ℓ_j . Три полученных экземпляра римановой сферы переклеиваются друг с другом следующим образом. Второй подклеивается к первому по разрезу, соответствующему отрезку E , третий – ко второму по разрезам, соответствующим дугам ℓ_j . Полученная трехлистная риманова поверхность $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \cup \mathfrak{R}^{(2)} \cup \mathfrak{R}^{(3)}$ эквивалентна римановой сфере с $g = s - 1$ ручками. Определим на $\mathfrak{R}$ функцию $u(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}$, следующим образом:

$$\begin{aligned} u(z^{(1)}) &= 2G_F^\lambda(z), & u(z^{(2)}) &= G_F^\lambda(z) + w - 3V^\lambda(z), \\ u(z^{(3)}) &= -G_F^\lambda(z) + w - 3V^\lambda(z). \end{aligned}$$

Непосредственно из условия равновесия (3) и S -свойства (7) компакта F вытекает, что u – гармоническая функция на $\mathfrak{R} \setminus (F^{(1)} \cup E^{(3)}) \setminus \{\infty^{(2)}, \infty^{(3)}\}$. Кроме того, $u \equiv 0$ на компакте $K = F^{(1)} \cup E^{(3)}$ и

$$\begin{aligned} u(z^{(2)}) &= 3 \log |z| + c_2 + o(1) \quad \text{при } z^{(2)} \rightarrow \infty^{(2)}, \\ u(z^{(3)}) &= 3 \log |z| + c_3 + o(1) \quad \text{при } z^{(3)} \rightarrow \infty^{(3)}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$u(\mathbf{z}) \equiv 3(g_K(\mathbf{z}, \infty^{(2)}) + g_K(\mathbf{z}, \infty^{(3)})),$$

где $g_K(\mathbf{z}, \cdot)$ – функция Грина для области $\mathfrak{R} \setminus K$ с особенностью в соответствующей точке. Возьмем теперь два экземпляра $\mathfrak{R}$, разрезанные по отрезку $E^{(3)}$ и компакт $F^{(1)}$, и переклеим их между собой по соответствующим разрезам. Получим шестилистную риманову поверхность $\mathfrak{R}_3$ рода $g = s - 1$. Так как $u \equiv 0$ на $F^{(1)} \cup E^{(3)}$, то u гармонически продолжается с одного экземпляра $\mathfrak{R}$ на другой с заменой знака. Продолженная функция гармонична на $\mathfrak{R}_3$ всюду кроме точек $\mathbf{z} = \infty^{(2)}, \infty^{(3)}, \infty^{(4)}, \infty^{(5)}$, где она имеет логарифмические особенности: $3 \log |z|$ при $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(2)}, \infty^{(3)}$ и $-3 \log |z|$ при $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(4)}, \infty^{(5)}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} u(\mathbf{z}) &= \operatorname{Re} W(\mathbf{z}), & W(\mathbf{z}) &= \int_{a_1''}^{\mathbf{z}} dW(\zeta), \\ dW(\mathbf{z}) &= dW(\mathbf{z}; \infty^{(2)}, \infty^{(3)}; \infty^{(4)}, \infty^{(5)}) \end{aligned}$$

– (единственный) абелев дифференциал на $\mathfrak{R}_3$ с чисто мнимыми периодами и особенностями вида $1/z$ в точках $\mathbf{z} = \infty^{(2)}, \infty^{(3)}$ и вида $-1/z$ в точках $\mathbf{z} = \infty^{(4)}, \infty^{(5)}$. Компакт F соответствует нулевой линии уровня функции $\operatorname{Re} W(\mathbf{z}; \infty^{(2)}, \infty^{(3)}; \infty^{(4)}, \infty^{(5)})$:

$$F = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \operatorname{Re} W(\mathbf{z}; \infty^{(2)}, \infty^{(3)}; \infty^{(4)}, \infty^{(5)}) = 0\} \setminus E.$$

Нетрудно увидеть, что для постоянной $w = w(3)$ имеет место соотношение

$$w = \gamma(\infty^{(2)}) + \gamma(\infty^{(3)}) + 2g_D(\infty^{(2)}, \infty^{(3)}),$$

где $\gamma(\infty^{(2)})$, $\gamma(\infty^{(3)})$ – постоянные Робена в точках $\infty^{(2)}$ и $\infty^{(3)}$ для функции Грина области $D = \mathfrak{R}_3 \setminus (F^{(1)} \cup E^{(3)})$.

Для произвольной области $D \subset \mathbb{C}$ величина $\gamma(a_1) + \gamma(a_2) + 2g_D(a_1, a_2)$ равна приведенному модулю области D относительно двух точек a_1, a_2 . Это понятие (для произвольного набора точек) было введено В.Н. Дубининым в [5], [37], [38] геометрическим образом через модуль плоского конденсатора. Таким образом, экстремальная константа $w = w(3)$ (т.е. максимум минимума энергии) соответствует максимальному приведенному модулю (относительно двух точек).

4.3. Наконец, непосредственно из результатов работ [9] и [28] вытекает, что при $\theta = 0$ для стационарного компакта $F = F(0)$, соответствующего наилучшим в равномерной метрике на отрезке $E = [-1, 1]$ рациональным аппроксимациям $R_n = f_n(z; 0)$ функции $f \in \mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$, также справедливо соотношение (7). В этом случае функция $u(z^{(1)}) = w - G^\lambda(z)$ продолжается через разрез, проведенный по отрезку E , на второй лист римановой поверхности $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \cup \mathfrak{R}^{(2)}$ с переменной знака. Отсюда следует, что задача о максимуме постоянной w эквивалентна задаче о минимуме емкости конденсатора $(F^{(1)}, F^{(2)})$.

Таким образом, все три стационарных (в заданном классе $\mathcal{K}_f$) компакта $F(0), F(1), F(3)$ обладают S -свойством (7) и являются единственными. Следовательно, это свойство носит вполне универсальный характер.

Список литературы

- [1] Г.В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы*, Тр. МИАН СССР, **139**, Наука, М., 1980; англ. пер.: G.V. Kuz'mina, "Moduli of families of curves and quadratic differentials", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **139**:1 (1982), 1–231.
- [2] Г.В. Кузьмина, "Методы геометрической теории функций. I", *Алгебра и анализ*, **9**:3 (1997), 41–103; англ. пер.: G.V. Kuz'mina, "Methods of geometric function theory. I", *St. Petersburg Math. J.*, **9**:3 (1998), 455–507.
- [3] Г.В. Кузьмина, "Методы геометрической теории функций. II", *Алгебра и анализ*, **9**:5 (1997), 1–50; англ. пер.: G.V. Kuz'mina, "Methods of geometric function theory. II", *St. Petersburg Math. J.*, **9**:5 (1998), 889–930.
- [4] Г.В. Кузьмина, "Геннадий Михайлович Голузин и геометрическая теория функций", *Алгебра и анализ*, **18**:3 (2006), 3–38; англ. пер.: G.V. Kuz'mina, "Gennadii Mikhailovich Goluzin and geometric function theory", *St. Petersburg Math. J.*, **18**:3 (2007), 347–372.

- [5] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009.
- [6] H. Stahl, “Extremal domains associated with an analytic function. I”, *Complex Variables Theory Appl.*, **4**:4 (1985), 311–324.
- [7] H. Stahl, “Extremal domains associated with an analytic function. II”, *Complex Variables Theory Appl.*, **4**:4 (1985), 325–338.
- [8] H. Stahl, “The structure of extremal domains associated with an analytic function”, *Complex Variables Theory Appl.*, **4**:4 (1985), 339–354.
- [9] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций”, *Матем. сб.*, **134(176)**:3(11) (1987), 306–352; англ. пер.: А. А. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium distributions and degree of rational approximation of analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 305–348.
- [10] A. Martínez Finkelshtein, “Trajectories of quadratic differentials and approximations of exponents on the semiaxis”, *Complex methods in approximation theory* (Almeria, 1995), Monogr. Cienc. Tecnol., **2**, Univ. Almeria, Almeria, 1997, 69–84.
- [11] А. И. Аптекарев, “Асимптотика аппроксимаций Эрмита–Падэ для пары функций с точками ветвления”, *Докл. РАН*, **422**:4 (2008), 443–445; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotics of Hermite–Padé approximants for two functions with branch points”, *Dokl. Math.*, **78**:2 (2008), 717–719.
- [12] A. I. Aptekarev, A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche, “Asymptotics of Hermite–Padé rational approximants for two analytic functions with separated pairs of branch points (case of genus 0)”, *Int. Math. Res. Pap. IMRP*, 2008, ID 007.
- [13] A. Martínez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov, “On asymptotic behavior of Heine–Stieltjes and Van Vleck polynomials”, *Recent trends in orthogonal polynomials and approximation theory*, Contemp. Math., **507**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 209–232.
- [14] A. Martínez-Finkelshtein, E. Rakhmanov, “Critical measures, quadratic differentials, and weak limits of zeros of Stieltjes polynomials”, *Comm. Math. Phys.*, **302**:1 (2011), 53–111.
- [15] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, “Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **202**:2 (2011), 3–56; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, D. N. Tulyakov, “Random matrices with external source and the asymptotic behaviour of multiple orthogonal polynomials”, *Sb. Math.*, **202**:2 (2011), 155–206.
- [16] A. Deaño, D. Huybrechs, A. B. J. Kuijlaars, “Asymptotic zero distribution of complex orthogonal polynomials associated with Gaussian quadrature”, *J. Approx. Theory*, **162**:12 (2010), 2202–2224.
- [17] В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, “Метод внутренних вариаций и существование S -компактов”, 2012 (в печати).
- [18] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “О сходимости аппроксимаций Падэ ортогональных разложений”, *Теория чисел, алгебра, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН, **200**, Наука, М., 1991, 136–146; англ. пер.: А. А. Gonchar, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, “On the convergence of Padé approximations of orthogonal expansions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **200** (1993), 149–159.
- [19] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “On the rate of convergence of Padé approximants of orthogonal expansions”, *Progress in approximation theory* (Tampa, FL, USA, 1990), Springer Ser. Comput. Math., Springer-Verlag, New York, 1992, 169–190.

- [20] A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, *On the convergence of Chebyshev–Padé approximations to real-valued algebraic functions*, arXiv: <http://arxiv.org/abs/1009.4813>.
- [21] A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, *On the convergence on nonlinear Padé–Chebyshev approximations to the multivalued analytic functions, variation of equilibrium energy and S-property of stationary compacts*, arXiv: <http://arxiv.org/abs/1012.0170>.
- [22] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “О сходимости линейных аппроксимаций Паде–Чебышёва для многозначных аналитических функций”, 2012 (в печати).
- [23] Е. А. Перевозникова, Е. А. Рахманов, *Вариация равновесной энергии и S-свойство компактов минимальной емкости*, препринт, М., 1994.
- [24] А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “Вариация равновесной меры и S-свойство стационарного компакта”, *УМН*, **66**:1 (2011), 183–184; англ. пер.: A. Martínez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, “Variation of the equilibrium measure and the S-property of a stationary compact set”, *Russian Math. Surveys*, **66**:1 (2011), 176–178.
- [25] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966; англ. пер.: N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
- [26] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов”, *Матем. сб.*, **125(167)**:1(9) (1984), 117–127; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **53**:1 (1986), 119–130.
- [27] H. Stahl, “Orthogonal polynomials with complex-valued weight function, I”, *Constr. Approx.*, **2**:1 (1986), 225–240.
- [28] H. Stahl, “Orthogonal polynomials with complex-valued weight function, II”, *Constr. Approx.*, **2**:1 (1986), 241–251.
- [29] H. Stahl, “The convergence of Pade approximants to functions with branch points”, *J. Approx. Theory*, **91**:2 (1997), 139–204.
- [30] S. Kamvissis, E. A. Rakhmanov, “Existence and regularity for an energy maximization problem in two dimensions”, *J. Math. Phys.*, **46**:8 (2005), 083505.
- [31] С. П. Суетин, “Некоторый аналог вариационных формул Адамара и Шиффера”, *ТМФ*, 2012 (в печати).
- [32] T. Bergkvist, H. Rullgard, “On polynomial eigenfunctions for a class of differential operators”, *Math. Res. Lett.*, **9**:2–3 (2002), 153–171.
- [33] M. Schiffer, “Hadamard’s formula and variation of domain-functions”, *Amer. J. Math.*, **68** (1946), 417–448.
- [34] P. R. Garabedian, M. Schiffer, “Identities in the theory of conformal mapping”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 187–238.
- [35] М. Шиффер, “Некоторые новые результаты в теории конформных отображений”, Приложение к книге: Р. Курант, *Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности*, ИЛ, М., 1953, 234–301; пер. с англ.: R. Courant, *Dirichlet’s Principle, conformal mapping, and minimal surfaces*, Interscience Publ., New York, 1950.
- [36] V. Heikkala, M. Vuorinen, “Teichmüller’s extremal ring problem”, *Math. Z.*, **254**:3 (2006), 509–529.
- [37] В. Н. Дубинин, “Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного”, *УМН*, **49**:1 (1994), 3–76; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable”, *Russian Math. Surveys*, **49**:1 (1994), 1–79.

- [38] В. Н. Дубинин, “Некоторые свойства внутреннего приведенного модуля”, *Сиб. матем. журн.*, **35**:4 (1994), 774–792; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Some properties of the reduced inner modulus”, *Siberian Math. J.*, **35**:4 (1994), 689–705.

А. Мартинес-Финкельштейн

(A. Martínez-Finkelshtein)

University of Almeria, Spain

E-mail: andrei@ual.es

Поступила в редакцию

14.02.2011 и 29.09.2011

Е. А. Рахманов (E. A. Rakhmanov)

University of South Florida, USA;

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: rakhmano@mail.usf.edu

С. П. Суетин (S. P. Suetin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: suetin@mi.ras.ru