Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Плотников, Коэффициенты сходящихся кратных рядов Уолша–Пэли, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 9, 67–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7859>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:58:27

УДК 517.518

М. Г. Плотников

Коэффициенты сходящихся кратных рядов Уолша–Пэли

Изучается поведение коэффициентов сходящихся по кубам к конечной сумме кратных рядов по системе Уолша–Пэли. Показывается, что сходящийся даже всюду такой ряд может содержать коэффициенты с номерами из достаточно массивного множества, растущие быстрее любой наперед заданной последовательности. В силу теоремы П. Коэна подобное невозможно для сходящихся по кубам на множестве полной меры кратных тригонометрических рядов, коэффициенты которых не могут иметь даже экспоненциальный рост. Находятся стремящиеся к нулю подпоследовательности коэффициентов кратных рядов Уолша–Пэли, сходящихся по кубам на множестве определенной меры.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: кратные ряды Уолша–Пэли, сходимости по кубам, теорема Кантора–Лебега.

§ 1. Введение

Известная теорема Кантора–Лебега (см., например, [1; гл. 1, § 62]) утверждает, что коэффициенты тригонометрического ряда, сходящегося к конечной сумме на множестве положительной меры, стремятся к нулю. Многими авторами изучалась возможность переноса теоремы Кантора–Лебега на случай кратных рядов. Известны следующие результаты. Пусть

$$(T) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{n_m=-\infty}^{+\infty} c_{n_1, \dots, n_m} e^{i(n_1 x_1 + \cdots + n_m x_m)} \quad (1.1)$$

– m -кратный тригонометрический ряд на $[-\pi, \pi]^m$, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$, $\|\mathbf{n}\| = \min\{|n_1|, \dots, |n_m|\}$, $||\mathbf{n}|| = \max\{|n_1|, \dots, |n_m|\}$. В 1972 г. Дж. Эш и Г. Вэлланд доказали (см. [2]), что если ряд (T) вида (1.1) сходится по прямоугольникам к конечной сумме на множестве положительной меры, то коэффициенты $c_{\mathbf{n}}$ этого ряда ограничены и стремятся к нулю при $\|\mathbf{n}\| \rightarrow +\infty$. В случае $m = 2$ этот результат получили ранее Г. Ревеш и О. Сас (см. [3]).

При сходимости по кубам последнее утверждение перестает быть верным. Тем не менее коэффициенты рядов (1.1), сходящихся таким образом, не могут расти очень быстро. П. Коэн показал (см. [4], а также [2]), что если ряд (T) вида (1.1) сходится по кубам к конечной сумме на множестве полной меры, то

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00321) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (гранты № НШ-3252.2010.1 и № НШ-979.2012.1).

коэффициенты этого ряда имеют рост слабее экспоненциального. Последнее означает, что для всякого $\gamma > 1$ найдется $b = b((T), \gamma)$ такое, что

$$|c_{\mathbf{n}}| \leq b\gamma^{\|\mathbf{n}\|}$$

для всех $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m$. Дж. Эш и Г. Вонг доказали (см. [5]), что в двумерном случае результат Козна точен в том смысле, что для любой последовательности $\varphi(n)$ такой, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\varphi(n)|^{1/n} \leq 1$, найдутся всюду сходящийся по квадратам ряд (T) вида (1.1) и $C > 0$ такие, что

$$C^{-1}\varphi(\|\mathbf{n}_i\|) \leq |c_{\mathbf{n}_i}| \leq C\varphi(\|\mathbf{n}_i\|)$$

для некоторой подпоследовательности коэффициентов $c_{\mathbf{n}_i}$.

В настоящей работе мы изучим вопрос о поведении коэффициентов кратных рядов по другой хорошо известной системе функций – системе Уолша–Пэли. В работе [6] В. А. Скворцов доказал, что если m -кратный ряд Уолша–Пэли сходится по прямоугольникам к конечной сумме во всех точках “креста”

$$(\{x_1\} \times [0, 1]^{m-1}) \cup ([0, 1] \times \{x_2\} \times [0, 1]^{m-2}) \cup \dots \cup ([0, 1]^{m-1} \times \{x_m\})$$

$(x_1, \dots, x_m)$ – двоично-иррациональные точки), за исключением, быть может, точек из некоторого не более чем счетного множества, то коэффициенты $b_{\mathbf{n}}$ этого ряда стремятся к нулю, когда $\|\mathbf{n}\| \rightarrow \infty$. Это означает, в частности, что коэффициенты данного ряда ограничены.

Мы будем изучать подобные вопросы, рассматривая вместо сходимости по прямоугольникам более общую сходимость по кубам (по квадратам в случае $m = 2$). Некоторые результаты в этом направлении получены в [7]. Ниже показано, что поведение коэффициентов сходящихся по кубам кратных рядов Уолша–Пэли может сильно отличаться от поведения коэффициентов сходящихся по прямоугольникам таких рядов. В частности, аналог теоремы В. А. Скворцова не имеет места для сходимости по кубам. С другой стороны, если рассматривать сходимость по кубам, то поведение коэффициентов кратных рядов Уолша сильно отличается и от поведения коэффициентов кратных тригонометрических рядов. Для кратных рядов Уолша сходимость по кубам к конечной функции даже всюду в определенном смысле не гарантирует никаких ограничений на поведение их коэффициентов с номерами, взятыми из достаточно массивного множества. В частности, показано, что двойной ряд Уолша–Пэли может всюду сходиться по квадратам, а его коэффициенты с номерами из некоторого множества при этом могут расти быстрее любой наперед заданной последовательности. Для кратных тригонометрических рядов подобное невозможно в силу упомянутого выше результата П. Козна. Возвращаясь к кратным рядам Уолша–Пэли, мы покажем, что некоторые подпоследовательности коэффициентов сходящихся по кубам к конечной функции на множестве определенной меры кратных рядов Уолша все-таки должны стремиться к нулю.

Мы будем рассматривать m -кратные ряды Уолша–Пэли

$$\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} b_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} b_{n_1, \dots, n_m} \omega_{n_1, \dots, n_m}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m), \quad (1.2)$$

на группе G^m , хотя все результаты нашей работы без труда переносятся на кратные ряды Уолша–Пэли на единичном кубе $[0, 1]^m$. Коэффициенты $b_{\mathbf{n}}$ в (1.2) будем считать действительными. Основными результатами работы являются теоремы 1–4.

ТЕОРЕМА 1. *Рассмотрим множества*

$$T_k = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 : 2^k \leq n_1, n_2 \leq 2^{k+1} - 1\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad T = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_k.$$

Пусть заданы двойная последовательность $\{B_{n_1, n_2}\}_{n_1, n_2=0}^{\infty}$ не равных нулю действительных чисел, стремящаяся к ∞ последовательность $\{C_k\}$ положительных чисел, а также β_1 и β_2 такие, что $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$.

Тогда существует двойной ряд Уолша–Пэли

$$(S) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} b_{n_1, n_2} \omega_{n_1, n_2}(t^1, t^2),$$

всюду на G^2 сходящийся по квадратам к конечной сумме, для которого выполнены следующие равенства:

$$\lim_{\substack{\|(n_1, n_2)\| \rightarrow \infty \\ (n_1, n_2) \notin T}} \frac{b_{n_1, n_2}}{B_{n_1, n_2}} = \infty, \quad (1.3)$$

$$\overline{\lim}_{\substack{2^k \leq n_1, n_2 \leq 2^{k+C_k} \\ k \rightarrow \infty}} \frac{|b_{n_1, n_2}|}{|B_{n_1, n_2}|} = +\infty, \quad (1.4)$$

$$\overline{\lim}_{\substack{2^{k(1+\beta_1)} \leq n_1, n_2 \leq 2^{k(1+\beta_2)} \\ k \rightarrow \infty}} \frac{|b_{n_1, n_2}|}{|B_{n_1, n_2}|} = +\infty. \quad (1.5)$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть заданы постоянная $s \in \mathbb{Z}_+$, борелевское множество $E_1 \subset G^m$, для которого выполнено неравенство*

$$\mu(E_1) > 1 - \frac{1}{2^{m-1+ms}}, \quad (1.6)$$

а также ряд (S) вида (1.2) такой, что для кубических частичных сумм S_N этого ряда в каждой точке $\mathbf{t} \in E_1$ существуют конечные пределы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k + 2^s}(\mathbf{t}) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k}(\mathbf{t}). \quad (1.7)$$

Тогда для коэффициентов $b_{\mathbf{n}}$ ряда (S) справедливо равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{2^k \cdot \mathbf{1} \leq \mathbf{n} \leq (2^k + 2^s - 1) \cdot \mathbf{1}} |b_{\mathbf{n}}| = 0. \quad (1.8)$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть заданы постоянная $s \in \mathbb{Z}_+$, борелевское множество $E_1 \subset G^m$, для которого выполнено неравенство (1.6), а также ряд (S) вида (1.2), сходящийся по кубам к конечной функции на множестве E_1 . Тогда для коэффициентов $b_{\mathbf{n}}$ ряда (S) справедливо равенство (1.8).*

ТЕОРЕМА 4. Пусть заданы борелевское множество $E_1 \subset G^m$ положительной меры, а также ряд (S) вида (1.2) такой, что для кубических частичных сумм S_N этого ряда и для всех $\mathbf{t} \in E_1$ существуют конечные пределы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k+1}(\mathbf{t}) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k}(\mathbf{t}). \quad (1.9)$$

Тогда для коэффициентов b_n ряда (S) справедливо равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_{2^k, \dots, 2^k} = 0. \quad (1.10)$$

Отметим, что теорема 4 усиливает теоремы 2 и 3 в случае $s = 0$. Заметим также, что если рассматривать двумерный случай, то согласно утверждению теоремы 1 (см., в частности, формулу (1.4)) постоянная s в теоремах 2 и 3 (см. формулу (1.8)) не может быть заменена ни на какую сходящуюся к $+\infty$ последовательность $\{s_k\}$, даже если потребовать, чтобы ряд (S) всюду сходиллся (по квадратам) к конечной сумме.

Обратим внимание еще на одно различие между сходящимися по квадратам и по прямоугольникам двойными рядами Уолша–Пэли. В работе Ш. Т. Тетунашвили [8] для кратных тригонометрических рядов доказан следующий замечательный результат. Приведем его в сильно упрощенной формулировке и только в двумерном случае. Пусть $\mathcal{U}$ обозначает класс U -множеств для двойных тригонометрических рядов при сходимости по прямоугольникам, построенный в работе [8] (см. теорему 2 из этой работы) и включающий, в частности, некоторые континуальные U -множества меры нуль, а также некоторые неизмеримые U -множества. Тогда если конечная функция $f(x_1, x_2)$, определенная на множестве $[-\pi, \pi] \setminus A$, где $A \in \mathcal{U}$, измерима по переменной x_1 при любом фиксированном $x_2 \in [-\pi, \pi]$, то из сходимости по прямоугольникам к функции f на множестве $[-\pi, \pi] \setminus A$ двойного тригонометрического ряда вытекает его повторная сходимость к функции f на том же множестве. Для двойных рядов Уолша аналогичный результат вытекает из результатов работы [9].

Из теоремы 1 вытекает, что даже всюду сходящийся по квадратам двойной ряд Уолша–Пэли может не сходиться повторно ни в одной точке. Действительно, если последовательность $\{B_{n_1, n_2}\}$, фигурирующая в формулировке теоремы 1, отделена от нуля, то ряд (S) из утверждения этой теоремы не может сходиться повторно, так как его общий член не стремится к нулю по одной переменной при любом фиксированном значении другой.

Отметим, что в [10] изучалось поведение коэффициентов сходящихся по кубам кратных рядов по еще одной хорошо известной системе функций – системе Хаара.

§ 2. Основные определения

Будем изучать двоичную группу G , введенную Н. Я. Виленкиным и Н. Файном (см. [11] и [12], а также [13]–[15]) и являющуюся естественной областью определения системы Уолша. Группа G представляет собой множество последовательностей $t = \{t_j\}_{j=0}^{\infty}$ с $t_j \in \{0, 1\}$, а групповой операцией $\oplus$ служит

покоординатное сложение по mod 2. Пусть 0 обозначает нулевой элемент группы G . Если $k \in \mathbb{N}$, то будем писать $1/2^k + 0$ для элемента $t = \{t_j\}_{j=0}^\infty \in G$ такого, что $t_{k-1} = 1$ и $t_j = 0$ для всех $j \neq k-1$. Важную роль при изучении группы G играют ее подгруппы $G(k)$, $k = 1, 2, \dots$, определяемые так:

$$G(k) = \{t = \{t_j\}_{j=0}^\infty \in G : t_j = 0 \text{ для всех } j = 0, \dots, k-1\}.$$

Мы используем также следующие понятия (см., например, [12]–[16]).

Система Уолша $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty$ в нумерации Пэли (система Уолша–Пэли) на G определяется так:

$$\omega_n(t) = \prod_{j=0}^\infty (-1)^{t_j \varepsilon_j^{(n)}}, \quad \text{где } t = \{t_j\}_{j=0}^\infty \in G, \quad n = \sum_{j=0}^\infty 2^j \varepsilon_j^{(n)}, \quad \varepsilon_j^{(n)} \in \{0, 1\}.$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ множество G^m является топологической абелевой группой. Пусть $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^m) \in G^m$ и $\mathbf{z} = (z^1, \dots, z^m) \in G^m$, тогда сумма $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}$ определяется равенством

$$\mathbf{y} \oplus \mathbf{z} = (y^1 \oplus z^1, \dots, y^m \oplus z^m) \in G^m.$$

Под мерой μ на группе G^m понимается нормированная мера Хаара (см. [17; приложение 1]), которая определена по крайней мере на всех борелевских подмножествах группы G^m . Мера μ является инвариантной относительно сдвигов.

Если $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, то m -мерные функции Уолша $\omega_{\mathbf{n}}$ на G^m определяются формулой

$$\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \omega_{n_1}(t^1) \cdots \omega_{n_m}(t^m), \quad \mathbf{t} = (t^1, \dots, t^m) \in G^m. \quad (2.1)$$

Функции $\omega_{\mathbf{n}}$ образуют систему характеров на G^m , в частности,

$$\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{y})\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}) \quad \text{для всех } \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^m, \quad \mathbf{y}, \mathbf{z} \in G^m. \quad (2.2)$$

Символом $\mathbf{1}$ обозначим вектор $(1, \dots, 1)$, а $\mathbf{0}$ – вектор $(0, \dots, 0)$. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{Z}_+^m$. Скажем, что $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, если $a_q \leq b_q$ для всех $q = 1, \dots, m$. Положим

$$\sum_{\mathbf{j}=\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} d_{\mathbf{j}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1=a_1}^{b_1} \cdots \sum_{j_m=a_m}^{b_m} d_{j_1, \dots, j_m}, \quad \mathbf{j} = (j_1, \dots, j_m) \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Пусть $\mathbf{t} \in G^m$. Ряд (1.2) сходится по прямоугольникам к значению A в точке $\mathbf{t}$, если

$$\lim_{n_1=0}^{N_1} \cdots \lim_{n_m=0}^{N_m} b_{n_1, \dots, n_m} \omega_{n_1, \dots, n_m}(\mathbf{t}) = A \quad \text{при } \|(N_1, \dots, N_m)\| \rightarrow \infty.$$

Ряд (1.2) сходится повторно к значению A в точке $\mathbf{t}$, если

$$\lim_{N_1 \rightarrow \infty} \left(\lim_{N_2 \rightarrow \infty} \left(\cdots \left(\lim_{N_m \rightarrow \infty} \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \cdots \sum_{n_m=0}^{N_m} b_{n_1, \dots, n_m} \omega_{n_1, \dots, n_m}(\mathbf{t}) \right) \cdots \right) \right) = A.$$

Пусть

$$S_N(\mathbf{t}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{n_m=0}^{N-1} b_{n_1, \dots, n_m} \omega_{n_1, \dots, n_m}(\mathbf{t})$$

– N -я кубическая (квадратная в случае $m = 2$) сумма ряда (1.2) в точке $\mathbf{t}$. Ряд (1.2) сходится по кубам (по квадратам в случае $m = 2$) к значению A в точке $\mathbf{t}$, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\mathbf{t}) = A.$$

§ 3. Некоторые вспомогательные утверждения

Из определений функций Уолша–Пэли сразу вытекают следующие два результата.

ЛЕММА 1. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$. Тогда для всех $t \in G$

$$\omega_n\left(t \oplus \left(\frac{1}{2^{k+1}} + 0\right)\right) = -\omega_n(t) \quad \text{при } 2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1, \quad (3.1)$$

$$\omega_n\left(t \oplus \left(\frac{1}{2^{k+1}} + 0\right)\right) = \omega_n(t) \quad \text{при } n \leq 2^k - 1. \quad (3.2)$$

ЛЕММА 2. Пусть $k, p \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\omega_{2^k}\left(\frac{p}{2^k} + 0\right) = 1. \quad (3.3)$$

Нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 3. Если $j, s, k, n \in \mathbb{Z}_+$, $k \geq s$, $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$, то

$$\omega_n\left(\frac{j}{2^s} + 0\right) = \omega_{n-2^k}\left(\frac{j}{2^s} + 0\right). \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений функций Уолша–Пэли вытекает, что если j, s, k и n удовлетворяют условию леммы, то

$$\omega_n\left(\frac{j}{2^s} + 0\right) = \omega_{2^k}\left(\frac{j}{2^s} + 0\right) \omega_{n-2^k}\left(\frac{j}{2^s} + 0\right),$$

откуда с учетом (3.3) получается формула (3.4). Лемма доказана.

Пусть $D_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \omega_n(t)$ – N -е ядро Дирихле для системы Уолша–Пэли. Известно (см., например, [14; формулы (1.4.11) и (1.4.13)]), что

$$D_N(0) = N \quad \text{для всех } N \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

$$D_N(t) = D_{2^k}(t) + \omega_{2^k}(t) D_M(t), \quad N = 2^k + M, \quad 1 \leq M \leq 2^k, \quad (3.6)$$

$$D_{2^k}(t) = \begin{cases} 2^k, & \text{если } t \in G(k), \\ 0, & \text{если } t \in G \setminus G(k). \end{cases} \quad (3.7)$$

Следующий результат есть лемма 2.2 из работы [18].

ЛЕММА 4. Если $s \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq s$, то

$$D_{2^k+2^s}(t) - D_{2^k}(t) = \begin{cases} 2^s \omega_{2^k}(t), & \text{если } t \in G(s), \\ 0, & \text{если } t \in G \setminus G(s). \end{cases} \quad (3.8)$$

ЛЕММА 5. Пусть натуральное N представлено в следующем виде:

$$N = 2^{k_1} + \dots + 2^{k_r}, \quad k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}, \quad k_1 < \dots < k_r.$$

Тогда $D_N(t) = 0$ для всех $t \in G \setminus G(k_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем и зафиксируем произвольное $t \in G \setminus G(k_1)$. Применяя достаточное количество раз формулу (3.6), получим

$$D_N(t) = D_{2^{k_r}}(t) + \omega_{2^{k_r}}(t)(\dots + \omega_{2^{k_3}}(t)(D_{2^{k_2}}(t) + \omega_{2^{k_2}}(t)D_{2^{k_1}}(t))). \quad (3.9)$$

Из (3.7) вытекает, что $D_{2^{k_s}}(t) = 0$ для всех $s = 1, \dots, r$. Значит, правая часть формулы (3.9) равна нулю. Поэтому $D_N(t) = 0$, что доказывает лемму.

ЛЕММА 6. Пусть $l, p \in \mathbb{N}$. Тогда $D_{p2^l}(t) = 0$ для всех $t \in G \setminus G(l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$p = 2^{k_1} + \dots + 2^{k_r}, \quad k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}_+, \quad k_1 < \dots < k_r.$$

Тогда

$$p2^l = 2^{k_1+l} + \dots + 2^{k_r+l}, \quad k_1+l, \dots, k_r+l \in \mathbb{N}, \quad k_1+l < \dots < k_r+l.$$

Теперь утверждение леммы сразу вытекает из утверждения леммы 5.

Ниже символ Σ_m^0 будет обозначать множество векторов $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ таких, что $\sigma_q \in \{0, 1\}$ для всех $q = 1, \dots, m$ и $\sigma_1 + \dots + \sigma_m = 0 \pmod{2}$. Следующий результат является уточнением леммы 2.4 из работы [18].

ЛЕММА 7. Пусть для некоторого $s \in \mathbb{Z}_+$ задано борелевское множество $E \subset G^m$, мера которого удовлетворяет неравенству (1.6). Тогда для всех натуральных k существует точка $t_k \in E$ такая, что

$$t_k \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \oplus \left(\frac{\mathbf{j}}{2^s} + \mathbf{0} \right) \in E \quad \text{для всех } \sigma \in \Sigma_m^0, \quad \mathbf{j} \in \{0, \dots, 2^s - 1\}^m. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$. Для всех $\sigma \in \Sigma_m^0$ и $\mathbf{j} \in \{0, \dots, 2^s - 1\}^m$ рассмотрим множества

$$E_{\sigma, \mathbf{j}} = E \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \oplus \left(\frac{\mathbf{j}}{2^s} + \mathbf{0} \right). \quad (3.11)$$

В силу инвариантности меры Хаара относительно сдвига, а также формулы (1.6) имеем

$$\mu(E_{\sigma, \mathbf{j}}) > 1 - \frac{1}{2^{m-1+ms}} \quad \text{для всех } \sigma \in \Sigma_m^0, \quad \mathbf{j} \in \{0, \dots, 2^s - 1\}^m. \quad (3.12)$$

Рассмотрим множество

$$L = \bigcap_{\substack{\sigma \in \Sigma_m^0 \\ \mathbf{j} \in \{0, \dots, 2^s - 1\}^m}} E_{\sigma, \mathbf{j}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu(L) &= \mu(G^m) - \mu(G^m \setminus L) \\ &= 1 - \mu\left(\bigcup_{\substack{\sigma \in \Sigma_m^0 \\ \mathbf{j} \in \{0, \dots, 2^s - 1\}^m}} (G^m \setminus E_{\sigma, \mathbf{j}})\right) \stackrel{(3.12)}{>} 1 - 2^{m-1} 2^{ms} \frac{1}{2^{m-1+ms}} = 0, \end{aligned}$$

откуда $\mu(L) > 0$ и $L \neq \emptyset$. Выберем произвольную точку $\mathbf{t}_k \in L$. Тогда $\mathbf{t}_k \in E_{\sigma, \mathbf{j}}$ для всех $\sigma \in \Sigma_m^0$ и $\mathbf{j} \in \{0, \dots, 2^s - 1\}^m$. Отсюда получаем с учетом (3.11), что для всех $\sigma \in \Sigma_m^0$ и $\mathbf{j} \in \{0, \dots, 2^s - 1\}^m$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_k \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0}\right) \oplus \left(\frac{\mathbf{j}}{2^s} + \mathbf{0}\right) &\in E_{\sigma, \mathbf{j}} \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0}\right) \oplus \left(\frac{\mathbf{j}}{2^s} + \mathbf{0}\right) \\ &= E \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0}\right) \oplus \left(\frac{\mathbf{j}}{2^s} + \mathbf{0}\right) \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0}\right) \oplus \left(\frac{\mathbf{j}}{2^s} + \mathbf{0}\right) = E, \end{aligned}$$

что доказывает формулу (3.10). Лемма доказана.

Следующий результат есть лемма 2.3 из работы [18].

ЛЕММА 8. Пусть $k, M \in \mathbb{Z}_+$, причем $2^k \leq M \leq 2^{k+1} - 1$. Тогда для кубических частичных сумм S_N ряда (1.2) и для всех $\mathbf{t} \in G^m$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \Sigma_m^0} \left[S_{M+1} \left(\mathbf{t} \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right) - S_{2^k} \left(\mathbf{t} \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right) \right] \\ = 2^{m-1} \sum_{\mathbf{n}=2^k \cdot \mathbf{1}}^{M \cdot \mathbf{1}} c_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

§ 4. Доказательство основных теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Выберем и зафиксируем произвольную последовательность $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ действительных чисел. Построим двойные последовательности $\{b_{n_1, n_2}^i\}_{n_1, n_2=0}^\infty$, $i = 1, \dots, 4$, следующим образом. Пусть

$$b_{n_1, n_2}^1 = \begin{cases} d_k, & \text{если } 2^k \leq n_2 \leq 2^{k+1} - 1, \ 0 \leq n_1 \leq 2^{k-1} - 1, \ k \in \mathbb{N}, \\ -d_k, & \text{если } 2^k \leq n_2 \leq 2^{k+1} - 1, \ 2^{k-1} \leq n_1 \leq 2^k - 1, \ k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$b_{n_1, n_2}^2 = b_{n_2, n_1}^1 \quad \text{для всех } n_1, n_2 \in (\mathbb{Z}_+)^2. \quad (4.2)$$

Далее, выберем стремящуюся к ∞ последовательность $\{m_k\}$ натуральных чисел такую, что

$$2^{m_k} < \max\{C_k, \beta_1(2^k - 1)\} \quad (4.3)$$

для всех k , больших некоторого k_1 . Тогда

$$b_{n_1, n_2}^3 = \begin{cases} d_k, & \text{если } n_2 = 2^k + 2^{m_k} - 1, \ 2^k \leq n_1 \leq 2^k + 2^{m_k-1} - 1, \\ & k \in \mathbb{N}, \ k \geq k_1 + 1, \\ -d_k, & \text{если } n_2 = 2^k + 2^{m_k} - 1, \ 2^k + 2^{m_k-1} \leq n_1 \leq 2^k + 2^{m_k} - 1, \\ & k \in \mathbb{N}, \ k \geq k_1 + 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.4)$$

Далее, возьмем произвольное число $p/2^u$, $p, u \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\beta_1 < \frac{p}{2^u} < \beta_2. \quad (4.5)$$

Положим

$$b_{n_1, n_2}^4 = \begin{cases} d_k, & \text{если } n_2 = 2^k + p2^{k-u} - 1, \ 2^k \leq n_1 \leq 2^k + p2^{k-u-1} - 1, \\ & k \in \mathbb{N}, \ k \geq u + 2, \\ -d_k, & \text{если } n_2 = 2^k + p2^{k-u} - 1, \\ & 2^k + p2^{k-u-1} \leq n_1 \leq 2^k + p2^{k-u} - 1, \ k \in \mathbb{N}, \ k \geq u + 2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.6)$$

Рассмотрим двойные ряды Уолша

$$(S_i) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} b_{n_1, n_2}^i \omega_{n_1, n_2}(t^1, t^2), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (4.7)$$

Положим

$$b_{n_1, n_2} = \sum_{i=1}^4 b_{n_1, n_2}^i, \quad (S) = \sum_{i=1}^4 (S_i) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} b_{n_1, n_2} \omega_{n_1, n_2}(t^1, t^2). \quad (4.8)$$

Покажем, что ряд (S) удовлетворяет всем условиям теоремы. Сначала докажем, что ряд (S) всюду на G^2 сходится по квадратам к конечной сумме. Для этого достаточно показать, что каждый из рядов (S_i) , $i = 1, \dots, 4$, всюду на G^2 сходится по квадратам к конечной сумме.

Пусть S_N^1 обозначает N -ю квадратную сумму ряда (S_1) , где $N = 2^k + i$, $k = 2, 3, \dots$, $i = 0, \dots, 2^k - 1$. Выберем и зафиксируем произвольную точку $(t^1, t^2) \in G^2$. Тогда с учетом (4.1) имеем

$$\begin{aligned} S_N^1(t^1, t^2) &= \sum_{j=2}^k \sum_{n_2=2^{j-1}}^{2^j-1} \left(\sum_{n_1=0}^{2^{j-2}-1} d_{j-1} \omega_{n_1, n_2}(t^1, t^2) - \sum_{n_1=2^{j-2}}^{2^{j-1}-1} d_{j-1} \omega_{n_1, n_2}(t^1, t^2) \right) \\ &\quad + \sum_{n_2=2^k}^{N-1} \left(\sum_{n_1=0}^{2^{k-1}-1} d_k \omega_{n_1, n_2}(t^1, t^2) - \sum_{n_1=2^{k-1}}^{2^k-1} d_k \omega_{n_1, n_2}(t^1, t^2) \right) \\ &= \sum_{j=2}^k \sum_{n_2=2^{j-1}}^{2^j-1} d_{j-1} \omega_{n_2}(t^2) \left(\sum_{n_1=0}^{2^{j-2}-1} \omega_{n_1}(t^1) - \sum_{n_1=2^{j-2}}^{2^{j-1}-1} \omega_{n_1}(t^1) \right) \\ &\quad + \sum_{n_2=2^k}^{N-1} d_k \omega_{n_2}(t^2) \left(\sum_{n_1=0}^{2^{k-1}-1} \omega_{n_1}(t^1) - \sum_{n_1=2^{k-1}}^{2^k-1} \omega_{n_1}(t^1) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n_2=2^k}^{N-1} d_k \omega_{n_2}(t^2) \left(\sum_{n_1=0}^{2^{k-1}-1} \omega_{n_1}(t^1) - \sum_{n_1=2^{k-1}}^{2^k-1} \omega_{n_1}(t^1) \right) \\
& = \sum_{j=2}^k \sum_{n_2=2^{j-1}}^{2^j-1} d_{j-1} \omega_{n_2}(t^2) (D_{2^{j-2}}(t^1) - (D_{2^{j-1}}(t^1) - D_{2^{j-2}}(t^1))) \\
& \quad + \sum_{n_2=2^k}^{N-1} d_k \omega_{n_2}(t^2) (D_{2^{k-1}}(t^1) - (D_{2^k}(t^1) - D_{2^{k-1}}(t^1))) \\
& = \sum_{j=2}^k \sum_{n_2=2^{j-1}}^{2^j-1} d_{j-1} \omega_{n_2}(t^2) (2D_{2^{j-2}}(t^1) - D_{2^{j-1}}(t^1)) \\
& \quad + \sum_{n_2=2^k}^{N-1} d_k \omega_{n_2}(t^2) (2D_{2^{k-1}}(t^1) - D_{2^k}(t^1)),
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
S_N^1(t^1, t^2) &= \sum_{j=2}^k \sum_{n_2=2^{j-1}}^{2^j-1} d_{j-1} \omega_{n_2}(t^2) (2D_{2^{j-2}}(t^1) - D_{2^{j-1}}(t^1)) \\
& \quad + \sum_{n_2=2^k}^{N-1} d_k \omega_{n_2}(t^2) (2D_{2^{k-1}}(t^1) - D_{2^k}(t^1)). \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Рассмотрим два случая. В первом из них $t^1 = 0$. Тогда согласно (3.5)

$$\begin{aligned}
2D_{2^{j-2}}(t^1) - D_{2^{j-1}}(t^1) &= 2 \cdot 2^{j-2} - 2^{j-1} = 0, \\
2D_{2^{k-1}}(t^1) - D_{2^k}(t^1) &= 2 \cdot 2^{k-1} - 2^k = 0,
\end{aligned}$$

откуда с учетом (4.9) получаем $S_N^1(t^1, t^2) = 0$. Во втором случае $t^1 \neq 0$. Тогда $t^1 \in G \setminus G(s)$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем, учитывая (3.7), что $D_{2^i}(t^1) = 0$ при $i \geq s$. Поэтому разности в скобках в правой части формулы (4.9) равны нулю соответственно при $j - 2 \geq s$ и $k - 1 \geq s$. Значит, при $N \geq 2^{s+2}$

$$S_N^1(t^1, t^2) = \sum_{j=2}^{s+1} \sum_{n_2=2^{j-1}}^{2^j-1} d_{j-1} \omega_{n_2}(t^2) (2D_{2^{j-2}}(t^1) - D_{2^{j-1}}(t^1)). \tag{4.10}$$

Правая часть формулы (4.10) не зависит от $N \geq 2^{s+2}$ и является (конечной) квадратной суммой ряда (S_1) в точке (t^1, t^2) . Таким образом, ряд (S_1) всюду на G^2 сходится по квадратам к конечной сумме.

Рассмотрим $S_N^2 - N$ -ю квадратную сумму ряда (S_2) . Из формулы (4.2) вытекает, что $S_N^2(t^1, t^2) = S_N^1(t^2, t^1)$ для всех $N \in \mathbb{N}$, $(t^1, t^2) \in G^2$. Поэтому с учетом того, что ряд (S_1) всюду на G^2 сходится по квадратам к конечной сумме, ряд (S_2) также сходится по квадратам к конечной сумме всюду на G^2 .

Пусть S_N^3 обозначает N -ю квадратную сумму ряда (S_3) , $2^k + 2^{m_k} + 1 \leq N \leq 2^{k+1} + 2^{m_{k+1}}$, $k \geq k_1 + 1$. Выберем и зафиксируем произвольную точку

$(t^1, t^2) \in G^2$. Тогда

$$\begin{aligned}
 S_N^3(t^1, t^2) &\stackrel{(4.4)}{=} \sum_{j=k_1+1}^k \left(\sum_{n_1=2^j}^{2^j+2^{m_j}-1} d_j \omega_{n_1, 2^j+2^{m_j}}(t^1, t^2) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{n_1=2^j+2^{m_j}-1}^{2^j+2^{m_j}-1} d_j \omega_{n_1, 2^j+2^{m_j}}(t^1, t^2) \right) \\
 &= \sum_{j=k_1+1}^k d_j \omega_{2^j+2^{m_j}}(t^2) ((D_{2^j+2^{m_j}-1}(t^1) - D_{2^j}(t^1)) \\
 &\quad - (D_{2^j+2^{m_j}}(t^1) - D_{2^j+2^{m_j}-1}(t^1))) \\
 &= \sum_{j=k_1+1}^k d_j \omega_{2^j+2^{m_j}}(t^2) (2D_{2^j+2^{m_j}-1}(t^1) - D_{2^j}(t^1) - D_{2^j+2^{m_j}}(t^1)),
 \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 S_N^3(t^1, t^2) \\
 = \sum_{j=k_1+1}^k d_j \omega_{2^j+2^{m_j}}(t^2) (2D_{2^j+2^{m_j}-1}(t^1) - D_{2^j}(t^1) - D_{2^j+2^{m_j}}(t^1)). \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая. В первом из них $t^1 = 0$. Тогда согласно (3.5)

$$2D_{2^j+2^{m_j}-1}(t^1) - D_{2^j}(t^1) - D_{2^j+2^{m_j}}(t^1) = 2(2^j + 2^{m_j-1}) - 2^j - (2^j + 2^{m_j}) = 0,$$

откуда с учетом (4.11) получаем $S_N^3(t^1, t^2) = 0$. Во втором случае $t^1 \neq 0$. Тогда $t^1 \in G \setminus G(s)$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Из (3.7) и (3.8) вытекает, что выражение в скобках в правой части формулы (4.11) равно нулю при $m_j - 1 \geq s$. Так как $m_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, то

$$S_N^3(t^1, t^2) = \sum_{j=k_1+1}^S d_j \omega_{2^j+2^{m_j}}(t^2) (2D_{2^j+2^{m_j}-1}(t^1) - D_{2^j}(t^1) - D_{2^j+2^{m_j}}(t^1)),$$

где $S = \min\{j : m_j - 1 \geq s\}$. Правая часть последней формулы не зависит от N и является (конечной) квадратной суммой ряда (S_3) в точке (t^1, t^2) . Таким образом, ряд (S_3) всюду на G^2 сходится по квадратам к конечной сумме.

Рассмотрим S_N^4 — N -ю квадратную сумму ряда (S_4) . Пусть

$$2^k + p2^{k-u} - 1 \leq N \leq 2^{k+1} + p2^{k+1-u} - 2$$

для некоторого $k \geq u + 2$. Выберем и зафиксируем произвольную точку $(t^1, t^2) \in G^2$. Тогда

$$\begin{aligned}
 S_N^4(t^1, t^2) &\stackrel{(4.6)}{=} \sum_{j=u+2}^k \left(\sum_{n_1=2^j}^{2^j+p2^{j-u}-1} d_j \omega_{n_1, 2^j+p2^{j-u}-1}(t^1, t^2) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{n_1=2^j+p2^{j-u}-1}^{2^j+p2^{j-u}-1} d_j \omega_{n_1, 2^j+p2^{j-u}-1}(t^1, t^2) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=u+2}^k d_j \omega_{2j+p2^{j-u}-1}(t^2) ((D_{2j+p2^{j-u}-1}(t^1) - D_{2j}(t^1)) \\
&\quad - (D_{2j+p2^{j-u}}(t^1) - D_{2j+p2^{j-u-1}}(t^1))) \\
&= \sum_{j=u+2}^k d_j \omega_{2j+p2^{j-u}-1}(t^2) (2D_{2j+p2^{j-u}-1}(t^1) - D_{2j}(t^1) - D_{2j+p2^{j-u}}(t^1)),
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
S_N^4(t^1, t^2) &= \sum_{j=u+2}^k d_j \omega_{2j+p2^{j-u}-1}(t^2) \\
&\quad \times (2D_{2j+p2^{j-u}-1}(t^1) - D_{2j}(t^1) - D_{2j+p2^{j-u}}(t^1)). \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Рассмотрим два случая. В первом из них $t^1 = 0$. Тогда согласно (3.5)

$$2D_{2j+p2^{j-u}-1}(t^1) - D_{2j}(t^1) - D_{2j+p2^{j-u}}(t^1) = 2(2^j + p2^{j-u-1}) - 2^j - (2^j + p2^{j-u}) = 0,$$

откуда с учетом (4.12) получаем $S_N^4(t^1, t^2) = 0$. Во втором случае $t^1 \neq 0$. Тогда $t^1 \in G \setminus G(s)$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Из (3.6), (3.7), а также из леммы 6 вытекает, что выражение в скобках в правой части формулы (4.12) равно нулю при $j \geq s + u + 1$. Отсюда получаем, с учетом (4.12), что

$$S_N^4(t^1, t^2) = \sum_{j=u+2}^{s+u} d_j \omega_{2j+p2^{j-u}-1}(t^2) (2D_{2j+p2^{j-u}-1}(t^1) - D_{2j}(t^1) - D_{2j+p2^{j-u}}(t^1)).$$

Правая часть последней формулы не зависит от N и является (конечной) квадратной суммой ряда (S_4) в точке (t^1, t^2) . Таким образом, ряд (S_4) всюду на G^2 сходится по квадратам к конечной сумме.

Итак, каждый из рядов (S_i) , $i = 1, \dots, 4$, а с ними и ряд (S) всюду на G^2 сходятся по квадратам к конечной сумме. Покажем, что если последовательность $\{d_k\}$ изначально выбрать так, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|d_k|}{E_k} = +\infty, \quad E_k = \sup_{0 \leq n_1, n_2 \leq 2^{k+1}-1} |B_{n_1, n_2}|, \quad (4.13)$$

то ряд (S) удовлетворяет условиям (1.3)–(1.5).

Пусть $[a]$ – целая часть числа a . Предположим, что $(n_1, n_2) \notin T$. Тогда из (4.1)–(4.6) вытекает, что b_{n_1, n_2} совпадает либо с b_{n_1, n_2}^1 , либо с b_{n_1, n_2}^2 . В любом случае при $\max\{n_1, n_2\} \geq 2$

$$b_{n_1, n_2} = d_{k(n_1, n_2)}, \quad \text{где } k(n_1, n_2) = [\log_2 \max\{n_1, n_2\}]. \quad (4.14)$$

Из (4.13) и (4.14) следует, что

$$\lim_{\substack{\| (n_1, n_2) \| \rightarrow \infty \\ (n_1, n_2) \notin T}} \frac{|b_{n_1, n_2}|}{|B_{n_1, n_2}|} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|d_k|}{E_k} = +\infty,$$

откуда вытекает выполнение для ряда (S) условия (1.3).

Далее, из (4.1)–(4.6) видно, что

$$b_{2^k, 2^k+2^{m_k}-1} = d_k \quad (4.15)$$

для всех $k \geq k_1 + 1$. Из (4.13) и (4.15) следует, что

$$\overline{\lim}_{\substack{2^k \leq n_1, n_2 \leq 2^k + C_k \\ k \rightarrow \infty}} \frac{|b_{n_1, n_2}|}{|B_{n_1, n_2}|} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|d_k|}{E_k} = +\infty,$$

откуда вытекает выполнение для ряда (S) условия (1.4).

Наконец, из (4.1)–(4.6) видно, что

$$b_{2^k+p2^{k-u}-1, 2^k+p2^{k-u}-1} = d_k \quad (4.16)$$

для всех $k \geq u + 2$. Заметим, что в силу формулы (4.3) при достаточно больших k имеет место двойное неравенство

$$2^k(1 + \beta_1) \leq 2^k + p2^{k-u} - 1 \leq 2^k(1 + \beta_2). \quad (4.17)$$

Из (4.13), (4.16) и (4.17) следует, что

$$\overline{\lim}_{\substack{2^k(1+\beta_1) \leq n_1, n_2 \leq 2^k(1+\beta_2) \\ k \rightarrow \infty}} \frac{|b_{n_1, n_2}|}{|B_{n_1, n_2}|} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|d_k|}{E_k} = +\infty,$$

т. е. для ряда (S) выполнено условие (1.5).

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. По теореме Егорова существует борелевское множество $E \subset E_1$ (мера которого удовлетворяет неравенству (1.6)) такое, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |S_{2^k+2^s}(\mathbf{t}) - S_{2^k}(\mathbf{t})| \rightarrow 0 \quad \text{равномерно по } \mathbf{t} \in E. \quad (4.18)$$

Возьмем и зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из (4.18) следует, что найдется натуральное k_1 такое, что

$$|S_{2^k+2^s}(\mathbf{t}) - S_{2^k}(\mathbf{t})| < \varepsilon \quad \text{для всех } k \geq k_1, \mathbf{t} \in E. \quad (4.19)$$

Выберем и зафиксируем произвольное $k \geq \max\{s, k_1\}$. Из леммы 7 следует, что для всех натуральных k существует точка $\mathbf{t}_k \in E$, для которой выполнено условие (3.10).

Для каждого $\mathbf{j} \in \{0, \dots, 2^s - 1\}^m$ рассмотрим выражение

$$R_{\mathbf{j}} = \sum_{\sigma \in \Sigma_m^0} \left[S_{2^k+2^s} \left(\mathbf{t}_k \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \oplus \left(\frac{\mathbf{j}}{2^s} + \mathbf{0} \right) \right) - S_{2^k} \left(\mathbf{t}_k \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \oplus \left(\frac{\mathbf{j}}{2^s} + \mathbf{0} \right) \right) \right].$$

Из (3.10) и (4.19) вытекает, что

$$|R_{\mathbf{j}}| < 2^{m-1} \varepsilon \quad \text{для всех } \mathbf{j} \in \{0, \dots, 2^s - 1\}^m. \quad (4.20)$$

Из (3.13) с учетом (2.2) получается следующая формула:

$$R_{\mathbf{j}} = 2^{m-1} \sum_{\mathbf{n}=2^{k \cdot 1}}^{(2^k+2^s-1) \cdot 1} b_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k) \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{j}}{2^s} + \mathbf{0} \right). \quad (4.21)$$

Из (3.4) и (4.21) следует, что

$$R_{\mathbf{j}} = 2^{m-1} \sum_{\mathbf{n}=0}^{(2^s-1) \cdot \mathbf{1}} b_{2^k \cdot \mathbf{1} + \mathbf{n}} \omega_{2^k \cdot \mathbf{1} + \mathbf{n}}(\mathbf{t}_k) \omega_{\mathbf{n}}\left(\frac{\mathbf{j}}{2^s} + \mathbf{0}\right). \quad (4.22)$$

Пусть $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_m)$, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$, $\mathbf{t}_k = (t_k^1, \dots, t_k^m)$. Индукцией по $i = m, m-1, \dots, 1$ покажем, что при любом таком i и при каждом $j_1, \dots, j_i, n_{i+1}, \dots, n_m \in \{0, \dots, 2^s - 1\}$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{n_1, \dots, n_i=0}^{2^s-1} b_{2^k+n_1, \dots, 2^k+n_m} \prod_{q=1}^i \left(\omega_{2^k+n_q}(t_k^q) \omega_{n_q} \left(\frac{j_q}{2^s} + 0 \right) \right) \right| < \varepsilon. \quad (4.23)$$

При $i = m$ формула (4.23) вытекает из (4.20) и (4.22). Предположив, что эта формула верна при всех $i = i_0 + 1, \dots, m$, докажем ее при $i = i_0$. Будем писать i вместо i_0 . По предположению индукции при всех $j_1, \dots, j_{i+1}, n_{i+2}, \dots, n_m \in \{0, \dots, 2^s - 1\}$ справедливо неравенство

$$|R_{j_1, \dots, j_{i+1}}| < \varepsilon, \quad (4.24)$$

где

$$R_{j_1, \dots, j_{i+1}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n_1, \dots, n_{i+1}=0}^{2^s-1} b_{2^k+n_1, \dots, 2^k+n_m} \prod_{q=1}^{i+1} \left(\omega_{2^k+n_q}(t_k^q) \omega_{n_q} \left(\frac{j_q}{2^s} + 0 \right) \right). \quad (4.25)$$

Запишем формулу (4.25) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{n_{i+1}=0}^{2^s-1} \omega_{n_{i+1}} \left(\frac{j_{i+1}}{2^s} + 0 \right) \omega_{2^k+n_{i+1}}(t_k^{i+1}) \sum_{n_1, \dots, n_i=0}^{2^s-1} b_{2^k+n_1, \dots, 2^k+n_m} \\ & \times \prod_{q=1}^i \left(\omega_{2^k+n_q}(t_k^q) \omega_{n_q} \left(\frac{j_q}{2^s} + 0 \right) \right) = R_{j_1, \dots, j_{i+1}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Выберем и зафиксируем произвольные $j_1, \dots, j_i, n_{i+2}, \dots, n_m \in \{0, \dots, 2^s - 1\}$ и рассмотрим матрицы $A = (a_{jl})$, $X = (x_{l1})$ и $C = (c_{j1})$ размеров $2^s \times 2^s$, $2^s \times 1$ и $2^s \times 1$ соответственно, полагая при $j, l = 0, \dots, 2^s - 1$

$$\begin{aligned} a_{jl} &= \omega_l \left(\frac{j}{2^s} + 0 \right), \quad c_{j1} = R_{j_1, \dots, j_i, j}, \\ x_{l1} &= \omega_{2^k+l}(t_k^{i+1}) \sum_{n_1, \dots, n_i=0}^{2^s-1} b_{2^k+n_1, \dots, 2^k+n_m} \prod_{q=1}^i \omega_{2^k+n_q}(t_k^q) \omega_{n_q} \left(\frac{j_q}{2^s} + 0 \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Формула (4.26) записывается в матричном виде так:

$$AX = C. \quad (4.28)$$

Хорошо известно (см., например, [14; гл. 1]), что матрица A обратима и

$$A^{-1} = \frac{1}{2^s} A. \quad (4.29)$$

Из (4.28) и (4.29) вытекает, что

$$X = \frac{1}{2^s} AC. \quad (4.30)$$

Используя (4.30), получаем, что при любом $l = 0, \dots, 2^s - 1$

$$|x_{l1}| \leq \frac{1}{2^s} \sum_{j=0}^{2^s-1} |a_{lj}| |c_{j1}| \stackrel{(4.24), (4.27)}{<} \frac{1}{2^s} \sum_{j=0}^{2^s-1} 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon. \quad (4.31)$$

Из (4.31) с учетом равенства $|\omega_{2^k+l}(t_k^{i+1})| = 1$ получаем формулу (4.23), что завершает индукционный переход.

При $i = 1$ формула (4.23) приобретает следующий вид:

$$|R_j| < \varepsilon, \quad R_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n_1=0}^{2^s-1} b_{2^k+n_1, 2^k+n_2, \dots, 2^k+n_m} \omega_{2^k+n_1}(t_k^1) \omega_{n_1} \left(\frac{j}{2^s} + 0 \right).$$

Здесь $j, n_2, \dots, n_m \in \{0, \dots, 2^s - 1\}$ могут быть выбраны произвольно. Определяя матрицы $A = (a_{jl})$, $X = (x_{l1})$ и $C = (c_{j1})$ размеров $2^s \times 2^s$, $2^s \times 1$ и $2^s \times 1$ соответственно с помощью формул

$$a_{jl} = \omega_l \left(\frac{j}{2^s} + 0 \right), \quad c_{j1} = R_j, \quad x_{l1} = b_{2^k+l, 2^k+n_2, \dots, 2^k+n_m} \omega_{2^k+l}(t_k^1),$$

$j, l = 0, \dots, 2^s - 1$, и повторяя приведенные выше рассуждения (см. вывод формул (4.28)–(4.31)), получим, что $|x_{l1}| < \varepsilon$ при всех $l = 0, \dots, 2^s - 1$. Отсюда с учетом равенства $|\omega_{2^k+l}(t_k^1)| = 1$ получаем формулу

$$|b_{2^k+l, 2^k+n_2, \dots, 2^k+n_m}| < \varepsilon. \quad (4.32)$$

Так как $l, n_2, \dots, n_m \in \{0, \dots, 2^s - 1\}$ выбраны произвольно, формула (4.32) доказывает теорему 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из сходимости по кубам ряда (S) сразу получается равенство (1.7). Поэтому утверждение теоремы 3 вытекает непосредственно из утверждения теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. В работе [18] содержалась теорема 1, где было доказано, что если ряд (S) вида (1.2) сходится по кубам на множестве положительной меры, то для коэффициентов b_n ряда (S) справедливо равенство (1.10). При доказательстве той теоремы вместо сходимости по кубам использовалось лишь существование конечных пределов из формулы (1.9). Поэтому фактически доказательство теоремы 1 из [18] является доказательством теоремы 4.

Список литературы

- [1] Н.К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961; англ. пер.: N.K. Bary, *A treatise on trigonometric series*, Macmillan, New York, 1964.
- [2] J.M. Ash, G.V. Welland, "Convergence, uniqueness, and summability of multiple trigonometric series", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **163**:2 (1972), 401–436.
- [3] G.E. Reves, O. Szász, "Some theorems on double trigonometric series", *Duke Math. J.*, **9**:4 (1942), 693–705.

- [4] P. J. Cohen, *Topics in the theory of uniqueness of trigonometrical series*, Thesis, University of Chicago, Chicago, IL, 1958.
- [5] J. M. Ash, G. Wang, “One and two-dimensional Cantor–Lebesgue type theorems”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349**:4 (1997), 1663–1674.
- [6] В. А. Скворцов, “О коэффициентах сходящихся кратных рядов Хаара и Уолша”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **28**:6 (1973), 77–79; англ. пер.: V. A. Skvortsov, “On the coefficients of convergent multiple Haar and Walsh series”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **28**:6 (1973), 119–121.
- [7] M. G. Plotnikov, “Recovery of the coefficients of multiple Haar and Walsh series”, *Real Anal. Exchange*, **33**:2 (2008), 291–308.
- [8] Ш. Т. Тетунашвили, “О некоторых кратных функциональных рядах и решение проблемы единственности кратных тригонометрических рядов для сходимости по Прингсхейму”, *Матем. сб.*, **182**:8 (1991), 1158–1176; англ. пер.: Sh. T. Tetunashvili, “On some multiple function series and the solution of the uniqueness problem for Pringsheim convergence of multiple trigonometric series”, *Math. USSR-Sb.*, **73**:2 (1992), 517–534.
- [9] Л. Д. Гоголадзе, “К вопросу восстановления коэффициентов сходящихся кратных функциональных рядов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:2 (2008), 83–90; англ. пер.: L. D. Gogoladze, “On the problem of reconstructing the coefficients of convergent multiple function series”, *Izv. Math.*, **72**:2 (2008), 283–290.
- [10] М. Г. Плотников, “О коэффициентах сходящихся кратных рядов Хаара”, *Изв. вузов. Матем.*, 2012, № 1, 67–71; англ. пер.: M. G. Plotnikov, “Coefficients of convergent multiple Haar series”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **56**:1 (2012), 61–65.
- [11] Н. Я. Виленкин, “Об одном классе полных ортонормальных систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **11**:4 (1947), 363–400; англ. пер.: N. Ya. Vilenkin, “On a class of complete orthonormal systems”, *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, **28** (1963), 1–35.
- [12] N. J. Fine, “On the Walsh functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65**:3 (1949), 372–414.
- [13] Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн, *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах*, ЭЛМ, Баку, 1981.
- [14] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **64**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [15] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis*, Akademiai Kiado, Budapest, 1990.
- [16] Л. В. Жижиашвили, “О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов”, *УМН*, **28**:2 (1973), 65–119; англ. пер.: L. V. Zhizhiashvili, “Some problems in the theory of simple and multiple trigonometric and orthogonal series”, *Russian Math. Surveys*, **28**:2 (1973), 65–127.
- [17] С. Сакс, *Теория интеграла*, Факториал, М., 2004; пер. с англ.: S. Saks, *Theory of the integral*, Dover Publ., New York, 1937.
- [18] М. Г. Плотников, “Квазимеры на группе G^m , множества Дирихле и проблемы единственности для кратных рядов Уолша”, *Матем. сб.*, **201**:12 (2010), 131–156; англ. пер.: M. G. Plotnikov, “Quasi-measures on the group G^m , Dirichlet sets, and uniqueness problems for multiple Walsh series”, *Sb. Math.*, **201**:12 (2010), 1837–1862.

М. Г. Плотников (M. G. Plotnikov)

Вологодская государственная молочнохозяйственная
академия им. Н. В. Верещагина
E-mail: mgplotnikov@mail.ru

Поступила в редакцию

02.03.2011 и 19.04.2012